连续介质力学 A——课堂补充

武思蒙

工学院北楼 833-B

September 08, 2022

Chapter 1

线性映射的不变量

9 月 8 日的课上黄老师提到“n 阶矩阵有 n 个不变量 (invariance)”。更具体的说，应该叫做“坐标变换下的不变量”，变中求常，反映一种对称性。如何寻找这 n 个分量？

定义 1.1 (特征多项式). 线性算子 T 的特征多项式定义为

$$p(t) := \det(tI - A) \tag{1.1}$$

其中矩阵 A 是算子 T 在某个基底 $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ 下的表示，即 $A = \mathscr{M}_{\mathbf{B}}(T)$。

命题 1.1. T 的特征多项式不依赖于基底 $\mathbf{B}$ 的选取。

Proof. 设 T 在另一基底 $\mathbf{B}'$ 对应的矩阵为 A'，换底规则为 $\mathbf{B}' = \mathbf{B}P$。则根据换基公式，$A' = P^{-1}AP$。

$$tI - A' = tI - P^{-1}AP = P^{-1}(tI - A)P$$
$$\det(tI - A') = \det P^{-1} \det(tI - A) \det P = \det(tI - A)$$

□

命题 1.2. $n \times n$ 规格的矩阵 A 的特征多项式可展开为如下形式

$$p(t) = t^n - (trace(A))t^{n-1} + \big(n-2 \text{ 个降幂中间项}\big) + (-1)^n(\det A) \tag{1.2}$$

Proof. 显然，将 $\det(tI - A)$ 对第一行拉氏展开即得。 $\square$

结合1.1和1.2，线性映射 T 的 n 个不变量即为其特征多项式 $t^j, j = 0, ..., n-1$ 的系数。特别地，$trace(A), \det A$ 分别为 $j = n-1, j = 0$ 对应的系数，因此也是不变量。

其实我们也可以从更高的观点看待该问题，因为特征多项式亦可写成

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \cdots (t - \lambda_m)^{d_m} \tag{1.3}$$

其中 λ_j 为 T 的不同特征值，相应的 d_j 为其代数重数。既然特征值不依赖于基底选择，由特征值确定的特征多项式也不依赖于基底的选择，故得到相同结论。

Chapter 2

$ST = TS$ 问题

因为一般线性群是非阿贝尔的，因此矩阵相乘的交换往往带来一些有趣的结论。

根据可逆矩阵的定义，Figure2.1和逆的唯一性，如果 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 满

3.53 Definition ***invertible, inverse***

- A linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$ is called ***invertible*** if there exists a linear map $S \in \mathcal{L}(W, V)$ such that ST equals the identity map on V and TS equals the identity map on W.
- A linear map $S \in \mathcal{L}(W, V)$ satisfying $ST = I$ and $TS = I$ is called an ***inverse*** of T (note that the first I is the identity map on V and the second I is the identity map on W).

Figure 2.1: 可逆线性映射

足 $ST = TS = I$, 则 $T = S^{-1}$。现在弱化条件，如果我们仅知道这个连等式中的一对成立，也就是说 $ST = TS$ 或者 $ST = I$ 或者 $TS = I$，那么可

逆性是否还成立呢？

这是很经典的线性代数习题，改编自《Done Right》第三章。因此我们鼓励同学们自己先尝试做一遍。这里提供一个思路：对一般的点集映射，我们知道如下结论 也就是我们把左逆，右逆分别等价为单射性，满射性。

(3) f is *bijective* or is a *bijection* if it is both injective and surjective. If such a bijection f exists from A to B, we say A and B are in *bijective correspondence*.

(4) f has a *left inverse* if there is a function $g : B \to A$ such that $g \circ f : A \to A$ is the identity map on A, i.e., $(g \circ f)(a) = a$, for all $a \in A$.

(5) f has a *right inverse* if there is a function $h : B \to A$ such that $f \circ h : B \to B$ is the identity map on B.

Proposition 1. Let $f : A \to B$.

(1) The map f is injective if and only if f has a left inverse.

(2) The map f is surjective if and only if f has a right inverse.

(3) The map f is a bijection if and only if there exists $g : B \to A$ such that $f \circ g$ is the identity map on B and $g \circ f$ is the identity map on A.

(4) If A and B are finite sets with the same number of elements (i.e., $|A| = |B|$), then $f : A \to B$ is bijective if and only if f is injective if and only if f is surjective.

Proof: Exercise.

