

# Mathematik der Finanzmärkte I

## Repetitionsblatt B: Schlüsselformeln der Lektionen 6-8

26. Mai 2020

### 1 Renditen und Zufallsvariablen

#### Renditen:

Sei  $X_0$  der Barwert und  $X_1$  der Endwert eines Assets.

- Gesamtrendite  $R = X_1/X_0$ , relative Rendite  $r = R - 1$
- Portfoliogewichte

$$w_i = X_{0i}/X_0 \rightarrow \sum w_i = 1$$

- Portfoliorendite

$$R_{pf} = \sum_{i=1}^n w_i R_i,$$
$$r_{pf} = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

- Vektoren:

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T, \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T, \mathbf{1} = (1, \dots, 1) \rightarrow \mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_{pf}, \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

#### Leerverkäufe:

Zu Beginn einer Periode leiht man sich ein Wertpapier (z.B. von einem Broker) und verkauft es einem Dritten. Am Ende der Periode kauft man das Wertpapier zurück und retourniert es an den Broker. Während dieser Zeit anfallende Dividenden müssen an den ursprünglichen Besitzer gezahlt werden.

Der Gewinn/Verlust ist  $-X_1 + X_0 = -(X_1 - X_0)$ , äquivalent zu einer Anlage mit Gewicht  $-1$ .

## Zufallsvariablen:

Eine (diskrete) Zufallsvariable  $X$  kann  $n$  mögliche Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit Wahrscheinlichkeiten  $p_i \geq 0$  annehmen, wobei  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  ist.

- Erwartungswert:

$$E[x] = \bar{x} = \sum_i p_i x_i$$

- Varianz:

$$\sigma^2 = \text{Var}(x) = E[(x - \bar{x})^2] = E[x^2] - \bar{x}^2$$

- Kovarianz zweier Zufallsvariablen:

$$\text{Cov}(x, y) = \sigma_{x,y} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = E[xy] - \bar{x}\bar{y}$$

- Korrelation:

$$\rho_{xy} = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y) \in [-1, 1].$$

Wichtig:  $\rho = 0$  bedeutet Abwesenheit von Korrelation, aber nicht notwendigerweise Unabhängigkeit.

- Summer zweier Zufallszahlen:

$$E[x + y] = \bar{x} + \bar{y}, \text{Var}[x + y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy}$$

- Vektor von Zufallszahlen:

$$E[\mathbf{x}] = \bar{\mathbf{x}}, \varrho = \mathbf{w}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{Var}(\varrho) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

- Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

- Portfolios von Zufallsvariablen: Rendite  $r^{pf} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}$ , Varianz  $\sigma_{pf}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$

## Übung:

Anna und Martin ziehen Kugeln aus einer Urne. Die Urne enthält 600 weisse und 400 schwarze Kugeln. Für eine weisse Kugel erhalten sie CHF 0, für eine schwarze Kugel CHF 2. Zunächst ziehen beide gemeinsam eine Kugel und teilen sich den Gewinn. Dann zieht jeder eine zweite Kugel nur für sich. Berechnen Sie:

1. Den Erwartungswert des Gewinns von Anna

**Lösung:** (siehe Tabelle unten):  $\bar{x} = \sum_i p_i x_i = 1.2$

2. Die Standardabweichung des Gewinns von Martin

**Lösung:** (siehe Tabelle unten):  $\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 1.2 \rightarrow \sigma = 1.10$

3. Die Korrelation der Gewinne zwischen Anna und Martin

**Lösung:**  $\sigma_{xy} = E[xy] - \bar{x}\bar{y} = 0.24 \rightarrow \rho_{xy} = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y) = 0.20$

4. Martin spendet 1/4 seines Gewinns an den Tierschutzverein, Anna 3/4 ihres Gewinns. Berechnen Sie aus (2) und (3) die erwartete "Portfolio-Rendite" des Tierschutzvereins und ihre Standardabweichung

**Lösung:**  $r^{pf} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = 1.2, \sigma_{pf}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$

$$\sigma_{pf}^2 = \left( \frac{1}{16} \sigma_{11} + \frac{3}{16} \sigma_{12} + \frac{3}{16} \sigma_{21} + \frac{9}{16} \sigma_{22} \right) = 0.85 \rightarrow \sigma_{pf} = 0.92$$

**Tabelle:** Möglichkeiten für die Ziehungen  $(a, b, c)$  von Anna+Martin, Anna, Martin:

(a, b, c)	0,0,0	0,0,2	0,2,0	2,0,0	0,2,2	2,0,2	2,2,0	2,2,2
Wahrscheinl.	0.216	0.144	0.144	0.144	0.096	0.096	0.096	0.064
Gewinn A	0	0	2	1	2	1	3	3
Gewinn B	0	2	0	1	2	3	1	3

## 2 Portfolio-Diversifizierung:

### Unkorrelierte Zufallsvariablen:

Ein Portfolio bestehe aus  $n$  unkorrelierten Zufallsvariablen mit gleichem Mittelwert  $\bar{r}_i = r$ , gleicher Standardabweichung  $\sigma_i = \sigma$ , und gleichem Gewicht  $w_i = 1/n$ .

