Mathematik der Finanzmärkte I
Repetitionsblatt A: Schlüsselformeln der Lektionen 1-5

June 15, 2020

1 Cash-Flow-Ströme und festverzinsliche Wertpapiere

Wir betrachten als Ströme von Cash-Flows CF $= (x_0, x_1, ..., x_n)$ zu den Zeitpunkten $(t_0, t_1, ..., t_n)$, wobei folgendes gilt:

- t_i ist ein beliebiger Zeitpunkt oder bezeichnet periodische Zeitpunkte mit m Perioden pro Jahr.
- Negative x_i bezeichnen Zahlungsausgänge und positive x_i sind Zahlungseingänge.
- Für deterministische Zahlungsströme sind die x_i Zahlen.
- Für nicht-determinische Zahlungsströme sind die x_i Zufallsvariablen.

Beispiele für deterministische Zahlungsströme:

- 5-Jährige Staatsanleihe mit Nennwert CHF 100 und 5% jährlichem Coupon:

  $$\text{CF} = \text{CHF}\,(-100, 5, 5, 5, 5, 105),$$

  wobei $t_0 =$ heute und $t_5 =$ (heute + 5 Jahre).
- Ewige Rente (Annuität), die CHF 300'000 kostet und jeden Monat CHF 1'000 auszahlt: $\text{CF} = 1'000 \times (-300, 1, 1, 1, \dots)$, wobei $t_0 =$ heute, $t_1 =$ in 1 Monat, $n = \infty$
- Amortisierende Hypothek über CHF 500'000, die über 6 Jahre hinweg durch monatliche Zahlung von CHF 2'000 getilgt wird: $\text{CF} = 1'000 \times (500, -2, \dots -2)$, wobei $n = 72$

Beispiele für nicht-deterministische Zahlungsströme:

- Aktie, die heute CHF 60 kostet, in 3 Jahren zum unbekannten Preis S_3 verkauft werden soll, und an den Jahresenden noch unbekannte Dividenden d_1, d_2, d_3 zahlt: $\text{CF} = (-60, d_1, d_2, S_3 + d_3)$ mit Zufallsvariablen S_3, d_1, d_2, d_3.

- Floating Rate Bond: 5-jährige Anleihe mit Nennwert CHF 100 und variablem Coupon r_1: CF $= 100 \times (-1, r_1, r_2, r_3, r_4, 1 + r_5)$, wobei r_i zu Beginn von Jahr i fixiert wird. D.h., r_1 ist der (bekannte) heutige Ein-Jahres-Zins, r_2 der (heute noch unbekannte) Ein-Jahres-Zins in einem Jahr, usw. r_2 bis r_5 sind also Zufallsvariablen.

- Unternehmensanleihe mit Nennwert CHF 1'000, Laufzeit 1 Jahr, 10% Coupon, und Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 5\%$: $CF = 1000 \times (-1, x_1)$, wobei: $x_1 = 1.1$ mit Wahrscheinlichkeit 95%, und $x_1 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 5%.

- Unternehmensanleihen werden von Rating-Agenturen wie Moody's und S&P (Standard & Poor's) nach ihrer Ausfallwahrscheinlichkeit eingestuft. Z.B. gilt für das S&P Rating:
  - AAA, AA, A, oder BBB: jährliche Ausfallwahrscheinlichkeit von bis zu ca. 2%
  - BB, B, CCC, CC, oder C: High Yield Bonds mit höherer Ausfallwahrscheinlichkeit
  - D: Bonds in Default.

Übung:

Eine Versicherung hat Ende 2013 folgende Transaktionen getätigt, jeweils am Jahresende:

- Kauf einer 5-jährigen Staatsanleihe über CHF 500'000 mit 3% Coupon

- Kauf eines Aktienanteils an Firma X für CHF 500'000. Die Aktien zahlten Ende 2016 eine Dividende von CHF 20'000. Ende 2018 wurden die Aktien für CHF 550'000 verkauft.

- Verkauf einer Erdbebenversicherung über CHF 100'000 mit jährlicher Prämie von CHF 2'000, zahlbar jeweils am Ende des Vorjahres. Das Erdbeben trat Ende 2017 ein und die Versicherungssumme wurde fällig.

- Verkauf einer Gebäudeversicherung mit Deckungssumme bis zu CHF 500'000 mit jährlicher Prämie von CHF 5'000, zahlbar jeweils am Ende des Vorjahres. Es entstand bis Ende 2018 kein Gebäudeschaden

- Verkauf einer ewigen Annuität im Wert von CHF 1 Mio, die dem Käufer jährlich CHF 25'000 ausbezahlt.

1. Was war der gesamte Cash Flow des Portfolios von 2013-2018?

2. Welche der Cash Flows waren Ende 2013 bereits fixiert (deterministisch), und welche waren aus damaliger Sicht Zufallsvariabeln?