Figure 2.2: 一般结论，节选自 dummit foote

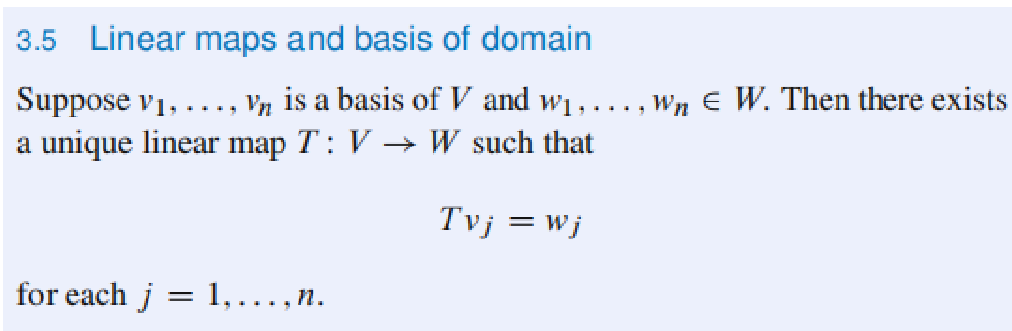
放在线性代数框架下就是

命题 2.1 (左逆与单射性). 设 W 为有限维线性空间，$T \in \mathcal{L}(V, W)$。于是 T 为**单射**当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 **ST** 为 V 上的单位映射 I_V。

Proof. 考虑必要性，假设存在这样的 S，令 $Tu = Tv$，则 $STu = STv$，因为是单位映射，故推出 $u = v$，因此 T 为单射。考虑充分性，这时 T 已为单射，设 $Tv_1, ..., Tv_m$ 为 $rangeT$ 的一组基，因为 $rangeT$ 是 W 的子空间，故这组线性无关向量可以扩展为 W 的基 $Tv_1, ..., Tv_m, w_1, ..., w_n$。根据 Figure2.3(这个定理最强的一点在于不要求值域空间的这组向量是 W 的基

底)，存在唯一确定的线性映射 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 满足 $S(Tv_i) = v_i, S(w_j) = 0$。任给 $v \in V$，有 $Tv = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Tv_i$，又 T 为单射，$nullT = \{0\}$，因此上式等式两边作差，再由线性性质挪入括号内部可得，$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$。

$$STv = S(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Tv_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i STv_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = v$$



3.5 Linear maps and basis of domain

Suppose $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V and $w_1, \ldots, w_n \in W$. Then there exists a unique linear map $T: V \to W$ such that

$$Tv_j = w_j$$

for each $j = 1, \ldots, n$.

Figure 2.3:

$\square$

命题 2.2 (右逆与满射性). 设 V 为有限维线性空间，$T \in \mathcal{L}(V, W)$。于是 T 为**满射**，当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 **TS** 在 W 上为单位映射 I_W。

Proof. 先考虑必要性,若存在这样的 S,对任一 $w \in W$,有 $T(Sw) = w \in W$ 于是 $w \in rangeT$。又因为 $rangeT$ 是 W 的子空间，故而 $rangeT = W$，也就是 T 为满射。再考虑充分性，因为 T 单射，所以 $rangeT = W$。存在 $v_1, ..., v_m \in V$ 使得 $Tv_1, ..., Tv_m$ 构成 W 的基底。

根据 Figure2.3，存在唯一确定的线性映射 $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 满足 $S(Tv_i) = v_i, 1 \le i \le m$。对任一 $w \in W$，展开为基的线性组合 $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Tv_i$，

$$TSw = T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i S(Tv)) = T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Tv_i) = w$$

□

现在有了这些准备工作，加之以如下定理 Figure2.4，Figure2.5 我们

3.56 Invertibility is equivalent to injectivity and surjectivity

A linear map is invertible if and only if it is injective and surjective.

Figure 2.4: 可逆性判断

3.69 Injectivity is equivalent to surjectivity in finite dimensions

Suppose V is finite-dimensional and $T \in \mathcal{L}(V)$. Then the following are equivalent:

(a) T is invertible;

(b) T is injective;

(c) T is surjective.

