

## 2. Tutoriumsblatt Computerorientierte Mathematik I

### 1. Tutoriumsaufgabe

Handelt es sich bei den folgenden Relationen um Funktionen? Sind diese gegebenenfalls injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründe!

1.  $R_1 = \{(x, y) \in [-4, 4] \times \mathbb{R} : y + \frac{x^2}{2} = 4\}$
2.  $R_2 = \{(x, y) \in [-4, 4] \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$
3.  $R_3 = \{(x, y) \in \{0, 1, 2\} \times \{1, 2, 3\} : x + 2 = y\}$
4.  $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 2 = y\}$

Überlegt euch mögliche Modifikationen, sodass die Relationen zu Funktionen/injektiv/surjektiv/bijektiv werden.

### 2. Tutoriumsaufgabe

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  gilt:

1.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
2.  $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
3.  $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Angenommen es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $8^n$  durch 7 teilbar ist. Zeige, dass dann auch  $8^{n+1}$  durch 7 teilbar ist. Wieso ist dennoch  $8^n$  nicht durch 7 teilbar für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3. Tutoriumsaufgabe

(a) Es sei  $P(n) = \sum_{l=0}^k a_l n^l$  ein Polynom vom Grad  $k$  in der Variablen  $n$  mit reellen Koeffizienten  $a_l$  und  $a_k > 0$ . Zeige:  $(n \mapsto P(n)) \in O(n^k)$ .

(b) Nutze die in (a) gezeigte Aussage sowie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

um zu zeigen, dass für jedes  $\delta > 0$  und jedes Polynom  $P$  gilt  $(n \mapsto P(n)) \in O(e^{\delta n})$

- (c) Sortieren Sie für die unten gegebenen Funktionen die  $O$ -Klassen bezüglich ihrer Teilmengenbeziehungen.

Beispiel:

$$O(n) \subset O(n^2)$$

Funktionen:

$$a(n) = n^2 \cdot \log_2(n) + 42 \quad b(n) = 2^n + n^4 \quad c(n) = 2^{2 \cdot n} \quad d(n) = 2^{n+3} \quad e(n) = \sqrt{n^5}$$

#### 4. Tutoriumsaufgabe

Stellt euch vor ihr seid im Keller des Mathegebäudes und findet dort 1000 Fässer mit Bier. Davor steht ein Schild mit der Aufschrift

Genau eins dieser Fässer ist vergiftet gefüllt

Daneben liegen zufälligerweise 10 Gift-Teststreifen und 10 sehr große Becher. Ist es für euch möglich das vergiftete Fass mit diesen Teststreifen zu finden.

*Hinweis* Ihr dürft annehmen, dass die Teststreifen sehr genau sind und ein Tropfen des vergifteten Bieres reicht um den Test zu aktivieren. Weiterhin dürft ihr mischen.