Lösung als R-Code:

```
CF1 = c(-500, 15, 15, 15, 15, 515)
CF2 = c(-500,0,0,20,0,550)
CF3 = c(2, 2, 2, 2, -98, 2)
```

```
CF4 = c(5, 5, 5, 5, 5, 5)
CF5 = c(1000, -25, -25, -25, -25, -25)
CF = CF1 + CF2 + CF3 + CF4 + CF5
CF
[1]  7, -3, -3, 17, -103, 1047
```

2 Verzinsung und Diskontierung

Wir nehmen an, unser Geld sei auf einer idealen Bank. Guthaben und Schulden werden mit dem gleichen Zinssatz r verzinst. Es gibt weder Gebühren noch Transaktionskosten.

Das Jahr ist in Perioden mit Länge T unterteilt. Alle Transaktionen werden am Ende einer Periode getätigt. Der Fall $T \to 0$ entspricht stetiger Zeit.

Der Zinssatz sei r, und zwar mit m Zinszahlungen pro Jahr, also $m = 1$ für jährliche Verzinsung, $m = 2$ für halbjährliche Verzinsung, usw.

Nach n Jahren ist der Wert P_n einer Anlage mit heutigem Wert P_0 bei jährlicher Verzinsung:

$$P_n = (1 + r)^n \times P_0 \to P_0 = d_n \times P_n$$

mit Diskontierungsfaktor $d_n = \frac{1}{(1+r)^n}$.

Bei unterjähriger Verzinsung (m mal pro Jahr) ist der Wert P_k nach k Zinsperioden (also nach k/m Jahren):

$$P_k = (1 + r/m)^k \times P_0 \to P_0 = d_k \times P_n$$

mit Diskontierungsfaktor $d_k = \frac{1}{(1+r/m)^k}$.

Bei stetiger Verzinsung ist der Wert P_t nach t Jahren:

$$P_t = \exp(rt) \times P_0 \to P_0 = d_t \times P_t$$

mit Diskontierungsfaktor $d_t = exp(-rt)$.

Die Diskontierungsfaktoren $d(T)$ über fixe Perioden T ergeben sich also wie folgt:

Diskontierungsfaktoren $d(T)$	$T =$ 1 Monat	3 Monate	6 Monate	1 Jahr
Jährliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{(1+r)^{(1/12)}}$	$\frac{1}{(1+r)^{(1/4)}}$	$\frac{1}{(1+r)^{(1/2)}}$	$\frac{1}{(1+r)}$
Halbjährliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{(1+\frac{r}{2})^{(1/6)}}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{2})^{(1/2)}}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{2})}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{2})^2}$
Vierteljährl. Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{(1+\frac{r}{4})^{(1/3)}}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{4})}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{4})^2}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{4})^4}$
Monatliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{(1+\frac{r}{12})}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{12})^3}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{12})^6}$	$\frac{1}{(1+\frac{r}{12})^{12}}$
Stetige Verzinsung zum Zinssatz r	$\exp(\frac{-r}{12})$	$\exp(\frac{-r}{4})$	$\exp(\frac{-r}{2})$	$\exp(-r)$

Übungen:

(a) Was ist der Diskontierungsfaktor über 3 Monate bei einem Zinssatz von 5% mit jährlicher Verzinsung?

Lösung: $1.05^{-1/4}$

(b) Der Diskontierungsfaktor über 7 Monate ist 0.92.
Was ist der entsprechende Zinssatz mit vierteljährlicher Verzinsung?

Lösung: $(1 + r/4)^{(-7/3)} = 0.92 \rightarrow r = 4 \times (0.92^{(-3/7)} - 1) = 14.6\%$

(c) Der Zinssatz für ein 2-Jahres-Darlehen mit halbjährlicher Verzinsung ist 3%.
Was ist der äquivalente Zinssatz mit stetiger Verzinsung (also der Zinssatz, der zum gleichen Diskontierungsfaktor führt)?

Lösung: $1.015 = \exp(r/2) \rightarrow r = 2 \times \ln(1.015) = 2.98\%$

3 Barwert, Endwert und interner Zinssatz

Barwert und Endwert:

Wir betrachten einen Cash Flow $\mathrm{CF}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Der Barwert BW des Cash Flows (Wert zu Beginn) und der Endwert EW (Wert am Ende) sind bei jährlichem Cash Flow und jährlicher

Verzinsung:

$$\mathrm{BW} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i}, \quad \mathrm{EW} = \mathrm{BW} \times (1+r)^n$$

Bei unterjähriger Verzinsung und unterjährigem Cash Flow mit m Perioden pro Jahr:

$$\mathrm{BW} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+\frac{r}{m})^k}, \quad \mathrm{EW} = \mathrm{BW} \times \left(1+\frac{r}{m}\right)^n$$

Bei stetiger Verzinsung zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$:

$$\mathrm{BW} = \sum_{k=0}^{n} x(t_k)\, e^{rt_k}, \quad \mathrm{EW} = \mathrm{BW} \times \exp^{(rt_n)}$$

Beispiel: Wert einer n-jährigen Annuität mit jährlicher Zahlung von A (ohne den Preis $-x_0$)

$$\mathrm{BW} = \sum_{k=1}^{n} \times \frac{A}{(1+r)^k} = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Dies folgt durch wiederholte Anwendung der Formel $\sum_{(i=0)}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$.

