Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b$$

Beweis. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, ist die Aussage klar. Seien also $a, b > 0$. Es sei $d \coloneqq \mathrm{ggT}(a,b), m \coloneqq \mathrm{kgV}(a,b)$. Da $b \mid (a \cdot b)$, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d \cdot n = a \cdot b$.
Da $d \mid a$ und $d \mid b$, gibt es u, v, sodass $d \cdot u = a, d \cdot v = b$.

$$\begin{aligned} \implies d \cdot u \cdot b = d \cdot n = d \cdot v \cdot a \\ \iff u \cdot b = n = v \cdot a \end{aligned}$$

Damit ist n Vielfaches von a und b, also $n \geq \mathrm{kgV}(a,b) =: m$. Da m Vielfaches von a und b ist, gibt es $r, s \in \mathbb{N}$ mit $m = a \cdot r = b \cdot s$. Nach dem Lemma von Bézout gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = a \cdot x + b \cdot y$.

$$\begin{aligned} m \cdot d &= m \cdot a \cdot a + m \cdot b \cdot y \\ &= b \cdot s \cdot a \cdot x + a \cdot r \cdot b \cdot y \\ &= a \cdot b \cdot (s \cdot x + r \cdot y) \\ &= d \cdot n \cdot (s \cdot x + r \cdot y) \\ m &= n \cdot (s \cdot x + r \cdot y) \end{aligned}$$

das heißt, m ist ein Vielfaches von n und daher $m \geq n$. □

4 Approximative Darstellung reeller Zahlen

4.1 Normalisierte b-adische Darstellung reeller Zahlen

Satz 4.1. *Es sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Zahlen $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}, \sigma \in \{\pm 1\}$ und $z_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ für $i \in \mathbb{N}$, sodass gilt:*

$$x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i \cdot b^{-i} \right)$$

wobei $\{i \in \mathbb{N} : z_i \neq (b-1)\}$ unendlich groß ist und $z_0 \neq 0$.

Diese Darstellung heißt dann (normalisierte) b-adische Darstellung von x.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \pi &= (+1) \cdot (3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + \dots) \cdot 10^0 \\ -\frac{2}{5} &= (-1) \cdot (4 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + \dots) \cdot 10^{-1} \\ \frac{1}{3} &= (+1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^{-1} = 0.\overline{3} \\ &= (+1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-2i} \right) \cdot 2^{-2} = (0.\overline{01})_2 \end{aligned}$$

4.2 Normalisierte b-adische Darstellung: Existenz

Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sei $\sigma := \frac{x}{|x|}$ und $\mathcal{E} = \lfloor \log_b |x| \rfloor$. Setze $a_0 := |x| \cdot b^{-\mathcal{E}}$ also $1 \leq a_0 < b$ und definiere rekursiv für $i \in \mathbb{N}$:

$$z_i := \lfloor a_i \rfloor \text{ und } a_{i+1} := b \cdot (a_i - z_i)$$

Dann gilt auch $0 \leq a_i < b$ und $z_i \in \{0, \ldots, b-1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $z_0 \neq 0$.

Satz 4.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$a_0 = \sum_{i=0}^{n} z_i b^{-i} + a_{n+1} \cdot b^{-(n+1)}$$

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang ($n = 0$):

$$z_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^{-1} = z_0 \cdot b^0 + b(a_0 - z_0) \cdot b^{-1} = a_0$$

Induktionsschluss ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot b^{-i} + a_{n+1} \cdot b^{-(n+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} z_i \cdot b^{-i} + \underbrace{(a_{n+1} - z_{n+1}) \cdot b^{-(n+1)}}_{= a_{n+2} \cdot b^{-(n+2)}} \end{aligned}$$

□

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x = \sigma \cdot b^{\mathcal{E}} \cdot a_0 &= \sigma \cdot b^{\mathcal{E}} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} z_i \cdot b^{-i} \right) \\ &= \sigma \cdot b^{\mathcal{E}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} z_i \cdot b^{-i} \end{aligned}$$

Wäre $|\{i \in \mathbb{N} \mid z_i \neq b-1\}| < \infty$, so gäbe es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_i = b-1$ für alle $i > n_0$.