- Portfolio-Rendite:  $r^{pf} = r$
- Portfolio-Varianz:  $\sigma_{pf}^2 = \sigma^2/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$
- Das Risiko kann vollständig weg-diversifiziert werden

Angenommen, die Korrelationen sind nicht 0 sondern konstant  $\rho_{ij} = 0.3$ :

- Portfolio-Rendite:  $r^{pf} = r$
- Portfolio-Varianz:  $\sigma_{pf}^2 = \left( n \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2} \times 0.3 \right) \sigma^2 = \left( \frac{0.7}{n} + 0.3 \right) \sigma^2 \rightarrow 0.3$  für  $n \rightarrow \infty$
- Es bleibt ein Rest-Risiko, das nicht weg-diversifiziert werden kann

### Zwei Zufallsvariablen:

Ein Portfolio bestehe aus 2 Assets mit Renditen  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ , Standardabweichungen  $\sigma_1, \sigma_2$ , Korrelation  $\rho$ , und Gewichten  $w_1 = 1 - \alpha, w_2 = \alpha$ , wobei  $\alpha \in [0, 1]$ .

Wir zeichnen die Linie der Portfolios als Funktion von  $\alpha$  im Risiko-Rendite-Diagramm (Fig. 1).

- Die Endpunkte  $\alpha = 0.1$  sind die beiden Assets
- $\bar{r} = \bar{r}_1 + \alpha (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$  unabhängig von der Korrelation
- $\sigma^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + \alpha^2 \sigma_2^2 + 2\rho\alpha(1 - \alpha) \sigma_1 \sigma_2$  (\*)

Für  $\rho = 1$  reduziert sich (\*) auf  $\sigma^2 = ((1 - \alpha) \sigma_1 + \alpha \sigma_2)^2 \rightarrow \sigma = \sigma_1 + \alpha (\sigma_2 - \sigma_1)$ . Es ergibt sich eine gerade Verbindungslinie zwischen den beiden Endpunkten.

Für  $\rho = -1$  reduziert sich (\*) auf  $\sigma^2 = ((1 - \alpha) \sigma_1 - \alpha \sigma_2)^2 \rightarrow \sigma = |\sigma_1 - \alpha (\sigma_2 + \sigma_1)|$ . Es ergibt sich eine Dreieckslinie, die die  $\bar{r}$  Achse im Punkt  $r_A = \frac{\bar{r}_1 \sigma_2 + \bar{r}_2 \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$  schneidet.

Für  $\rho = 0$  reduziert sich (\*) auf  $\sigma^2 = (1 - \alpha)^2 \sigma_1^2 + \alpha^2 \sigma_2^2$ . Es ergibt sich eine Hyperbel. Wenn Leerverkäufe erlaubt sind, erstreckt sie sich über die beiden Endpunkte hinaus.

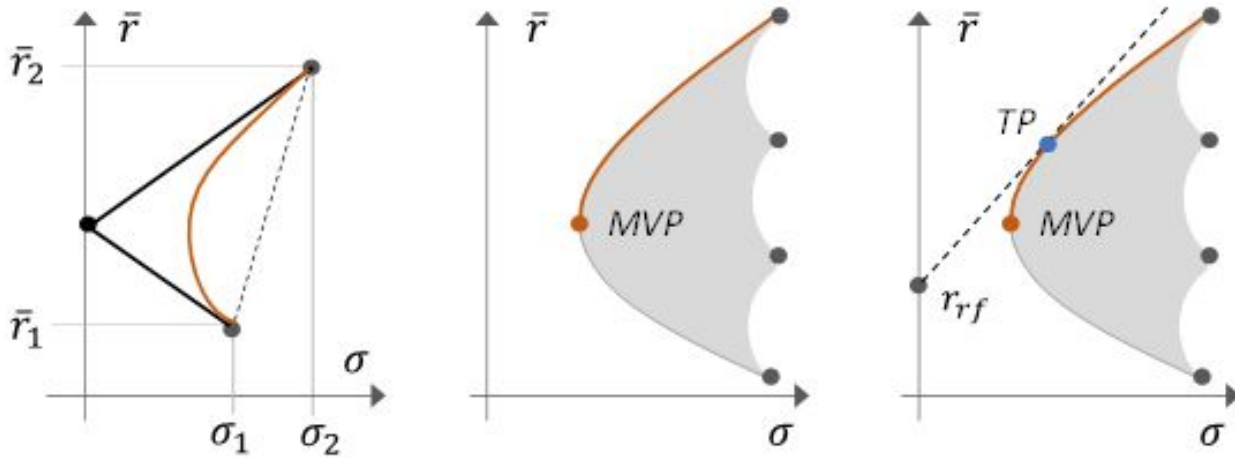


Fig. 1, Fig. 2 und Fig. 3

### Effizienzlinie:

- Das erreichbare Gebiet mit mehr als 2 Assets ist eine Fläche mit konvexem linken Rand
- Auf diesem Rand liegt das Portfolio mit minimaler Varianz (MVP)
- Der Rand oberhalb dieses Portfolios ist die “Effizienzlinie” (Fig. 2)
- Portfolios auf der Effizienzlinie minimieren das Risiko für vorgegebene Rendite, und sie maximieren die Rendite für vorgegebenes Risiko