Interner Zinssatz

Der interne Zinssatz λ eines Cash Flows ist der Zinssatz, bei dem dessen Barwert Null ist:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} x_i c^i, \quad c = \frac{1}{(1+\lambda)}$$

Beispiel: n-jährige Anleihe mit Nennwert N, Coupon c, jährlicher Verzinsung und heutigem Preis P: der Cash Flow ist $\mathrm{CF} = (-P, C, C, \ldots, N+C)$, daher

$$P = \frac{N}{(1+\lambda)^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+\lambda)^k} = \frac{N}{(1+\lambda)^n} + \frac{C}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\right).$$

λ wird in diesem Fall "Umlaufrendite" genannt. Es ist der Marktzins der Anleihe, also der Zins, bei dem der Wert der Anleihe dem beobachteten Marktpreis entspricht.

Aufgelaufene Zinsen:

Beim Kauf einer Anleihe auf dem Sekundärmarktwerden werden auf den notierten Preis ("Clean Price") die seit der letzten Couponzahlung aufgelaufenen Zinsen AZ aufgeschlagen (sie gehören dem bisherigen Besitzer der Anleihe, werden aber erst mit dem nächsten Coupon bezahlt). Dies ergibt den "Dirty Price":

$$\text{Dirty Price} = \text{Clean Price} + \text{AZ},$$

$$AZ = \frac{\text{Anzahl der Tage seit dem letzten Coupon}}{\text{Anzahl der Tage in der laufenden Couponperiode}} \times \text{Coupon}$$

Übungen:

1. Berechnen Sie den Barwert und den Endwert einer Anleihe über CHF 10'000 mit 5 Jahren Restlaufzeit und 4% Coupon, zahlbar halbjährlich. Die Umlaufrendite der Anleihe ist $\lambda = 5\%$ bei stetiger Verzinsung. Der letzte Coupon wurde soeben gezahlt. Die Anfangsinvestition beim Kauf der Anleihe wird nicht mitgezählt.

   Lösung als R-Code:

   ```
   CF = 100 * c(2,2,2,2,2,2,2,2,2,102)
   BW = sum(CF * exp(-0.025 * (1:10))
   BW
   # 9536
   EW = BW * exp(5 * 0.05)
   EW
   # 12244
   ```

2. Was ist der Barwert einer Variation der Anleihe (a), bei der der Coupon nicht fix ist, sondern variabel? (D.h., der Coupon für die nächste Zahlung wird zu Beginn jeden Halbjahres auf die dann aktuelle Umlaufrendite der Anleihe (1) angepasst).

   Lösung: BW = 10000 (Anleihe mit variablem Coupon)

3. Was ist der "Clean Price" der Anleihe (1) einen Monat später, nach Abzug der aufgelaufenen Zinsen, wenn sich die Umlaufrendite nicht ändert?

   Lösung:

   $$\text{BW}' = \text{BW} \times \exp\left(\frac{0.05}{12}\right) - 200/6 = 9542$$

4. Der aktuelle Marktpreis einer 5-jährigen 0-Coupon-Anleihe mit Nennwert CHF 10'000 ist $P = 7'800$.
   Berechnen Sie die Umlaufrendite λ der Anleihe bei stetiger Verzinsung.

Lösung:

$$7800 = 10000 \times e(-5\lambda) \rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}\ln 0.78 = 4.97\%$$

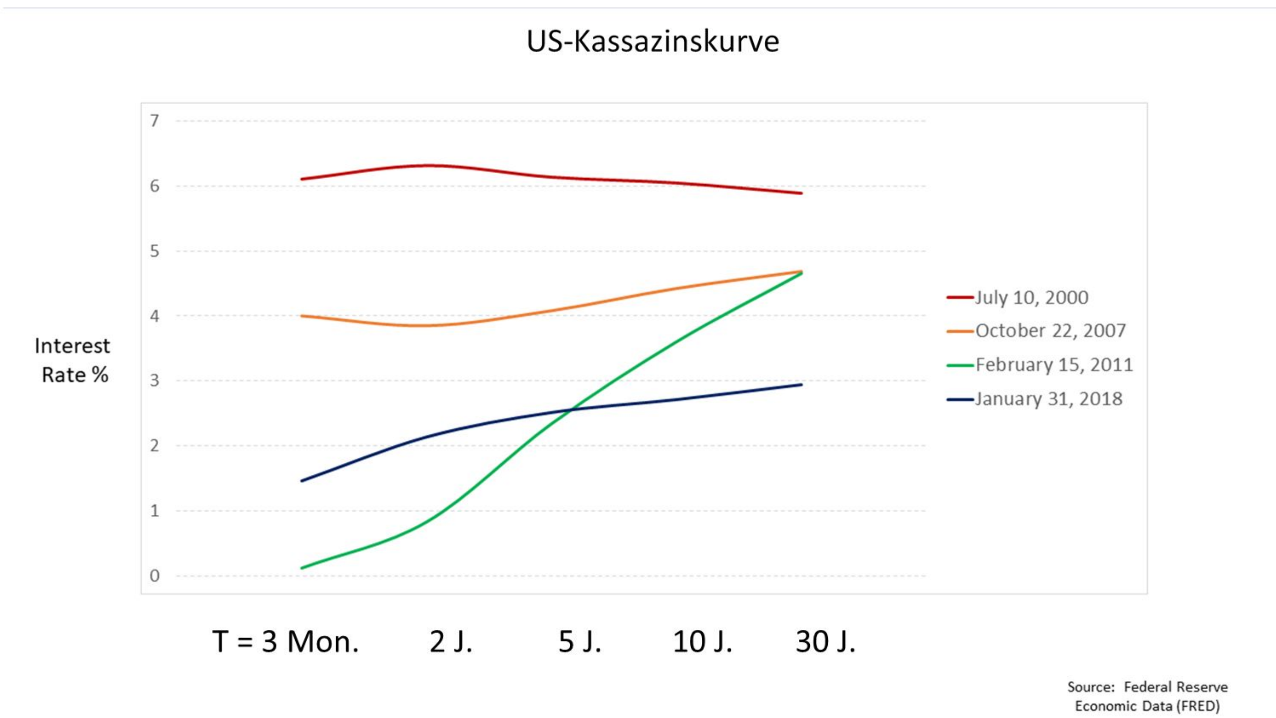
5. Statt Anleihe (1) zu kaufen, könnten Sie für CHF 8'000 für 5 Jahre einen kleinen Steinbruch pachten, der jeweils am Jahresende einen Gewinn von CHF 2'000 abwirft.
   Welche der beiden Anlagemöglichkeiten ist attraktiver?

