2.3 Darstellung ganzer Zahlen – Horner-Schema

Frage. Wie berechnet man den Wert einer in b-adischen Darstellung gegebenen Zahl möglichst effizient?

Lösung. Horner-Schema:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{\ell-1}}_{(l-1)} z_i \overbrace{\cdot}^{(l-1)} \underbrace{b^i}_{(l-2)} = z_0 + b(z_1 + b(z_2 + \dots b(z_{\ell-2} + b \cdot z_{\ell-1})))$$

Bemerkung. Zur Berechnung des Ausdrucks auf der linken Seite benötigt man

$\ell - 1$	Additionen
$2\ell - 3$	Multiplikationen

Zur Berechnung des Ausdrucks auf der rechten Seite benötigt man

$\ell - 1$	Additionen
$\ell - 1$	Multiplikationen

Codierung negativer ganzer Zahlen
Naheliegend: Darstellung mit explizitem Vorzeichen: $(0 \mathrel{\widehat{=}} +, 1 \mathrel{\widehat{=}} -)$

0	0000	−0	1000
1	0001	−1	1001
2	0010	−2	1010
3	0011	−3	1011
4	0100	−4	1100
5	0101	−5	1101
6	0110	−6	1110
7	0111	−7	1111

Nachteile:

- Null hat zwei verschiedene Darstellungen
- Addition kann nicht unmittelbar auf Addition von Binärzahlen ohne Vorzeichen zurückgeführt werden.

Binäre Komplementdarstellung

- zunächst wie oben: führendes Bit zeigt Vorzeichen $(0 \mathrel{\widehat{=}} +, 1 \mathrel{\widehat{=}} -)$item aber: negative
- aber: negative Zahlen werden komplementär dargestellt.
- $z \in \{-2^{\ell-1}, -2^{\ell-1} + 1, \dots, -1\}$ wird dargestellt als $z + 2^{\ell}$

1	0001	-1	1111
2	0010	-2	1110
3	0011	-3	1101
4	0100	-4	1100
5	0101	-5	1011
6	0110	-6	1010
7	0111	-7	1001
0	0000	-8	1000

Beachte: $\mod 2^\ell$ sind z und $z + 2^\ell$ gleich.

2.4 Das b-Komplement

Definition 2.1. Für $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $n \in \{0, 1, \ldots, b^\ell - 1\}$ ist

$$K_b^\ell(n) := -n \mod b^\ell$$

das ℓ-stellige b-Komplement von n.

Beispiel.

- $n = 15, b = 10, \ell = 2$

$$K_{10}^2(15) = -15 \mod 10^2 = 85$$

- $b = 2, \ell = 4$

$$K_2^4(15) = -15 \mod 2^4 = 1$$

Lemma 2.2. *Für $\ell \geq 1, b \geq 2$ und $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} z_i b^i$ mit $z_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ gilt:*

(i)

$$K_b^\ell(n+1) = \sum_{i=0}^{\ell-1} (b - 1 - z_i) b^i$$

für $n + b^\ell - 1$; außerdem $K_b^\ell(0) = 0$

(ii)

$$K_b^\ell(K_b^\ell(n)) = n$$

Beweis. (i)

$$K_b^\ell(0) = -0 \mod b^\ell = 0.$$

Für $n \in \{0, \ldots, b^\ell - 2\}$ gilt

$$\begin{aligned} K_b^\ell(n+1) &= -(n+1) \mod b^\ell \\ &= b^\ell - 1 - n \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} (b-1) b^i - \sum_{i=0}^{\ell-1} z_i b^i \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} (b - 1 - z_i) b^i \end{aligned}$$

(ii) Wegen Rechenregeln für die modulo-Rechnung gilt

$$K_b^\ell(K_b^\ell(n)) = (-(-n \mod b^\ell)) \mod b^\ell = n \mod b^\ell = n$$

□

Bemerkung. Berechne also b-Komplement von $n > 0$ wie folgt: nimm b-adische Darstellung von $n - 1$ und bilde *stellenweise* Differenz zu $b - 1$.

2.5 b-Komplementdarstellung ganzer Zahlen

Definition 2.3. Es seien $\ell \geq 1, b \geq 2, n \in \{-\lfloor \frac{b^\ell}{2} \rfloor, \dots, \lceil \frac{b^\ell}{2} \rceil - 1\}$. Die ℓ-stellige Komplementdarstellung von n ist die b-adische Darstellung von n (falls $n \geq 0$) bzw. von $K_b^l(-n)$ (falls $n < 0$), vorne mit Nullen zu einer ℓ-stelligen Zahl aufgefüllt.

Beispiel. $b = 2, \ell = 4$

- Die 4-stellige 2-Komplementdarstellung von $n = 5$ ist 0101.
- Die 4-stellige 2-Komplementdarstellung von $n = -5$ ist $K_2^4(5) = 1011$.

