

Slovní úlohy na derivace

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Rychlosť rozširovania spáleništia

Oheň sa v suché plánine šíri do stále väčšieho kruhu. Polomer raste s rýchlosťou 2 metrov za minútu. Ak rýchlosť rastie plocha zasažená ohňom, keďže polomer spláleništa je 30 metrov?

Rychlosť rozširovania spáleništia

Oheň sa v takomto pláne šíri do stále väčšieho kruhu. Polomer rastie s rýchlosťou 2 metrov za minútu. Ak rýchlosť rastie plocha zapáleného ohňa, keďže polomer spáleništia je 30 metrov?

$$\frac{dr}{dt} = 2 \text{ m/min}$$

$$r = 30 \text{ m}$$

$$\frac{dS}{dt} = ?$$

$$S = \pi r^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

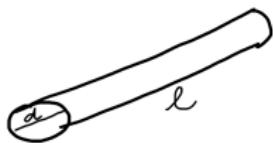
dosadíme: $\frac{dS}{dt} = 2\pi \cdot 30 \cdot 2 = \underline{\underline{377 \text{ m}^2/\text{min}}}$

Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti

Kovová tyč o průměru 6 centimetrů a délce 40 centimetrů je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka tyče rychlostí 0,0005 centimetrů za minutu a průměr tyče roste rychlostí 0,0002 centimetrů za minutu. Jak rychle roste objem tyče?

Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti

Kovová tyč o průměru 6 centimetrů a délce 40 centimetrů je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka tyče rychlostí 0,0005 centimetrů za minutu a průměr tyče roste rychlostí 0,0002 centimetrů za minutu. Jak rychle roste objem tyče?



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l$$

$$r = \frac{d}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$l = 40 \text{ cm}$$

$$\frac{dl}{dt} = 0,0005 \text{ cm/min}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0,0001 \text{ cm/min}$$

$$\frac{dV}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot l + \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dl}{dt}$$

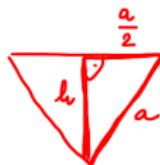
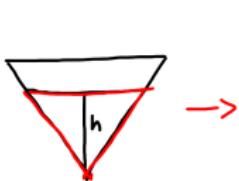
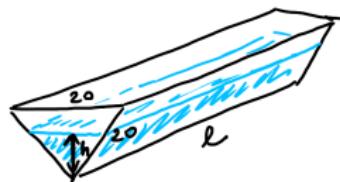
dosadíme : $\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 6 \cdot 0,0001 \cdot 40 + \pi \cdot 9 \cdot 0,0005 = \underline{\underline{0,0895 \text{ cm}^3/\text{min}}}$

Rychlosť s ktorou roste hladina v nádrži

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníka o straně 20 centimetrů a je dlouhé 80 centimetrů. Přítéká do něj voda rychlosťí $15 \text{ cm}^3/\text{min}$. Hloubka vody v korytě je 8 cm. Jak rychle roste hladina, tj. hloubka vody?

Rychlosť s ktorou roste hladina v nádrži

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníka o straně 20 centimetrů a je dlouhé 80 centimetrů. Přítéká do něj voda rychlosťí $15 \text{ cm}^3/\text{min}$. Hloubka vody v korytě je 8 cm. Jak rychle roste hladina, tj. hloubka vody?



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$
$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$l = 80 \text{ cm}$$

$$\frac{dV}{dt} = 15 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$V = \frac{1}{2}a \cdot h \cdot l$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h \cdot h \cdot l = \frac{1}{\sqrt{3}} h^2 \cdot l$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2h \cdot \frac{dh}{dt} \cdot l \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2hl} \cdot \frac{dV}{dt}}$$

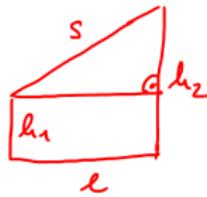
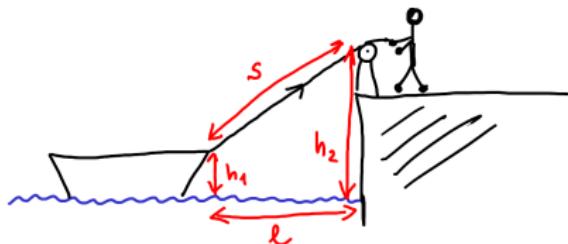
$$\text{dosadíme: } \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 8 \cdot 80} \cdot 15 = \underline{\underline{0,02 \text{ cm/min}}}$$

Rychlosť prítahované lode

Muž na molu prítahuje pre kladku loď na lanu. Lano je uvádzané na predi 40 centimetrov nad vodou. Rýchlosť lana je 1 metro za sekundu. Loď je 7 metrov od mola, vrch kladky je 3 metry nad vodou. Jak rýchlosť se blíží loď k molu?