Figure 2.5: 算子可逆性更好判断

便能处理本章开头提出的问题了。

若 $S,T \in \mathcal{L}(V)$，则当 $ST = I, TS = I$ 其中之一成立时，便从左逆 (或右逆) 推得单射 (满射)，进而得到可逆性；而当对任一 $S \in \mathcal{L}(V), ST = TS$

时，我们能推出 $T = cI$，c 为一个标量，反之亦然，这个证明作为本章补充的一道简单的练习题留给同学们。

Chapter 3

$\mathbb{R}^3$ 中的刚体运动

定义 3.1 (方阵的正交性). 称 $n \times n$ 的矩阵为正交矩阵，如果它满足 $A^T A = I$。根据第二章的讨论，这相当于在说 A 可逆，且逆矩阵恰为转置 $A^{-1} = A^T$。

定义 3.2 (算子的正交性). 我们把正交算子 T 定义为保内积 的线性 映射，即 $(Tx, Ty) = (x, y)$，圆括号为内积运算。

显然，正交算子也保长度，因为长度定义为与自己内积的平方根，即 $\sqrt{(Tx, Tx)}$。有意思的是这个陈述的逆命题也是正确的：如果一个线性 算子仅保长度，那么它也为正交算子。事实上，这是因为

$$(T(x + y), T(x + y)) = ((x + y), (x + y))$$

将两边展开后消去同类项得 $(Tx, Ty) = (x, y)$.

命题 3.1. $\mathbb{R}^n$ 上定义的线性 算子 T 为正交算子，当且仅当 T 相对于标准基底 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的矩阵 A 是正交方阵。

Proof.

$$(Tx, Ty) = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A) y$$

算子正交当且仅当等式最右端等于 x 与 y 的内积 x^Ty，等价于 $x^T(A^TA-I)y=0$，进而等价于 $A^TA-I=0$。最后一步推导是因为标准基对任一矩阵 M 取的二次型 $e_i^TMe_j=$ 矩阵 M 的第 i 行, 第 j 列所占元素。 □

许多现代的线性代数书，比如《Done Right》，已经从代数角度详尽地讨论过正交算子和正交矩阵了。但是我们不妨从几何的角度窥探一下它们的意义。

定义 3.3 ($\mathbb{R}^3$ 中的旋转). 我们把 $\mathbb{R}^3$ 中关于原点的**旋转**定义为一个<u>线性</u> 算子 ρ，满足

1. ρ 固定其上一个单位向量 u 称为 **"转极"**，$\rho u=u$。注意转极是有方向的一个向量，一般要确保右手系 (和标准正交基的换基矩阵行列式为正的基)。转极 u 张成一个一维不变子空间，称之为"转动轴"或 **"转轴"**;
2. ρ 旋转一个正交于转轴 u 二维的子空间 W

见 Figure3.1，右手系的几何意义为：右手大拇指指向转极 u，四个手指应该弯向旋转 θ 的方向。

旋转映射 ρ 对应的矩阵定义为旋转矩阵。

举一个简单的例子来说明，当转极为 e_1 时，(e_2,e_3) 组成被旋转子空间 W 的一组标准正交基。旋转矩阵取如下形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

旋转算子记为 $\rho_{(u,\theta)}$，其中<u>约定</u>$\theta\in(-\pi,\pi]$

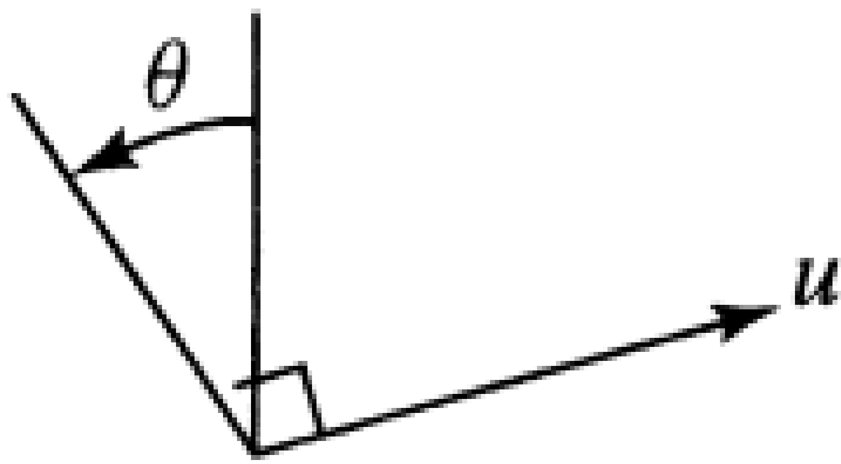


Figure 3.1: $\mathbb{R}^3$ 中的某个旋转

定义 3.4 (SO_3 集合)**.**

$$SO_3 := \{\text{Orthogonal } 3\times 3 \textit{ matrices } Q|\det Q = +1\} \tag{3.2}$$

定理 3.1 (Euler 定理)**.** *旋转矩阵的全体恰好就是 SO_3 集合，又恰好形成一个群，叫做 SO_3(special orthogonal of order 3) 群。*

