Lezioni di tutorato per il corso di "Analisi Matematica 1"

Simone Romiti *, Francesco Sparacino †

04/10/2019 - 28/02/2020

*simone.romiti.1994@gmail.com
†fra.sparacino@stud.uniroma3.it

Indice

1 04/10/2019

1.1 Dimostrazioni per induzione

Dimostrare per induzione le seguenti relazioni:

1.
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Provare a dimostrarla anche in maniera diretta(non per induzione).
Suggerimento: $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

La proposizione è vera già per $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Assumiamo ora che sia valida per n. dimostriamo che vale anche per $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0 + 1 + 2 + ...n + (n+1) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

q.e.d.

Vediamo ora la dimostrazione non induttiva. Partiamo da

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=2}^{n}(i-1)^2 \quad ,$$

perché $i = 1$ dà contributo nullo. Cambio di variabile: $i - 1 = i'$:
$i = 2 \to i' = 1, \quad i = 2 \to i' = n - 1$.
La variabile su cui sommo è "muta", i.e. non importa come la chiamo.

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i'=1}^{n-1} i'^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 =: p$$

Ma è anche vero che $(i-1)^2 = i^2 - 2i + 1$. La sommatoria di una somma è la somma delle sommatorie, quindi:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i'=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i'=1}^{n-1} i^2 + n^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + n = p + n^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

Uguagliando le due precedenti equazioni di ottiene (chiamo $s := \sum_{i=1}^{n} i$):

$$p = p + n^2 - 2s + n \quad \rightarrow \quad n^2 - 2s + n = 0$$

Risolvendo per s troviamo:

$$\sum_{i=1}^{n} i = s = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Provare a dimostrarla anche in maniera diretta(non per induzione).
Suggerimento: $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n-1} i^3$

(stessa tecnica usata in item 1)

La tecnica è analoga al caso precedente, perciò omettiamo i passaggi di pura algebra.
Dimostrazione per induzione. $n = 0$ è vera.
Supponiamo che sia vera per n. È vera anche per $n+1$ perché

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = ... = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

3.
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Per $n = 1$, k può essere solo 0 $(k \leq n)$ [1]. Per $n = 1$ la prop. è vera:

$$\binom{1}{0} + \binom{0}{0} = 1 + 1 = 2 = \binom{2}{1}$$

[1] Per n più gradi dovrei controllare la base induttiva per tutti i k possibili

Supponiamo che la prop. sia vera per n. Per $n+1$ sia ha:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} + \binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{n+1}{n-k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} + \binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{n+1}{n-k+1}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right] + \binom{n+1}{k+1} =\!\rightarrow \ldots
\end{aligned}$$

Usiamo **ora** l'ipotesi che valga per n:

$$\begin{aligned}
\ldots \rightarrow\!= &\frac{n+1}{n-k+1}\left[\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right] + \binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{n+1}{n-k+1}\left[\binom{n+1}{k+1} - \frac{n-k}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\right] + \binom{n+1}{k+1} = \\
&= \binom{n+1}{k+1}\left(\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n-k}{n-k+1} + 1\right) = \\
&= \binom{n+1}{k+1}\frac{n+2}{n-k+1} = \\
&= \binom{n+2}{k+1}
\end{aligned}$$

Dimostrazione diretta. Ricordando la definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e che $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

q.e.d.

1.2 Limiti di successioni

Calcolare i seguenti limiti per $n \to \infty$ (quando esistono).

1.

$$\lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{3!(n-3)!}{n!} = \frac{3}{n-3} \to 0$$

2.

$$\lim \left(\frac{n!+5}{n!}\right)^{n!}$$

Cambio di variabile: $m = n!$. $m \to \infty$.

$$\left(\frac{m+5}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{5}{m}\right)^m = \left(\left(1 + \frac{1}{(m/5)}\right)^{m/5}\right)^5 =$$

Cambio di variabile: $p = m/5$. $p \to \infty$.

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right]^5 \to e^5$$

(Si ricordi come è definito il numero e)

3.
$$\lim \frac{e^n - 2^{n \ln n}}{n^n}$$

4.
$$\lim \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \ln n}$$

$|\alpha| < 1$ si estraggono due sottosuccessioni, una maggiorante per $n = 2k$ (pari) e l'altra minorante per $n = 2k + 1$ (dispari), con $k \in \mathbb{N}$. Si ha quindi
$$\frac{\alpha^{2k+1} - 1}{(2k+1)\ \ln(2k+1)} \leq \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \ln n} \leq \frac{\alpha^{2k} + 1}{2k\ \ln(2k)}$$
per $k \to \infty$ il $\liminf$ tende a 0 così come il $\limsup$. Per il teorema dei due carabinieri anche la successione tende a 0.

$\alpha = 1$ Si procede come sopra, in un caso si ha che la serie dei minoranti è costantemente nulla, mentre la successione dei maggioranti tende a 0.

$\alpha = -1$ Analogo al caso sopra.

$|\alpha| > 1$ prendiamo le stesse successione minoranti e maggioranti di sopra e raccogliamo per α^n
$$\frac{\alpha^{2k+1}\left(1 - \frac{1}{\alpha^{2k+1}}\right)}{(2k+1)\ \ln(2k+1)} \leq \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \ln n} \leq \frac{\alpha^{2k}\left(1 + \frac{1}{\alpha^{2k}}\right)}{2k\ \ln(2k)}$$
entrambe le successioni si comportano come $\alpha^x/(x\ \log x)$ che per $x \to \infty$
$$\frac{\alpha^x}{x\ \log x} = \frac{e^{x\ \log \alpha}}{e^{\log x + \log(\log x)}},$$
che per $x \to \infty$ tende a ∞. Per il teorema dei due carabinieri la successione dell'esercizio tende a ∞.

5.
$$\lim\left[\ln(n+1) - \log_2 n\right]$$

6.
$$\lim \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{n^\alpha + n}$$

7.
$$\lim \frac{1}{(\ln n^4)(\sin 1/n)}$$

2 10/10/2019

2.1 Limiti

Trovare il valore dei seguenti limiti per $n \to \infty$ (se esistono).

1.
$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

2.
$$\lim \left(\frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2} \right)$$

3.
$$\lim \left(\frac{(1+2+...+n)}{3n+7} \sin(1/n) \right)$$

4.
$$\lim \left(\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3} \right)$$

5.
$$0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, ...$$

6.
$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{3\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, ...$$

2.2 Serie

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche (al variare di x ove presente).

1.
$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(2n)!}$$

2.
$$\sum_{n \geq 0} x^{n!}$$

3.
$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1+|x|^n}$$

4.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$$

3 11/10/2019

3.1 Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Mostrare che vale la seguente relazione $\forall x_1, x_2, y_1, y_2$.

$$|x_1y_1 + x_2y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

3.2 Serie

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche (al variare di x ove presente).

1. $$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{nx}}{n!}$$

2. $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln x)^{\ln n}}$$

3. $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

4. $$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$$

5. $$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n + n}{3^n - \sqrt{n}}$$

6. $$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

7. $$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

8. $$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 3n + 5}\right)^{n^2}$$

Dimostrare le seguenti proprietà delle serie a termini positivi(non nulli).
Sia $a_n \geq 0 \quad \forall n$.

1.
$$\sum_{n\geq 0} a_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n\geq 0} a_n^2 < +\infty$$

Se la prima serie converge allora $a_n \to 0$ (condizione necessaria per la convergenza). Ciò significa che definitivamente $a_n < 1 \implies a_n^2 < a_n$ dato che la serie è a termini positivi. Quindi:

$$0 \leq \sum a_n^2 < \sum a_n$$

Dunque $\sum a_n^2 < +\infty$.

2.
$$\sum_{n\geq 1} a_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} < +\infty$$

$0 \leq a_n \leq \frac{a_n}{n}$. Ne segue che

$$0 \leq \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{n\geq 1} a_n$$

Da cui l'asserto.

3.
$$\sum_{n\geq 0} a_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty$$

Dimostriamo le implicazioni nei due versi usando il criterio del confronto asintotico.

$$\sum_{n\geq 0} a_n < +\infty \implies a_n \to 0 \implies a_n \sim \frac{a_n}{1+a_n} \implies \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty \implies \frac{a_n}{1+a_n} \to 0 \implies a_n \to 0 \implies \frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n \implies \sum_{n\geq 0} a_n < +\infty$$

4 14/10/2019

4.1 Serie

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche.

1.
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

2.
$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+3n+5} \right)^{n^2}$$

3.
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^{-1/2}$$

4.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)^2}$$

5.
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{3}}{n^\beta}$$

6.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^3 n! \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^n (n+2)!}$$

7.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2}$$

8.
$$\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$$

4.2 Numeri complessi

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi.

1.
$$(2-3i)(-2+i)$$

2.
$$(3+i)(3-i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)$$

3.
$$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$$

4.
$$\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

1.
$$z=i$$

2.
$$z=-1$$

3.
$$z=1+i$$

4.
$$z=i(i+1)$$

5.
$$z=\frac{i+1}{1-i}$$

6.
$$z=\sin\alpha+i\cos\alpha$$

Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi.

1.
$$z=\frac{1}{i-1}+\frac{2i}{i-1}$$

2.

$$z = 1 + \frac{i}{1-2i}$$

Verificare che se $|z| = 1$ allora:

$$\left|\frac{3z - i}{3 + iz}\right| = 1$$

5 17/10/2019

Dato l'insieme A:

$$A = \left\{ \frac{n^3 + n^2 + 1}{n!} \quad | \quad n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dire se:

1. A è limitato
2. A è dotato di minimo
3. A è dotato di massimo (non è richiesto trovare il massimo, solo dimostrare la sua esistenza)

5.1 Serie

1. Mostrare che, data la successione a_n a termini positivi:

$$\sum a_n^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum \frac{a_n}{n} < \infty$$

2. Studiare l'andamento delle seguenti serie (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ dove presente):

$$\sum_n (n+1)x^{2n}$$

$$\sum_n (-1)^n \frac{(\cos x)^{2n}}{n^\alpha}$$

$$\sum_n \frac{x^n}{1 + |x|^n}$$

5.2 Numeri complessi

1. Calcolare i seguenti numeri complessi:

(a)

$$z = \sqrt[3]{-i}$$

(b)

$$z = \sqrt[5]{1}$$

(c)

$$z = \sqrt{2 - 2i}$$

2. Trovare le radici delle seguenti equazioni:

$$z^5 \bar{z} - |z|^6 - z^4 + |z|^4 = 0$$
$$z^8 + 17z^4 + 16 = 0$$

3. Scrivere in forma trigonometrica:

$$z = \left(\frac{1 + i}{(i - 1)^2} \right)^3$$

5.3 Numeri di Fibonacci

Siano F_n i numeri di Fibonacci:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 0 + 1 = 1, \quad ..., \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Dimostrare che il rapporto F_{n+1}/F_n tende al rapporto aureo, i.e.:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

6 18/10/2019

6.1 Serie

1. Studiare l'andamento delle seguenti serie.

(a)

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{x}\right)^k\frac{k!}{k^k}$$

(b)

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n \quad \alpha\in\mathbb{R} \qquad \text{(sugg. criterio del rapporto)}$$

6.2 Numeri complessi

1. Trovare i valori di z per cui:

$$|z-1|\leq|z+i|$$

6.3 Numeri di Fibonacci

Siano F_n i numeri di Fibonacci:

$$F_0=0,\quad F_1=1,\quad F_2=0+1=1,\quad ...,\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

Detta:

$$\rho(z)=\sum_{n\geq 0}F_nz^n$$

(a) Mostrare che gli F_n sono monotoni crescenti

(b) Mostrare che il rapporto F_{n+1}/F_n è sempre ≤ 2.