### Risikofreies Asset:

- Wenn Cash mit  $\bar{r} = r_{rf}, \sigma = 0$  eines der erlaubten Assets ist, degeneriert die Effizienzlinie zu einer Geraden (gestrichelte Linie, Fig. 3)
- Die Gerade schneidet die bisherige Effizienzlinie im “super-effizienten Portfolio”, oder “Tangentialportfolio” (TP).
- Risiko-averse Investoren kombinieren das TP mit Cash (sind also nicht voll investiert):  $\alpha \times \text{Cash} + (1 - \alpha) \times TP$ , wobei  $0 \leq \alpha \leq 1$
- Risikofreudige Investoren leihen sich Cash und hebeln das TP (Gerade oberhalb TP):  $\alpha \times \text{Cash} + (1 - \alpha) \times TP$ , wobei  $\alpha < 1$

## Übungen:

Ein Portfolio besteht aus 2 Assets mit Erwartungswerten  $\bar{r}_1 = 1, \bar{r}_2 = 3$  und Standardabweichungen  $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4$ . Die Portfoliogewichte seien  $w_1 = 1 - \alpha, w_2 = \alpha$ . Short Selling ist nicht erlaubt.

1. Zeichnen Sie die Portfolios mit  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  im Risiko-Rendite-Diagramm
2. Zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit  $0 < \alpha < 1$  für  $\rho = 1$
3. Zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit  $0 < \alpha < 1$  für  $\rho = -1$ . Was ist die risikofreie Rendite  $r_0$ ?
4. Berechnen Sie  $\bar{r}(\alpha), \sigma(\alpha)$  für  $\rho = 0$  und zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit  $0 < \alpha < 1$

**Lösung:** 1-4: ähnlich wie in Fig. 1

5. Short Selling sei nun erlaubt. Was ist das maximal erreichbare Sharpe Ratio?

**Lösung:** Sharpe Ratio wird maximiert für  $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow S = \frac{r - r_0}{\sigma} \rightarrow \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$

### 3 Markowitz-Optimierung

#### Optimierungsproblem:

Wir suchen das Minimum der (halben) Varianz  $\sigma_{pf}^2$  des Portfolios für eine vorgegebene Rendite  $\bar{r}_{pf}$ , wobei sich die Portfoliogewichte zu 100% aufsummieren müssen:

$$\text{Min} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad \text{mit Nebenbedingungen:} \quad \mathbf{w}^T \times \mathbf{1} = 1, \mathbf{w}^T \times \mathbf{r} = \bar{r}_{pf}$$

Die Nebenbedingungen werden durch Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda, \mu$  eingebaut:

- Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{w}) = \min \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{w}^T \times \mathbf{r} - \bar{r}_{pf}) - \mu (\mathbf{w}^T \times \mathbf{1} - 1)$
- Gradient der Lagrange-Funktion muss verschwinden:  $\nabla_w L = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \times \mathbf{r} - \mu \times \mathbf{1} = 0$
- $(n + 2)$  lineare Gleichungen (inkl. Nebenbedingungen) für  $(n + 2)$  Variablen (inkl.  $\lambda, \mu$ )
- Leerverkäufe erlaubt (sonst nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbed.  $w_i \geq 0$ )

#### Minimum-Variance-Portfolio MVP:

Von allen Portfolios auf der Effizienzlinie ist das MVP das Portfolio mit minimaler Varianz, ohne die zweite Nebenbedingung  $\mathbf{w}^T \times \mathbf{r} = \bar{r}_{pf}$ .

- Vereinfachtes Optimierungsproblem:  $\Sigma \mathbf{w} = \mu \times \mathbf{1}$ , wobei  $\mathbf{w}^T \times \mathbf{1} = 1$
- Lösung:  $\mathbf{w} = \mu \times \Sigma^{-1} \times \mathbf{1}$ ,  $\mu = \mathbf{1}^T \Sigma \times \mathbf{1}$
- $\Sigma^{-1}$  = inverse Kovarianzmatrix:  $\Sigma \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Sigma = \mathbf{1}_{n \times n}$  (diagonale Einheitsmatrix)

#### Beispiel mit unkorrelierten Assets:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} \\ \vdots \\ \sigma_n^{-2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sum_i (1/\sigma_i^2)}$$

→ Gewichte sind proportional zur inversen Varianz der Assets.

#### Beispiel mit zwei korrelierten Assets:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_2/\sigma_1 & -\rho \\ -\rho & \sigma_1/\sigma_2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(1 - \rho^2) \sigma_1 \sigma_2} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma_2/\sigma_1 - \rho \\ \sigma_1/\sigma_2 - \rho \end{pmatrix}$$

→ Bei positiver Korrelation kann das MVP eine Short-Position enthalten

## Tangential-Portfolio TP:

Wir suchen das TP, also das Portfolio mit maximalem Sharpe Ratio  $S_{pf} = (\bar{r}_{pf} - r_{rf}) / \sigma_{pf}$ :

- Die Nebenbedingung  $\mathbf{w}^T \times \mathbf{r} = \bar{r}_{pf}$  wird umgeschrieben:  $\mathbf{w}^T \times (\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1}) = \bar{r}_{pf} - r_{rf}$
- Die andere Nebenbedingung  $\mathbf{w}^T \times \mathbf{1} = 1$  wird danach fallengelassen
- Minimierung des Risikos führt nur für jedes  $\bar{r}_{pf}$  zum Portfolio auf der Tangente (gestrichelt in Fig. 3)
- Vereinfachtes Optimierungsproblem:  $\Sigma \mathbf{w} = \lambda (\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1})$ ,  $\mathbf{w}^T \times (\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1}) = \bar{r}_{pf} - r_{rf}$
- Lösung:  $\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1})$ ,  $\lambda^{-1} = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1})$

