Bemerkung. Wählt man Pivor-Element x in Linearzeit so, dass

$$\max\{|A_{<x}|, |A_{>x}|\} \leq \lfloor d \cdot |A| \rfloor$$

für eine Konstante $d < 1$, so hat Auswahl(a, i) Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.

Denn für Laufzeitfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt dann $f(n) \leq f(\lfloor d \cdot n \rfloor) + \tilde{c} \cdot n$ und damit $f(\lceil \frac{1}{d} \cdot n \rceil) \leq 1 \cdot f(n) + \frac{\tilde{c}}{d} \cdot n$. Aus dem Aufteilungs-Beschleunigungs-Satz folgt, dass $f(n) \in \mathcal{O}(n)$.

8.15 Randomisierter Linearzeit-Algorithmus für das Auswahlproblem.

Satz 8.1. *Wählt man in dem Auswahl-Algorthmus das Pivor-Element zufällig und gleichverteilt aus, so hat der Algorithmus Laufzeitfunktion in $\mathcal{O}(n)$.*

Beweis. Betrachte monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$, die erwartete Laufzeit nach oben beschränkt. Nach Konstruktion des Algorithmus gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $f(1) = 4c$ und

$$f(n) \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(\max\{j-1, n-j\}) + c \cdot n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{>1}\,.$$

Behauptung. $f(n) \leq 4c \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Induktionsanfang ($n = 1$): $f(1) \leq 4c$.
Induktionsschluss ($n \to n + 1$):
Für $n > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(n) &\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(\max\{j-1, n+j\}) + c \cdot n \\
&\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} f(n-j) + c \cdot n \\
&\leq \frac{8c}{n} \cdot \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (n-j) + c \cdot n \\
&= \frac{8c}{n} \Big(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}{2} \Big) + c \cdot n \\
&\leq \frac{8c}{n} \Big(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\frac{n-1}{2} (\frac{n-1}{2} - 1)}{2} \Big) + c \cdot n \\
&= \frac{8c}{n} \Big(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - (\frac{n^2}{8} - \frac{n}{2} + \frac{3}{8}) \Big) + c \cdot n \\
&\leq \frac{8c}{n} \Big(\frac{3}{8} n^2 \Big) + c \cdot n \\
&= 4c \cdot n
\end{aligned}$$

□

8.16 Deterministischer Linearzeit-Algorithmus für Auswahlproblem

Ersetze nun Schritt 1 des Algorithmus durch folgende Routine:

(i) Partitioniere A in $\lfloor \frac{|A|}{5} \rfloor$ Teilmengen mit 5 Elementen und eine Teilmenge mit den restlichen $n \mod 5$ Elementen $\longrightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(|A|)$.

(ii) Bestimme für jede dieser Teilmengen deren Median und bilde Menge A_M dieser Mediane $\longrightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(|A|)$.

(iii) Berechne mittels rekursiven Aufrufs von Auswahl den Median x von A_M und verwende x als Pivot-Element.

Bemerkung.

- $|A_M = \lceil \frac{n}{5} \rceil|$
- $|A_{>x}| \geq 3\big(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2\big) \geq \frac{3n}{10} - 6 \Longrightarrow |A_{<x}| \leq \lfloor \frac{7n}{10} + 6 \rfloor$
- analog: $|A_{<x}| \geq \frac{3n}{10} - 6 \Longrightarrow |A_{>x}| \leq \lfloor \frac{7n}{10} + 6 \rfloor$

Folglich gilt für die monotone Laufzeitfunktion des rekursiven Algorithmus:

$$f(n) \leq f\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} + 6 \right\rfloor\right) + c \cdot n$$

für ein $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Satz 8.2. *Wählt man im Algorithmus „Auswahl“ das Pivot-Element mit der oben beschriebenen rekursiven Routine, dann ist die Laufzeitfunktion in $\mathcal{O}(n)$.*

Beweis. Es gibt ein $c > 0$, sodass für die monotone Laufzeit gilt:

$$f(n) \leq \begin{cases} 20c & \text{für alle } \mathrm{n} < 140 \\ f\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + c \cdot n & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige mit vollständiger Induktion zweiter Art: $f(n) \leq 2ac \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang ($n < 140$): Klar.
Induktionsschritt: ($n \geq 140$):

$$\begin{aligned} f(n) &\leq f\Big(\underbrace{\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil}_{<n}\Big) + f\Big(\underbrace{\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6}_{<n}\Big) + c \cdot n \\ &\overset{\text{Ind.}}{\leq} 20c \cdot \left(\frac{n}{5} + 1\right) + 20c \cdot \left(\frac{7n}{10} + 6\right) + c \cdot n \\ &= 19c \cdot n + 140c \\ &\leq 20c \cdot n \end{aligned}$$

Es gilt also: $f(n) \leq 20c \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $f(n) \in \mathcal{O}(n)$. □