(c) Dedurne che la serie di potenze ha raggio di convergenza $r\leq 2$

Mostrare, usando la ricorrenza, che nel cerchio di convergenza vale:

$$(1-z-z^2)\rho(z)=F_0+F_1z$$

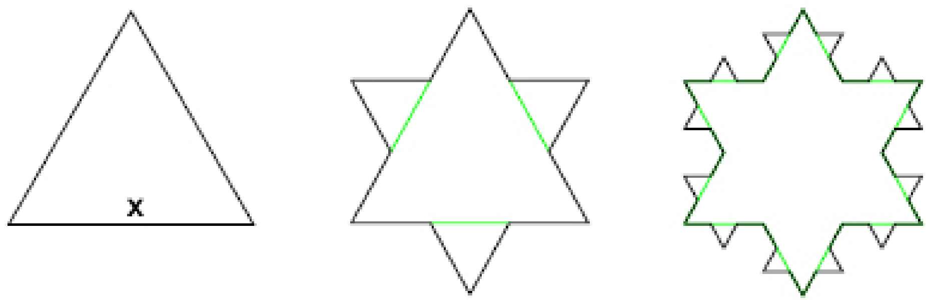
6.3.1 Un problema di piastrellamento

Sia dato un corridoio largo $L = 20$ cm di lunghezza $10n$ cm. Avete piastrelle 20×10 cm. Sia C_n il numero di modi diversi in cui potete piastrellare il corridoio. Considerando come punto di partenza il primo gruppo di 1 o 2 piastrelle, dimostrare che

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$$

Dedurne che un corridoio lungo n può essere piastrellato in F_{n+1} modi diversi.

6.4 Curva di Von Koch



Si prenda un triangolo equilatero di lato 1. Sull'esterno di ciascun lato, equidistante dai vertici, si costruisca un triangolo equilatero di lato 1/3.
Si ripeta l'operazione per ciascuno dei lati esterni dei triangoli equilateri così ottenuti.
Si iteri infinite volte. Sia F la figura così ottenuta.

(a) Mostrare che F ha perimetro infinito.
Sia n l'indice che rappresenta l'approssimazione n-esima nella curva completa. Per $n = 0$ si ha il triangolo di base. Per $n = 1$ aggiungiamo 3 triangolini nel mezzo di ogni lato. Per $n = 2$ facciamo lo stesso per la figura ottenuta a $n = 1$.Procediamo così fino ad una approssimazione n arbitraria. La curva di Von Koch si ottiene nel limite $n \to \infty$.
Ad ogni passo il numero di lati è $\lambda_n = 4\lambda_{n-1}$, dove $\lambda_0 = 3$ nel nostro caso. La lunghezza di ogni lato è $l_n = l_{n-1}/3$, con $l_0 = 1$ nel nostro caso. Il perimetro al passo n è dunque pari a:

$$P_n = \lambda_n l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \lambda_0 l_0 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

(b) Mostrare che F ha un'area finita, e che essa è pari agli $\frac{8}{5}$ di quella del triangolo di partenza

Ad ogni passo l'area dei triangolini è $a_n = \frac{a_{n-1}}{9}$, con $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ nel nostro caso. L'area totale al passo n-esimo è dunque data da:

$$A_n = A_0 + l_0 a_1 + l_1 a_2 + \ldots = A_0 + \sum_{n \geq 1} l_{n-1} a_n = A_0 + \sum_{n \geq 1} 4^{n-1} l_0 \left(\frac{1}{9}\right)^n a_0$$

(nota: $A_0 = a_0$)

Nota: Ad ogni passo aggiungiamo un numero di triangoli pari al numero di lati del passo precedente.

$$A_n = A_0 + \frac{l_0 A_0}{4} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{9}\right)^n = A_0 + \frac{3A_0}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 1\right)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la ben nota espressione della serie geometrica. Concludendo il conto si ha:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} A_0 = \frac{8\sqrt{3}}{20}$$

La curva di Von Koch risulta quindi essere una curva chiusa di lunghezza infinita che ciononostante racchiude un'area finita.

7 22-23/10/2019

7.1 Continuità

1. Siano $f, g \in \mathscr{C}([a,b])$ ($\mathscr{C}(D) := \{f : D \to \mathbb{R} | f$ è continua in $D\}$). Dimostrare che la funzione

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

è continua sull'intervallo $[a,b]$.
Suggerimento: si consideri la funzione definita a tratti $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che

$$\begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

la funzione è continua? Se $m \in \mathscr{C}(A)$ con $A \subset \mathbb{R}$ cosa si può dire sulla funzione $l \circ m$? Studiare la funzione $q(x) := f(x) + (l \circ (g - f))(x)$. La funzione è continua? come è legata alla funzione h?

Per verificare che l sia continua, basta far vedere che è continua in 0: il $\lim_{x \to 0^+} l(x) = 0$ e a sinistra la funzione assume proprio il valore $l(0) = 0$, quindi è continua. $l \circ m$ è continua perché è composizione di funzioni continue. Osserviamo anche che la funzione $q(x)$, che è continua perché somma di funzioni continue, può essere riscritta come la funzioni a tratti

$$\begin{cases} f(x) & , f(x) \geq g(x) \\ g(x) & , f(x) < g(x) \end{cases}$$

e coincide con la funzione $h(x)$. Quindi $h(x)$ è continua.

2. Sia $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tale che

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c\,x$.
Suggerimento: Se f soddisfa la tesi si deve avere che $c := f(1)$. Utilizzare la condizione su f per calcolare $f(1/2)$. Cosa si può dire su $f(1/n)$ con $n \in \mathbb{Z}$? Cosa si può dire su $f(q)$ con $q \in \mathbb{Q}$? Dopo aver fatto queste osservazioni si consideri $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tale che $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Cosa si può dire su $f(x)$?

La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ è definita e assumerà un certo valore reale. Dunque si può assumere che $f(1) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\,f\left(\frac{1}{2}\right)$$

da cui segue che $f(1/2) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} c$. Analogamente si può verificare per ogni $n \in \mathbb{Z}$ che

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-volte}}\right) = n\, f\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui segue che $f(1/n) = \frac{1}{n} f(1) = \frac{1}{n} c$. Per ogni $x \in \mathbb{Q}$ razionale, si ha che $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ (per la definizione di numero razionale) e quindi $f(m/n) = \frac{m}{n} f(1) = \frac{m}{n} c$. Quindi abbiamo verificato la tesi per ogni razionale in $\mathbb{R}$, manca di dimostrarlo anche per gli irrazionali. Per ogni x irrazionale è possibile trovare una successione numerabile di razionali $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tale che $x_k \to x$ per $k \to \infty$. Allora si deve avere che $f(x_k) = x_k\, f(1)$ e passando al limite si ottiene $f(x) = x\, f(1)$.

7.2 Limiti (Teorema ponte)

Discutere l'esistenza dei seguenti limiti utilizzando il teorema ponte. Se esistono, calcolarli.

1.
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right),$$

2.
$$\lim_{x\to 0} x^2 \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right),$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\sin x},$$

Questo limite non esiste. Se per assurdo esistesse il limite, che si denota con L che può essere anche $\pm\infty$, allora per ogni estratta convergente $x_n \to \infty$ si deve avere che $\lim_{n\to+\infty} 2^{\sin x_2} = L$. Se si prende $x_n := n\pi$ si ha che la funzione $\sin x_n$ è costantemente nulla e quindi il limite è 1. D'altra parte se si prende invece $x_n := \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ si ha che il seno è costantemente 1 e quindi il limite è 2. Assurdo.

4.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{1+x}},$$

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}} \to 1$$

5.
$$\lim_{x\to+\infty} e^x \sin\left(e^{-x^2}\right)$$

$$e^x \sin\left(e^{-x^2}\right) = e^x \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}} \sin\left(e^{-x^2}\right) = e^{-x(x-1)} \frac{\sin\left(e^{-x^2}\right)}{e^{-x^2}} \to 0$$

6.
$$\lim_{x\to+\infty} (2+\cos x)^x$$

Il limite non esiste. Se per assurdo esistesse il limite, allora per ogni estratta convergente $x_n \to \infty$ si deve avere che $(2+\cos x)^x = L$. Se si prende $x_n := \pi + 2n\pi$ si ha che la funzione $\cos x_n$ è costantemente -1 e quindi il limite è 1. D'altra parte se si prende invece $x_n := 2n\pi$ si ha che il coseno è costantemente 1 e quindi il limite è ∞. Assurdo.

7.
$$\lim_{x\to+\infty} (3+\sin x)^x$$

7.3 Serie

Discutere la convergenza delle seguenti serie:

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n\left(1+\log^2 n\right)}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$$

7.4 Serie con parametro

Discutere la seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6^{\alpha-1})^n}{n^2\, 3^n}$$

Intanto si studia il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{6^{\alpha-1}}{3}\right)^n \frac{1}{n^2},$$

Che converge a 0 per $(6^{\alpha-1}/3) \leq 1$, ossia per $\alpha \leq \log_6 3 + 1$ e va a $+\infty$ altrimenti. Ora si studia la serie come serie di potenze della forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$. Utilizzando il teorema di Abel si ha che

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n^2|}{|(n+1)^2|} = 1 \implies R = 1,$$

da cui segue che la serie converge per $|x| < 1$, ossia se

$$\frac{|6^{\alpha-1}|}{3} < 1$$

che implica che la serie converge per $\alpha < \log_6 3 + 1$. Studiamo il caso $|x| = 1$ ossia $\alpha = \log_6 3 + 1$, la serie diventa la serie armonica con esponente 2, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge. Quindi la serie converge per ogni $\alpha \leq \log_6 3 + 1$.

8 25/10/2019

8.1 Teorema di permanenza del segno

Si dia una una dimostrazione del seguente teorema:

Teorema 1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ tale che f è continua in $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, allora per ogni intorno $V \subset A$ di x_0 si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \in V$. Analogamente se $f(x_0) < 0$, allora per ogni intorno $U \subset A$ di x_0 si ha che $f(x) < 0$ per ogni $x \in U$.*

Suggerimento: Si proceda per assurdo utilizzando la definizione di continuità in x_0 (i.e. $\forall\epsilon > 0; \exists\delta(\epsilon)$ t.c. se $|x - x_0| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$) e negando la tesi del teorema.

Dimostrazione. Facciamo il caso $f(x_0) > 0$, l'altro caso si dimostra allo stesso modo. Per assurdo supponiamo che $f(x) < 0$ in un intorno di $f(x_0)$. Dalla continuità si ha che per qualunque valore arbitrario di ϵ $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Allora preso $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ si ha che $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$. L'argomento del modulo è strettamente minore di 0 poiché $f(x) < 0$ (ipotesi per assurdo) e $f(x_0) > 0 \implies -f(x_0) < 0$ quindi posso levare il modulo cambiando il segno all'argomento ottenendo

$$-f(x) + f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2},$$

ma questo è un assurdo perché $f(x_0)$ è positivo quindi anche $\frac{f(x_0)}{2}$ lo è, mentre $f(x) < 0$ non può essere maggiore di un valore positivo. Nell'altro caso si può prendere $\epsilon = -\frac{f(x_0)}{2}$. $\square$

8.2 Teorema d'esistenza degli zeri

Si dia una una dimostrazione del seguente teorema:

Teorema 2. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo I e siano $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$. Allora esiste un x_0 compreso fra x_1 e x_2 tale che $f(x_0) = 0$.*

Suggerimento: Se si ipotizza $x_1 < x_2$ si possono considerare
$E^- := \{x|x_1 < x < x_2,\ f(x) < 0\}$ e $E^+ := \{x|x_1 < x < x_2,\ f(x) > 0\}$. Si proceda per assurdo ponendo che per ogni $x \in (x_1, x_2)$ $f(x) \neq 0$, e si utilizzi

il Teorema di permanenza del segno per giungere ad un assurdo.

Dimostrazione. Si considera il caso $x_1 < x_2$ (non è restrittivo considerare questo caso). Si pone per assurdo che per ogni $x \in (x_1, x_2)$ si ha che $f(x) \neq 0$. Si considerino

$$\alpha := \sup_{x \in E^-} f(x)$$

e

$$\beta := \inf_{x \in E^+} f(x).$$

Si può osservare che se guardiamo la funzione solo nell'intervallo aperto (x_1, x_2) e supponiamo che la funzione non assume mai il valore 0, allora E^- è un insieme di minoranti definitivi per E^+, mentre E^+ è un insieme di maggioranti definitivi per E^-. Quindi si possono avere solo 4 casi:

1. α è un massimo per E^- e β un minimo per E^+,
2. α è un massimo per E^- e β solamente un estremo inferiore per E^+,
3. α è solo un estremo superiore per E^- e β un minimo per E^+,
4. α solo un estremo superiore per E^- e β solamente un estremo inferiore per E^+.