   Lösung: Bedingung für internen Zinssatz $\overline{\lambda}$:

   $$0 = -8 + 2 \times \left(e^{-\overline{\lambda}} + e^{-2\overline{\lambda}} + e^{-3\overline{\lambda}} + e^{-4\overline{\lambda}} + e^{-5\overline{\lambda}}\right)$$

   Numerisch ergibt sich $\overline{\lambda} = 7.63\% > \lambda$. Der Steinbruch ist also attraktiv.

4 Kassazinskurve



Bisher haben wir mit einem Zinssatz gearbeitet, der von der Laufzeit T unabhängig ist.
Aber: In der Praxis hängen Zinsen von der Laufzeit T einer Anleihe ab.
Die Kassazinskurve

- beschreibt die Umlaufrendite s_T von 0-Coupon-Anleihen als Funktion von T
- hat meist positive Steigung (höhere Zinsen für längere Laufzeiten)

- kann aber auch gelegentlich invertiert sein (siehe Graph)
- ändert laufend ihre Lage und Form (Level, Steigung, Krümmung, ...)
- ist unterschiedlich für unterschiedliche Währungen

Diskontfaktoren:

Der Zinssatz, zu dem Cash Flows abdiskontiert werden, hängt also nun von der Laufzeit ab:

$$d_n = \frac{1}{(1+s_n)^n}, \quad d_k = \frac{1}{(1+s_k/m)^k}, \quad d_T = e^{-s_T T}$$

bei jährlicher, unterjähriger bzw. stetiger Verzinsung.

Berechnung von Kassazinsen:

- Aus Marktpreisen P_T von 0-Coupon-Anleihen mit Laufzeit T (falls vorhanden): $P_T = (1+s_T)^T$ bei jährlicher Verzinsung.
- Aus Preisen P_1, P_2 von 2 Anleihen mit Nennwert 100, Laufzeit T und Coupons $C_1 < C_2$: dann ist $C_2 P_1 - C_1 P_2$ der Preis einer 0-Coupon-Anleihe mit Nennwert $C_2 - C_1$.
- Iterativ: Seien $P_1, P_2, P_3, \ldots$ die Preise von Anleihen mit Laufzeiten $T = 1, 2, 3, \ldots$ Jahren und jährlichem Coupon C. Dann lassen sich $s_1, s_2, s_3, \ldots$ iterativ berechnen:

$$P_1 = \frac{1+C}{1+s_1}, \quad P_2 = \frac{C}{1+s_1} + \frac{1+C}{(1+s_2)^2}, \text{ usw.}$$

Gründe, warum die Kassazinskurve nicht flach ist:

- Liquiditätspräferenz:
  Investoren wollen durch eine Prämie entschädigt werden, wenn sie ihr Geld längerfristig binden
- Erwartungen:
  In der Kassazinskurve spiegeln sich Erwartungen für ein zukünftiges Steigen oder Fallen der Zinsen wieder
- Marktsegmentierung:
  Jede Laufzeit spricht andere Segmente von Marktteilnehmern an; die Zinsen für jede Laufzeit bestimmen sich aus Angebot und Nachfrage

Übungen:

1. Die Kassazinsen für $(1, 2, 3, 4, 5)$ Jahre sind $(2.0\%, 2.5\%, 3.0\%, 3.3\%, 3.5\%)$ bei jährlicher Verzinsung. Was ist der Preis einer Anleihe mit Restlaufzeit 5 Jahren, Nennwert CHF 1'000 und jährlichem Coupon 3%? Der letzte Coupon wurde soeben bezahlt.

