5 Rechnen mit Fehlern

5.1 Fehlerfortpflanzung

Lemma 5.1. *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\tilde{x}, \tilde{y}$ Näherungen mit $\varepsilon_x = \frac{x-\tilde{x}}{x}$ und $\varepsilon_y = \frac{y-\tilde{y}}{y}$. Für $\circ \in \{+, -, \cdot, \div\}$ mit $x \circ y \neq 0$ und $\varepsilon_\circ := \frac{(x \circ y)-(\tilde{x} \circ \tilde{y})}{x \circ y}$ gilt dann:*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_+ &= \varepsilon_x \cdot \frac{x}{x+y} + \varepsilon_y \cdot \frac{y}{x+y} \\
\varepsilon_- &= \varepsilon_x \cdot \frac{x}{x-y} + \varepsilon_y \cdot \frac{y}{x-y} \\
\varepsilon_\cdot &= \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \\
\varepsilon_\div &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y}
\end{aligned}
$$

Beweis. Es gilt für $\tilde{x} = x \cdot (1 - \varepsilon_x)$ und für $\tilde{y} = y \cdot (1 - \varepsilon_y)$. Dann ausrechnen. □

Bemerkung. ε_+ und ε_- können sehr groß werden, während $\varepsilon_\cdot$ und $\varepsilon_\div$ eher klein bleiben.

Beispiel. Lösung eines Linearen Gleichungssystems. Betrachte das folgende LGS:

$$
\begin{aligned}
10^{-20}x + 2y &= 1 \\
10^{-20}x + 10^{-20}y &= 10^{-20}
\end{aligned}
$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt:

$$(2 - 10^{-20})y = (1 - 10^{-20})$$

Runden auf die nächste darstellbare Zahl:

$$2y = 1$$

Also $y = \frac{1}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $x = 0$. Die korrekte Lösung wäre:

$$x = \frac{1}{2 - 10^{-20}} = 0.5000\ldots, y = \frac{1 - 10^{-20}}{2 - 10^{-20}} = 0.4999\ldots$$

5.2 Binäre Suche

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, $\mathcal{U}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. Ziel: Berechne $f^{-1}(x) \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ mit $f(x) := x^2$; gesucht ist $f^{-1}(3) \approx 1.73205$ Beachte: f ist monoton wachsend.

- Da $f(1) = 1^2 = 1 < 3$ und $f(2) = 2^2 = 4 > 3$, ist $\sqrt{3} \in [1, 2]$
- Da $f(1.5) = 1.5^2 = 2.25 < 3$, ist $\sqrt{3} \in [1.5, 2]$
- Da $f(1.75) = 1.75^2 = 3.0625 > 3$, ist $\sqrt{3} \in [1.5, 1.75]$
- Da $f(1.625) = 1.625^2 = 2.640625 < 3$, ist $\sqrt{3} \in [1.625, 1.75]$

Es sei $[\ell_i, u_i]$ das Intervall in der i-ten Iteration und $m_i = \frac{\ell_i + u_i}{2}$.

Bemerkung.

- Offenbar ist

$$\lim_{i\to\infty} \ell_i = \lim_{i\to\infty} m_i = \lim_{i\to\infty} u_i = \sqrt{3}$$

- Denn wir wissen a priori, dass

$$|m_i - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2}(u_i - \ell_i) = 2^{-i}(u_1 - \ell_1) = 2^{-i}$$

- Also ist zum Beispiel $|m_6 - \sqrt{3}| \leq 2^{-6} = \frac{1}{64}$
- A posteriori stellen wir fest, dass

$$|m_i - \sqrt{3}| = \frac{|m_i^2 - 3|}{m_i + \sqrt{3}} \leq \frac{|m_i^2 - 3|}{m_i + \ell_i}$$

- Für $i = 6$ ergibt sich bspw.

$$|m_6 - \sqrt{3}| \leq \frac{0.008056640625}{3.453125} \approx 0.002333$$

5.3 Diskrete binäre Suche

Algorithm 1: Binäre Suche

Input: Orakel für monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, Zahlen $\mathcal{L}, \mathcal{U} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathcal{L} < \mathcal{U}$ sowie $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq f(\mathcal{L})$

Output: Das maximale $n \in \{\mathcal{L}, \dots, \mathcal{U}\}$ mit $f(n) \leq y$

$\ell \leftarrow 2, u \leftarrow \mathcal{U}+1$
while $u - 1 < \ell$ **do**
  $m \leftarrow \lfloor \frac{\ell+u}{2} \rfloor$
  if $f(m) > y$ **then**
    $u \leftarrow m$
  end
  else
    $\ell \leftarrow m$
  end
end
return ℓ

Satz 5.2. *Der Algorithmus liefert das korrekte Ergebnis nach $\mathcal{O}(\log(\mathcal{U} - \mathcal{L} + 2))$ Iterationen.*

Beweis. Zeige durch Induktion, dass jederzeit

(i) $\mathcal{L} \leq \ell \leq u - 1 \leq \mathcal{U}$

(ii) $f(\ell) \leq y$

(iii) $u > \mathcal{U}$ oder $f(u) > y$

Also liegt korrektes n stets in $\{\ell, \ldots, u-1\}$. Terminiert der Algorithmus, ist der Output korrekt.

Laufzeit: In jeder Iteration verringert sich $u - \ell - 1$ auf höchstens

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\left\lfloor\frac{\ell+u}{2}\right\rfloor - \ell - 1, u - \left\lfloor\frac{\ell+u}{2} - 1\right\rfloor\right\} \\
\leq &\max\left\{\frac{\ell+u}{2} - \ell - 1, u - \frac{\ell+u-1}{2} - 1\right\} \\
= &\frac{u-\ell-1}{2}
\end{aligned}$$

□