Il caso 2 è semplice, se β è un estremo inferiore, allora per definizione è il più grande dei maggioranti definitivi, che per definizione è α, quindi si deve avere che $\alpha = \beta$. Ma α è un massimo per E^-, quindi esisterà un $\tilde{x} \in E^-$ tale che $\alpha = f(\tilde{x}) < 0$. Quindi per definizione di inferiore di E^+ si deve avere che $f(\tilde{x}) < f(x)$ per ogni $x \in E^+$, con $f(x) > 0$, dunque c'è una discontinuità fra $f(\tilde{x})$ e $f(x)$.

Il caso 3 è analogo.

Il caso 1 si ha che $\alpha < \beta$, e la funzione ha un salto da α a β, per cui è discontinua.

L'unico caso possibile allora è il 4, ma se α non è un massimo, allora per definizione è il minimo dei maggioranti definitivi di E^-, quindi è il minimo di E^+, ma allora si dovrebbe avere che $\alpha = \beta$ che però è solo un estremo inferiore poiché E^+ non ha minimi. $\square$

8.3 Serie

Si studi la convergenza delle seguenti serie al variare dei parametri (quando presenti):

1.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}}$$

La serie è a termini positivi, infatti $n-\sqrt{n^2-1}>0$ per ogni n. La successione soddisfa la condizione necessaria per la convergenza, infatti

$$\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}}\,\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}\,(n+\sqrt{n^2-1})} \to 0.$$

Si può osservare che $\sqrt{n+2}>\sqrt{n}$ e che $(n+\sqrt{n^2-1})>n$, da cui segue che

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}\,(n+\sqrt{n^2-1})} < \frac{1}{\sqrt{n}\,n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

2.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$$

3.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$$

4.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x(x+1))^n}{3^n e^n}$$

5.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{(e^x)^k}{k!}$$

8.4 Limiti

Calcolare i seguenti limiti:

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

4. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+2}}{x+1}$$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m-1}{x^n-1}, \quad n,m \neq 0$$

9 29-30/10/2019 - Simulazione del primo esonero (1)

Tempo a disposizione: 2 h
Svolgere 3 esercizi su 4.

Esercizio 1

1. (3 punti)
   Dimostrare che per $|x| < 1$
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n}{0} x^n = \frac{1}{1-x}$$
2. (2 punti)
   Per $m > 0$ trovare il raggio di convergenza della serie:
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m}{m} x^n$$
3. (3 punti)
   Dando per buona la seguente equazione:
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m}{m} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad , \tag{1}$$
   dimostrare che
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m+1}{m+1} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+2}}$$
   moltiplicando ambo i membri per $(1-x)$ e sapendo che
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad .$$
4. (2 punti)
   Usare l'induzione per mostrare che l'eq. (1) vale $\forall m \in \mathbb{N}$

Esercizio 2

1. (5 punti)
   Si consideri la serie:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

   Trovare il raggio di convergenza.
   Dando per buono che, all'interno del raggio di convergenza, essa coincide con $\log(1+x)$, dimostrare che ivi vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - ...$$

2. (5 punti)
   Moltiplicando la serie geometrica per se stessa dimostrare che:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

Esercizio 3

1. (5 punti)
   Dimostrare che la successione

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

   è monotona decrescente.

2. (5 punti)
   Dimostrare che x_n converge per $n \to \infty$, e che il limite giace in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Esercizio 4

(10 punti)
Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in [0,1]$.
Dimostrare che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

10 05-06/10/2019 - Soluzione alla I simulazione di esonero

Esercizio 1

1. (3 punti)
   Dimostrare che per $|x| < 1$
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n}{0} x^n = \frac{1}{1-x}$$
   $\binom{n}{0} = 1$, perciò banalmente l'uguaglianza precedente non è altro che l'espressione della ben nota serie geometrica, il cui raggio di convergenza è appunto 1.

2. (2 punti)
   Per $m > 0$ trovare il raggio di convergenza della serie:
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m}{m} x^n$$
   Dal criterio del rapporto troviamo che il raggio di convergenza si può trovare nel seguente modo:
   $$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{n+1+m}{m}}{\binom{n+m}{m}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+m}{n+1} = 1$$
   Quindi $R = 1$.

3. (3 punti)
   Dando per buona la seguente equazione:
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m}{m} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad , \tag{2}$$
   dimostrare che
   $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+m+1}{m+1} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+2}}$$
   moltiplicando ambo i membri per $(1-x)$ e sapendo che
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad .$$

Come suggerito dalla consegna, moltiplicando ambo i membri per $(1-x)$ si ottiene un'equazione equivalente [1]:

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+m+1}{m+1}x^n - \sum_{n\geq 0}\binom{n+m+1}{m+1}x^{n+1} \tag{3}$$

Eseguiamo un cambio di variabile: $n' = n+1$ e isoliamo il primo termine della prima serie. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{m+1}} &= 1 + \sum_{n\geq 1}\binom{n+m+1}{m+1}x^n - \sum_{n'\geq 1}\binom{n'+m}{m+1}x^{n'} = \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1}\left[\binom{n+m+1}{m+1} - \binom{n+m}{m+1}\right]x^n\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che n' è una variabile muta (stiamo sommando su tutti i suoi valori), dunque possiamo rinominarla "n".
Osserviamo che sfruttando la proprietà del binomiale riportata nella consegna si ha:

$$\left[\binom{n+m+1}{m+1} - \binom{n+m}{m+1}\right] = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{n+m-1}\binom{k}{m} = \binom{n+m}{m}$$

Dunque:

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = 1 + \sum_{n\geq 1}\binom{n+m}{m}x^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+m}{m}x^n$$

Quest'ultima proposizione è vera per ipotesi induttiva: è la versione della proposizione che ho supposto essere vera per m. Andando a ritroso nei passaggio noto quindi che essa è equivalente alla (3), i.e. quella per $m+1$. Dunque abbiamo mostrato che se la proposizione è vera per m, lo è anche per $m+1$.

[1] Si noti che possiamo farlo perché il denominatore è diverso da 0 sempre nel raggio di convergenza.

4. (2 punti)
   Usare l'induzione per mostrare che l'eq. (2) vale $\forall m \in \mathbb{N}$.

   Al primo punto si è dimostrato che vale per $m = 0$. Al terzo punto si è mostrato che se vale per m, allora vale anche per $m + 1$. È sufficiente osservare che queste sono precisamente le due condizioni da verificare per dimostrare induttivamente una proposizione. La proposizione è dunque vera per ogni m.

Esercizio 2

1. (5 punti)
   Si consideri la serie:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

   Trovare il raggio di convergenza.

   La serie è:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

   Il raggio di convergenza è:

$$R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+1}{(-1)^n} \right|} = 1$$

   Dando per buono che, all'interno del raggio di convergenza, essa coincide con $\log(1+x)$, dimostrare che ivi vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 - ...$$

   La serie nel lato destro dell'equazione è:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

   Poiché all'interno del raggio di convergenza il denominatore nel lato sinistro dell'equazione è sempre $\neq 0$, possiamo equivalentemente dimostrare che ivi:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \log(1+x) = (1+x) \left[\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \right]$$

Svolgiamo i conti per il lato destro dell'ultima equazione:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k+1}+\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=...$$

Con un cambio di variabile $n'=n+1$ ed isolando il primo termine della prima serie otteniamo:

$$...=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=$$

$$=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{n+1}\frac{1}{n+1}=$$

$$=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{n+1}\frac{1}{n+1} \quad .$$

2. (5 punti)
Moltiplicando la serie geometrica per se stessa dimostrare che:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+...$$

Lo scopo di questo esercizio era farvi usare la formula per il prodotto di serie. Osserviamo che il lato sinistro dell'equazione è proprio il prodotto della serie geometrica con se stessa:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}x^k x^{n-k}=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n\left(\sum_{k=0}^{n}1\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)x^n$$

Esercizio 3

1. (5 punti)
   Dimostrare che la successione

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

   è monotona decrescente.

   Confrontiamo x_n con x_{n+1}:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2(n+2)}$$

   Ogni termine della sommatoria diventa più piccolo all'aumentare di n:

$$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+k+1} \quad .$$

   Quindi $x_n > x_{n+1} \forall n$, che è appunto al definizione di monotonia decrescente.

2. (5 punti)
   Dimostrare che x_n converge per $n \to \infty$, e che il limite giace in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

   La successione è:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$

   Osserviamo che

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

   Quindi:

$$x_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} = (n+1)\frac{1}{n} \to 1 \quad ,$$

$$x_n > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n} = (n+1)\frac{1}{2n} \to \frac{1}{2} \quad .$$

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq 1$$

È noto che ogni successione monotona a_n converge:
a $\sup a_n$ se crescente,
a $\inf a_n$ se decrescente.
Poiché la successione è limitata dal basso, l'inf non può essere $-\infty$, ma un numero finito L. Dunque esiste $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.
Il limite giace in $[\frac{1}{2}, 1]$ per il teorema del confronto.

NOTA: Il teorema del confronto dice in che intervallo giaceil limite della successione "in mezzo" (in questo caso la x_n). Quando i limiti delle due successioni (la maggiorante e la minorante) coincidono, allora il limite è proprio uguale a tale valore.

Esercizio 4

(10 punti)
Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in [0,1]$.
Dimostrare che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Assumiamo per assurdo che esista un numero razionale $r \neq 0 \in [0,1]$ tale che $\exists x_0 \in [0,1]$ per cui $f(x_0) = r$. La funzione è continua, quindi per il teorema dei valori intermedi dovrebbe assumere tutti i valori tra 0 e r. Tra questi ci sarà sicuramente un irrazionale (gli irrazionali sono densi in $\mathbb{Q}$), che corrisponderà ad un qualche valore della funzione.
Ciò è assurdo perché la funzione prende solo valori razionali. Aver raggiunto l'assurdo completa la dimostrazione.
Dunque la funzione f è costantemente nulla.

11 5-6/11/2019 - Simulazione del primo esonero (2)

1. Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dei numeri di Fermat, dove $F_k := 2^{2^k}+1$ è il k-esimo numero di Fermat. Dimostrare che

   a. (3 p.ti) $F_{n-1}(F_{n-1}-2) = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1$

   b. (7 p.ti)
$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$$

2. Studiare i seguenti limiti

   a. (4 p.ti)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2}\right)^n$$

   b. (3 p.ti)
$$\lim_{x\to\infty}(1+\sin x)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$$

   c. (3 p.ti) Si consideri la funzione
$$f(x) := x^2\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

   dire perché la seguente dimostrazione sulla non esistenza del limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è sbagliata.

   Dimostrazione. Se P.A. il limite esistesse, dal teorema ponte si dovrebbe avere che, per ogni successione estratta x_n convergente, si deve avere che il limite di $f(x_n)$ è lo stesso, ma per i valori per cui il seno vale -1 la funzione è 0. Scelta $x_n = \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)^{-1}$ si ha che
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$
   mentre per altre successioni il limite è ∞. □

3. Sia $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$.

a. (2 p.ti) Dimostrare che la seguente produttoria diverge

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$$

Notazione: Siano $P_n := \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\, a_2\, \ldots\, a_n$ prodotti parziali. Si definisce produttoria

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

Suggerimenti: $\log(a\,b) = \log a + \log b$; $\log x^n = n \log x$.

b. (2 p.ti) Studiare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la seguente produttoria

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^\alpha]{x} < \infty$$

c. (6 p.ti) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2} \right)^{n^2} e^{n\,y} \right]$$

4. Risolvere i seguenti esercizi sulla continuità

a. (5 p.ti) Studiare per quali valori di α la seguente funzione è continua in 0 e determinare il dominio di continuità per quei valori di α.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha^2(1+x) & , x \le 0 \\ \frac{e^{2\,x}-1}{\sin(4\,x)\,\cos(x)} & , x > 0. \end{cases}$$

b. (5 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $|f(x)|$ ammette sempre un minimo, e che $-|f(x)|$ ammette sempre un massimo (Almeno uno, non necessariamente unico). **Attenzione:** L'immagine di f è tutta la retta reale ($Im(f) = \mathbb{R}$), se fosse $f : \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ allora questa proposizione in generale non sarebbe necessariamente vera.