## Beispiel mit unkorrelierten Assets:

- $w_i \sim (\bar{r}_i - r_{rf}) / \sigma_i^2 \rightarrow w_i \times \sigma_i \sim S_i$
- Interpretation: Die “risk weights”  $w_i \sigma_i$  der Assets sind proportional zu den Sharpe Ratios

## Hauptsatz der Portfolio Theorie (2-Fund-Theorem):

Aus 2 beliebigen Portfolios auf der Effizienzlinie lässt sich die gesamte Effizienzlinie rekonstruieren.

Beispiel: seien  $w_{MVP}$  die Gewichte des MVP und  $w_{TP}$  die Gewichte des TP. Dann sind die Gewichte auf der Effizienzlinie  $\alpha \times \mathbf{w}_{MVP} + (1 - \alpha) \times \mathbf{w}_{TP}$ .

## Grenzen der Markovitz-Optimierung:

- Es wird angenommen, dass  $\bar{r}_i, \sigma_i, \rho_{ij}$  eindeutig und bekannt sind. In der Praxis unterliegen diese Größen Schätzfehlern und es besteht keine Einigkeit über ihre Werte.
- Es wird angenommen, dass die Varianz ein geeignetes Risikomass für alle Investoren ist. In der Praxis sind Investoren besonders über Tail Risk besorgt.
- Um das Tail Risk einzelner Assets abzuschätzen muss man neben erwarteter Rendite und Standardabweichung u.a. auch die Skewness und Kurtosis der Verteilungen kennen.



## Übungen:

Ein Portfolio besteht aus 2 Aktien und 1 Anleihe mit Kovarianzmatrix  $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{100}$ . Die erwarteten Renditen sind  $\vec{r} = (3\%, 4\%, 2\%)^T$ .

1. Berechnen Sie das Portfolio minimaler Varianz (MVP), seine Rendite und seine Standardabweichung

**Lösung:**

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -5 & 0 \\ -5 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{w} \sim \Sigma^{-1} \mathbf{1} \sim \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.18 \\ 0.58 \end{pmatrix}$$

normiert so dass:  $\mathbf{w} \times \mathbf{1} = 1$

$$\rightarrow \bar{r}_{pf} = \mathbf{w}^T \times \mathbf{r} = 2.61\%, \quad \sigma_{pf}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \sigma_{pf} = 10.7\%$$

2. Der risikofreie Zins sei  $r_{rf} = 1\%$ . Berechnen Sie das super-effiziente Portfolio (TP), seine Rendite und seine Standardabweichung

**Lösung:**

$$\mathbf{w} \sim \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_{rf} \mathbf{1}) \sim \begin{pmatrix} 37 \\ 53 \\ 50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.38 \\ 0.36 \end{pmatrix}$$

normiert so dass:  $\mathbf{w} \times \mathbf{1} = 1$

$$\rightarrow \bar{r}_{pf} = \mathbf{w}^T \times \mathbf{r} = 3.02\%, \quad \sigma_{pf}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \sigma_{pf} = 12.0\%$$

3. Berechnen Sie das Portfolio auf der Effizienzgrenze (ohne Cash) mit erwarteter Rendite 3%

**Lösung:** Es muss eine Linearkombination von MVP und TP sein:

$$\alpha \times 2.61\% + (1 - \alpha) \times 3.02\% = 3\% \rightarrow \alpha = \frac{3.00\% - 3.02\%}{2.61\% - 3.02\%} = 0.05$$

$$\rightarrow \mathbf{w} = 0.05 \times \mathbf{w}_{MVP} + 0.95 \times \mathbf{w}_{TP} = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.37 \\ 0.37 \end{pmatrix}$$

4. Sie wollen in das super-effiziente Portfolio mit Volatilität 2% investieren. Wieviel Cash müssen Sie halten, bzw. wieviel Geld müssen Sie sich leihen?

**Lösung:**  $\sigma_{TP} = 12\% \rightarrow \frac{2\%}{12\%} = 17\%$  ist ins TP investiert, 83% ist Cash. Ein Portfolio enthalte  $N$  unkorrelierte Assets mit Kovarianzmatrix  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$

5. Berechnen Sie das Portfolio minimaler Varianz

**Lösung:**  $\mathbf{w} \sim \Sigma^{-1} \mathbf{1} \rightarrow w_i = A/\sigma_i^2$  mit Normierungsfaktor  $A = 1/\sum_k (1/\sigma_k^2)$

6. Berechnen Sie das Tangential-Portfolio unter der Annahme, dass alle Assets das gleiche Sharpe Ratio haben

**Lösung:**  $\mathbf{w} \sim \Sigma^{-1} \sigma \rightarrow w_i = B/\sigma_i$  mit Normierungsfaktor  $B = 1/\sum_k (1/\sigma_k)$

7. Nehmen Sie nun an, dass alle Korrelationen 0.5 sind, und dass alle Assets die gleiche Standardabweichung  $\sigma$  haben. Was ist das Portfolio minimaler Varianz?

