ELEC1101 : problème 1

Groupe 17

18 février 2015

En lien avec le projet ELEC1101 de la majeure en électricité, il a été demandé de s'intéresser aux séries de Fourier ainsi qu'aux transformations non linaires. Les différentes questions posées à ce sujet constituent le premier problème autonome. Ce rapport tentera de donner réponse à celles-ci.

1 Signal triangulaire et série de Fourier

Pour commencer, définissons un signal triangulaire quelconque comme représenté sur la figure 1.

Un tel signal quelconque peut ici être séparer en plusieurs segments de droites afin d'être décrit de manière analytique. Intéressons-nous pour ce faire au signal rouge, le plus général des deux. Il peut être décrit au moyen des équation suivantes :

$$d_1(t) = \tan(\theta) * t + V_{min} + Q \tag{1}$$

$$d_2(t) = -\tan(\theta) * t + V_{max} + Q - (V_{max} - V_{min}) \tag{2}$$

$$d_3(t) = \tan(\theta) * t + V_{min} + Q - 2 * (V_{max} - V_{min}) \tag{3}$$

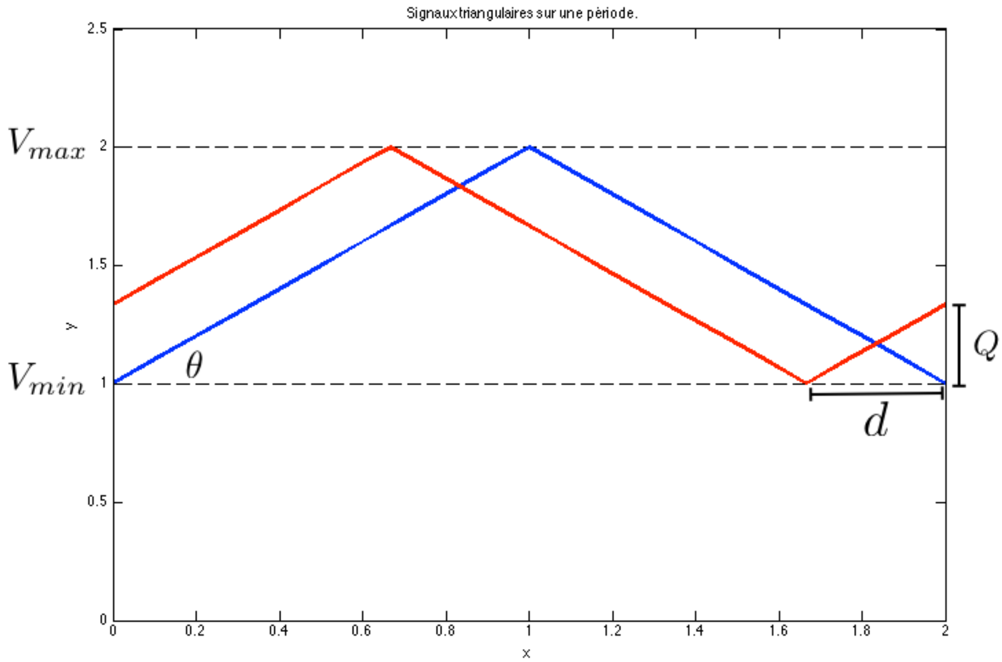

FIGURE 1 – Signaux triangulaires sur une période

Dans ces expressions on peut lier certains paramètres entre eux et on obtient, avec T la période :

$$\tan(\theta) = \frac{2 * (V_{max} - V_{min})}{T}$$

$$d = \frac{Q}{\tan(\theta)}$$

Une fois ces expressions établies, il est possible d'obtenir le développement en série de Fourier de ce signal. Pour ce faire il est nécessaire de calculer les différents coefficients de cette série en séparant le signal en 3 droites comme fait plus haut :

$$\int_0^T u(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}-d} d_1(t)dt + \int_{\frac{T}{2}-d}^{T-d} d_2(t)dt + \int_{T-d}^{T} d_3(t)dt$$

En utilisant cette méthode on obtient :

$$A_0 = \frac{V_{max} + V_{min}}{2}$$

$$A_k = \frac{2 * (V_{max} - V_{min})}{\pi^2 k^2} * \left[\cos\left(k\pi \frac{Q - 2(V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}} \right) - \cos\left(k\pi \frac{Q - (V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}} \right) \right]$$

$$B_k = \frac{2 * (V_{max} - V_{min})}{\pi^2 k^2} * \left[\sin\left(k\pi \frac{Q - 2(V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}} \right) - \sin\left(k\pi \frac{Q - (V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}} \right) \right]$$