12 05-06/10/2019 - Soluzione alla II simulazione di esonero

1. Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dei numeri di Fermat, dove $F_k := 2^{2^k}+1$ è il k-esimo numero di Fermat. Dimostrare che

   a. (3 p.ti) $F_{n-1}\,(F_{n-1}-2) = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1$ $\quad F_{n-1}\,(F_{n-1}-2) = F_{n-1}^2 - 2\,F_{n-1} = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 2\cdot 2^{2^{n-1}} + 1 - 2\cdot 2^{2^{n-1}} - 2 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1$

   b. (7 p.ti)
$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$$

   Si procede per induzione. La base induttiva è vera per $n=0$ e 1. Poniamo vero fino ad $n-1$ e dimostriamo che è vero anche al passo successivo (n). Il membro di sinistra può essere riscritto come $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n-1}\,(\prod_{i=0}^{n-2} F_i)$. Nel membro di destra invece abbiamo che
$$F_n - 2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2\cdot 2^{n-1}} - 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 - 1$$
   che per il punto precedente diventa $F_n - 2 = F_{n-1}\,(F_{n-1}-2)$. Quindi si ottiene
$$F_{n-1}\,(\prod_{i=0}^{n-2} F_i) = F_{n-1}\,(F_{n-1}-2) \quad .$$
   Semplificando ad ambo i membri il fattore F_{n-1} e utilizzando l'ipotesi induttiva, segue la tesi.

2. Studiare i seguenti limiti

   a. (4 p.ti)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2}\right)^n$$

   Si osserva che il polinomio $2n^2+3n+1$ si comporta asintoticamente come $2n^2+3n$ mentre il polinomio $2n^2+2$ come $2n^2$. Sostituendo il loro comportamenti asintotici nel limite e raccogliendo per n si ottiene

$$\left(\frac{n\,(2n+3)}{n\,(2n)}\right)^n = \left(1+\frac{3}{2n}\right)^n = e^{\frac{3}{2}}$$

b. (3 p.ti)

$$\lim_{x\to\infty}(1+\sin x)\,\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$$

Il limite non esiste, infatti è possibile trovare un estratta convergente $x_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ con $x_n \to \infty$, tale che $1+\sin x_n = 0$ e quindi il limite è costantemnte nullo, ma per ogni altra successione il limite è $+\infty$.

c. (3 p.ti) Si consideri la funzione

$$f(x) := x^2\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

dire perché la seguente dimostrazione sulla non esistenza del limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è sbagliata.

Dimostrazione. Se P.A. il limite esistesse, dal teorema ponte si dovrebbe avere che, per ogni successione estratta x_n convergente, si deve avere che il limite di $f(x_n)$ è lo stesso, ma per i valori per cui il seno vale -1 la funzione è 0. Scelta $x_n = \left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)^{-1}$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

mentre per altre successioni il limite è ∞. □

La $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$! La successione estratta x_n non va bene per verificare il teorema ponte, perché

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)^{-1} = 0$$

e non $+\infty$. La successione estratta è convergente, ma non converge allo stesso termine di convergenza del limite, infatti il limite è per x che tende $+\infty$ e non 0.

3. Sia $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$.

a. (2 p.ti) Dimostrare che la seguente produttoria diverge

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$$

Notazione: Siano $P_n := \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\, a_2\, \dots\, a_n$ prodotti parziali. Si definisce produttoria

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

Suggerimenti: $\log(a\,b) = \log a + \log b$; $\log x^n = n \log x$.
Si vogliono vedere le produttorie come delle serie, utilizzando la proprietà del logaritmo.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \log x} = e^{\log x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

ma la serie armonica diverge, quindi il limite tende a ∞ e quindi la produttoria diverge.

b. (2 p.ti) Studiare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la seguente produttoria

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^\alpha]{x} < \infty$$

Dallo studio punto precedente segue banalmente che

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^\alpha]{x} = e^{\log x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}$$

che converge solo quando la serie armonica converge, ossia per $\alpha > 1$.

c. (6 p.ti) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 2} \right)^{n^2} e^{n\,y} \right]$$

Osserviamo subito che la serie è a termini positivi per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Inoltre è possibile studiare la serie come una serie di potenze se si considera $\omega = e^y$. La serie quindi diventa della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2} \right)^{n^2} \omega^n \right].$$

Si calcola il raggio di convergenza con il criterio della radice n-esima. Il limite diventa identico a quello studiato nel punto (a) dell'esercizio (2) e fa esattamente $e^{\frac{3}{2}}$, quindi il raggio di convergenza $R = e^{-\frac{3}{2}}$. Quindi la serie converge sicuramente per $|\omega| < R$. Si noti che ω è sempre positivo, quindi è possibile eliminare il modulo ottenendo così che la serie converge per $y < -\frac{3}{2}$. Ora si rende necessario studiare anche il caso $\omega = R$. In questo caso però la condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta, infatti

$$\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2} \right)^{n^2} (e^{\frac{-3}{2}})^n \sim \frac{(e^{\frac{3}{2}})^n}{(e^{\frac{3}{2}})^n} \to 1$$

e quindi la serie diverge per $y = -\frac{3}{2}$.

4. Risolvere i seguenti esercizi sulla continuità

a. (5 p.ti) Studiare per quali valori di α la seguente funzione è continua in 0 e determinare il dominio di continuità per quei valori di α.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha^2(1+x) & , x \leq 0 \\ \frac{e^{2\,x}-1}{\sin(4\,x)\,\cos(x)} & , x > 0. \end{cases}$$

Studiamo la continuità in 0 calcolando il limite sinistro e destro della funzione. La funzione è continua in 0 soltanto se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Il limite sinistro è banale, viene α^2. Il limite destro invece viene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2\,x}-1}{\sin(4\,x)\,\cos(x)} \frac{4x}{4x} = \frac{1}{2\,\cos x} \frac{4x}{\sin(4\,x)} \frac{e^{2\,x}-1}{2\,x} = \frac{1}{2}.$$

Dunque la funzione è continua in 0 se solo se $\alpha^2 = \frac{1}{2}$, ossia per $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.
Il dominio di continuità invece si può notare che per $x \leq 0$ $f(x)$

è sempre continua e ben definita, mentre per $x > 0$ la $f(x)$ è ben definiti solo quando il seno o il coseno non si annullano in $x > 0$. ossia per $x = k\frac{\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$. Quindi il dominio di continuità è

$$\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n\frac{\pi}{4}, (n+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

b. (5 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $|f(x)|$ ammette sempre un minimo, e che $-|f(x)|$ ammette sempre un massimo (Almeno uno, non necessariamente unico). **Attenzione:** L'immagine di f è tutta la retta reale ($Im(f) = \mathbb{R}$), se fosse $f : \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ allora questa proposizione in generale non sarebbe necessariamente vera.

Dimostrazione. Sia $u, v \in \mathbb{R}$ tali che $u < 0$ e $v > 0$. Essendo $Im(f) = \mathbb{R}$ devono esistere x_u e $x_v \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_u) = u$ e $f(x_v) = v$. dal teorema di esistenza degli zeri si ha che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$, da cui segue la tesi, in quanto x è un minimo per $|f(x)|$ (analogamente un massimo per $-|f(x)|$). $\square$

13 19-20/11/2019

13.1 Sviluppi di Taylor

1. Sia $\rho(x)$ una funzione n volte differenziabile in un intorno di 0, con:

$$\rho(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + \frac{\rho^n(\theta)}{n!}x^n \quad ,$$

dove $|\theta| < |x|$.
Scrivere lo sviluppo all'ordine $n-1$ di ρ'

2. Scrivere, usando la formula ottenuta al punto precedente, lo sviluppo di $\log(1+x)$ a partire dalla conoscenza di $\frac{1}{1+x}$ come serie geometrica.

– –

Mostrare che:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$$

Calcolare gli sviluppi di Taylor, fermandosi all'ordine 5 (incluso), delle seguenti funzioni.

1.

$$x(\sin x)\log(1+x)$$

2.

$$x^2 \log(1+\sin x)$$

3.

$$\arctan(x^2) + \frac{\sin x}{1+x^2}$$

13.2 Limiti

Usando gli sviluppi di Taylor trovare i seguenti limiti:

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

2.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x}$$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + 2\sqrt{x} - [x] + \cos x}{\sqrt{x} + \sin x}$$

NOTA: Si ricordi che $[x]$ è definita come la **parte intera** di x. Esempio: $x = 19.11 \implies [x] = 19$.

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x} - \cos x}$$

6.

$$\lim_{x\to\infty} [(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha] \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

13.3 Numeri complessi

Si consideri la *funzione di Koebe*:

$$\rho(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad .$$

Mostrare che

1. Essa mappa la circonferenza unitaria

$$C = \{z \text{ tale che } |z| = 1\}$$

in

$$I_1 = \{z \mid Im(z) = 0 \wedge Re(z) \leq -1/4\}$$

2. Essa mappa l'interno di C nel complementare di I_1.

14 22/11/2019

14.1 Serie

Studiare il comportamento delle seguenti serie. Dove possibile sfruttare le conoscenze acquisite sugli sviluppi di Taylor.

1.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}}$$

2.

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n}-1)$$

3.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$$

4.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x(x+1))^n}{3^n e^n}$$

5.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{(e^x)^k}{k!}$$

6.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

14.2 Sviluppi di Taylor

1. Trovare, partendo dall'espressione di e^x come serie, le rappresentazioni delle funzioni iperboliche:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{5}$$

2. Trovare e con precisione 10^{-4} utilizzando la sua espressione come serie.

3. Trovare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{\log x}} - e^{\frac{1}{x-1}}$$

Studiare la convergenza e trovare la somma delle seguenti serie.

1.

$$\sum_{n \geq 2} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

2.

$$\sum_{n \geq 2} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

14.3 Limiti con de L'Hôpital

Calcolare i seguenti limiti:

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} \qquad a > 1, \alpha > 0$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|\log_a x|^\beta}{x^\alpha} \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

15 20-22/11/2019

Di seguito viene dimostrato che il numero di modi in cui è possibile triangolare un n-agono è dato da:

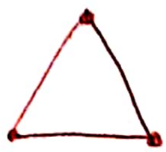
$$E_{n+2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

dove $n+2$ è il numero di lati.