**Lösung:** Da kein Asset vor einem anderen ausgezeichnet ist, sind alle  $w_i = 1/N$ .

8. Was ist die Standardabweichung des Portfolios in (3) im Limes  $N \rightarrow \infty$ ?

**Lösung:**  $\sigma_{pf}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = \frac{1}{N^2} \sigma^2 (N + 0.5 \times N(N-1)) \rightarrow 0.5\sigma^2$  für  $N \rightarrow \infty$  Es bleibt ein nicht wegdiversifizierbares Risiko.

## 4 CAPM Model

Was geschieht, wenn sich alle Investoren über  $\bar{r}, \Sigma, r_{rf}$  einig sind, alle die Varianz als Risikomass verwenden und alle in das gleiche optimale Tangentialportfolio investieren?

- Das Tangentialportfolio TP wird zum “Marktportfolio”, in dem jede Aktie, und allgemein jedes Asset gemäss seiner Marktkapitalisierung gewichtet ist.
- Investoren kombinieren das TP mit Cash. Ihre Portfoliorenditen liegen daher auf der Kapitalmarktklinie im  $\sigma - \bar{r}$ -Diagramm. Ihre Steigung ist der “Marktpreis für Risiko”:  $\bar{r} = r_{rf} + \frac{\bar{r}_M - r_{rf}}{\sigma_M} \times \sigma$
- Alle erwarteten Asset-Renditen liegen auf der “Wertpapierlinie” im  $\beta - \bar{r}$ -Diagramm:

$$\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i (\bar{r}_M - r_{rf}), \quad \beta_i = \frac{1}{\sigma_M^2} \text{Cov}(r_i, r_M) = \frac{1}{\sigma_M^2} (\Sigma \times \mathbf{w})_i$$

**Beweis:**

$$\beta \sim \Sigma \times \mathbf{w} \sim \Sigma \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - r_{rf} \mathbf{1}) = C (\mathbf{r} - r_{rf} \mathbf{1})$$

Der Normierungsfaktor  $C$  folgt aus Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit  $w$ :

$$\mathbf{w} \times \beta = \frac{1}{\sigma_M^2} \text{Cov}(r_M, r_M) = 1, \quad \mathbf{w} \times (\mathbf{r} - r_{rf} \mathbf{1}) = (r_M - r_{rf}) \rightarrow C^{-1} = (r_M - r_{rf})$$

Um die erwartete Rendite eines Assets zu bestimmen, muss also nur dessen Beta zum Marktportfolio bekannt sein. Die Marktpreise stellen sich demnach durch Angebot und Nachfrage automatisch so ein, dass die Renditen dem Capital Asset Pricing Model folgen.

- Assets mit  $\beta = 0$  haben erwartete Rendite  $r_i = r_{rf}$ : keine Risikoprämie für weg-diversifizierbares Risiko
- Assets mit  $\beta < 0$  haben erwartete Rendite  $r_i < r_{rf}$ : man “zahlt drauf” für “safe-haven-assets”, die negativ mit dem Markt korreliert sind.

### Systematisches vs. Idiosynchratisches Risiko:

Die Renditen können modelliert werden als:

$$r_i = r_{rf} + \beta_i (r_M - r_{rf}) + \epsilon_i \quad \text{mit} \quad E(\epsilon_i) = \text{cov}(r_M, \epsilon_i) = \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$$

wobei  $\epsilon_i$  unabhängige  $N(0, \text{Var}(\epsilon_i))$  verteilte Zufallsvariablen sind. Das CAPM Model zerlegt die Varianz der Assets in systematisches Risiko  $\beta_i^2 \sigma_M^2$  und idiosynchratisches Risiko  $\text{Var}(\epsilon_i)$ :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \text{Var}(\epsilon_i)$$

- Systematisches Risiko ist nicht weg-diversifizierbar und verdient eine Risikoprämie
- Idiosynchratisches Risiko ist weg-diversifizierbar und verdient keine Risikoprämie

## Performance-Messung:

- Jensen's Alpha  $J$  misst die Über- bzw. Unterperformance eines Portfolios relativ zur Erwartung des CAPM-Modells:  $r_{pf} - r_{rf} = \beta_i (\bar{r}_M - r_{rf}) + J$
- Das Sharpe-Ratio eines Portfolios  $S_{pf} = (r_{pf} - r_{rf}) / \sigma_{pf}$  misst das Verhältnis von Überschussrendite zu Risiko. Es kann mit dem Marktpreis für Risiko, also mit dem Sharpe Ratio des Marktportfolios verglichen werden.

## Übungen:

Im Inselstaat Isolation besteht der Aktienmarkt aus 5 Aktien, deren Betas zum Marktportfolio gegeben sind durch  $\beta_i = (0.8, 1.3, 1.7, 1, 0.2)$ . Rendite und Risiko des Marktportfolios sind  $r_M = 5\%$ ,  $\sigma_M = 10\%$ . Der risikofreie Zins ist  $r_{rf} = 1\%$ .

- Was ist die Gleichung für die Kapitalmarktlinie?