Lösung als R-Code:

```
s = c(2, 2.5, 3, 3.3, 3.5)
CF = c(3, 3, 3, 3, 103) * 10
P = sum(CF * ((1+s)^(-(1:5))))
P
# 979
```

2. Ein Jahr später hat sich die Kassazinskurve invertiert. In einem Jahr sind die neuen dann aktuellen Kassazinsen für $(1, 2, 3, 4, 5)$ Jahre $(4.0\%, 3.8\%, 3.6\%, 3.5\%, 3.5\%)$.
Was ist der Preis der Anleihe (mit Restlaufzeit von 4 Jahren) nach einem Jahr?

Lösung als R-Code

```
s2 = c(4, 3.8, 3.6, 3.5)/100
CF = (3, 3, 3, 103) * 10
P = sum(CF * ((1+s2)^(-(1:4))))
P
# 981
```

3. Die Marktpreise von zwei dreijährigen Anleihen mit Nennwert 100 und jährlichen Coupons von $C_1 = 3\%, C_2 = 5\%$ notieren bei $P_1 = 99, P_2 = 101$.
Was ist der dreijährige Kassazins s_3 (bei jährlicher Verzinsung)?

Lösung: Die Kombination: $5\times$Anleihe 1 $-\,3\times$Anleihe 2 ist ein synthetischer Zero-Coupon: man erhält für Coupon C, Preis P und Nennwert N:

$$C = 5\,C_1 - 3\,C_2 = 0, \quad P = 5 \times 99 - 3 \times 101 = 192, \quad N = 500 - 300 = 200$$

Daher:$(1 + s_3)^{-3} = \frac{192}{200} \rightarrow s_3 = 1.37\%$

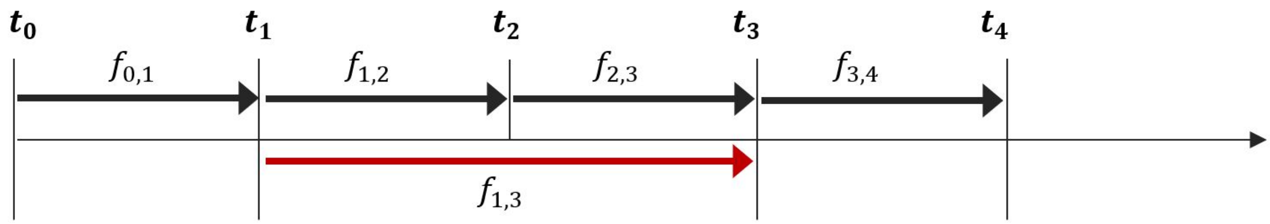
4. Die Preise (P_1, P_2, P_3) von Anleihen mit Laufzeiten von $(1, 2, 3)$ Jahren, Nennwert 100, und jährlichem Coupon von 5% sind $(101, 101, 100)$.
Berechnen Sie s_1, s_2, s_3!

Lösung:

$$P_1 = 101 = \frac{105}{1 + s_1} \rightarrow 1 + s_1 = \frac{105}{101} \rightarrow s_1 = 3.96\%$$

$$P_2 = 101 = \frac{5}{1 + s_1} + \frac{105}{(1 + s_2)^2} = \frac{5 \times 101}{105} + \frac{105}{(1 + s_2)^2} \rightarrow \frac{1}{(1 + s_2)^2} = \frac{101}{105} - \frac{5 \times 101}{105^2} \rightarrow s_2 = 4.48\%$$

$$P_3 = 100 = \frac{5}{1 + s_1} + \frac{5}{(1 + s_2)^2} + \frac{105}{(1 + s_3)^3} = \frac{5 \times 101}{105} + \frac{5 \times 101}{105} - \frac{25 \times 101}{105^2} + \frac{105}{(1 + s_3)^3} \rightarrow s_3 = 5.04\%$$



5 Terminzinsen

Der Terminzins $f_{i,j}$ ist der Zinssatz, zu dem man sich zum Zeitpunkt t_i für $(t_j - t_i)$ Perioden am Markt Geld leihen kann. D.h., man macht heute schon einen Vertrag, in dem man den Zinssatz festlegt, zu dem man sich in der Zukunft Geld leihen wird.

Beispiel bei jährlicher Verzinsung: In einem Jahr leiht man sich Geld für ein Jahr zum Zins $f_{1,2}$.

Sämtliche Terminzinsen sind durch die Kassazinsen festgelegt.

Beispiel bei jährlicher Verzinsung: $(1 + s_2)^2 = (1 + s_1)(1 + f_{1,2})$.