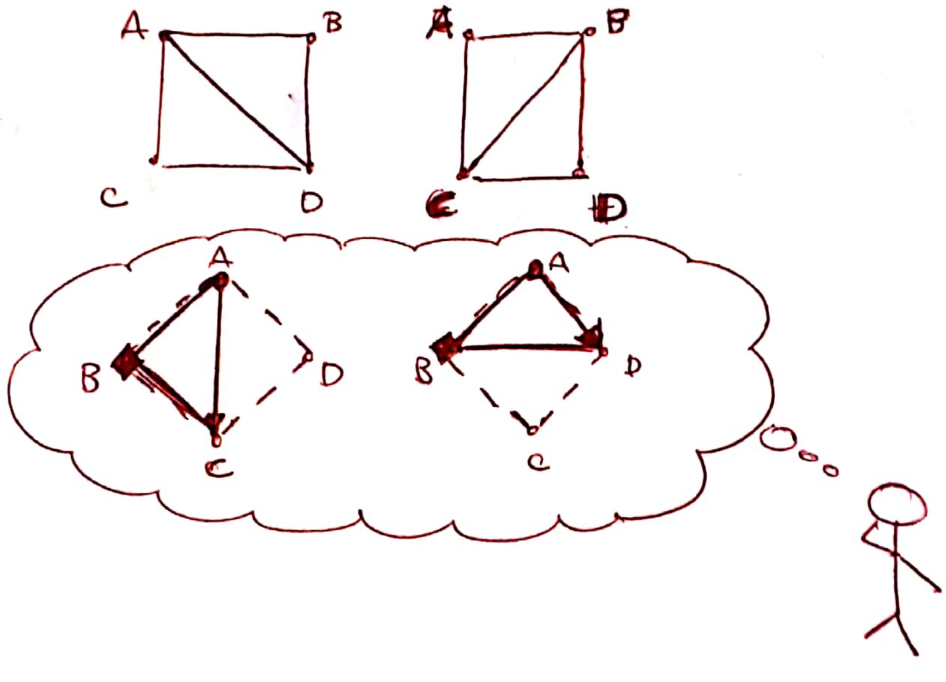
TRIANGOLAZIONE n-AGONO

$n=2$

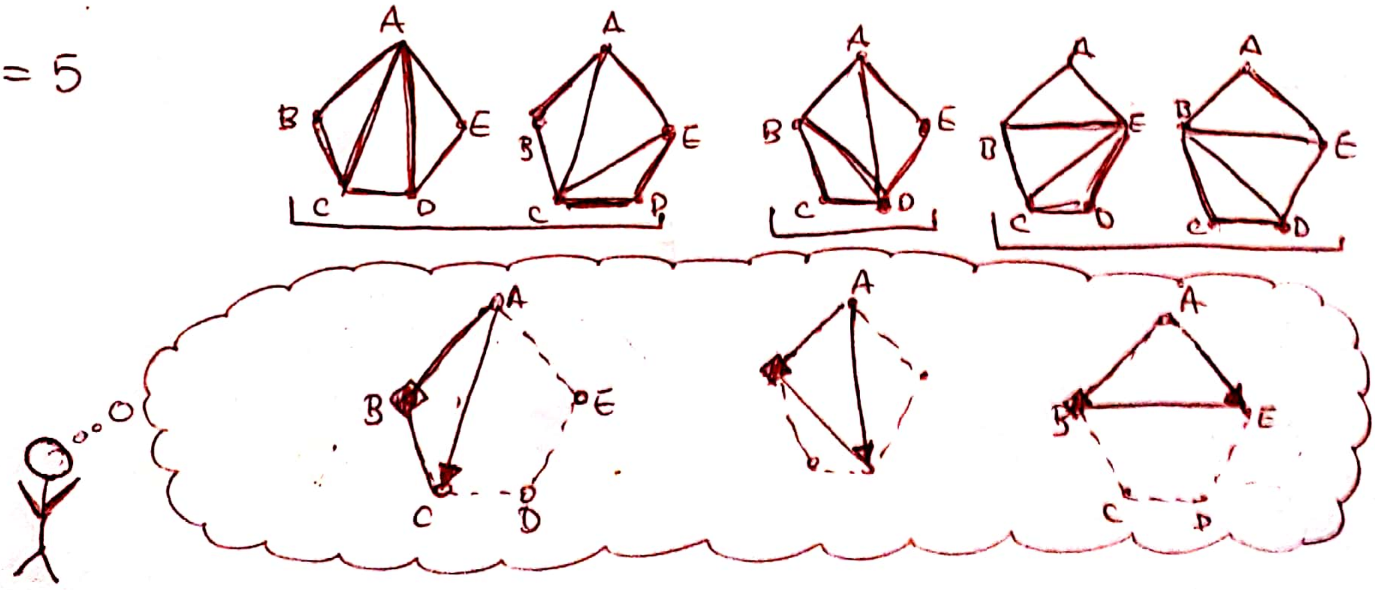
$n=3$



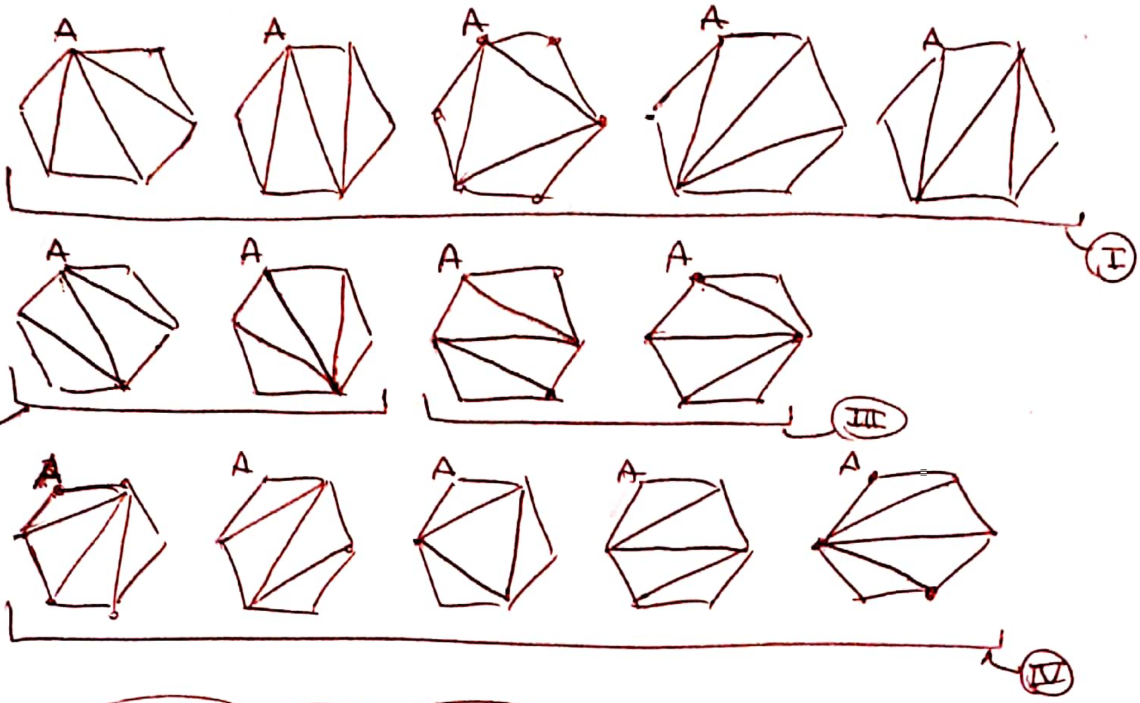
$n=4$

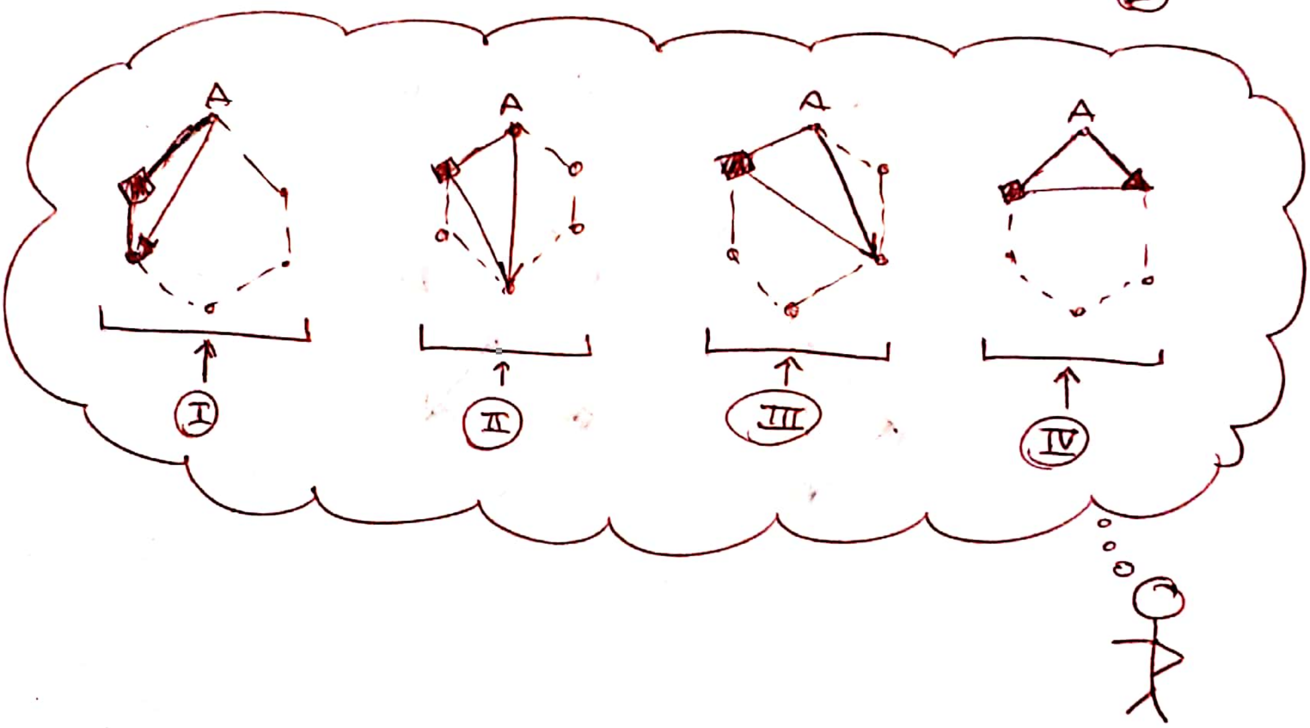


$n=5$



$n=6$





$E_2 := 1$

$E_3 = 1$

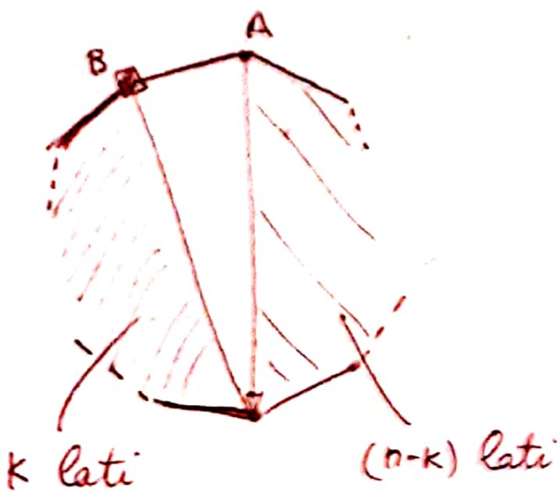
$E_4 = 2$

$E_5 = 5$

$E_6 = 14$

$$\boxed{E_n = ?}$$

$$E_n = \sum_{k=2}^{n-1} E_k E_{n+1-k}$$



Definiamo:

$$C_n = E_{n+2}$$

$$\Rightarrow C_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+2} E_k E_{n+4-k} \underset{k \to k+2}{=} \sum_{k=0}^{n} E_{k+2} E_{n+2-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Funzione generatrice:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n \qquad C_0 := 1$$

$$x f(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^{n+1} = C_0 x + \sum_{n \geq 1} C_n x^{n+1} =$$

$$= C_0 x + x^2 \sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = (\longrightarrow)$$

$$(\rightarrow) = C_0 x + x^2 \sum_{n\geq 0}' \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} x^k x^{n-k} =$$

$$= C_0 x + x^2 \left(\sum_{n\geq 0}' C_n x^n \right)^2 =$$

$$= C_0 x + x^2 f(x)^2$$

Dunque $(C_0 = 1)$:

$$x f(x) = x + x^2 f^2(x)$$

$$x f^2 - f + 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

D: Come scelgo la soluzione? ("+" o "−"?)

$\longrightarrow$ So che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ dalla serie di potenze che la rappresenta

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Lemma:
$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

Dim: Ricordando che

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n-\text{termini}}}{n!} = \frac{\overbrace{1(1-2)\cdot\ldots\cdot(1-2n+2)}^{(n-1)-\text{termini}}}{2^n\cdot n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\, n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n\, n!}(2n-3)!! =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{(2n)!!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\cdot\binom{2n}{n} \qquad \square$$

Scanned by CamScanner

Avevamo trovato che:

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left[1 - \sqrt{1-4x}\,\right]$$

Sviluppando in serie:

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left[1 - \sum_{n\geq 0}{}' \binom{1/2}{n}(-4x)^n\right] =$$

$$= -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}{}' \binom{1/2}{n}(-4)^n \cdot x^n =$$

usando il Lemma

$$= -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}{}' \binom{2n}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\cdot(-4)^n\cdot x^n =$$

$$= -\frac{1}{2x}(-1)\sum_{n\geq 1}{}' \binom{2n}{n}\cdot\frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{4^n}(2n-1)}\cdot\cancel{(-1)^n}\cdot\cancel{4^n}\,x^n =$$

$$= \frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}{}' \binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{2n-1}\,x^n = \sum_{n\geq 1}{}' \binom{2n}{n}\frac{x^{n-1}}{2(2n-1)} =$$

$\boxed{n \to n+1}$

$$= \sum_{n\geq 0}{}' \binom{2n+2}{n+1}\cdot\frac{x^n}{2(2n+1)} = \sum_{n\geq 0}{}' \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{x^n}{2(2n+1)} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}{}' \frac{(2n+2)(2n+1)\,2n!}{(n+1)(n+1)\cdot 2\cdot(2n+1)\,n!\,n!}\cdot x^n = (\longrightarrow)$$

$$(\rightrightarrows) = \sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{2}\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{(2n+1)}}{\cancel{2}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{(2n+1)}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot \frac{1}{n+1} x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0}{}' \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0}{}' \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} x^n$$

Ma anche

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}{}' C_n x^n$$

Uguagliando termine a termine:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

16 26-27/11/2019

Approssimazione della funzione $\sin x$

I militari dividono la circonferenza unitaria in 6400 **mil**.
Che errore si commette dicendo:

$$\sin(1[\text{mil}]) = \frac{1}{1000} \quad ?$$

Taylor: confronti asintotici per serie

Studiare la convergenza delle seguenti serie sfruttando le conoscenze sugli sviluppi di Taylor.