**Lösung:**  $\bar{r} = r_{rf} + \frac{\bar{r}_M - r_{rf}}{\sigma_M} \times \sigma = 1\% + 0.4 \times \sigma$

- Berechnen Sie die erwarteten Renditen der 5 Aktien

**Lösung:**  $\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i (\bar{r}_M - r_{rf}) \rightarrow \bar{r}_i = (4.2, 6.2, 7.8, 5.0, 1.8) \%$

- Angenommen, die 5 Aktien sind unkorreliert, haben gleiche Volatilität  $\sigma$ , und das Marktportfolio ist eine Kombination dieser 5 Aktien. Was ist deren jeweilige Marktkapitalisierung? Der Gesamtwert des Aktienmarkts ist 1 Mio \$.

**Lösung:**  $\mathbf{w} \sim \Sigma^{-1}(\mathbf{r} - r_{rf}\mathbf{1}) \rightarrow w_i = \frac{1}{\sigma^2} (r_i - 1\%) \rightarrow w_i = (168, 248, 312, 200, 72) \times 1000$   
\$ nach Normierung auf 1 Mio \$

- Der lokale Portfoliomanager hat mit diesen 5 Aktien eine Portfoliorendite von 7% bei einer Volatilität von 12% und einem Beta von 1.3 erzielt. Was sind das Sharpe Ratio und Jensen's  $\alpha$ ?

**Lösung:**  $r_{pf} - r_{rf} = \beta_i (\bar{r}_M - r_{rf}) + J \rightarrow 6\% = 1.3 \times 4\% + J \rightarrow J = 0.8\%$   
 $S_{pf} = \frac{r_{pf} - r_{rf}}{\sigma} = 0.5$ , also höher als für das Marktportfolio (0.4)

## 5 Faktormodelle

Faktormodelle reduzieren die Risikoquellen auf wenige Faktoren, und reduzieren damit die Fehlerquellen für die Schätzung der Parameter  $\bar{r}$ ,  $\Sigma$  für die Portfolio-Optimierung.

### 1-Faktormodell

1-Faktormodell mit Faktorrenditen  $f$  mit Erwartungswert  $\bar{f}$  und Standardabweichung  $\sigma_f$ :

- Modellierung der Renditen:  $r_i = a_i + b_i f + \epsilon_i$  mit  $E(\epsilon_i) = \text{cov}(f, \epsilon_i) = \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$
- Die Achsenabschnitte  $a_i$  und Faktorladungen  $b_i$  werden durch Regression geschätzt
- Erwartete Renditen:  $\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f}$
- Erwartete Varianz:  $\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$
- Erwartete Kovarianz:  $\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2$  für  $i \neq j$
- Rendite von Portfolios mit Gewichten  $\vec{w}$ :  $r = \vec{w} \times \vec{a} + \vec{w} \times \vec{b} f + \vec{w} \times \vec{\epsilon}$ ,  $\sigma_e^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2$
- Idiosynchronisches Risiko  $\sigma_{\epsilon}^2$  kann wegdiversifiziert werden

### Multi-Faktormodelle

Multi-Faktormodelle mit Faktorrenditen  $f_1, \dots, f_n$ :

- 2-Faktor-Modell:  $r_i = a_i + b_{i1} f_1 + b_{i2} f_2 + \epsilon_i$
- Multifaktormodelle:  $\mathbf{r}_i = a_i + \mathbf{b}_i \mathbf{f} + \epsilon_i$
- Typischerweise 3-15 Faktoren
- Externe Faktoren: Wirtschaftswachstum, Inflation, Arbeitslosenquote, ...
- Extrahierte Faktoren: Aktienmarktindizes, Zinsen, Rohstoffpreise, Wechselkurse, ...
- Firmeneigenschaften: PE-Ratio, Dividend Yield, Earnings Forecasts, ...

### Arbitrage Pricing Theory (APT):

- Angenommen, wir haben den Markt vollständig durch  $n$  Faktoren beschrieben:  $\mathbf{r}_i = a_i + \mathbf{b}_i \mathbf{f} + \epsilon_i$ , wobei die  $\epsilon_i$  unabhängige  $N(0, \sigma_i^2)$  verteilte Variablen sind
- Arbitrage-Freiheit im weiteren Sinn: Kein Profit ohne systematisches Risiko
- Daraus folgt:  $\bar{r}_i - r_{rf} = \mathbf{b}_i (\bar{\mathbf{f}} - r_{rf} \mathbf{1})$ , also  $\bar{r}_i = r_{rf} (1 - \mathbf{1} \times \mathbf{b}_i) = r_{rf}$  wenn  $\mathbf{b}_i = 0$

## CAPM Model vs. APT:

- Bisher konnten die erwarteten APT-Faktorenditen  $\bar{f}$  beliebig sein
- Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Faktorrenditen dem CAPM-Modell folgen:

$$\bar{f}^{(k)} - r_{rf} = \beta_f^{(k)} (r_M - r_{rf}) \quad \text{mit} \quad \beta_f^{(k)} = \frac{1}{\sigma_M^2} \text{Cov}(f^{(k)}, M)$$

- Dann folgt auch die Rendite jedes einzelnen Assets dem CAPM Modell:

$$\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i (r_M - r_{rf}) \quad \text{mit} \quad \beta_i = \sum_k \text{Cov}(r_i, f^{(k)}) \beta_f^{(k)}$$

- Das CAPM Modell ist also ein APT-Modell mit zusätzlicher Effizienzannahme. Es ist *nicht* nur ein 1-Faktor-Modell, denn es erlaubt eine beliebige Kovarianzmatrix zwischen den Assets (im 1-Faktor-Modell wäre  $\text{Cov}_{ij} = b_i b_j \sigma_M^2$  )

## Übungen:

Betrachten Sie den S& P500 als einzigen Marktfaktor mit Volatilität  $\sigma_f = 16\%$  und langfristiger Rendite  $\bar{f} = 7\%$  bei einem risikolosen Zins von  $r_{rf} = 3\%$ . Die Rendite zweier Aktien sei gegeben durch  $r_i = a_i + b_i f + \epsilon_i$  mit  $b_1 = 0.6, b_2 = 1.2$ , und Volatilitäten der zufälligen Fluktuationen  $\sigma_{\epsilon_1} = 8\%, \sigma_{\epsilon_2} = 10\%$ .