Le signal triangulaire $u(t)$ de pulsation ω peut donc enfin s'écrire :

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) \tag{4}$$

Un choix judicieux de l'origine du temps permet de grandement simplifier ces expressions. En effet, placer le 0 sur un maximum ou un minimum du signal donne un signal pair. Le développement en série de Fourier ne contient alors que des termes paires, c'est à dire le terme constant ainsi que la série de cosinus. Avec les notations utilisées plus haut, une telle situation correspond à $Q = 0$ et les coefficients deviennent :

$$A_0 = \frac{V_{max} + V_{min}}{2}$$

$$A_k = \frac{4 * (V_{max} - V_{min})}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

$$B_k = 0$$

On se propose maintenant de simplifier l'expression 4 au moyen d'exponentielles complexes. Plus précisément on veut réécrire cette équation sous la forme :

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\omega t} \tag{5}$$

Une remarque qui mérite d'être faite quant à cette expression concerne les bornes de la somme qui commencent ici à $-\infty$.

Exprimons maintenant C_k en fonction de A_k et B_k. En identifiant les différents termes des expressions 4 et 5 on trouve :

$$C_k = \frac{1}{2}(A_k - j\ B_k) \tag{6}$$

$$C_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + j\ B_k) \tag{7}$$

Ces coefficient s'expriment quant à eux comme :

$$C_k = \frac{V_{max} - V_{min}}{\pi^2 k^2} \left(e^{-j\ G_2} - e^{-j\ G_1}\right) \tag{8}$$

$$C_{-k} = \frac{V_{max} - V_{min}}{\pi^2 k^2} \left(e^{j\ G_2} - e^{j\ G_1}\right) \tag{9}$$

Où G_1 et G_2 valent :

$$G_1 = k\pi \frac{Q - (V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}}$$

$$G_2 = k\pi \frac{Q - 2(V_{max} - V_{min})}{V_{max} - V_{min}}$$

Au vu des équations 6 et 7 on affirme facilement que $C_{-k} = C_k^*$.

2 Transformation non linéaire

Imaginons maintenant un circuit électrique effectuant une transformation non linéaire $y = h(x)$ sur son signal d'entrée. Cette transformation est connue sous la forme de son développement de Taylor jusqu'à l'ordre 3 :

$$h(x) \simeq a + bx + cx^2 + dx^3$$

Imaginons maintenant que $x(t)$ corresponde au signal triangulaire du point précédent. L'ordre 0 et 1 de cette transformation s'obtiennent trivialement. En revanche, les ordres supérieurs sont plus complexes.

Commençons par l'ordre 2 et prenons :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t)$$

Si on élève cette expression au carré on obtient toutes les paires de termes possibles avec des doubles sommes pour certains termes. On pourrait apparenter cela au produit cartésien de l'ensemble contenant les 3 coefficients du développement en série avec lui-même. C'est à dire :

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_k \\ B_k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A_0 & A_k & B_k \end{bmatrix}$$

On obtient de cette façon tous les coefficient de $x^2(t)$. On peut aussi souligner le fait qu'un terme dépendant de k correspond à un ensemble et que le produit de 2 termes dépendants de k est donné par le produit cartésien des 2 ensembles correspondants :

$$A_k \times A_k = A_{k_1} \times A_{k_2}$$

$$B_k \times B_k = B_{k_1} \times B_{k_2}$$

$$A_k \times B_k = B_k \times A_k = A_{k_1} \times B_{k_2}$$

Une fois ces ensembles trouvés, les doubles sommes se calculent facilement de façon numérique avec les indices k_1 et k_2 quand c'est nécessaire.

Dans le cas d'un signal pair, les calculs se simplifient grandement pour donner :

$$\begin{aligned} x^2(t) = A_0^2 + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) \\ + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} \cos(k_1 \omega t) \cos(k_2 \omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

Où les A_k ont été donnés au point précédent.

Pour le terme d'ordre trois, il faut considérer tous les triplets de coefficients possibles avec A_0, A_k et B_k. Chaque triplet fera alors référence à un terme dans le développement en série.

Considérons maintenant une transformation non-linéaires décrite par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{x}{\left(\left(\frac{x}{s}\right)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

La figure 2 représente cette fonction. Les comportements asymptotiques aux extrémités gauche et droite correspondent à une saturation du système.