Proof. 过于繁琐，这里就不证明了。只需要承认这个事实。 □

根据群论的知识，我们知道旋转这种操作满足结合律，也就是说，关于任意两轴的两个旋转的复合会形成一个新的关于某个轴的旋转。这其实在理论力学中为同学们所熟知了。我们知道刚体的定点运动可以分解为进动，章动和自转。这其实就是欧拉定理的一个应用。

接下来我们给出变换转极时旋转算子变化的具体公式。

推论 3.1. 记 $M \in SO_3$ 为旋转 $\rho_{(u,\alpha)}$ 在某个基下的矩阵，$B \in SO_3$ 为另一旋转矩阵。令 $u' := Bu$。则 M 的共轭 $M' = BMB^T$ 为旋转 $\rho_{(u',\alpha)}$ 在同一基底下的矩阵。

Proof. 共轭 BMB^T 为三个 SO_3 元素的复合，Euler 定理告诉我们 SO_3 形成旋转群，因此 M' 也是一个旋转矩阵。

接下来证明 u' 是这个新旋转矩阵的转极：由 B 的正交性得 B 保向量长度，因而 $|u'| = |Bu| = |u| = 1$，

$$M'u' = BMB^Tu' = BMB^{-1}u' = BMu = Bu = u'$$

第二个等号是由于正交矩阵的性质，第三个等号是推论的已知信息，第四个等号是由于 u 一开始就被定义为 M 的转极。因此 u' 确为 M' 的转极。

接着证明旋转角度相同：先计算 M 的迹。取 $\mathbb{R}^3$ 得正交基 $\{u, v_1, v_2\}$，其中 u 为 M 的转极，则 M 关于该基底的形式为(3.1)。求和对角线得 $traceM = 1 + 2\cos\alpha$。不妨设 α' 为旋转 M' 关于新转极 u' 的旋转角度。由于 M 与其共轭 $M' = BMB^{-1}$ 相当于同一线性映射在不同基底下的矩阵表示，由第一章结论知迹为不变量，故 $traceM = traceM'$。因此 $\cos\alpha = \cos\alpha'$，又 $\alpha, \alpha' \in (-\pi, \pi]$，所以 $\alpha' = \pm\alpha$。在某次换基后，旋转矩阵 B 也有(3.1)的形式，设其旋转角度为 β，那么显然 B 是连续地依赖于参数 β 的，又根据 $M' = BMB^T$，M' 也因此连续地依赖于参数 β，所以 α' 只能取 $\pm\alpha$ 其中一个值。考虑特殊情况 $\beta = 0$，此时 $B = I, M' = M, \alpha' = \alpha$。最终对所有 β，成立着 $\alpha' = \alpha$。 □

三维欧氏空间中，刚体运动有如下形式

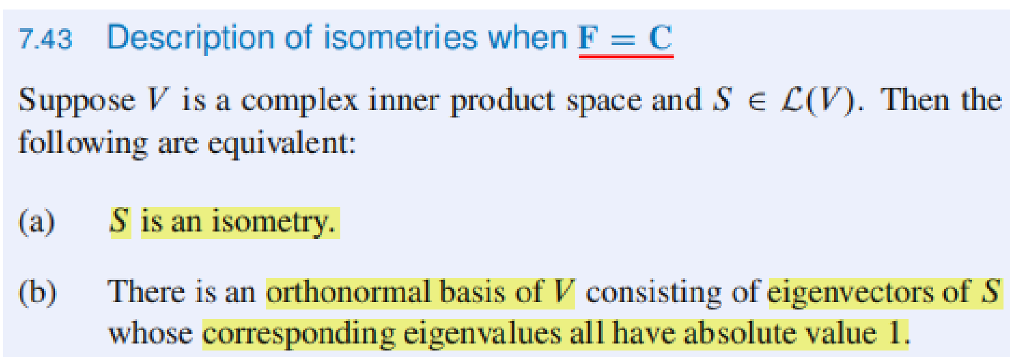
$$u(x) = \rho_{(u,\theta)}x + p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{R}^3 \text{ fixed} \tag{3.3}$$

也就是一个旋转与一个平移的复合。除了本章开头提到的，刚体运动保持内积，长度，两向量间的夹角等初等代数几何量不变之外，还有一些微分

几何的性质。刚体运动前后，正则参数化曲线的弧长、曲率和挠率等保持不变，这也是符合直觉的。其证明很简单，感兴趣的同学可以做一下 do Carmo 微分几何第一章第五小节的习题。另外刚体运动的正则性很高，属于微分同胚，这也是为什么许多曲线、曲面的识别定理中，即便分别规定好曲率、挠率函数或者规定好第一、第二基本形函数后还是只能在容许一个刚体运动的情况下唯一确定。