1.

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

2.

$$\sum_{n\geq 1} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right]$$

3.

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)$$

4.

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Studi di funzione

Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x - mx = 0$$

ha almeno una soluzione in $[0,1]$?

Effettuare lo studio di funzione per le seguenti funzioni:

1.

$$f(x) = \frac{x\log x}{1+x}$$

2.

$$f(x) = \frac{e^x}{\log x}$$

17 29/11/2019

17.1 Funzioni

1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x-1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

dimostrare che essa è continua e iniettiva.

2. Data la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - x\log x \qquad \alpha \neq -1, \quad x > 0$$

determinare quali di esse sono invertibili.

3. Trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x$$

4. Dimostrare che $\forall x < 1$ si ha:

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

5. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}(\log x)^2$$

e dedurre la seguente disuguaglianza

$$|\log x| \leq \frac{4}{e}x^{-1/4}$$

6. Trovare il minimo $k > 0$ tale che:

$$|x^2e^{-x} - y^2e^{-y}| \leq k|x-y| \quad \forall x, y \in [0,3]$$

7. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log|\log x^2 - 1|$$

8. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$$

17.2 Estremi delle funzioni e applicazioni della derivata

1. Sia $a = b + c$, con $a > 0$. Come devono essere b e c perché il prodotto bc sia massimo?

2. Una lampada è sospesa al centro di una tavola rotonda. A che altezza deve essere posta affinché il bordo del tavolo sia il più illuminato possibile?
NOTA: Si consideri che l'illuminazione è proporzionale al coseno dell'angolo di incidenza e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente.

3. Siano date due sorgenti di luce: A, di intensità I_1, e B, di intensità I_2. Qual è il punto, situato lungo la congiungente delle due sorgenti, che è illuminato più debolmente?
(si veda la nota dell'esercizio precedente)

4. Siano $x_1, x_2, ...x_n$ i risultati di misure, egualmente precise e indipendenti tra loro, di una grandezza x. Il valore più probabile di x è quello che minimizza la seguente quantità:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 \quad .$$

Dimostrare che da ciò segue che il valore più probabile di x è la media aritmetica degli x_i.

5. Siano date 3 sfere A, B e C, tutte perfettamente elastiche, con i centri allineati lungo una retta comune.
La sfera A di massa M urta contro la B, che a sua volta urta contro la C, che ha massa m. Quale deve essere la massa della sfera B affinché la velocità di C sia massima?
NOTA: Quando una sfera di massa m_1 con velocità v_1 urta contro una di massa m_2 ferma, quest'ultima acquisisce una velocità pari a:

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

18 3-4/12/2019

18.1 Integrali definiti

Calcolare i seguenti integrali:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad b)\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sin x}, \qquad c)\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x} dx$$

c) Per $x \in [1/2, 1]$ si ha che $e^{-x} < 1$ quindi la serie geometrica converge e l'integrale è della forma

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$$

che facedo un cambio di variabile $t = -e^{-x}$ otteniamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_{-e^{-\frac{1}{4}}}^{-e^{-\frac{1}{2}}} \frac{dt}{1+t} = \log\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right) - \log\left(1-e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

18.2 Primitive

Trovare la primitiva delle seguenti funzioni:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{3\,e^{2x} + e^x + 1}, \qquad b)\ f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}},$$

$$c)\ f(x) = \frac{\log x}{x\left(1 - 4\log x - \log^2 x\right)}.$$

c) Per calcolare la primitiva dobbiamo naturalmente risolvere l'integrale associato alla funzione. Prima di fare ciò è anche necessario assicurarci che la funzione sia continua nel suo dominio di definizione, che è una condizione necessaria affinché ammetta una primitiva. Quindi naturalmente la primitiva non sarà definita in 0 in quanto è una singolarità per $f(x)$. Il denominatore si annulla anche nelle radici del polinomio $P(t = \log(x)) = 1 - 4t - t^2$ che sono della forma $t_\pm = -4 \mp \sqrt{5}$. La funzione è discontinua anche nei valori $x_\pm = e^{t_\pm}$. Adesso che è chiaro il dominio di continuità di f proviamo a calcolare la sua primitiva.

Il termine $\frac{1}{x}dx$ e la presenza del $\log x$ ci suggerisce immediatamente di fare un cambio di variabile della forma $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}dx$. Ne segue

$$\begin{aligned}\int f(x) &= \int \frac{dt}{1-4t-t^2} = \int \frac{A}{t-t_+}dt + \int \frac{B}{t-t_-}dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{10}\int \frac{1}{t-t_+} - \frac{\sqrt{5}}{10}\int \frac{1}{t-t_-} = \frac{\sqrt{5}}{10}(\log(t+t_+) - \log(t+t_-))\end{aligned}$$

Ancora integrali definiti...

Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\ \cos x}{\sqrt{2+\sin x - \sin^2 x}}dx, \qquad b)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin x + \cos x}{1+\cos^2 x}dx,$$

$$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 2\sin x - 1}{1+\sin^2 x - \sin x}\cos x dx, \quad d)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 - 2\sin x + 3\cos x}.$$

Integrali indefiniti

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$a)\ \int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx, \quad b)\ \int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}dx, \quad c)\ \int e^{-x}(\cos x - 1)dx.$$

c) $\int e^{-x}(\cos x - 1)dx = \int e^{-x}(\cos x)dx - \int e^{-x}dx = F(x) - G(x)$
$G(x) := \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}F(x) :&= \int e^{-x}(\cos x)dx = e^{-x}(\sin x)dx + \int e^{-x}(\sin x)dx \\ &= e^{-x}(\sin x) - e^{-x}(\cos x) - \int e^{-x}(\cos x)dx, \\ &= e^{-x}(\sin x) - e^{-x}(\cos x) - F(x) \\ &= \frac{e^{-x}(\sin x) - e^{-x}(\cos x)}{2}\end{aligned}$$

ossia

$$F(x) - G(x) = \frac{\sin x - \cos x - 2}{2}e^{-x}.$$

Integrali razionali

$$a) \int_1^2 \frac{x+2}{x^4+x^3+x^2+x}dx, \qquad b) \int \frac{x^3+1}{x\left(x^2+x+1\right)}dx.$$

19 6/12/2019

19.1 Integrali razionali

Calcolare i seguenti integrali razionali:

$$a)\ \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}, \qquad b)\ \int \frac{x^3-5x+2}{(x-1)^3}dx, \qquad c)\ \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Nota: se un polinomio è irriducibile in $\mathbb{R}$ non è necessario trovare le radici complesse per calcolare l'integrale.

19.2 Integrali irrazionali

Calcolare i seguenti integrali irrazionali:

$$1)\ \int_1^3 x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx, \qquad 2)\ \int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx, \qquad 3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

19.3 Integrali Trigonometrici

Calcolare i seguenti integrali trigonometrici:

$$a)\ \int \frac{dx}{2+\sin x}, \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos x}, \qquad c)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx,$$

Suggerimento: Il punto (c) può essere fatto molto velocemente, NON calcolate potenze quarte di polinomi fratti.

$$d)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x}dx, \qquad e)\ \int_0^{3\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}.$$

c) Osserviamo che: $\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x} = \tan^2 x\,\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$= \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

19.4 Primitive

Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

$$1)\ f(x) = \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 2)\ f(x) = \frac{x}{1-x^{\frac{3}{2}}}, \qquad 3)\ f(x) = (2-x^2)^{\frac{3}{2}}(1-x^2).$$

20 10-11/12/2019

Integrali indefiniti

Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \int \log x \, dx, \quad b) \int \arctan x \, dx, \quad c) \int x^2 \, e^{-x} \, dx,$$

$$d) \int x \, \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx, \quad e) \int \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) dx, \quad f) \int x \, e^x \, \cos x \, dx.$$

Integrali indefiniti 2

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$1) \int \log\left(\sqrt{x^2-9}\right) \, dx, \quad 2) \int \sqrt{4+x^2} \, dx, \quad 3) \int \frac{1}{x\sqrt{\log^2 x + \log x + 1}} \, dx,$$

20.1 Integrali Trigonometrici

Calcolare i seguenti integrali trigonometrici:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \, \tan x}{1+\cos^2 x} \, dx, \quad b) \int \frac{\cos x - \cos^3 x}{1 - \cos x} \, dx, \quad c) \int \sin^4 x \, dx,$$

$$d) \int_0^1 (2x+2) \arctan x \, dx, \quad e) \int \sin x \, \cos x \, e^{\sin x} \, dx, \quad f) \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

...Integrale

Trovare per quale valore di $c \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\int_0^c \frac{3 \sin x + \sin 3x}{\cos^2 x} dx = 2$$

21 13/12/2019

21.1 Convergenza puntuale e uniforme di serie

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie:

1.
$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{\pi}\arcsin x\right)^n, \quad x\in[-1,1];$$

Studio la convergenza puntuale di $(\frac{3}{\pi}\arcsin x)^n$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0, & -\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \infty, & x<-\frac{\sqrt{3}}{2}\vee x>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi la funzione converge puntualmente per $x\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Anche la serie converge puntualmente per gli stessi valori, studiandola come serie di potenze. Per $x\in A:=[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\epsilon,\frac{\sqrt{3}}{2}-\epsilon]$ la serie converge uniformemente, infatti

$$\left\|\left(\frac{3}{\pi}\arcsin x\right)^n\right\|_\infty^A = \sup_{x\in A}\left|\left(\frac{3}{\pi}\arcsin x\right)^n\right| = \left(\frac{3}{\pi}\|\arcsin x\|_\infty^A\right)^n$$

dove $\|\arcsin x\|_\infty^A<\frac{\pi}{3}$ e quindi se chiamiamo $q=\frac{3}{\pi}\|\arcsin x\|_\infty^A$, la serie di partenza può essere maggiorata con

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{\pi}\arcsin x\right)^n \leq \sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}<\infty$$

. Quindi la serie converge uniformemente in $[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\epsilon,\frac{\sqrt{3}}{2}-\epsilon]$.

2.
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n\,a_n}{e^n\,(n+1)}\,x^n$$

dove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che $e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{(n+2)!}\,x^n$

21.2 Convergenza puntuale e uniforme di funzioni

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$a)\ f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{n^2\,x^2+1},\qquad b)\ f_n(x)=\frac{x\,e^{-nx}}{n\,x+1},$$

a) Calcolo il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

la successione di funzioni converge puntualmente per $x \geq 0$. Studiamo invece la convergenza uniforme. Osserviamo che fissato n la successione $f_n(x)$ è monotona decrescente per $x > 0$. Essendo la funzione limite $f(x)$ discontinua in 0 ci restringiamo al dominio $[\epsilon, +\infty)$, con $\epsilon > 0$ reale. Quindi dalla decrescenza di f_n segue che

$$\sup_{x\in[\epsilon,+\infty)} \left| \frac{e^{-nx}}{n^2\, x^2 + 1} \right| = \frac{e^{-n\epsilon}}{n^2\, \epsilon^2 + 1}$$

che converge a 0 per $n \to \infty$.

Quindi $f_n(x)$ converge uniformemente a 0 per $x \in [\epsilon, +\infty)$.

