

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Corso Di Laurea In Fisica

LABORATORIO DI FISICA  
A.S. 2020/2021 - Canale A-L

---

## Amplificatori Operazionali

---

CIGAGNA SIMONE  
1193992  
simone.cigagna@studenti.unipd.it

*Docenti*  
Prof. A. Garfagnini  
Prof. M. Lunardon

DATA ESPERIENZA  
07/01/2021 - 11/01/2021

# 1 Obiettivi

1. Verifica della linearità degli amplificatori operazionali e misura del guadagno di un circuito amplificatore.
2. Misura della frequenza di taglio di un filtro passa alto e verifica del suo comportamento derivatore.
3. Verifica dell'effetto di somma di un circuito sommatore invertente.

# 2 Apparato Sperimentale

Gli strumenti che si utilizzano nel corso dell'esperienza sono i seguenti:

- Multimetro digitale Tenma 72-13430
- Oscilloscopio-generatore di funzioni Picoscope 2204A con due sonde di compensazione
- Circuito integrato TL082 contenente due amplificatori operazionali
- Breadboard con scheda di alimentazione 0/5 V, -12/0/12 V
- Alimentatore di tensione continua 5 V/1.6 A
- Quattro resistori  $R_1$ ,  $R_f$ ,  $R_2$ ,  $R_{1b}$  e tre condensatori  $C_1$ ,  $C_{a+}$ ,  $C_{a-}$

# 3 Amplificatore Operazionale Invertente

Lo scopo di questa sezione è quello di studiare il comportamento di un circuito resistivo comprendente un amplificatore operazionale in configurazione invertente. In particolare, ci si propone di verificarne la linearità e di misurarne l'amplificazione, sia da una misura delle resistenze  $R_1$  e  $R_f$ , che dall'interpolazione lineare di misure acquisite con l'oscilloscopio.

## 3.1 Configurazione Sperimentale

Innanzitutto, si prepara l'alimentazione dell'operazionale, collegando le uscite +12 V e -12 V della scheda di alimentazione ai pin n.8 e n.4 dell'operazionale. Inoltre, a causa dell'alto guadagno, vengono collegate due capacità  $C_{a-} \approx C_{a+} \approx 100\text{nF}$  tra la massa e l'alimentazione invertente e non invertente rispettivamente, con l'obiettivo di minimizzare i fenomeni di oscillazione.

Successivamente viene assemblato sulla breadboard

il circuito rappresentato in Figura 1 e si preleva il segnale nei punti  $V_{in}$  e  $V_{out}$  utilizzando le sonde 10X collegate ai canali A e B dell'oscilloscopio. I valori delle resistenze utilizzati sono stati misurati direttamente con il multimetro e sono riportati nella Tabella 1. Inoltre, il Picoscope viene configurato in modo da compensare l'attenuazione del segnale dovuta dalla sonda e si fa erogare al generatore di funzioni incorporato un segnale sinusoidale di 1 kHz, con ampiezza picco-picco inizialmente di 0.2 V, aumentata gradualmente fino a 4 V.

Risolvendo il circuito e assumendo ideale l'amplificatore operazionale, ci si aspetta che il segnale in ingresso venga amplificato di un fattore  $G = R_f/R_1$ . Inoltre, il segnale di output sarà invertito rispetto

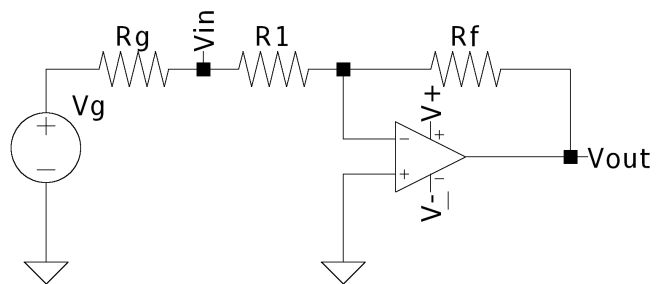


Figura 1: Rappresentazione a costanti concentrate del circuito utilizzato. Si mettono in evidenza, oltre alle resistenze  $R_1$  e  $R_f$ , la resistenza del generatore  $R_G$ .