在本章的最后，我们提一下黄老师上课时留的思考题：既然我们已经知道 SO_3 的元素代表旋转，那么行列式为 -1 的正交算子有什么几何特征？

还是将我们的讨论限制在 $\mathbb{R}^3$ 下，一方面讨论起来比较简单，另一方面也满足实用性。


7.43 Description of isometries when $\mathbf{F} = \mathbf{C}$

Suppose V is a complex inner product space and $S \in \mathcal{L}(V)$. Then the following are equivalent:

(a) S is an isometry.

(b) There is an orthonormal basis of V consisting of eigenvectors of S whose corresponding eigenvalues all have absolute value 1.

Figure 3.2: 等距同构的精确描述

设矩阵 $A \in O_3$，行列式 $\det A = -1$，$Au - Av = A(u - v)$，有 $|Au - Av| = |A(u - v)| = |u - v|$。所以 A 为一个等距映射。根据下面的 Figure3.2，存在 $\mathbb{R}^3$ 的一组由 A 的特征向量构成的标准正交基 $\{u, v, w\}$

组成右手系，在这个基下，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

其中，每个特征值的绝对值都为 1。如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均大于 0，则 $\det A > 0$，矛盾；如果有两个负特征值和一个正特征值，同样的做法也能导出矛盾。因此存在一个或三个负的特征值，方便起见假设只有一个负的特征值，其他情况不过是简单类推。此时不妨设 $\lambda_3 = -1$，因此根据特征值的定义有 $Aw = \lambda_3 w = -w$。现令线性算子 T 定义为关于平面 $span\{u, v\}$ 的镜面反射，则 T 相对于天然基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的矩阵可以写成

$$T = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P \tag{3.5}$$

P 表示从 $\{u, v, w\}$ 到 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的换基矩阵。根据右手系定义知 $\det P > 0$。这也是选择 $\{u, v, w\}$ 为右手系带来的便利。现如今

$$\det T = \det \left(P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P \right) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \tag{3.6}$$

观察到复合线性映射 $R := T \circ A = TA$ 是行列式为 1 的正交矩阵，且 $R(w) = w$。这说明 R 是关于 w 轴的一个旋转。又注意到 $T^{-1} = T$，所以 $A = T \circ R = TR$，即 A 为关于对应于负特征值的特征向量 w 的一个旋转再复合上对该特征向量正交的平面 $span\{u, v\}$ 的镜面反射。这便是 A 的几何解释。

Chapter 4

行列式函数的微分

9 月 20 日思考题：对任意 $n\times n$ 的矩阵 A $f(A):=\det(A)$, 求 f 的微分。课上已经证明，对可逆矩阵 A，$f'(A)H=\det A\ tr(A^{-1}H)$，这里 H 表示微小增量，它足够小以至于 $A+H$ 仍然可逆。如果一开始矩阵 A 就不可逆，我们该如何处理呢？

设 $\mathbb{M}^n\simeq\mathbb{R}^{n\times n}$ 为全体 $n\times n$ 矩阵组成的线性空间，首先还是假设 A 可逆，根据线性代数的知识，可以把逆矩阵用代数余子式矩阵表示出来，也就是

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(CofA)^T$$

因此，

$$\begin{aligned}\det A\ tr(A^{-1}H)&=\det A\ tr(\frac{1}{\det A}(CofA)^TH)\\&=tr\left((CofA)^TH\right)\end{aligned}$$

由于矩阵值函数，其作为线性映射的范数可以被各分量函数的向量模控制，即，$||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\leq\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}(x)^2}$，因此只要分量函数连续便可推出该矩阵值函数连续。据此，我们得知映射 $\mathbb{M}\ni A\mapsto CofA\in\mathbb{M}^n$ 为连续函数。

