Leslieho model vývoje populace

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Leslieho model obecně

Uvažujme populaci, která je rozdělena do n věkových tříd, přičemž pro každou věkovou třídu je dána pravděpodobnost dožití se do další věkové třídy a průměrný počet potomků připadající na jednoho jedince.

- Průměrný počet potomků jedince z i-té věkové třídy označme f_i, kde $i = 1, 2, \dots, n$.
- Pravděpodobnost, že jedinec z i-té věkové třídy se dožije do další věkové třídy označme p_i, kde $i = 1, 2, \dots, n-1$. Předpokládáme, že jedinci z nejstarší věkové třídy se dalšího období již nedožijí.

Leslieho model vyjadřuje, jak se změní věkové složení dané populace v dalším období. Označme $x_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$ počet jedinců i-té věkové třídy dané populace v k-tém období. Věkové složení populace v k-tém období vyjádříme vektorem $\vec{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$. Leslieho model zapíšeme ve tvaru

$$\vec{x}(k+1) = A \cdot \vec{x}(k),$$

ke A je tzv. Leslieho matice.

Leslieho model pro tři a čtyři věkové třídy

Leslieho model pro tři věkové třídy je

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}.$$

Leslieho model pro čtyři věkové třídy je

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}.$$

Z počátečního období o několik období dál

Uvažujme počáteční období $k = 0$ a vektor populace v tomto období $\vec{x}(0)$.

Pro následující období $k = 1$ máme

$$\vec{x}(1) = A \cdot \vec{x}(0)$$

a podobně pro další období

$$\vec{x}(2) = A \cdot \vec{x}(1) = A^2 \cdot \vec{x}(0),$$

$$\vec{x}(3) = A \cdot \vec{x}(2) = A^3 \cdot \vec{x}(0)$$

až obecně

$$\vec{x}(k) = A^k \cdot \vec{x}(0).$$

Příklad

Uvažujme populaci rozdělenou do tří věkových tříd - první třída do jednoho roku věku, druhá třída od jednoho do dvou let a třetí třída od dvou do tří let. Předpokládejme, že plodní jsou jedinci od jednoho roku věku a že jedinec druhé třídy má průměrně jednoho potomka a jedinec třetí třídy má průměrně pět potomků. Pravděpodobnost, že jedinec první třídy se dožije do věku druhé třídy je $0,3$ a pravděpodobnost, že jedinec druhé třídy se dožije do věku třetí třídy je $0,5$. Předpokládejme, že populace se aktuálně skládá pouze z jedinců třetí třídy.

Máme $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = 5$, $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,5$.

Leslieho matice je tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

a pokud budeme velikost populace měřit v násobcích velikosti populace třetí třídy z počátečního období, pak počáteční rozložení populace je

$$\vec{x}(0) = (0,0,1)^T.$$

V dalších obdobích dostaneme:

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0,75 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,75 \\ 0,45 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}(5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ 0,45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 1,125 \\ 0,225 \end{pmatrix}$$

a ve výpočtu můžeme pokračovat dál.