- Benutzen Sie Arbitrage Pricing Theory, um  $a_1$  und  $a_2$  zu berechnen

**Lösung:**  $a_1 = r_{rf}(1 - b_1) = 1.2\%, a_2 = r_{rf}(1 - b_2) = -0.6\%$

- Berechnen Sie die erwarteten Renditen und Volatilitäten der beiden Aktien

**Lösung:**

$$\bar{r}_1 = a_1 + b_1 \bar{f} = 5.4\%$$

$$\bar{r}_2 = a_2 + b_2 \bar{f} = 7.8\%$$

$$\sigma_1^2 = b_1^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_1}^2 \rightarrow \sigma_{\epsilon_1} = 12.5\%$$

$$\sigma_2^2 = b_2^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_2}^2 \rightarrow \sigma_{\epsilon_2} = 21.6\%$$

- Zerlegen Sie die Varianz der Aktien in je eine systematische und eine idiosynchratische Komponente. Was ist das Verhältnis beider Komponenten?

**Lösung:**  $\frac{b_1^2 \sigma_f^2}{\sigma_{\epsilon_1}^2} = 1.44, \frac{b_2^2 \sigma_f^2}{\sigma_{\epsilon_2}^2} = 3.69$

- Berechnen Sie die Kovarianz und die Korrelation der beiden Aktien

**Lösung:**  $\sigma_{12} = b_1 b_2 \sigma_f^2 = 0.0184, \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = 0.68$

## 6 Daten & Statistik

### Einfluss der Periodenlänge

Einfluss der Periodenlänge bei  $p$  gleich langen Perioden pro Jahr:

- Jährliche erwartete Rendite  $\bar{r}_y \rightarrow$  erwartete Rendite über Periode:  $\bar{r}_p = \frac{\bar{r}_y}{p}$
- Jährliche Standardabweichung  $\sigma_y \rightarrow$  Standardabweichung über Periode:  $\bar{\sigma}_p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{p}}$
- Verhältnis Signal  $\bar{r}_p$  zu Rauschen  $\sigma_p$ :  $\frac{1}{\sqrt{p}}$
- Beispiel:  $\bar{r}_y = 6\%$ ,  $\sigma_y = 24\%$ ,  $p = (1, 12, 260)$  (Jahr, Monat, Tag):

$$\bar{r}_p = (6\%, 0.5\%, 0.023\%), \quad \bar{\sigma}_p = (24\%, 6.9\%, 1.5\%), \quad \bar{r}_p : \bar{\sigma}_p = (1 : 4, 1 : 14, 1 : 64)$$

### Schätzungen

Schätzungen basierend auf Sample  $r_t$  einer  $N(\bar{r}, \sigma^2)$  Verteilung (hier:  $t = \text{Zeit}$ )

- Schätzung der erwarteten Rendite:  $\hat{\bar{r}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t$
- Schätzfehler der erwarteten Rendite:  $\sigma_{\hat{\bar{r}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$
- Schätzung der Varianz:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{\bar{r}})^2 \rightarrow E[s^2] = \sigma^2$
- Vorfaktor  $\frac{1}{n-1}$  statt  $\frac{1}{n}$  kompensiert dafür, dass  $\hat{\bar{r}}$  aus dem gleichen Sample geschätzt wird
- Schätzfehler der Varianz:  $Var(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \rightarrow Std(s^2) = \sigma^2 \sqrt{2/(n-1)}$

### Beispiel

- $\bar{r}_y = 4\%$ ,  $\sigma_y = 20\%$ ,  $n = (12, 120, 1200)$  monatliche Renditen (1,10,100) Jahre
- Geschätzte Rendite:  $4\% \pm (5.8\%, 1.8\%, 0.6\%)$
- Geschätzte Varianz:  $0.04 \pm (0.009, 0.0036, 0.0016)$

Die Renditeschätzung hat selbst über 10 Jahre einen hohen Fehler. Über 100 Jahre ist der Fehler zwar klein genug, aber das Ergebnis kann heute nicht mehr als relevant betrachtet werden. Dagegen ist der Schätzfehler für die Varianz schon über 10 Jahre klein genug.

Für zuverlässigere Schätzungen der erwarteten Renditen muss man die Schätzung aus historischen Daten ergänzen bzw. anpassen durch weitere Informationen, z.B. durch fundamentale Aktien- und Marktanalyse, oder durch die Vorhersage des CAPM Modells.



## Übungen:

Eine Aktie habe eine mittlere tägliche Rendite von 0.02% und eine tägliche Standardabweichung von 1% , also ein Signal-to-Noise-Ratio von 1:50.