下面我们证明一个引理

引理 4.1 (可逆矩阵的拓扑性质). 可逆矩阵集在空间 $\mathbb{M}^n$ 中为开集，且稠密。

Proof. 由于行列式函数 $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 是连续函数。根据连续函数的性质我们知道，因为 $\{0\}$ 是实轴上的平凡闭集，所以集合 $\det^{-1}(\{0\})$ 是闭集，这就说明所有奇异矩阵的集合为闭集，因此可逆矩阵集合为开集。紧接着我们证明可逆矩阵在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的稠密性，对任意一个 $A \in \mathbb{M}^n$，这里不要求 A 可逆，考虑 $\det(tI + A)$，注意这其实就是 $-A$ 的特征多项式，详见第一章。n 次多项式只有有限多个零点，因此在零点附近不可能总取到特征多项式的根，也就是 $\forall\epsilon > 0, \exists|t| \le \epsilon$ 使 $A + tI$ 为可逆矩阵。可以取一列收敛于 0 的 $\{t_i\}$，且对应的 $A + t + iI$ 可逆。当 $t_i \to 0$ 的时候，还是根据映射范数被分量函数控制的性质，我们得到一组依范数收敛的矩阵 $||A + t_iI|| \to ||A||$。也就是对任意 $A \in \mathbb{M}^n$，它总是某个可逆矩阵序列的极限，这恰好是稠密性的定义。 $\square$

回到先前的问题，我们已知 $\mathbb{M} \ni A \mapsto CofA \in \mathbb{M}^n$ 为连续函数，且对可逆矩阵微分有如下表达

$$f'(A)H = tr\left((CofA)^T H\right), \quad \forall \det A \neq 0 \tag{4.1}$$

等式右端为连续函数的复合，因此保持连续性。根据刚才证明的稠密性结论，我们现在知道对任意 $A \in \mathbb{M}^n$，总能取一列可逆矩阵逼近它，这些可逆矩阵的微分满足(4.1)，因此不管 A 自身是否可逆，微分都取(4.1)的形式。

本章末尾补充一个赋范线性空间中的逆映射定理，与数学分析中的逆映射定理用法相同，只需掌握结论，无需探究证明，感兴趣的同学可以参考 Ciarlet 泛函分析的第七章。

Theorem 7.14-2 (invariance domain theorem for mappings of class $\mathcal{C}^1$ in Banach spaces) *Let there be given two Banach spaces X and Y, an open subset Ω of X, and a*

mapping $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; Y)$ with the following property:

$$f'(x) \in \mathcal{L}(X;Y) \text{ is invertible, so that } \left(f'(x)\right)^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X) \text{ at each } x \in \Omega.$$

(a) *Then $f : \Omega \to Y$ is an open mapping. In particular, $f(\Omega)$ is open in Y.*

(b) *If, in addition, the mapping $f : \Omega \to Y$ is injective, then f is a $\mathcal{C}^1$-diffeomorphism of Ω onto its image $f(\Omega)$.*

Chapter 5

均匀变形的刻画

10 月 11 日的课上，主要介绍了连续介质的变形概念以及均匀变形的 4 个命题和一个主要定理。

变形中我们假设了 ∇f 的行列式 $\det \nabla f > 0$. 但为什么不规定其恒小于零？这是由于在连续介质力学中，我们一般认为介质变化前后其手性应当保持不变。在古典微分几何中，我们定义右手系为：设 P 为基底 $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ 与自然基底 $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ 之间的换基矩阵，即

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}P$$

注意为了保证两组基都能张成全空间 $\mathbb{R}^3$，P 必须可逆，也就是 $\det P \neq 0$. 如果 $\det P > 0$，称 $\mathbf{v}$ 为右手系，同理若 $\det P < 0$ 则称为左手系。我们给出一个几何上的解释和一个代数上的解释。

考虑一个固体，它占据的空间为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω 为区域，即连通开集，并且边界 $\partial\Omega$ 是 Lipshitz 连续的，这样我们允许一些边和角这种非正则点或线出现。习惯上称 Ω 为参考构型，因为它通过变形 $f : \Omega \to f(\Omega)$ ——一个 C^3 的同胚, 变为一个变形后构型 $f(\Omega)$. 我们要求 f 是所谓

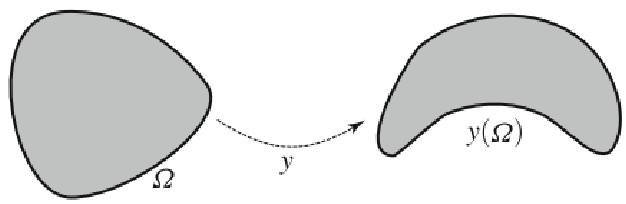


Figure 5.1: 固体构型

orientation-preserving 的，也就是

$$\det \nabla f(x) > 0.$$

几何解释: 对任意两个不同的，限制在 Ω 中的正则曲线 $\alpha(t)$ and $\beta(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$，令其在参数为 0 的点处交汇 $\alpha(0) = \beta(0)$，参考构型中 $t = 0$ 点处的切向量为

$$\alpha'(0),$$
$$\beta'(0)$$

那么在变形后的构型中这两条曲线分别表示为 $f(\alpha(t))$ and $f(\beta(t))$，根据复合函数求导的链式法则，$t = 0$ 点处的切向量满足

