Definition 6.1. Es sei $G = (V, E, \Psi)$ ein Graph (ungerichtet oder gerichtet). Ein Kantenzug in G ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}, k \in \mathbb{N}$$

mit $v_1 \ldots v_{k+1} \in V, e_i \in E$ und $\Psi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ bzw. $\Psi(e_i) = (v_i, v_{i+1})$ für $i = 1, \ldots, k$.

Die Länge eines Kantenzugs ist die Anzahl k der enthaltenen Kanten.

Definition 6.2. Ein Weg ist ein Kantenzug $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}$, so dass $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq k + 1$.

Um Anfangs- und Endknoten des Weges hervorzuheben, sprechen wir auch von einem v_1, v_{k+1}-Weg. Ein Kantenzug der Länge 0 besteht aus eienm Knoten ist ist ein Weg. Ein Kreis ist ein geschlossener Kantenzug, sodass $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq k$.

6.4 Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten

Definition 6.3. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E, \Psi)$ heißt zusammenhängend, falls es für je zwei Knoten $v, w \in V$ einen v, w-Weg in G gibt. Sonst heißt G unzusammenhängend.

Lemma 6.4. *Es gibt genau dann einen v, w-Weg in G, wenn es einen Kantenzug von v nach w gibt.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Jeder v-w-Weg ist ein Kantenzug von v nach w.
$\Longleftarrow$: Ein Kantenzug von v nach w wird durch Abkürzen zu einem v-w-Weg. □

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E, \Psi)$ betrachten wir die Relation $R := \{(u, v) \in V \times V \mid \exists\, u, v\text{-Weg in } G\}$.

Lemma 6.5. *Die Relation $R \subseteq V \times V$ ist*

(i) reflexiv, d. h. $(u, u) \in R$ für alle $u \in V$

(ii) symmetrisch, d. h. für alle u, v gilt: $(u, v) \in R \implies (v, u) \in R$

(iii) transitiv, d. h. für alle $u, v, w \in V$ gilt: $(u, v) \in R \wedge (v, w) \in R \implies (u, w) \in R$

Folglich ist R eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden also eine Partition der Knotenmenge V.

Definition 6.6. Ein von einer Äquivalenzklasse $U \subseteq V$ induzierter Teilgraph $G[U]$ heißt *Zusammenhangskomponente* von G.

Definition 6.7. Es sei $G = (V, E, \Psi)$ ein gerichteter Graph.

(i) Der zu Grunde liegende ungerichtete Graph ist $G' = (V, E, \Psi')$, wobei

$$\Psi'(e) = \{u, v\} \text{ mit } \Psi(e) = (u, v) \text{ für } e \in E$$

(ii) G heißt zusammenhängend, falls G' zusammenhängend ist.

(iii) G heißt stark zusammenhängend, falls es für jedes Knotenpaar $u, v \in V$ sowohl einen u-v-Weg, als auch einen v-u-Weg in G gibt.

6.5 Eulersche Graphen

Definition 6.8. Es sei $G = (V, E, \Psi)$ ein ungerichteter Graph.

(a) Eine Eulertour in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante in E genau ein Mal enthält.

(b) G heißt Eulersch, falls jeder Knoten in V geraden Grad besitzt.

Beobachtung. Besitzt G eine Eulertour, so ist G eulersch.

Lemma 6.9. *Die Kantenmenge eines eulerschen Graphen zerfällt in kantendisjunkte Kreise.*

Beweis durch vollständige Induktion zweiter Art. Induktionsanfang ($|E| = 0$): klar.
Induktionsschluss: Für ein beliebiges, fest gewähltes m gelte das Lemma für alle $|E| \leq m$.
Betrachte Graph $G = (V, E, \Psi)$ mit $|E| = m + 1$.
Behauptung: G enthält einen Kreis C. Beginne mit Kantenzug $v_1 e_1 v_2$ für eine Kante $e_1 \in E(G)$.
Da $|\delta(v_2)|$ gerade ist $\implies$ $\exists\, e_2 \in \delta(v_2) \setminus \{e_1\}$ $\implies$ Kantenzug $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3$. Ist $v_3 = v_1$, so haben wir C gefunden. Sonst:
Da $|\delta(v_3)|$ gerade ist $\implies$ $\exists e_3 \in \delta(v_3) \setminus \{e_2\}$ $\implies$ Kantenzug $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4$. Ist $v_4 \in \{v_1, v_2\}$, haben wir C gefunden. Sonst ...
Da $E(G)$ endlich ist, terminiert der beschriebene Prozess mit einem Kreis. $\square$