- Berechnen Sie die mittlere Rendite , die Standardabweichung, und das Signal-to-Noise-Ratio für die Periodenlängen
  1. 5 Handelstage (1 Woche)
  2. 20 Handelstage (1 Monat)
  3. 260 Handelstage (1 Jahr)
  4. 10 Jahre

**Lösung:** für (1, 2, 3, 4): Rendite:

$$\bar{r} = 0.02\% \times (5, 20, 260, 2600) = (0.1\%, 0.4\%, 5.2\%, 52\%)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = 1\% \times (\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{260}, \sqrt{2600}) = (2.2\%, 4.5\%, 16.1\%, 51\%)$$

Signal-to-noise:

$$\frac{1}{50} \times (\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{260}, \sqrt{2600}) \sim \left( \frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

- Die 5 täglichen Renditen der ersten Woche seien (0.72%, -1.21%, 0.22%, 1.13%, -0.53%). Schätzen Sie Mittelwert und Varianz.

**Lösung:**

$$\hat{r} = \frac{1}{5} \sum_{t=1}^5 r_t = 0.066\%$$

$$s^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (r_i - \hat{r})^2 = 0.000089$$

- Berechnen Sie den Schätzfehler der mittleren täglichen Rendite, wenn diese basierend auf täglichen Renditen über die Perioden (i,ii,iii,iv) geschätzt wird

**Lösung:**

$$\sigma_{\hat{r}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (0.67\%, 0.22\%, 0.062\%, 0.020\%)$$

- Berechnen sie den Schätzfehler der Varianz über die gleichen Perioden

**Lösung:**

$$Std(s^2) = \sigma^2 \sqrt{2/(n-1)} = (1\%)^2 \times (0.71, 0.32, 0.088, 0.028)$$

Ein Portfolio besteht aus 2 Assets mit Standardabweichung 10% (für beide Assets) und Korrelation  $\rho$ . Die erwarteten Renditen sind identisch:  $r_1 = r_2 = 6\% \pm 2\%$  (d.h. mit Schätzfehler 2%). Der risikofreie Zins ist Null.

- Was sind die optimalen Gewichte, also die Gewichte des Tangentialportfolios? Was sind die optimalen Sharpe Ratios in den Fällen  $\rho = (0, +0.8, -0.8)$ ?

**Lösung:**

$$\Sigma = \frac{1}{100} \times \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{100}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \sim \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}},$$

$$\text{normiert, so dass, } w_1 + w_2 = 1 \rightarrow \text{Für alle: } \rho : \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}$$

- Drei Portfoliomanager Armin, Beate und Chris schätzen die Renditen basierend auf drei verschiedenen Samples:
  1. Sample A:  $\bar{r}_1 = 4\%, \bar{r}_2 = 8\%$
  2. Sample B:  $\bar{r}_1 = 6\%, \bar{r}_2 = 6\%$
  3. Sample C:  $\bar{r}_1 = 8\%, \bar{r}_2 = 4\%$

Basierend auf diesen Schätzungen konstruieren Armin, Beate und Chris jeweils ihr vermeintliches super-effizientes Portfolio. Was sind die vermeintlichen optimalen Gewichte  $w_A^{(1)}, w_A^{(2)}, w_B^{(1)}, w_B^{(2)}, w_C^{(1)}$  im Fall  $\rho = 0$ ?

**Lösung:**

$$\mathbf{w}_A = \begin{pmatrix} 33\% \\ 67\% \end{pmatrix}, \mathbf{w}_B = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}, \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix} 67\% \\ 33\% \end{pmatrix}$$

- Was sind die Sharpe Ratios, die Armin, Beate und Chris jeweils (1) erwarten, (2) tatsächlich langfristig erreichen? Vergleichen Sie mit den optimalen Sharpe Ratios aus Aufgabe (a)

**Lösung:**

$$\hat{S} = \mathbf{w} \times \hat{\mathbf{r}} / \sigma, \sigma^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \sigma_A = \sigma_C = 10\% \times \sqrt{\frac{5}{9}}, \sigma_B = 10\% \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{A,C: erwartet: } \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\% \\ 8\% \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sigma_A} = 0.89, \text{ erreicht: } \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6\% \\ 6\% \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sigma_A} = 0.81$$

$$\text{B erwartet, erreicht, und optimal: } \left( \frac{1/2}{1/2} \right) \times \left( \frac{6\%}{6\%} \right) \times \frac{1}{\sigma_B} = 0.85$$

Die erwarteten Sharpe Ratios von A und C sind höher, die tatsächlich von A und C langfristig erreichten Sharpe Ratios sind niedriger als die optimalen Sharpe Ratios.

- Wiederholen Sie die Analyse für  $\rho = (+0.8, -0.8)$ . Wie beeinflusst die Korrelation die Differenz zwischen erwarteten und tatsächlich erreichten Sharpe Ratios?

**Lösung:** Die Diskrepanz zwischen erwarteten und langfristig tatsächlich erreichten Sharpe Ratios wird grösser bei positiver Korrelation, und geringer bei negativer Korrelation:

Sharpe Ratios	A und C erwartet	A und C erreicht	B und Optimal
$\rho = 0.8$	0.89	0.45	0.63
$\rho = 0.0$	0.89	0.80	0.85
$\rho = -0.8$	1.91	1.89	1.90