Esercizio 1.

Studiare i massimi e i minimi della seguente funzione

$$F(x) = \int_0^{2x+1} \frac{t^2 + t}{\log(2 + t^2)} dt.$$

Esercizio 2.

Studiare la continuità e la differenziabilità della seguente funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x \leq 2, \\ \int_2^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt & x > 2. \end{cases}$$

Esercizio 3.

Dire se la seguente funzione ammette asintoti obliqui

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1 + t^2)}{\sqrt{t^2 + 1}}\, dt$$

Integrali impropri

Dire se esistono finiti i seguenti integrali:

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$$

2. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[x(1-2x)]^{\alpha-5}}{\sin x}\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. $$\int_0^1 \frac{\arctan\left(x^{\frac{\alpha}{2}}\right)}{\sin\left(\sqrt{x}\right)+x}\, dx$$

22 17-18/12/2019

Serie

Studiare la convergenza uniforme della seguente serie

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k\,\frac{\cos(3kx)}{k^2+x}.$$

22.1 Successioni

Studiare la convergenza delle seguenti successioni di funzioni:

$$a)\ f_n(x)=nx\,e^{-nx}\quad x\in[0,1]\qquad b)\ f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$$

$$c)\ f_n(x)=\frac{x\,e^{-nx}}{1+nx}\quad x\in[0,+\infty).$$

Esercizio 1.

Sia

$$F(x)=\int_0^x\left[\sin^2 t^2-\frac{3}{4}\,\sin t^2+\frac{5}{4}\right]dt,$$

studiare il segno, la derivata, massimi e minimi, concavità e convessità.

Esercizio 2.

Sia

$$F(x)=\int_0^x \sin t^2\,dt.$$

a) Calcolare F', F'', F'''.

b) Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$.

22.2 Integrali impropri

Dire se esistono finiti i seguenti integrali:

$$a)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\,e^x}\,dx\qquad b)\ \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(3+5\,x^5)\,\arctan x^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

23 20/12/2019

23.1 Serie di funzioni

Studiare la convergenza uniforme delle seguenti serie

(a)

$$\sum_{k\geq 1} 2^k \sin \frac{(-1)^k}{3^k}.$$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} x^n$$

(c)

$$\sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{x}\right)^k \frac{k!}{k^k}$$

23.2 Formula di De Moivre-Stirling

Mostrare che per la funzione Gamma,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} dt\, t^{z-1}\, e^{-t}$$

vale la seguente proprietà:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Trovare i seguenti limiti:

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{7^n n!}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+3)! - n!)e^{n \sin \frac{2}{n^2}}}{e^{1/n}(n^3-1)(n! - \log n)}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\log n}{\log n!}$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n-5} n!}{n^n}$$

23.3 Funzioni integrali

Studiare le seguenti funzioni:

1.

$$F(x) = \int_0^x dt e^{-1/t^2} t$$

2.

$$F(x) = \int_0^x dt \frac{t-1/3}{(t+4)(t^2+1)}$$

3.

$$F(x) = \int_x^0 dt \frac{e^t}{t^2+1}$$

4.

$$F(x) = \int_1^x dt f(t)$$

dove:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & , \quad x > 0 \\ \arctan x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

5.

$$F(x) = \int_{1/2}^x dt \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}}$$

6.

$$F(x) = \int_2^x dt e^t \sqrt{t}$$

24 07/01/2020

Convergenza di integrali

Studiare la convergenza dei seguenti integrali:

$$a) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}; \quad b) \int_{-4}^{+\infty} \left|x^2 - 16\right| e^{-4x}; \quad c) \int_2^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x - 1}\, dx;$$
$$d) \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx; \quad e) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Convergenza puntuale e uniforme

$$1.\ \ f_n(x) = n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) x^n;$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie al verificare del parametro $p \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-p} \left|x - 1\right|^n$$

3. Siano $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$, $k_n := \max\{k \in \mathbb{N} | 2^k - 1 \leq n\}$,

$$I_n := \left[\frac{n + 1 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}; \frac{n + 2 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}\right]$$

e

$$f_n := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I_n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studio di funzioni

$$a)\ f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}\right) \quad b)\ f(x) = 2 \log|-4x + 12| + \frac{(4x - 9)^2}{2}$$
$$c)\ f(x) = 3\,|x| + 1 + \sqrt{9x^2 - 9}.$$

25 10/01/2020

1. Determinare il massimo k tale che:

$$\log(e^x + x) - \log(e^x - x) = O(x^k)$$

$$\log(e^x + x) - \log(e^x - x) = \log\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

Ricordando i seguenti sviluppi col resto di Peano [1]:

$$e^x = 1 + o(1)$$

$$\log(1 + x) = 1 + x + o(x)$$

si ottiene:

$$\frac{x}{e^x} = \frac{x}{1 + o(1)} = x(1 + o(1)) = x + o(x)$$

Quindi:

$$\log\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = \log(1 + x + o(x)) - \log(1 - x + o(x)) =$$

$$= 1 + x + o(x) - (1 - x + o(x)) = 2x + o(x) = O(x)$$

Ne segue che:

$$k = 1$$

2. L'n-esimo polinomio di Legendre è definito da:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n \quad .$$

Dimostrare che [1]

[1]È evidente della consegna che $x \to 0$.

[1]δ_{nm} è la delta di Kronecker:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

a.

$$\int_{-1}^{1} dx\, f(x) P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} dx\, f^{(n)}(x)(x^2-1)^n$$

Procediamo integrando iterativamente per parti:

$$\begin{aligned}
&(2^n n!) \int_{-1}^{1} dx\, f(x) P_n(x) = \\
&f(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} dx\, f'(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n = \\
&- \int_{-1}^{1} dx\, f'(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n = \ldots = \\
&(-1)^n \int_{-1}^{1} dx\, f^{(n)}(x)(x^2-1)^n
\end{aligned} \tag{7}$$

da cui l'asserto.
NOTA : Ad ogni integrazione per parti il primo termine (quello non integrato) dà contributo nullo, infatti:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^{+1} = 0 \quad \forall m < n$$

b.

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^m P_n(x) = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \delta_{nm} \qquad m \leq n$$

Usando la proprietà precedente vediamo che se $m < n$ tale integrale è nullo. Infatti nel lato destro dell'equazione comparirebbe, nell'integrando, la derivata n-esima di x^m, che però è identicamente nulla per $m < n$.
Ci resta da mostrare la proposizione per $m = n$, i.e. :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad I_n = \int_{-1}^{1} dx\, x^n P_n(x) = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

OSSERVAZIONE 1 :

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^n P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^n = A_n \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^n = A_n G_n$$

OSSERVAZIONE 2 : $A_n = -2A_{n+1}$.

Lo facciamo per induzione:

- Per $n = 0$ vediamo che è vera:

$$\int_{-1}^{1} dx = 2$$

- Supponiamo che sia vera per n. Mostriamo che è vera per $n+1$.

$$I_{n+1} = \int_{-1}^{1} dx\, x^{n+1} P_{n+1}(x) = A_{n+1} \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^{n+1}$$

Integrando per parti;

$$I_{n+1} = A_{n+1} \left[x(x^2-1)^{n+1} \Big|_{-1}^{1} - 2(n+1) \int_{-1}^{+1} dx\, x^2 (x^2-1)^n \right] =$$

$$= 2A_{n+1} \int_{-1}^{+1} dx\, (x^2-1+1)(x^2-1)^n$$

$I_{n+1} = -2(n+1)A_{n+1}G_{n+1} + (n+1)A_nG_n = -2(n+1)I_{n+1} + (n+1)I_n$

Quindi:

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} I_n = \frac{n+1}{2n+3} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{n+1}{2n+3} \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)(n+1)(2n+1)!} =$$

$$= \frac{2^{n+2}[(n+1)!]^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{2^{n+2}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}$$

che coincide proprio con la proposizione $\mathcal{P}(n+1)$.

OSSERVAZIONE : La proprietà appena dimostrata di permette di concludere che se $R_m(x)$ è un polinomio di grado $m < n$, allora:

$$\int_{-1}^{+1} dx\, R_m(x) P_n(x) = 0$$

c.

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

OSSERVAZIONE: l'n-esimo polinomio di Legendre è $P_n(x)$ un polinomio di grado n. Infatti esso è proporzionale alla derivata n-esima di $(x^2-1)^n$, che è di grado $2n$.

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad .$$

Supponiamo $m \neq n$. Uno dei ha grado minore dell'altro, e.g. $m < n$. Ma allora l'integrale è nullo per la proprietà dimostrata in precedenza. Il ragionamento è analogo se $m > n$.
Supponiamo ora $m = n$. In questo caso l'unico termine di $P_m(x)$ che dà contributo non nullo è quello di grado più elevato: $a_n x^n$. Utilizzando la formula del binomio di Newton troviamo che

$$a_n = \frac{1}{2^n n!} 2n(2n-1)...n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Dunque:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) P_n(x) = a_n \int_{-1}^{1} dx\, x^n P_n(x) = a_n \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

d. $P_n(x)$ ha esattamente n zeri.

Per semplicità di notazione possiamo equivalentemente studiare gli zeri della funzione

$$Q_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

Consideriamo la funzione $g_n(x) = (x^2-1)^n$. Essa è un polinomio con $r = 2$ radici. Per $n > 1$ la sua derivata continua ad annullarsi in $x = \pm 1$:

$$g'(x) = (x^2-1)G_1(x) \quad .$$

Inoltre, per il teorema di Rolle, tale derivata ha almeno un altro zero tra -1 e 1 (che non coincide né con -1 né con $+1$).
Dunque, derivando abbiamo guadagnato una radice in più: $r = 2 + 1$.
Iteriamo la procedura, fino alla derivata $(n-1)$-esima. A questo punto abbiamo $r = 2 + (n-1)$ radici, e la $g^{(n-1)}(x)$ ha la forma:

$$g^{(n-1)}(x) = (x^2-1)G_{n-1}(x)$$

con $G_{n-1}(x)$ che ha $n-1$ radici. Derivando ancora otteniamo sicuramente un'altra radice per il teorema di Rolle, per un totale di n radici in $(-1, 1)$. Tuttavia la $g^{(n)}(x)$ non si annulla più in -1 e $+1$ [2]. Il numero di radici della $g^{(n)}(x)$, e quindi di $P_n(x)$, è dunque esattamente pari a n.
Per una rappresentazione visiva del procedimento appena illustrato si veda la figura (1).

[2] Se fosse vero la $g^{(n)}(x)$, sarebbe un polinomio di grado n con $n+2$ radici, che è assurdo.