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=0} = [\nabla f(\alpha(0))]\alpha'(0),$$
$$\frac{d}{dt} f(\beta(t))|_{t=0} = [\nabla f(\beta(0))]\beta'(0)$$

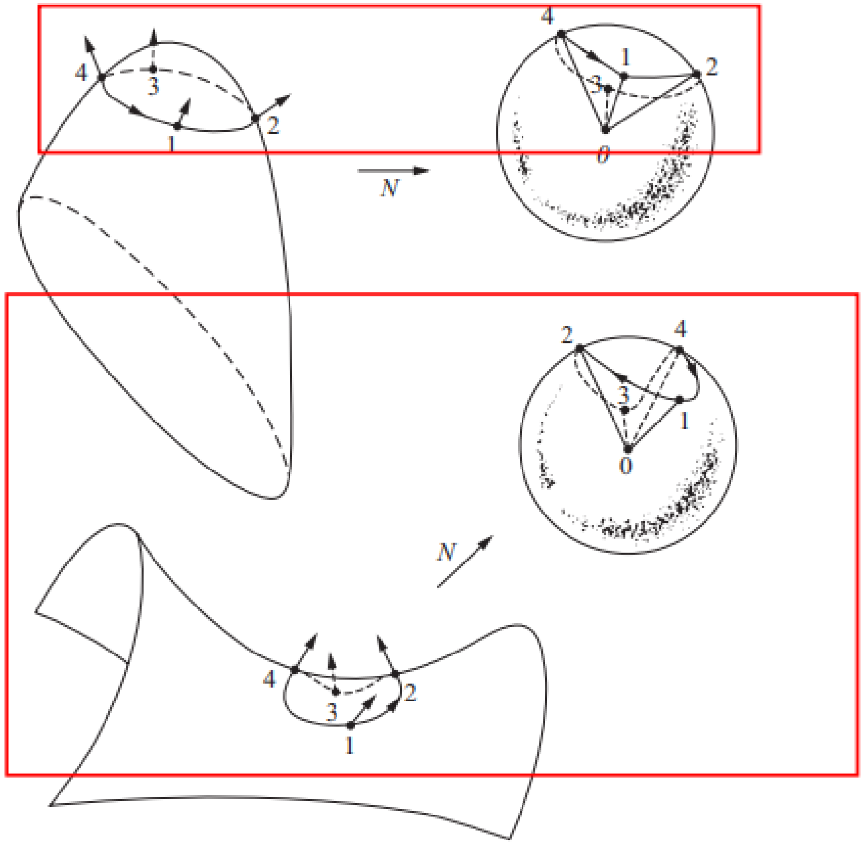


Figure 5.2:

说明变形梯度 ∇f 将变化前后的切向量联系在了一起。见 Figure 5.2。根据外积公式

$$\nabla f(\alpha'(0)) \wedge \nabla f(\beta'(0)) = \det(\nabla f)(\alpha'(0) \wedge \beta'(0))$$

令变化前的两个向量为一个点处某个曲面的切平面中的两个向量，由外积的右手法则和几何意义，如果上式中行列式为正，那么切平面的取向不变，行列式为负反之。Figure 5.2 上面的红色方框行列式为正，表示 orientation-preserving，可见一个闭环的顺时针和逆时针就是所谓的 orientation，逆时

针的环变化后仍然保持逆时针。下方为负的则是 orientation-reversing。一句题外话，事实上 Figure 5.2 是一个特别的变换，他把一个正则曲面的每个点映射到一个单位球面上，此时变形 f 称为高斯映射，所谓曲面的高斯曲率就是这个变形梯度（曲面参数化后变为二阶矩阵）的行列式。它描述了极限状态下变化前后闭环圈住的曲面的面积之比。

代数解释：对任意的二阶可逆张量 $T \in \mathcal{L}(V)$，由极分解定理可知存在等距映射 $S \in \mathcal{L}(V)$

$$T = S\sqrt{T * T} \tag{5.1}$$

现在不失一般性，假设无需平动，故课上的 $f = g$，令 $T = \nabla f$，$V = \mathbb{R}^3$

$$\det(\nabla f) = (\det S)(\det \sqrt{T * T}) \tag{5.2}$$

由于 $\sqrt{T * T}$ 是一个正定张量，行列式为正，因此 $\det \nabla f(x)$ 的符号只取决于等距映射 S 的符号，更进一步地，根据本文档第三章结尾的讨论，S 的符号又取决于有奇数个还是偶数个一维的子空间被 S 反转了，由于这里要求手性不变，所以反转个数为 0，偶数，因此行列式必须大于零。