Arbitragemöglichkeit:

Wenn s_2 zu hoch ist:

- leiht man sich heute 1 Fr. für 1 Jahr zum Zins s_1
- schliesst heute einen Vertrag ab, mit dem man sich $(1 + s_1)$ Fr. (den Franken plus Zinsen) anschliessend für ein zweites Jahr das Geld zum Zins $f_{1,2}$ weiter leiht
- Verleiht man heute 1 Fr. für 2 Jahre zum Zins s_2
- Bekommt nach 2 Jahren $(1 + s_2)^2$ Fr. zurück (inklusive Zinsen)
- Zahlt damit die Schulden mit Zinsen, $(1 + s_1)(1 + f_{1,2})$ Fr. zurück
- Behält den Überschuss als risikofreien Gewinn
- Wenn s_2 zu niedrig ist: das gleiche umgekehrt

Allgemein bei jährlicher Verzinsung:

$$(1 + s_j)^j = (1 + s_i)^i \, (1 + f_{i,j})^{(j-i)}$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$\exp(s_{t_2} t_2) = \exp(s_{t_1} t_1) \exp(f_{t_1,t_2} \, (t_2 - t_1))$$

Für Diskontfaktoren gilt:

$$d\,(t_1, t_3) = d\,(t_1, t_2) * d\,(t_2, t_3)$$

Beispiel mit quartalsweiser Verzinsung: $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) = (0, 3, 6, 9, 12)$ Monate:

$$\Longrightarrow \left(1 + \frac{f_{1,3}}{4}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{f_{1,2}}{4}\right)^{-1} \times \left(1 + \frac{f_{2,3}}{4}\right)^{-1}$$

Short rates:

Die Short Rates sind die Terminzinsen für eine Periode: $r_k = f_{k,k+1}$.

Anstelle der Kassazinsen könnten auch die Short Rates als fundamentale Zinsen angesehen werden, aus denen man alle anderen Zinsen wie folgt ableitet:

$$\begin{aligned} s_1 &= r_0 \\ (1 + s_k)^k &= \prod_{i=0}^{k-1} (1 + r_i) \\ (1 + f_{i,j})^{j-i} &= \prod_{\nu=i}^{j-1} (1 + r_\nu) \end{aligned}$$

Theorie der Erwartungen:

Die short rate r_n ist die vom Markt erwartete short rate r'_{n-1} in 1 Jahr, und damit (iterativ) auch der vom Markt erwartete Kassazins $s_1^{(n)}$ in n Jahren (bei jährlicher Verzinsung).

Wenn diese Theorie stimmt, kann man auch die Kassazinskurve s'_k in 1 Jahren vorhersagen:

$$(1 + s'_k)^k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + r'_i) = \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i) = \frac{1}{1 + s_1} (1 + s_{k+1})^{k+1}$$

Aber: in der Praxis sind Erwartungen nur ein Teil der Erklärung für die Kassa- bzw. Terminzinskurve, neben Liquiditätspräferenz und Marktsegmentierung.

Gleitender Barwert:

Mittels Short Rates kann der Barwert eines Cash Flows $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ iterativ "von hinten" berechnet werden, Dazu berechnet man die "Terminpreise" BW (k) des Cash Flows in k Jahren wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{BW} &= \mathrm{BW}\,(0) \\ \mathrm{BW}\,(k) &= x_k + \frac{1}{1 + r_k} \mathrm{BW}\,(k+1) \\ \mathrm{BW}\,(n) &= x_n \end{aligned}$$

Übungen:

1. Seien $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) = (0, 6, 12, 18, 24)$ Monate, und $(f_{0,1}, f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,4}) = (4\%, 5\%, 6\%, 7\%)$ die entsprechenden Terminzinsen mit jährlicher Verzinsung.
   Was sind die Kassazinsen für einjährige und zweijährige Laufzeit?

   Lösung:
   $$(1 + s_1)^{-1} = 1.04^{-1/2}\ 1.05^{-1/2} \to s_1 = 4.5\%$$
   $$(1 + s_1)^{-2} = 1.04^{-1/2}\ 1.05^{-1/2}\ 1.06^{-1/2}\ 1.07^{-1/2} \to s_2 = 5.5\%$$

2. Was ist der Terminzins in einem Jahr für einjährige Laufzeit? Welche Arbitrage-möglichkeit ergäbe sich, wenn eine Bank einen höheren Terminzins anbietet?

   Lösung:
   $$(1 + f_{1,2})^{-1} = 1.06^{-1/2}\ 1.07^{-1/2} \to f_{1,2} = 6.5\%$$
   Wenn $f_{1,2}$ höher: leihe Geld für 2 Jahre zum Zinssatz s_2, lege es für 2 sukzessive Jahre bei der Bank zu Zinssätzen s_1 bzw. $s_{1,2}$ an. Zahle damit nach 2 Jahren die Schulden plus Zinsen zurück, behalte den Rest als risikolosen Gewinn.

3. Betrachten Sie folgende Kassazinskurve für die ersten 5 Jahre bei jährlicher Verzinsung: $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (2.5\%, 2.7\%, 3.0\%, 3.2\%, 3.3\%)$.
   Berechnen Sie die Short Rates.

