Simon Seemüller 513084 **WiSe 2024/2025**

Lösungen zum 2. Tutoriumsblatt Computerorientierte Mathematik I

1. Tutoriumsaufgabe

(a)
$$R_1 = \{(x, y) \in [-4, 4] \times \mathbb{R} : y + \frac{x^2}{2} = 4\}$$

ist eine Funktion, da $\forall x \in [-4, 4] \exists y \in \mathbb{R} : y = -\frac{x^2}{2} + 4$.

ist nicht injektiv, da bspw.
$$f(1) = f(-1)$$

ist nicht surjektiv, da bspw.
$$\forall x \in [-4, 4] : -\frac{x^2}{2} + 4 \neq 5$$

(b)
$$R_2 = \{(x, y) \in [-4, 4] \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$$

ist keine Funktion, da $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq -4$

ist injektiv.

ist nicht surjektiv, da $\forall x \in [-4, 4] : x \neq 3^2$

(c)
$$R_3 = \{(x, y) \in \{0, 1, 2\} \times \{1, 2, 3\} : x + 2 = y\}$$

ist keine Funktion, da $\forall y \in \{1, 2, 3\} : 2 + 2 \neq y$

ist injektiv.

ist nicht surjektiv, da $\forall x \in \{0, 1, 2\} : x + 2 \neq 1$

(d)
$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 2 = y\}$$

ist eine Funktion.

ist injektiv.

ist surjektiv.

2. Tutoriumsaufgabe

(a) zu zeigen:
$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis per vollständiger Induktion. Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{0} i &= \frac{0(0+1)}{2}\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Induktionsschluss ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\\ \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ \frac{n^2+3n+2}{2} &= \frac{n^2+3n+2}{2}\end{aligned}$$

□

(b) zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

Beweis per vollständiger Induktion. Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{0} (2i-1) &= 0^2\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Induktionsschluss ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) &= (n+1)^2\\ \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + 2(n+1) - 1 &= n^2 + 2n + 1\\ n^2 + 2n + 2 - 1 &= n^2 + 2n + 1\\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

□

(c) zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 : \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

Beweis per vollständiger Induktion. Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} x^i &= \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} \\ 1 &= \frac{1 - x}{1 - x} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1 - x)x^{n+1}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \end{aligned}$$

□

(d) zu zeigen: $\exists n \in \mathbb{N} : 7 \mid 8^n \implies 7 \mid 8^{n+1}$.

Beweis. Falls $7 \mid 8^n$, so gilt: $8^n = 7 \cdot a, a \in \mathbb{Z}$. Nun zeigen wir, dass $7 \mid 8^{n+1}$.

$$\begin{aligned} &7 \mid 8^{n+1} \\ &7 \mid 8^n \cdot 8 \\ &7 \mid 7 \cdot a \cdot 8 \end{aligned}$$

gilt. □

Allgemein kann $7 \mid 8^n$ nicht gelten, da $8^n = (2^3)^n$. Allgemein ist also in der Primfaktorzerlegung

$$8^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{3n}$$

Keiner der Primfaktoren kann 7 sein, also ist 8^n nicht durch 7 teilbar.

3. Tutoriumsaufgabe

(a) zu zeigen:

$$\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{R}_{>0} \forall n \geq n_0 : 0 \leq \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell n^\ell \leq \alpha n^k$$

Beweis. Wähle $\alpha = \sum_{\ell=0}^{k} |a_\ell|$. Dann ist:

$$\alpha n^k = |a_0|n^k + |a_1|n^k + \ldots + |a_k|n^k$$

und

$$\sum_{\ell=0}^{k} a_l n^l = a_0 n^0 + a_1 n^1 + \ldots + a_k n^k$$

Damit gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell n^\ell \leq \alpha n^k.$$

$\square$

(b) zu zeigen:

$$\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{R}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \forall \delta > 0 \forall n \geq n_0 : 0 \leq \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell n^\ell \leq \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta n)^j}{j!}$$

Beweis.

$$\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell n^\ell \leq \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta n)^j}{j!}$$

Nach (a) kann ich die linke Seite nach oben abschätzen. Die rechte Seite schätze ich außerdem nach unten ab wie folgt:

$$\alpha' n^k \leq \alpha \sum_{j=0}^{k} \frac{(\delta n)^j}{j!}$$

Rechts schätze ich weiter ab:

$$\begin{aligned} & \alpha' n^k \leq \alpha \frac{(\delta n)^k}{k!} \\ \iff \qquad & \alpha' n^k \leq \alpha \frac{\delta^k n^k}{k!} \end{aligned}$$

Nun kann ich $\alpha = \frac{\alpha' k!}{\delta^k}$ setzen. Dann ist

$$\alpha' n^k \leq \alpha' n^k$$

$\square$

(c)

$$\mathcal{O}(a(n)) \subset \mathcal{O}(e(n)) \subset \mathcal{O}(b(n)) \subset \mathcal{O}(d(n)) \subset \mathcal{O}(c(n))$$

4. Tutoriumsaufgabe

Wir mischen die eine Hälfte der Biere in einem Becher zusammen. Zeigt der Teststreifen positiv, so teilen wir die aktuelle Hälfte in zwei Hälften ein und starten am Anfang. Zeigt der Teststreifen negativ, so teilen wir die andere Hälfte in zwei Hälften ein und starten am Anfang.