7.2 Breitensuche und Tiefensuche

Breitensuche (BFS = breadth-first-search)

- Berechneter Baum heißt BFS-Baum
- Für $v \in R$ ist v-w-Weg in $(R, F, \Psi\,|_F)$ kürzester v-w-Weg in G
- Mit Entfernungslabels für Knoten während der Breitensuche kann die Länge des kürzesten v-w-Weges für alle Knoten $v \in R$ bestimmt werden.

Tiefensuche (DFS = depth-first-search)

- Berechneter Baum heißt DFS-Baum
- Es gibt genau dann einen von r aus erreichbaren Kreis in G, wenn der Algorithmus eine Kante von $v \in Q$ zu einem Knoten $w \in Q$ findet. Entfernt man alle Knoten aus G, so gibt es einen von r aus erreichbaren Kreis mehr.

8 Sortieren

8.1 Partielle und totale Ordnungen

Definition 8.1. Eine Relation $R \subseteq S \times S$ heißt partielle Ordnung auf der Menge S, falls

(i) $(a, a) \in R$ (Reflexivität)

(ii) $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \implies a = b$ (Antisymmetrie)

(iii) $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$ (Transitivität)

für alle $a, b, c \in S$ gilt: R heißt totale (oder lineare) Ordnung, falls zusätzlich für alle $a, b \in S$ gilt:

(iv) $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Notation: Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir auch aRb

Beispiel. (1) $R_\leq := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$ ist totale Ordnung auf $\mathbb{N}$.

(2) $R_\geq := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \geq b\}$ ist totale Ordnung auf $\mathbb{R}$.

(3) $R_| := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \mid b\}$ ist partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

(4) $R := \left\{\left(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2}\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2\right\}$ ist partielle Ordnung auf $\mathbb{R}^2$.

(5) $R := \left\{\left(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2}\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)\right\}$ ist totale Ordnung auf $\mathbb{R}^2$.

(6) Sei $G = (V, E, \Psi)$ azyklischer gerichteter Graph.
$R := \{(v, w) \in V \times V \mid \exists\, v\text{-}w\text{-Weg}\}$ ist eine partielle Ordnung auf V.

Definition 8.2. Es sei $\preceq$ eine partielle Ordnung auf einer endlichen Menge S mit $|S| = n$. Eine Bijektion $\pi \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\} \to S$ heißt topologische Sortierung, falls $\pi(j) \not\preceq \pi(i)$ für $i < j$. Ist $\preceq$ eine totale Ordnung, so ist die topologische Sortierung π eindeutig. Es gilt

$$\pi(1) \preceq \pi(2) \preceq \ldots \preceq \pi(n).$$

In diesem Fall heißt π Sortierung von S.

Beispiel. Es sei $S = \{12, 7, 2, 3, 9, 6, 5\}$ und $\preceq$ die Teilbarkeitsrelation. Die topologische Sortierung ist hier:

$$5, 3, 7, 2, 6, 12, 9$$

Es sei $\preceq$ partielle Ordnung auf einer endlichen Menge S mit $|S| = n$.

Algorithm 1: Das Sortierproblem

Input: Liste/Array A der Länge n mit Einträgen in S, also
$S = \{A[0], A[1], \ldots, A[n-1]\}$
$\preceq$ gegeben als Orakel
Output: Topologische Sortierung π kodiert als Liste/Array

8.2 Selection Sort

```python
for i in range(len(arr)):
  for j in range(i, len(arr)):
    if(ar[j] <= arr[i]):
      swap(arr[i], arr[j])
return arr
```

Satz 8.3. *Sortieren durch sukzessive Auswahl ist korrekt und hat Laufzeitfunktion in* $\Theta(n^2)$.