   Lösung als R-Code:

   ```
   s = c(2.5, 2.7, 3.0, 3.2, 3.3)/100
   d = (1+s)^(-c(1, 2, 3, 4, 5))
   d[1:4]/d[2:5]-1
   # 0.029, 0.036, 0.038, 0.037
   ```

   $$r_0 \quad = \quad s_1 \to \text{Short rates: } (2.5\%, 2.9\%, 3.6\%, 3.8\%, 3.7\%)$$

4. Berechnen Sie für Punkt 3 die erwarteten Short Rates in 1 Jahr, und die erwarteten Kassazinsen in 1 Jahr.

   Lösung: Erwartete short rates in 1 Jahr durch Verschiebung: $2.9\%, 3.6\%, 3.8\%, 3.7\%)$. Erw. Kassazinsen: $(1 + s'_k)^k = \prod_{i=0}^{k-1}(1 + r_i)$.
   $$\to s'_k = (2.90\%, 3.25\%, 3.43\%, 3.50\%)$$

5. Berechnen Sie für Punkt 3 den Barwert einer 5-jährigen Anleihe über CHF 100'000 mit 4% Couponrate bei jährlicher Verzinsung mit Hilfe des gleitenden Barwerts.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{BW}\,(5) &= 104 \\
\text{BW}\,(4) &= 4 + \frac{104}{1.037} = 104.29 \\
\text{BW}\,(3) &= 4 + \frac{104.29}{1.038} = 104.47 \\
\text{BW}\,(2) &= 4 + \frac{104.47}{1.036} = 104.84 \\
\text{BW}\,(1) &= 4 + \frac{104.84}{1.029} = 105.89 \\
\text{BW} &= BW\,(0) = \frac{105.89}{1.025} = 103.30
\end{aligned}$$

6 Duration

Wir betrachten den Preis $P(\lambda)$ einer Anleihe als Funktion der Umlaufrendite λ.

Der Preis:

- ist gleich dem Nominalwert, wenn der Coupon gleich der Umlaufrendite ist
- fällt, wenn die Umlaufrendite steigt, und steigt, wenn die Umlaufrendite fällt
- fällt mir steigender Umlaufrendite umso schneller, je länger die Laufzeit ist
- ist eine konvexe Funktion der Umlaufrendite

McAuley Duration:

Wir nehmen zunächst an, die Zinskurve sei flach. Der Barwert eines Cash Flow Streams $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ zu den Zeitpunkten $(t_0, t_1, t_2, \ldots)$ ist (bei jährlicher Verzinsung):

$$\text{BW} = \sum_{i=0}^{n} \text{BW}(t_i) \quad \text{mit} \quad \text{BW}(t_i) = \frac{x_i}{(1+\lambda)^{t_i}}$$

Die McAuley Duration ist der gewichtete Mittewert der Laufzeiten der einzelnen Zahlungen:

$$D = \frac{1}{\text{BW}} \sum_{i=0}^{n} \text{BW}(t_i) \times t_i$$

- Die Duration hat die Einheit von Jahren
- Für eine 0-Coupon-Anleihe ist $D = t_n = T$, also die Laufzeit der Anleihe
- Wenn alle Zahlungen ≥ 0 sind, gilt: $t_0 \leq D \leq T$

Bei unterjähriger Verzinsung:

$$D = \frac{1}{\mathrm{BW}} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(1+\lambda/m)^k} \times \frac{k}{m} \quad \text{mit} \quad \mathrm{BW} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{1+\lambda/m)^k}$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$D = \frac{1}{\mathrm{BW}} \sum_{k=0}^{n} c_k \exp\left(-\lambda t_k\right) \times t_k \quad \text{mit} \quad \mathrm{BW} = \sum_{k=0}^{n} c_k \exp\left(-\lambda t_k\right)$$

Modifizierte Duration:

Die modifizierte Duration ist die Ableitung des Barwerts nach der Umlaufrendite λ:

$$D_M = -\frac{1}{\mathrm{BW}} \times \frac{\mathrm{d\,BW}}{\mathrm{d}\lambda}$$

Bei jährlicher, unterjähriger bzw. stetiger Verzinsung gilt respektive die Beziehung:

$$D_M = \frac{1}{1+\lambda} \times D \qquad D_M = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{m}} \times D \qquad D_M = D$$

Portfolio Duration:

Die Duration eines Portfolios von N Anleihen mit Preisen $P_1, P_2, \ldots, P_N$ ist die gewichtete Summe der Durations der einzelnen Anleihen:

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i \to D = \sum_{i=1}^{N} w_i D_i \quad \text{mit Gewichten} \quad w_i = \frac{P_i}{P}$$

Das gleiche gilt für die modifizierte Duration

Immunisierung:

Um ein Portfolio von Anleihen und Zahlungsverpflichtungen gegen kleine Zinsschwankungen zu immunisieren, wählt man die Gewichte der Anleihen so, dass die modifizierte Duration der Anleihen gleich der modifizierten Duration der Zahlungsverpflichtungen ist.

Um dieses "Duration Matching" aufrecht zu erhalten, muss man die Gewichte regelmässig anpassen.

Um ein Portfolio von Anleihen und Zahlungsverpflichtungen auch gegen grössere Zinsschwankungen zu immunisieren, muss zudem die Konvexität der Anleihen gleich der Konvexität der Zahlungsverpflichtungen sein. Die Konvexität K eines Cash Flow Stroms ist definiert als

$$K = \frac{1}{P} \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{n} t_i^2 c_k \exp^{-\lambda t_i}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nur bei stetiger Verzinsung gilt.

