

Úloha na soustavu lineárních rovnic

Zadání:

Tři stroje A, B, C mají vykonat určitou zadanou práci. Pokud pracují současně stroje A a B, práci vykonají za 2 hodiny. Pokud současně pracují stroje A a C, vykonají práci za 3 hodiny a stroje B a C spolu vykonají práci za 4 hodiny. Jak dlouho bude trvat vykonání práce při současném zapojení všech tří strojů A, B a C?

A+B	1 práce	2 hodiny
A+C	1 práce	3 hodiny
B+C	1 práce	4 hodiny

A	1 práce	a hodin	\Rightarrow	1 hodina	$\frac{1}{a}$ práce
B	1 práce	b hodin	\Rightarrow	1 hodina	$\frac{1}{b}$ práce
C	1 práce	c hodin	\Rightarrow	1 hodina	$\frac{1}{c}$ práce

A+B	1 hodina	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ práce	\Rightarrow	2 hodiny	$2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ práce
A+C	1 hodina	$\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ práce	\Rightarrow	3 hodiny	$3 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ práce
B+C	1 hodina	$\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ práce	\Rightarrow	4 hodiny	$4 \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ práce

Soustava lineárních rovnic:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 1 \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ 4y + 4z = 1 \end{array} \quad \text{při substituci } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 1 \end{array} \right)$$

$$24z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{24} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 24 \text{ hodin (stroj C samotný by práci vykonal za 24 hodin)}$$

$$6y - 6z = 1 \Rightarrow 6y - \frac{6}{24} = 1 \Rightarrow 6y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{24} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ hodin}$$

(stroj B samotný by práci vykonal za 4,8 hodiny, tj. 4 hodiny 48 minut)

$$2x + 2y = 1 \Rightarrow 2x + \frac{10}{24} = 1 \Rightarrow 2x = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{7}{24} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{24}{7} \text{ hodiny}$$

(stroj A samotný by práci vykonal přibližně za 3 hodiny 26 minut /necelých/)

A+B+C	1 hodina	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{24} + \frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ práce
A+B+C	$\frac{24}{13}$ hodiny ≈ 1 hod 51 min	1 práce

Všechny 3 stroje společně práci vykonají přibližně za 1 hodinu a 51 minut.