Satz 2.4. *Für* $\ell \geq 1, b \geq 2, Z = \{-\lfloor \frac{b^\ell}{2} \rfloor, \dots, \lceil \frac{b^\ell}{2} \rceil - 1\}$ *sei*

$$f : Z \to \{0, 1, \dots, b^\ell - 1\}, n \to \begin{cases} n & \textit{falls } \ell \geq 0 \\ K_b^\ell(-n) & \textit{falls } \ell < 0 \end{cases}$$

das heißt, $f(n) = n \mod b^\ell$. Dann ist f bijektiv und für $x, y \in Z$ gilt:

(i) ist $x + y \in Z$, so gilt $f(x + y) = \big(f(x) + f(y)\big) \mod b^\ell$

(ii) ist $x \cdot y \in Z$, so gilt $f(x \cdot y) = \big(f(x) \cdot f(y)\big) \mod b^\ell$

Beweis. Für $n \in Z = \{-\lfloor \frac{b^\ell}{2} \rfloor, \dots, \lceil \frac{b^\ell}{2} - 1 \rceil\}$ ist $f(n) = n \mod b^\ell$. Da $|Z| = b^\ell$, ist f bijektiv.

(i) und (ii) folgen aus Rechenregeln für modulo-Rechnung. □

Bemerkung.

- Mit der b-Komplementdarstellung kann man also ohne Fallunterscheidung rechnen.
- Ignoriert man Über- und Unterschreitung des zulässigen Bereichs Z, so rechnet man mit Komplementdarstellung genau wie mit b-adischer Darstellung.
- Für $b = 2$ und $x \in Z$ gilt: $x \geq 0 \iff$ Führendes Bit ist 0.

2.6 Darstellung ganzer Zahlen im Computer

Zahlen werden in Speicherblöcken zu je 8 Bits („Bytes“) gespeichert.

2.7 Darstellung großer ganzer Zahlen im Computer

Frage. Wie kann ich Zahlen darstellen, die nicht in einen Speicherblock passen?

Lösung.
- Nutze $k \geq 2$ Blöcke zur Darstellung größerer Zahlen n.
- Stelle n bzw $f(n)$ in b-adischer Darstellung mit Basis b^ℓ (ℓ = Anzahl Bits eines Speicherblocks)
- Damit kann jede Zahl

$$n \in Z = \left\{ -\left\lfloor \frac{b^\ell}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{b^\ell}{2} \right\rceil - 1 \right\}$$

  als $f(n) = n \mod b^k$ dargestellt werden.

Beispiel. $b = 2^8, n = -11215$. Wähle $k = 2, denn:$

$$-\left\lfloor \frac{b^2}{2} \right\rfloor = -32768 \leq n \leq 32767 = \left\lceil \frac{b^2}{2} \right\rceil - 1$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(n) &= n \mod b^2 = 54321 \\ &= (212\ 49)_b \\ &= (11010100\ 00110001)_2 \end{aligned}$$

Darstellung im Hauptspeicher ist umgekehrt:

$$00110001\ 11010100$$

2.8 Exakte Arithmetik

Für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gibt es ein geeignetes $k \geq 1$, so dass

$$n \in Z_k := \left\{ -\left\lfloor \frac{b^k}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{b^k}{2} \right\rceil - 1 \right\}$$

Frage. Ist n eine Variable, wie kann man k dynamisch anpassen?

Lösung. Es seien $n \in \mathbb{Z}$ und $k, k' \geq 1$, so dass $n \in Z_k \cap Z_{k'}$. Weiter seien

$$f_k(n) = n \mod b^k \text{ und } f_{k'}(n) = n \mod b^{k'}.$$

Eine Darstellung von n in k Blöcken kann dann einfach umgerechnet werden in eine Darstellung in k' Blöcken.

1. Fall: Für $n \geq 0$ ist $f_{k'}(n) = f_k(n) = n$, also Voranstellen (bzw. Löschen) von $k' - k$ Null-Blöcken.

2. Fall: Für $n < 0$ ist $f_{k'}(n) = f_k(n) - b^k + b^{k'}$, also Voranstellen (bzw. Löschen) von $k' - k$ Eins-Blöcken.

Beispiel. $b = 2^8 = 256$

$$Z_1 = \{-128, \dots, 127\}$$
$$Z_2 = \{-32768, \dots, 32767\}$$

Beispiel 1: $n = 65$, $f_1(n) = f_2(n) = 65$.

$$\underbrace{01000001}_{k=1} \longleftrightarrow \underbrace{00000000\ 01000001}_{k=2}$$

Beispiel 2: $n = -63$, $f_1(n) = 193$, $f_2(n) = 65473$

$$\underbrace{11000001}_{k=1} \longleftrightarrow \underbrace{11111111\ 11000001}_{k=2}$$