Fisher-Weyl Duration:

Wenn die Zinskurve nicht flach ist, sondern die Kassazinsen s_t von der Laufzeit abhängen, definiert man die Fisher-Weyl Duration D_{FW} als Sensitivität des Barwerts zu einer kleinen Parallelverschiebung der Kassazinskurve $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \to (s_1 + \lambda, s_2 + \lambda, \ldots, s_n + \lambda)$

$$D_{FW} = -\frac{1}{\mathrm{BW}} \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{BW}}{\mathrm{d}\lambda} \quad \text{bei} \quad \lambda = 0$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$D_{FW} = \frac{1}{\mathrm{BW}} \sum_{i=0}^{n} t_i x_{t_i} \exp(-s_i t_i)$$

Quasi-modifizierte Duration:

Bei unterjähriger Verzinsung ergibt sich analog die quasi-modifizierte Duration D_Q:

$$D_Q = \frac{1}{\mathrm{BW}} \left.\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{BW}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{1}{\mathrm{BW}} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{BW}_i \left(\frac{i/m}{(1 + s_i/m)}\right)$$

Im Gegensatz zur modifizierten Duration lässt sich der Faktor nicht vor die Summe ziehen.

Übungen:

1. Berechnen Sie die McCAuley Duration und die modifizierte Duration von drei zehnjährigen Anleihen mit Coupons $C = (0\%, 3\%, 6\%)$. Die Umlaufrendite sei $\lambda = 3\%$ bei jährlicher Verzinsung.

   Lösung:

   ```
   C = 0.06
   T = 10
   CF = rep(C,T)
   CF[T] = CF[T]+1
   d = 1.03^(-(1:T))
   BWi = CF * d
   BW = sum(BWi)
   D = sum(BWi/BW * (1:T))
   MD = D/1.03
   ```

   Für $C = (0\%, 3\%, 6\%)$:

$$\begin{aligned} D &= (10, 8.79, 8.07) \\ D_M &= (9.71, 8.53, 7.83). \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die McAuley Duration und die modifizierte Duration von 3 Anleihen mit Couponraten $C = 3\%$ und Laufzeiten von $T = (2, 10, \infty)$ Jahren. Die Umlaufrendite sei $\lambda = 3\%$ bei jährlicher Verzinsung.

   Lösung: Für $T = (2, 10, 1000)$:

$$
\begin{aligned}
D &= (1.97, 8.79, 34.33) \\
D_M &= (1.91, 8.53, 33.33)
\end{aligned}
$$

3. Berechnen Sie die Fischer-Weyl Duration einer 3-jährigen Anleihe mit Couponrate3% und Kassazinskurve $(s_1, s_2, s_3) = (2\%, 3\%, 4\%)$ bei stetiger Verzinsung.

   Lösung als R-code:

```
s = c(2,3,4)/100
d = exp(-s * (1:3))
CF = c(3,3,103)
BW = CF * d
DFW = sum(BW/sum(BW) * (1:3))
```

   FW-Duration = 2.91 Jahre

4. Nach 1, 2, bzw. 3 Jahren hat eine Bank folgende Zahlungsverpflichtungen (in Mio. CHF):

$$
(x_1, x_2, x_3) = (-2, -2, -4)\,.
$$

   Die Zinskurve sei flach mit $r = 4\%$.

   Die Bank möchte sich immunisieren, indem sie 2 Anleihen kauft:

   (a) Eine 3-Jahres Zero-Coupon-Anleihe mit Nennwert CHF 3 Mio.

   (b) Eine Annuität, die 3 Jahre lang an jedem Jahresende 1 Mio CHF auszahlt.

   Wie viele Anteile der Obligationen (a) und (b) muss sie kaufen?

   Lösung als R-code: (V steht für Verbindlichkeiten)

   - Verbindlichkeiten:

```
CF = c(-2,-2,-4)
BWi = CF/(1.04^(1:3))
BMV = sum(BWi)
DV = sum(BWi * (1:3))/BWV
```

   - Anleihe 1:

```
CF = c(0, 0, 3)
BWi = CF/(1.04^(1:3))
BM1 = sum(BWi)
D1 = sum(BWi * (1:3))/BW1
```

- Anleihe 2:

```
CF = c(1, 1, 1)
BWi = CF/(1.04^(1:3))
BM2 = sum(BWi)
D2 = sum(BWi * (1:3))/BW2
```

Barwerte: $-7.328, 2.667, 2.775$
Durationen: $2.223, 3.000, 1.974$

Zwei Gleichungen für ein Portfolio $a \times$ Anleihe1 $+ b \times$ Anleihe2:

$$\begin{aligned} -BWV &= a \times \mathrm{BW1} + b \times \mathrm{BW2} \\ -BWV * DV &= a \times \mathrm{BW1} \times D1 + b \times \mathrm{BW2} \times D2 \end{aligned}$$

$$\to a = \frac{-BWV}{\mathrm{BW1}} \times \frac{DV - D2}{D1 - D2} = \frac{2}{3}; \quad b = \frac{-BWV}{\mathrm{BW2}} \times \frac{D1 - DV}{D1 - D2} = 2$$