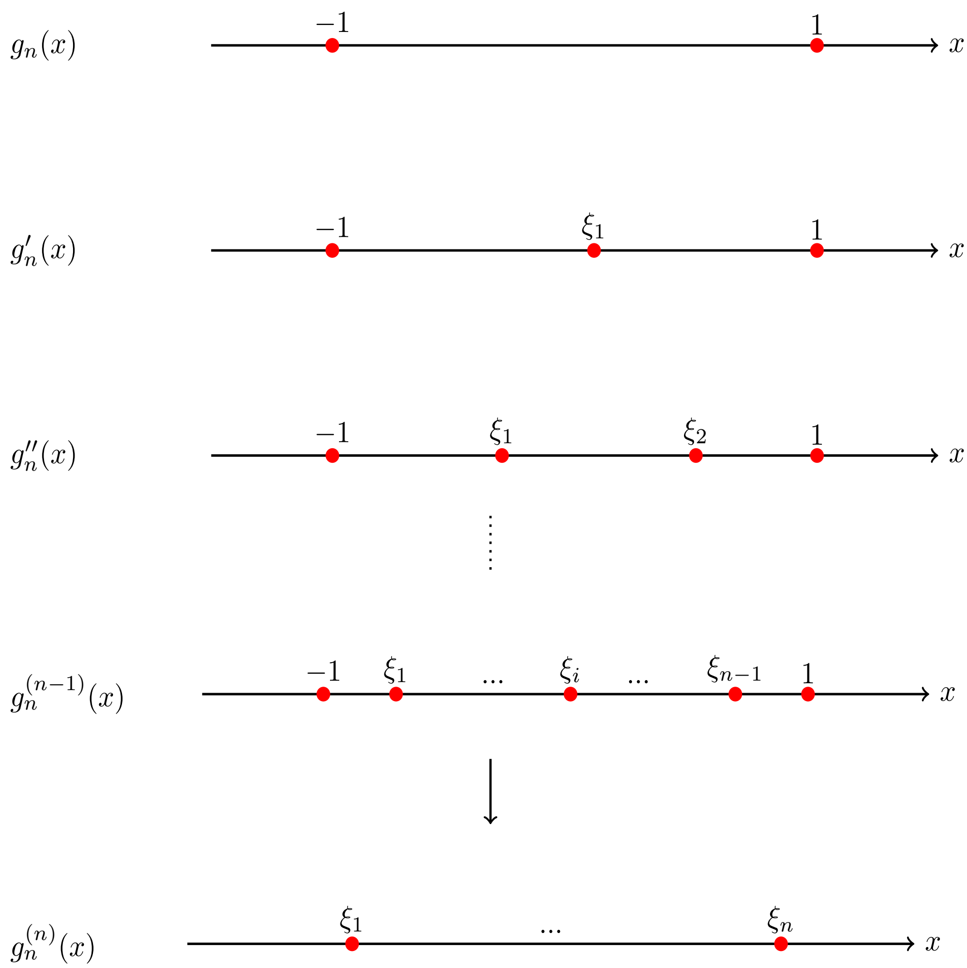


Figura 1: Procedura iterativa per trovare in numero di radici dell'n-esimo polinomi di Legendre. Finché deriviamo un numero di volte minore di n, guadagniamo ad ogni derivazione una radice in più in virtù del teorema di Rolle. Al passo n-esimo ne guadagniamo un'altra, ma -1 e $+1$ non sono più radici.

3. Sia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $g(0) = 0$ e $|g'(x)| \leq g(x) \, \forall x \in [0, 1]$. Dimostrare che $g(x) = 0$ identicamente nel suo dominio.

Osserviamo che $g(x) \geq 0$, poiché è maggiore o uguale di un modulo. La funzione è altresì limitata in quanto continua su un compatto.

Inoltre, utilizzando la formula del resto di Lagrange:

$$|g(x)| = g(x) = g(0) + g(\xi)x = g(\xi)x \leq |g(x)| \leq ... \leq |g(x)|x^n \quad \forall n$$

Essendo la funzione limitata, si ha:

$$|g(x)| \leq M \quad M < +\infty \quad \forall n$$

Ma allora la funzione è sicuramente nulla per $|x| < 1$. Se non lo fosse (e.g. $\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = A \neq 0$) potrei sempre scegliere un n arbitrario tale che $Mx^n < A$ (infatti $x^n \to 0$ per $|x| < 1$). Ciò sarebbe assurdo perché non si può avere simultaneamente $f(x_0) = A$ e $f(x_0) < A$.
Abbiamo mostrato che

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1)$$

Essendo la g continua non si può avere $g(1) \neq 0$, altrimenti si avrebbe una discontinuità di tipo salto. Quindi $g(1) = 0$. Dunque:

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

4. Trovare il più grande K tale che

$$K \log x \leq \sqrt{x} \qquad x > 1$$

Il problema si riduce a trovare il minimo della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$. Studiando la derivata di f si trova un minimo relativo in $x = e^2$. Esso è dà il minimo assoluto perché agli estremi:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} = +\infty$$

Il minimo assoluto è dunque $m = f(e^2) = e$.

$$K = e \quad .$$

5. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ convessa di classe C^1, con $f'(x) > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

La funzione è convessa, quindi giace al di sopra delle sue tangenti. Poiché $f'(x) > 0 \, \forall x$ allora esiste almeno una tangente con coefficiente angolare positivo (in realtà in questo caso tutte le tangenti hanno questa proprietà).

$$\exists m > 0 \quad t.c. \quad f(x) > mx + q$$

Ma

$$mx + q \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

quindi $f(x) \to +\infty$ per il teorema del confronto.

e che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)}$$

Usando il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{f'(x)}$$

Dato che la funzione è convessa $f'(x)$ è crescente, quindi $1/f'(x)$ è decrescente. Il limite esiste ed è finito perché è il limite di una funzione monotona e limitata.

6. La velocità radiale di un asteroide che parte da fermo, in rotta di collisione con la Terra, è inversamente proporzionale alla radice della distanza dal centro del pianeta:

$$v_r = \frac{A}{\sqrt{r}}$$

Mostrare che l'accelerazione è inversamente proporzionale al quadrato di tale distanza.

L'accelerazione radiale a_r è data dalla derivata temporale di v_r:

$$a_r = \frac{d}{dt} v_r = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{-A}{2\sqrt{r^3}} v_r = \frac{-A}{2\sqrt{r^3}} \frac{A}{\sqrt{r}} = \frac{-A^2}{2r^2}$$

26 14-15/01/2020 : Simulazione II esonero

1. (5 punti) Determinare l'ordine di infinitesimo della seguente funzione:

$$f(x) = (1+x)^{1/x} - e$$

2. (8 punti) Determinare, se esiste, $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\sin x^2 - \sin^2 x - c(1-\cos x)^2 \sim K \tan^2 x^3$$

per qualche $K \in \mathbb{R}$, per $x \to 0$

3. (8 punti) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\log(1+x) - \log(1-x) - 2x^\alpha}{\sin(\cos x - 1)}$$

sia infinitesimo di ordine massimo rispetto a x in 0.

4. (3 punti a integrale) Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^7 dx \frac{1}{x+\sqrt{x+2}} \qquad \int_0^{\pi/4} dx \frac{1}{a+b\cos x} \qquad \int_0^{\log 2} dx\,\sqrt{e^x - 1} \qquad \int_0^{\pi} dx\,\sinh^2 x$$

$$\int_1^2 \sqrt{t-1}\frac{dt}{t} \qquad \int_{\log 4}^{\log 9} dx\,\sqrt{e^{2x} - e^x} \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \frac{dx}{\sin x}$$

5. (6 punti a integrale) Integrando per serie, trovare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 dx\,\frac{e^x - 1}{x} \qquad \int_1^{1/2} dx\,\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$$

6.(11 punti) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è definito il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} dx\,(x - \sqrt{x^2-1})^\alpha$$

e per tali valori calcolarlo esplicitamente.

7.(6 punti a funzione) Si studi l'uniforme continuità/convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ delle funzioni

$$f(x) = \sin x^2 \qquad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

A Dimostrazione per induzione

Quando si deve dimostrare la validità di una proposizione $P(n)$ [3] data, con $n \in \mathbb{N}$, si può sfruttare il **principio di induzione**. Una dimostrazione di questo tipo è detta **dimostrazione per induzione**.

Come funziona in pratica?

1. *Base induttiva*: Verifico che vale per un verto valore iniziale n_0. Tipicamente negli esercizi capitano $P(n)$ che sono vere già per $n_0 = 0$ e/o $n_0 = 1$.

2. Assumo che $P(n)$ sia vera e dimostro che è vera $P(n+1)$ (cioè la stessa proposizione in cui sostituisco dappertutto n con $n+1$).

3. Se entrambe le due precedenti condizioni sono soddisfatte allora $P(n)$ è vera $\forall n$ e la dimostrazione è completa.

Attenzione:

1. Se vedete, ad esempio, che la base induttiva è vera solo a partire da $n = 7$ (i.e. non è vera per $n = 1, 2, 3, ...6$) e riuscite poi a dimostrare il punto 2, allora vorrà semplicemente dire che $P(n)$ è vera $\forall n \geq 7$.

2. Se nel dimostrare il punto 2 dovete richiedere, magari per una condizione di esistenza, n maggiore di un certo numero allora, come prima, nel risultato finale basterà dire che $P(n)$ è vera solo a partire da quel numero in poi.

[3] Quando una proposizione dipende da un parametro (in questo caso n) viene anche detta *predicato*.

B Calendario delle lezioni

Data	Simone	Francesco	Argomenti	link
04/10/2019	✓	✓	Dimostrazioni per induzione. Limiti di successioni.	(1)
10/10/2019	✓	✓	Limiti di successioni. Serie.	(2)
11/10/2019	✓	✓	Serie. Proprietà serie a termini positivi. Cauchy-Schwarz in $d = 2$ e dimostrazione (alla lavagna) per d generico.	(3)
14/10/2019	✓		Serie. Numeri complessi.	(4)
17/10/2019	✓	✓	Serie. Numeri complessi. Dimostrazione (alla lavagna) che il rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo precedente tende al rapporto aureo.	(5)
18/10/2019	✓	✓	Serie. Numeri complessi. Numeri di Fibonacci. Dimostrazione (alla lavagna) che la curva di Von Koch ha perimetro infinito, ma che racchiude un area finita.	(6)
22/10/2019		✓	Serie. Limiti con il Teorema ponte. Continuità. Dimostrazione alla lavagna che la funzione massimo è continua. Dimostrazione alla lavagna che un omomorfismo (una funzione che rispetta la somma algebrica) è della forma f(x)=cx.	(7)

23/10/2019		✓	Serie. Limiti con il Teorema ponte. Continuità. Dimostrazione alla lavagna che la funzione massimo è continua. Dimostrazione alla lavagna che un omomorfismo (una funzione che rispetta la somma algebrica) è della forma f(x)=cx.	(7)
24/10/2019		✓	Dimostrazione del Teorema di permanenza del segno (funzioni continue). Dimostrazione del Teorema d'esistenza degli zeri (funzioni continue). Serie. Limiti notevoli.	(8)
29/10/2019	✓		Prima simulazione d'esonero	(9)
30/10/2019	✓		ut supra	(9)
05/11/2019		✓	Seconda simulazione d'esonero	(11)
06/11/2019	✓		ut supra	(11)
08/11/2019	✓	✓	Soluzione della simulazione del 05-06 novembre + ripasso generale in vista dell'esonero dell'11 novembre.	(11)
19/11/2019		✓	Sviluppi di Taylor troncati ad un ordine fissato. Limiti con Taylor.	(13)
20/11/2019	✓		ut supra	(13)
22/11/2019	✓	✓	Serie. Sviluppi di Taylor. Limiti con Taylor. Limiti con de l'Hôpital.	(14)
20-22/11/2019	✓		Lezione straordinaria. Problema di triangolazione di un n-agono. Soluzione I esonero. Sviluppi di Taylor e limiti.	(15)

26/11/2019	✓		Approssimazioni mediante i polinomi di Taylor. Confronto asintotico per serie usando Taylor. Studi di funzione.	(16)
27/11/2019		✓	ut supra	(16)
29/11/2019	✓		Funzioni: famiglie di funzioni, proprietà e studi di funzione.	(17)
04/12/2019	✓		Integrali definiti e indefiniti.	(18)
06/12/2019		✓	Integrali razionali, irrazionali, trigonometrici.	(19)
10/12/2019		✓	Integrali razionali, irrazionali, trigonometrici e primitive.	(20)
11/12/2019	✓		ut supra.	(20)
13/12/2019		✓	Uniforme convergenza di successione di funzioni e serie, integrali impropri, asintoti obliqui, massimi e minimi. Con un ora supplementare (+1).	(21)
17/12/2019		✓	Uniforme convergenza di successione di funzioni e serie, integrali impropri, asintoti obliqui, massimi e minimi. Con un ora supplementare (+1)	(22)
18/12/2019	✓		ut supra	(22)
20/12/2019	✓		Uniforme convergenza. Formula di De Moivre-Stirling. Funzioni integrali.	(23)
07/01/2020		✓	Integrali impropri. Convergenza puntuale e uniforme. Studi di funzione	(24)
08/01/2020	✓		ut supra	(24)

10/01/2020	✓	✓	Ordini di infinitesimo. Polinomi di Legendre. Studi di funzione. Caduta libera di un punto materiale in un campo gravitazionale.	(25)
14/01/2020	✓		Simulazione II esonero	(26)
15/01/2020	✓		ut supra	(26)

Prime 80 ore: **Totale ore al 20/12/2019**:
Francesco: 17x2+ 1 + 1 = 36
Simone: 20x2 = 40

Seconde 40 ore: **Totale ore al 15/01/2019**:
Francesco: 36 + 4 = 40
Simone: 40 + 8 = 48