Markovovy řetězce

Matematika (MTL)

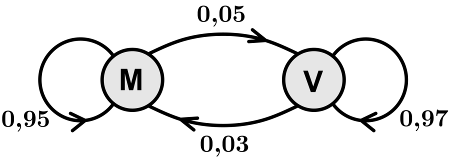
LDF MENDELU

Úvod

- Modelujeme vývoj systému v čase.
- Jednotlivé části systému jsou rozděleny do konečného počtu navzájem disjunktních stavů.
- Jednotlivé části mohou měnit svůj stav, přičemž pravděpodobnost změny je dána pouze současným stavem.
- Vegetace na stanovištích, druhové složení v lese, hydrologické modely, předpověď počasí a další.

Migrace mezi městem a venkovem (model 2 stavů)

V počátečním období je 60% populace ve městě a 40% obyvatel na venkově. Každý rok zůstane 95% obyvatel města ve městě a 5% se stěhuje na venkov. Podobně 97% obyvatel venkova zůstane na venkově a 3% se stěhují do města.



Poměrné složení obyvatel ve městě a na venkově pro další rok lze spočítat následovně.

- Ve městě to bude
$$0,95 \cdot 0,6 + 0,03 \cdot 0,4 = 0,582.$$
- Na venkově to bude
$$0,97 \cdot 0,4 + 0,05 \cdot 0,6 = 0,418.$$

Předchozí výpočet se dá zpřehlednit pomocí maticového násobení. Uspořádejme populaci města a venkova do vektoru tak, že první složka bude populace města a druhá složka bude populace venkova. Na začátku je poměrné složení populace

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

Po jednom roce bude složení populace

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,582 \\ 0,418 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li matici

$$A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix},$$

pak po jednom roce bude složení populace

$$\vec{x}(1) = A \cdot \vec{x}(0),$$

po dvou letech

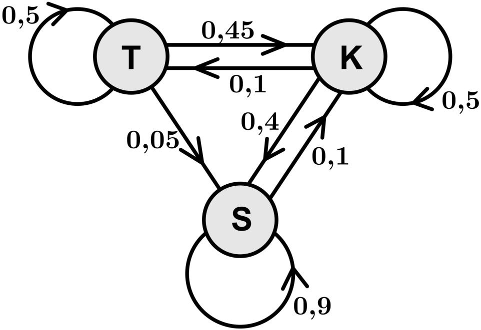
$$\vec{x}(2) = A \cdot \vec{x}(1) = A^2 \cdot \vec{x}(0)$$

a obecně po n letech

$$\vec{x}(k) = A^k \cdot \vec{x}(0).$$

Model tří stavů - přirozený les

Předpokládejme tři stavy vegetace v dané oblasti: traviny (T), křoviny (K) a vysoké stromy (S), přičemž počáteční poměrné zastoupení jednotlivých vegetací je: $1/2$ traviny, $1/4$ křoviny, $1/4$ stromy. Pozorováním vývoje byly stanoveny pravděpodobnosti změn jednotlivých stavů vegetace, viz schéma:



Uspořádejme vegetace do vektoru, kde první složka jsou traviny, druhá složka jsou křoviny a třetí složka jsou stromy. Pak lze výchozí stav popsat vektorem

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

a matice, pomocí které dostaneme složení vegetace v dalším období, je

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,45 & 0,5 & 0,1 \\ 0,05 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

V dalším období tedy máme

$$\vec{x}(1) = A \cdot \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,45 & 0,5 & 0,1 \\ 0,05 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,275 \\ 0,375 \\ 0,35 \end{pmatrix}.$$

Analogicky můžeme spočítat složení vegetace v dalších obdobích.