

Soustavy lineárních rovnic

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Základní pojmy

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nazýváme soustavu rovnic

$$(*) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Proměnné x_1, x_2, \dots, x_n nazýváme **neznámé**. Reálná čísla a_{ij} nazýváme **koeficienty levých stran**, reálná čísla b_j **koeficienty pravých stran** soustavy rovnic. **Řešením** soustavy rovnic rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel t_1, t_2, \dots, t_n , po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy jsou všechny rovnice splněny.

Platí-li v soustavě $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, nazývá se soustava **homogenní**.

Definice (Matice soustavy a rozšířená matice soustavy)

- Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice soustavy**.

- Matice

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy**.

Maticový zápis soustavy (*)

Označme

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor \vec{b} se nazývá **vektor pravých stran**. Vektor \vec{x} se nazývá **vektor neznámých**.

Soustavu (*) lze psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj.

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Věta (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic (*) má řešení právě tehdy, když její matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost, tj.

$$h(A) = h(A_r).$$

Poznámka

Mohou nastat tři možnosti:

- Pokud $h(A) < h(A_r)$, pak soustava nemá řešení,
- Pokud $h(A) = h(A_r) = n$, pak má soustava právě jedno řešení,
- Pokud $h(A) = h(A_r) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ parametrů (volných neznámých).

Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení. Po dosazení vidíme, že n -tice $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme triviální. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Gaussova eliminační metoda

- ① Rozšířenou matici soustavy A_r převedeme do schodovitého tvaru (pomocí ekvivalentních řádkových úprav). Určíme $h(A_r)$ a $h(A)$ a na základě Frobeniový věty zjistíme, zda má soustava řešení.
- ② Je-li $h(A) = h(A_r)$, přepíšeme schodovitý tvar matice A_r zpět do soustavy lineárních rovnic (s původními neznámými). Takto získaná soustava má stejně řešení jako původní soustava (*).
- ③ Tuto novou soustavu řešíme odspodu:
 - Je-li $h(A) = h(A_r) = n$, pak je v každé rovnici právě jedna nová neznámá \Rightarrow **jediné řešení**
 - Je-li $h(A) = h(A_r) < n$, pak existuje alespoň jedna rovnice se dvěmi nebo více novými neznámými. Řekněme, že nových neznámých je $k > 1$. V tom případě zvolíme $k - 1$ z těchto neznámých za **parametry (volné neznámé)** a zbývající neznámou vyjadříme v závislosti na těchto parametrech. Výsledný zápis řešení se může lišit v závislosti na tom, které neznámé zvolíme jako parametry (existuje více způsobů zápisu řešení). Za parametry můžeme dosazovat libovolná reálná čísla (nekonečně mnoho možností) \Rightarrow **nekonečně mnoho řešení**.

Příklad (Jedno řešení)

Řešte soustavu:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 10 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[-2]{+} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[-1]{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Hodnost matice soustavy (ozn. A)
a rozšířené matice (ozn. A_r):

$$h(A) = h(A_r) = 3$$

počet neznámých: $n = 3$

\Rightarrow 1 řešení

Řešíme odspodu, z výsledné matice:

$$x_3 = 2$$

$$2x_2 + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$$

Příklad (Nekonečně mnoho řešení, 1 parametr)

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$$

Řešte soustavu:

$$x_2 - x_3 + x_4 = -3$$

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$

$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad :2 \quad} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array} \right) \mid :2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(A) = h(A_r) = 3$$

počet neznámých: $n = 4$
 $\Rightarrow \infty$ řešení, 1 parametr

$$x_3 - 2x_4 = 6 : \boxed{x_4 = t, t \in \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{x_3 = 6 + 2t}$$

$$x_2 - (6 + 2t) + t = -3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3 + t}$$

$$x_1 - 2(3 + t) + 3(6 + 2t) - 4t = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = -8}$$

Příklad (Nekonečně mnoho řešení, 2 parametry)

Řešte soustavu:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -3 \\ + \\ + \\ + \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(A) = h(A_r) = 2$$

počet neznámých: $n = 4$

$\Rightarrow \infty$ řešení, 2 parametry

$$-x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 : \quad x_4 = t, x_3 = s, t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x_2 = -6s + 5t$$

$$x_1 + 2(-6s + 5t) + 4s - 3t = 0 \Rightarrow x_1 = 8s - 7t$$

Příklad (Žádné řešení)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \text{Řešte soustavu: } \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[-2]{+} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^{-4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[-1]{+}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 2, \quad h(A_r) = 3$$

$h(A) \neq h(A_r) \implies$ soustava nemá řešení.

Soustava s regulární čtvercovou maticí

Věta (Vlastnosti regulární matice)

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- ① A je invertibilní, tj. A^{-1} existuje.
- ② $\det A \neq 0$
- ③ $h(A) = n$
- ④ Řádky (sloupce) matice A jsou lineárně nezávislé.
- ⑤ **Soustava lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ má jediné řešení pro libovolný vektor \vec{b} .**

Řešení pomocí inverzní matice

Věta

Nechť A je čtvercová regulární matici řádu n (tj. inverzní matici existuje). Pak má soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ jediné řešení

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Příklad

Řešte soustavu:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

Matice soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k matici A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor řešení: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\implies \boxed{x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -2}.$$

Využití systémů počítačové algebry

Wolfram Alpha:

<http://www.wolframalpha.com/>

Příklad

Najděte řešení soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 3.\end{aligned}$$

Řešení pomocí systému Wolfram Alpha:

solve x1+x2+2*x3=1, 2x1+x2+3x3=2, x1+x2+x3=3