Rychlosť približujúcej sa lode

Muž na molu približuje loď cez kladku lanom. Lano je uvažované na prednej časti 40 cm nad vodou. Rýchlosť lana je 1 m/s. Loď je 7 m od mola, vrch kladky je 3 m nad vodou. Kakoľko rýchlosť sa blíži loď k molu?



$$\begin{aligned}h_1 &= 0,4 \text{ m} \\h_2 &= 3 \text{ m} \\l &= 7 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\frac{ds}{dt} = 1 \text{ m/s}$$

$$\frac{dl}{dt} = ?$$

$$s^2 = l^2 + (\underbrace{h_2 - h_1}_{\text{konst.}})^2$$

$$2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2l \cdot \frac{dl}{dt} \Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{l^2 + (h_2 - h_1)^2}}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

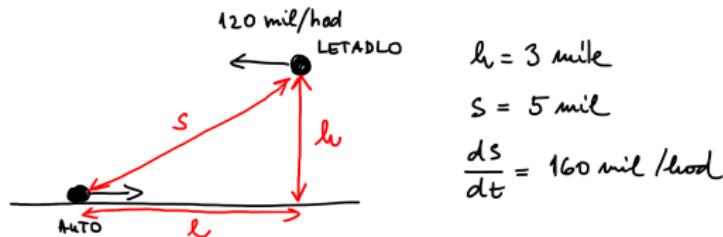
$$\text{dosadíme: } \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{49 + (2,6)^2}}{7} \cdot 1 = \underline{\underline{1,067 \text{ m/s}}}$$

Dálniční hlídka

Letadlo dálniční hlídky letí 3 míle vysoko nad vozovkou rychlostí 120 mil za hodinu. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu letadla a zjistí, že auto se při vzdálenosti 5 mil od auta přibližuje rychlostí 160 mil za hodinu. Určete rychlosť auta.

Dálniční hlídka

Letadlo dálniční hlídky letí 3 míle vysoko nad vozovkou rychlostí 120 mil za hodinu. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu letadla a zjistí, že auto se při vzdálenosti 5 mil od auta přibližuje rychlostí 160 mil za hodinu. Určete rychlosť auta.



$$s^2 = l^2 + h^2 \underset{\text{konst}}{\Rightarrow} 2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2l \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dl}{dt} = \frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{s}{\sqrt{s^2 - h^2}} \cdot \frac{ds}{dt}}$$

$$\text{dosadíme: } \frac{dl}{dt} = \frac{5}{\sqrt{25-9}} \cdot 160 = \underline{200 \text{ mil/hod}} \quad \dots \text{součet rychlosťi auta a letadla}$$

$$\text{rychlosť auta: } N = 200 - 120 = \underline{\underline{80 \text{ mil/hod}}}$$

Žebřík

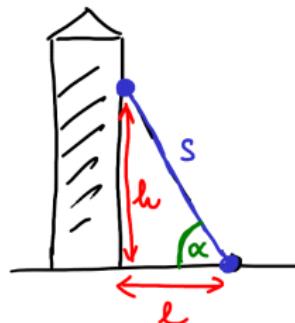
O dům je opřený žebřík dlouhý 13 metrů. Náhle začne základna žebříku podkluzovat. Ve chvíli, kdy je základna žebříku 12 metrů od domu, klouže žebřík rychlostí 5 metrů za sekundu.

- (a)** Jakou rychlosťí klesá vršek žebříku po zdi domu?
- (b)** Jakou rychlosťí se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

Žebřík

O dům je opřený žebřík dlouhý 13 metrů. Náhle začne základna žebříku podkluzovat. Ve chvíli, kdy je základna žebříku 12 metrů od domu, klouže žebřík rychlostí 5 metrů za sekundu.

- (a) Jakou rychlosťí klesá vršek žebříku po zdi domu?
- (b) Jakou rychlosťí se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?



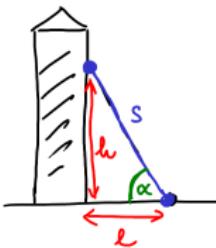
$$s = 13 \text{ m}$$

$$l = 12 \text{ m}$$

$$\frac{dl}{dt} = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{a)} \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

$$\text{b)} \quad \frac{d\alpha}{dt} = ?$$



$$s = 13 \text{ m}$$

$$l = 12 \text{ m}$$

$$\frac{dl}{dt} = 5 \text{ m/s}$$

$$a) \frac{dh}{dt} = ?$$

$$b) \frac{d\alpha}{dt} = ?$$

$$a) \sum_{\text{koust}} S^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow 0 = 2h \cdot \frac{dh}{dt} + 2l \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{l}{h} \cdot \frac{dl}{dt} = - \frac{l}{\sqrt{s^2 - l^2}} \cdot \frac{dl}{dt}$$

dosadíme: $\frac{dh}{dt} = - \frac{12}{\sqrt{169 - 144}} \cdot 5 = \underline{\underline{-12 \text{ m/s}}}$

$$b) \tan \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{h}{l}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + (\frac{h}{l})^2} \cdot \frac{\frac{dh}{dt} \cdot l - h \cdot \frac{dl}{dt}}{l^2} = \frac{\frac{dh}{dt} \cdot l - h \cdot \frac{dl}{dt}}{l^2 + h^2}$$

vis a
(-12) (5)

dosadíme: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-12 \cdot 12 - 5 \cdot 5}{13^2} = \underline{\underline{-1 \text{ rad/s}}}$

Nafukování míče

Kulatý míč je nafukován rychlostí $5 \text{ cm}^3/\text{min}$. Jak rychle roste poloměr míče v okamžiku, kdy je jeho velikost 10 centimetrů?

Nafukování míče

Kulatý míč je nafukován rychlostí $5 \text{ cm}^3/\text{min}$. Jak rychle roste poloměr míče v okamžiku, kdy je jeho velikost 10 centimetrů?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dV}{dt} = 5 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

dosaďme:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 100} \cdot 5 = \underline{\underline{0,004 \text{ cm/min}}}$$