10 Lineare Gleichungssysteme

Definition 10.1. Ein Lineares Gleichungssystem ist ein System von m Gleichungen mit n Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Form

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Mit Koeffizienten a_{ij} und rechter Seite $b_i \in \mathbb{R}$. Gesucht ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, die alle Gleichungen erfüllen. Diese Menge heißt *Lösungsmenge* des Linearen Gleichungssystems.

Die Koeffizienten eines Linearen Gleichungssystems können zu einer Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und die rechte Seite zu dem Vektor

$$b = (b_i)_{1 \le i \le m} \in \mathbb{R}^m$$

zusammengefasst werden. Damit lässt sich das Lineare Gleichungssystem in der Matrixform $A \cdot x = b$ schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 10.2. Der Rang `rank(a)` einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension des von den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ aufgespanten linearen Untterraumes.

$$\mathrm{rank(A)} := \dim \big(\mathrm{lin}(a_{\cdot 1}, \dots, a_{\cdot n})\big).$$

Beispiel. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{lin}(a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, a_{\cdot 3}) = \mathrm{lin}(a_{\cdot 1})$$

also $\mathrm{rank}(A) = 1$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{lin}(a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, a_{\cdot 3}) = \mathrm{lin}(a_{\cdot 1})$$

also $\mathrm{rank}(A) = 2$.

Bemerkung. Der Spaltenrang ist gleich dem Zeilenrang.

10.1 Elementare Umformungen und gestaffelte Form

(a) Zeilenvertauschung: vertausche zwei Zeilen k und ℓ

$$k \Leftrightarrow \ell$$

(b) Spaltenvertauschung: vertausche zwei Spalten i und j

$$x_i \Leftrightarrow x_j$$

(c) Skalierung: multipliziere Gleichung k mit beliebiger Zahl $\lambda \neq 0$

$$k \leftarrow \lambda \cdot k$$

(d) Addition: addiere Vielfaches λ von Gleichung ℓ zu Gleichung $k \neq \ell$

$$k \leftarrow k + \lambda \cdot \ell$$

Wichtig: elementare Umformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems.

Beispiel.

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z &= 1 \\ 4 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot z &= 5 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z &= 2 \end{aligned}$$

Als Matrix:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

mit elementaren Umformungen werden die ersten Koeffizienten in II und III zu 0 gemacht. Damit wird die Variable x aus II und III eliminiert.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Lineare Gleichungssystem kann nun gelöst werden und es ergibt sich als Lösung ein Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Definition 10.3. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt gestaffelte Form, falls

$$A = \begin{pmatrix} \circ & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \circ & * & \ddots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \circ & * & \ddots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \circ & * & \ddots & * & * \\ & \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei alle mit $\circ$ markierten Einträge $\neq 0$ sind und alle mit $*$ markierten Einträge beliebig sind. Dann ist $\operatorname{rank}(A)$ gleich der Anzahl der Zeilen mit $\circ$.

Bringe also Lineares Gleichungssystem mittels elementarer Umformungen in gestaffelte Form:

$$\begin{array}{cccccccc|c} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & \dots & \tilde{x}_r & \tilde{x}_{r+1} & \dots & \tilde{x}_n & b \\ \hline \circ & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \circ & * & \dots & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \circ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \circ & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \times \end{array}$$

- Alle mit $\circ$ markierten Einträge sind $\neq 0$.
- Alle mit $*$ oder $\times$ markierten Einträge sind beliebig.
- $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ ist die Umordnung der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ durch Spaltenvertauschung.

Ein Lineares Gleichungssystem in gestaffelter Form besitzt

- Keine Lösungen, wenn mindestens ein mit $\times$ markierter Eintrag $\neq 0$ ist.
- Lösungne, wenn alle mit $\times$ markierten Einträge 0 sind (oder keine Nullzeilen existieren). Die Lösungsmenge kann dann wie folgt beschrieben werden:
  (i) Die Werte für $\tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ können beliebig vorgegeben werden,
  $$\tilde{x}_{r+1} = t_1, \dots, \tilde{x}_n = t_{n-r}, t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$$
  (ii) Danach können die restlichen Werte von $\tilde{x}_r, \tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_1$ durch Auflösen des Linearen Gleichungssystems von oben nach unten bestimmt werden.

10.2 Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren

1. Bestimme ein Element $a_{ij} \neq 0$. Bringe es durch Zeilen- und Spaltenvertauschung an die erste Position der ersten Zeile.

2. Eliminiere in der ersten Spalte die Einträge $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ durch Subtraktion des $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fachen der ersten Zeile von der i-ten Zeile:

$$i \leftarrow i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot \mathrm{I}$$

Nach Abschluss des zweiten Schrittes hat das Schema zum Linearen Gleichungssystem die Form

$$\begin{array}{cccc|c} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \ldots & \tilde{x}_n & b \\ \hline \circ & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * & * \end{array}$$

Analysiere die Komplexität des Gauß-Jordan-Algorithmus im Einheitskostenmodell, d. h. jede elementare Rechenoperation zählt unabhängig von der Größe der beteiligten Zahlen als ein Schritt.
m Durchläufe der äußeren Schleife (für jede Zeile $i = 1, \ldots, m$)

- $\mathcal{O}(mn)$ Schritte, um Pivotelement $\neq 0$ zu finden.
- $\mathcal{O}(n)$ Schritte für Zeilenvertauschung.
- $\mathcal{O}(m)$ Durchläufe der inneren Schleife (für Zeilen $j = i+1, \ldots, m$).
    - $\mathcal{O}(n)$ Schritte für Subtraktion.

Gesamtaufwand: $\mathcal{O}(m^2 n)$ Schritte.