另一部分，课上的几个命题和主要定理则说明了对于一个一般的变形，总可以把它拆解成刚体部分（平动复合上旋转）和伸缩变形部分。这几个命题和定理都依靠于所谓的均匀变形

$$f(x) = x_0 + F(x - x_0)$$

若 F 取 $SO(3)$ 元素 R 则为关于 x_0 的旋转；若取 $Psym$ 的元素 U 则为伸缩变换。我们已经知道如下等价关系

$$f \text{ 为均匀变形} \Leftrightarrow f(x) = x_0 + Const.F(x - x_0) \Leftrightarrow F := \nabla f = Constant$$

其中第一个等价关系是均匀变形的定义，第二个等价关系的充分性是容易验证的，其必要性的证明则需要一些笔墨。原则上我们知道要利用微分均值定理，但是严格的证明要稍费笔墨。将向量值函数 f 写为分量形式

$f_1, ..., f_n$，下面的定理是数学分析中熟知的，对从多维空间 $\mathbb{R}^n$ 映射到实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数，有

定理 5.1 (改造版微分平均值定理). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为<u>**凸**</u>区域，其上定义可微函数 f_i，$i = 1, ..., n$。$a, b \in D$，则在 a, b 连线上，存在一点 ξ 使得

$$f_i(b) - f_i(a) = Jf_i(\xi)(b - a)$$

这里有区域凸性的限制条件，这是为了保证两点连线仍囊括于该区域，使得问题良定。现在我们考虑的参考构型可未必是凸域，但是必须是道路连通的，因此对其内每一个点 M^*，都能找到一条参数化的连续曲线 $\alpha(t), t \in (-\delta, \delta)$ 将点 x 与点 x_0 连接。不妨设 $\alpha(-\delta+\epsilon_1) = x_0, \alpha(\delta-\epsilon_2) = x$，$\epsilon_1, \epsilon_2$ 为两个小正数。见 Fugure 5.3。

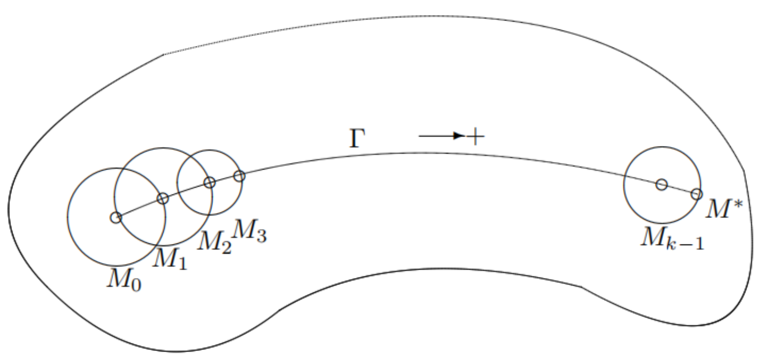


Figure 5.3: 连接参考构型的任意一点到固定点 M_0

设 M^*, M_0 的坐标分别为 x, x_0。根据海涅-波莱尔定理，连续函数 α 将有界闭区间 $[-\delta + \epsilon_1, \delta - \epsilon_2]$ 映射为紧集，因此连接 M^*, M_0 两点的曲线段为紧集，进而能被有限覆盖。取有限个小球，由于每个小球都是凸集，因此在每个小球中利用上述改造版微分均值定理得到一串递推方程：

$$f_i(x) - f_i(x_{k-1}) = Jf_i(\xi_k)(x - x_{k-1}),\ i = 1, 2, 3$$

对指标 k 一直递推到第零项，

$$f_i(x_1) - f_i(x_0) = Jf_i(\xi_1)(x_1 - x_0),\ i = 1, 2, 3$$

接着利用假设 $\nabla f = Const. \Rightarrow Jf = Const.$，代入以上各递推公式再求和，消去同类项后得到

$$f_i(x) - f_i(x_0) = Jf_i(x - x_0),\ i = 1, 2, 3$$

这是分量形式，将其写为向量形式则为

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \nabla f[x - x_0] \\ &= Const.F[x - x_0] \end{aligned}$$

由课上的命题 1，选择 x_0 为不动点。上式移项后得

$$f(x) = x_0 + Const.F(x - x_0)$$

证毕。