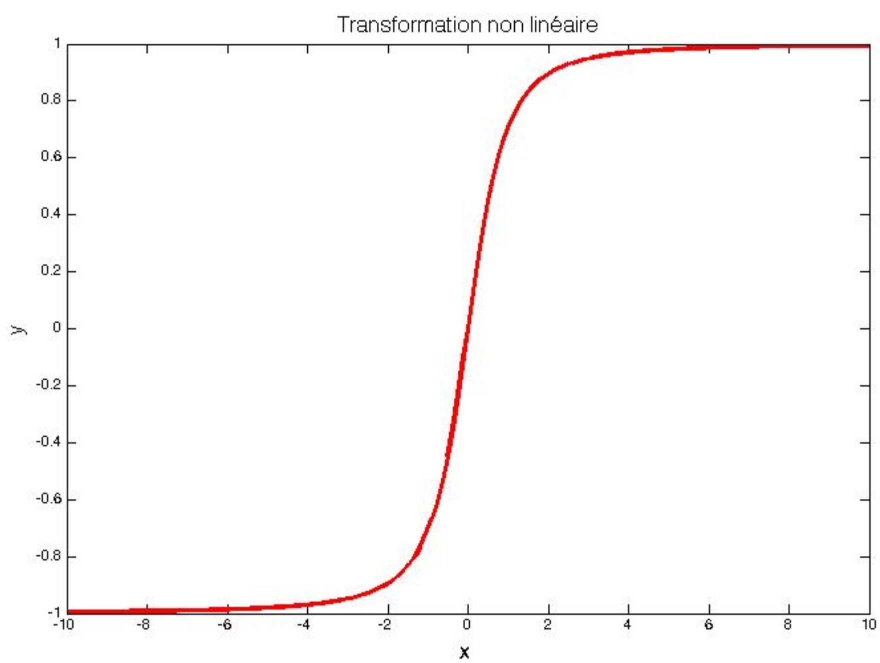

FIGURE 2 – Graphe d'une transformation non-linéaire

En développant cette fonction en série de Taylor on obtient :

$$h(x) \simeq x\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right)$$

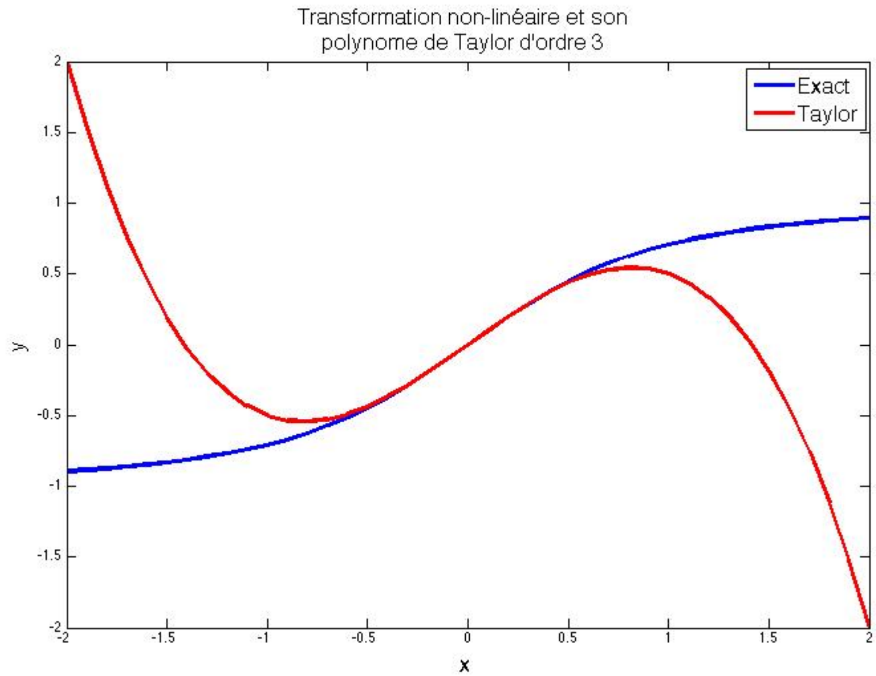

FIGURE 3 – Polynome de Taylor de la transformation

La figure 3 présente le graphe de cette série. Pour un signal périodique d'amplitude V, on peut l'observer que le rapport $\frac{V}{s}$ doit rester entre -1 et 1 pour que l'approximation soit valable et on parlera, dans ce cas, de saturation légère.

De plus, si $|\frac{V}{s}| \leqslant 1$, les termes du développement en série vont décroitre tandis que l'ordre augmente. Ainsi, on se limitera au polynôme d'ordre 3.