

Kantenzüge und Wege

**Definition 6.1.** Es sei  $G = (V, E, \Psi)$  ein Graph (ungerichtet oder gerichtet). Ein Kantenzug in G ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}, k \in \mathbb{N}$$

mit 
$$v_1 \dots v_{k+1} \in V$$
,  $e_i \in E$  und  $\Psi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$  bzw.  $\Psi(e_i) = (v_i, v_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, k$ .

Die Länge eines Kantenzugs ist die Anzahl k der enthaltenen Kanten.

**Definition 6.2.** Ein Weg ist ein Kantenzug  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1}$ , so dass  $v_i \neq v_j$  für  $1 \leq i < j \leq k+1$ .

Um Anfangs- und Endknoten des Weges hervorzuheben, sprechen wir auch von einem  $v_1, v_{k+1}$ Weg. Ein Kantenzug der Länge 0 besteht aus eienm Knoten ist ist ein Weg. Ein Kreis ist ein
geschlossener Kantenzug, sodass  $v_i \neq v_j$  für  $1 \leq i < j \leq k$ .

## 6.4 Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten

**Definition 6.3.** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E, \Psi)$  heißt zusammenhängend, falls es für je zwei Knoten  $v, w \in V$  einen v, w-Weg in G gibt. Sonst heißt G unzusammenhängend.

**Lemma 6.4.** Es gibt genau dann einen v, w-Weg in G, wenn es einen Kantenzug von v nach w gibt.

 $Beweis. \implies$ : Jeder v-w-Weg ist ein Kantenzug von v nach w.

 $\Leftarrow$ : Ein Kantenzug von v nach w wird durch Abkürzen zu einem v-w-Weg.

Für einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E, \Psi)$  betrachten wir die Relation  $R := \{(u, v) \in V \times V \mid \exists u, v\text{-Weg in } G\}.$ 

**Lemma 6.5.** Die Relation  $R \subseteq V \times V$  ist

- (i) reflexiv, d. h.  $(u, u) \in R$  für alle  $u \in V$
- (ii) symmetrisch, d. h. für alle u, v gilt:  $(u, v) \in R \implies (v, u) \in R$
- (iii) transitiv, d. h. für alle  $u, v, w \in V$  gilt:  $(u, v) \in R \land (v, w) \in R \implies (u, w) \in R$

Folglich ist R eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden also eine Partition der Knotenmenge V.

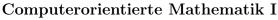
**Definition 6.6.** Ein von einer Äquivalenzklasse  $U \subseteq V$  induzierter Teilgraph G[U] heißt Zusammenhangskomponente von G.

**Definition 6.7.** Es sei  $G = (V, E, \Psi)$  ein gerichteter Graph.

(i) Der zu Grunde liegende ungerichtete Graph ist  $G' = (V, E, \Psi')$ , wobei

$$\Psi'(e) = \{u, v\} \text{ mit } \Psi(e) = (u, v) \text{ für } e \in E$$

- (ii) G heißt zusammenhängend, falls G' zusammenhängend ist.
- (iii) G heißt stark zusammenhängend, falls es für jedes Knotenpaar  $u, v \in V$  sowohl einen u-v-Weg, als auch einen v-u-Weg in G gibt.





Kantenzüge und Wege

21. November 2024

## 6.5 Eulersche Graphen

**Definition 6.8.** Es sei  $G = (V, E, \Psi)$  ein ungerichteter Graph.

- (a) Eine Eulertour in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante in E genau ein Mal enthält.
- (b) G heißt Eulersch, falls jeder Knoten in V geraden Grad besitzt.

**Beobachtung.** Besitzt G eine Eulertour, so ist G eulersch.

Lemma 6.9. Die Kantenmenge eines eulerschen Graphen zerfällt in kantendisjunkte Kreise.

Beweis durch vollständige Induktion zweiter Art. Induktionsanfang (|E| = 0): klar.

Induktionsschluss: Für ein beliebiges, fest gewähltes m gelte das Lemma für alle  $|E| \leq m$ . Betrachte Graph  $G = (V, E, \Psi)$  mit |E| = m + 1.

Behauptung: G enthält einen Kreis C. Beginne mit Kantenzug  $v_1e_1v_2$  für eine Kante  $e_1 \in E(G)$ . Da  $|\delta(v_2)|$  gerade ist  $\implies \exists e_2 \in \delta(v_2) \setminus \{e_1\} \implies$  Kantenzug  $v_1e_1v_2e_2v_3$ . Ist  $v_3 = v_1$ , so haben wir C gefunden. Sonst:

Da  $|\delta(v_3)|$  gerade ist  $\implies \exists e_3 \in \delta(v_3) \setminus \{e_2\} \implies \text{Kantenzug } v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4. \text{ Ist } v_4 \in \{v_1, v_2\},$  haben wir C gefunden. Sonst ...

Da E(G) endlich ist, terminiert der beschriebene Prozess mit einem Kreis.