Jednoduché modely populací

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Exponenciální růst populace (Malthusův model)

Označme

$$\begin{aligned} y(t) \ldots &\ \text{velikost populace v čase } t \\ p \ldots &\ \text{porodnost} \\ u \ldots &\ \text{úmrtnost} \end{aligned}$$

Porodnost (úmrtnost) je množství nově narozených (zemřelých) jedinců za jednotku času, vztaženo na jednotku populace. Předpokládáme je zpravidla konstantní. Vývoj populace lze popsat lineární homogenní rovnicí:

$$y' = (p - u)y.$$

Řešením je funkce

$$y = y_0 e^{(p-u)t},$$

kde y_0 je počáteční velikost populace, což vyjádříme podmínkou $y(0) = y_0$.
Je-li $p > u$, populace roste, je-li $p < u$, populace vymírá.

Populace roste nebo klesá exponenciálně, pokud prostředí, ve kterém všichni jedinci žijí, je konstantní. To může platit pouze v krátkém časovém období.
Z dlouhodobého hlediska není exponenciální růst populací příliš realistický, neboť je potřeba uvažovat omezený zdroj živin a životního prostoru, což má za následek konkurenci mezi jednotlivci.

Exponenciální růst s migrací

Označme

$$\begin{aligned} y(t)\dots\ & \text{velikost populace v čase } t \\ p\dots\ & \text{porodnost} \\ u\dots\ & \text{úmrtnost} \\ i\dots\ & \text{počet imigrantů za jednotku času} \\ e\dots\ & \text{počet emigrantů za jednotku času} \end{aligned}$$

Vývoj populace lze popsat lineární rovnicí:

$$y' = (p-u)y + i - e.$$

Logistická rovnice (Verhulst-Pearlův model)

Označme

$y(t) \ldots$ velikost populace v čase t

$K \ldots$ nosná kapacita prostředí (maximální velikost populace)

$r \ldots$ vnitřní míra populačního růstu z exponenciální rovnice

Vývoj populace lze popsat rovnicí:

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

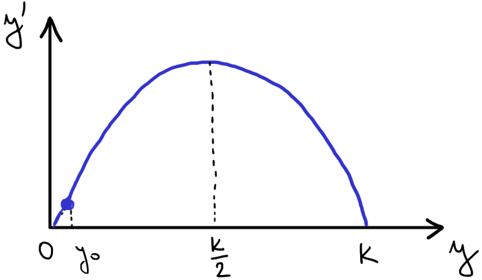
Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a její řešení lze vyjádřit jako funkci

$$y = \frac{K}{1 + e^{a-rt}},$$

kde $a = \ln((K - y_0)/y_0)$ a $y_0 = y(0)$.

Velikost populace a rychlost růstu populace z logistické rovnice graficky:

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$



$$y = \frac{K}{1 + e^{a-rt}}$$