Misure dirette delle resistenze		
Resistenza	Valore	F.S.
$R_1$	$8.10 \pm 0.04 \text{ k}\Omega$	20 k $\Omega$
$R_f$	$67.9 \pm 0.3 \text{ k}\Omega$	200 k $\Omega$

Tabella 1: Si mostrano in tabella i valori e le incertezze delle resistenze usate in questa sezione, misurati con il multimetro Tenma. È stato riportato anche il fondo scala usato.

a quello di ingresso, in modo da soddisfare la relazione  $V_{\text{out}} = -G V_{\text{in}}$ . Facendo riferimento ai valori riportati in tabella Tabella 1 ci aspetta quindi un guadagno pari a

$$G = \frac{R_f}{R_1} = 8.38 \pm 0.06, \quad \sigma_G = G \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_f}}{R_f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2} \quad (1)$$

### 3.2 Simulazione del Circuito

Con l'obiettivo di studiare il comportamento ideale del circuito rappresentato in Figura 1 in un range significativo di segnali di ingresso, vengono effettuate delle simulazioni della risposta del circuito ad un'onda sinusoidale di  $f_{\text{gen}} = 1 \text{ kHz}$ , utilizzando il software LTSpice XVII. In particolare, sono state effettuate tre simulazioni, corrispondenti a tre ampiezze diverse del segnale del generatore:

$$V_G^{(1)} = 0.2 \text{ V} \quad V_G^{(2)} = 1 \text{ V} \quad V_G^{(3)} = 2 \text{ V}$$

I risultati delle simulazioni sono riportati in Figura 2 e risulta evidente come le prime due simulazioni confermino le considerazioni svolte nella sezione precedente: il segnale di uscita risulta infatti invertito rispetto al segnale di ingresso, e amplificato di un fattore di circa 8. La terza simulazione, invece, evidenzia il fenomeno di saturazione dell'amplificatore operazionale: esso, infatti, è alimentato da una tensione continua di  $\pm 12 \text{ V}$  e per conservazione dell'energia questa è la tensione massima che può fornire in output. Come mostrato nel grafico quindi, i massimi e minimi del segnale in uscita risultano tagliati alla tensione di saturazione. Dato il guadagno trovato in Equazione 1, ci si aspetta che questo fenomeno si verifichi già ad una tensione di input  $V_G \approx 1.5 \text{ V}$ .

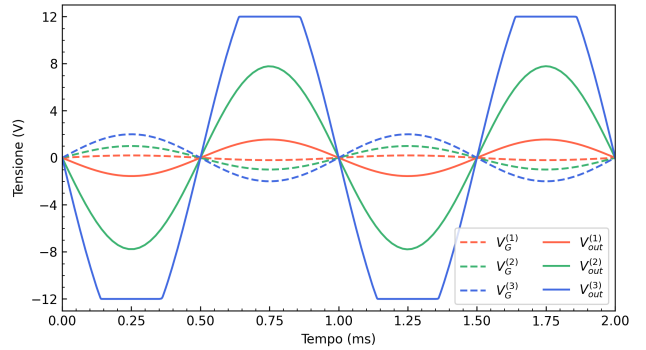


Figura 2: Simulazione del circuito ottenuta con LTSpice XVII. Le linee tratteggiate rappresentano le tre tensioni di ingresso  $V_{\text{gen}}^{(i)}$ , mentre le linee continue rappresentano le corrispondenti tensioni di uscita  $V_{\text{out}}^{(i)}$ .

### 3.3 Procedura di Acquisizione Dati

Sfruttando i cursori di tipo tensione dell'oscilloscopio, vengono registrati separatamente i massimi e i minimi del segnale di ingresso  $V_1$  e del segnale di uscita  $V_{\text{out}}$ , aumentando progressivamente la tensione erogata dal generatore, partendo da un valore nominale picco-picco di  $V_G^{(pp)} = 0.2 \text{ V}$ , fino a  $V_G^{(pp)} = 4 \text{ V}$ . Data la resistenza non trascurabile del generatore  $R_G \approx 600 \Omega$ , occorre distinguere la tensione nominale del generatore  $V_G$  e  $V_{\text{in}}$ , il valore letto dall'oscilloscopio. Ci si aspetta che quest'ultimo sia minore, a causa del calo di tensione dovuto dalla resistenza interna del generatore.

### 3.4 Analisi dei dati

In questa sezione ci si propone innanzitutto di verificare l'accordanza dei dati sperimentali con le misure acquisite. Successivamente si cerca di ottenere una stima migliore dell'amplificazione del circuito  $G$ . Per fare ciò si riportano in grafico le coppie  $V_{in}$  e  $V_{out}$  e tramite un'interpolazione lineare si tenta di ricavare la nuova stima di  $G$ . Inoltre, studiando la bontà del fit, si cerca di valutare la validità dell'ipotesi di linearità.

#### 3.4.1 Selezione dei dati

In Figura 2 vengono riportate le misure di  $V_{in}$  e  $V_{out}$ , a cui è stata associata l'incertezza di lettura sommata quadraticamente all'incertezza di scala

$$\sigma_{V_i} = \sqrt{(\sigma_r \times \text{scala})^2 + (\sigma_k \times V_i)^2} \quad (2)$$

dove  $\sigma_k = 1.7\%$  rappresenta l'errore di guadagno verticale dell'oscilloscopio. Come errore di lettura, si sceglie di non utilizzare il valore fornito dal costruttore in quanto esso porterebbe ad una sovrastima dell'errore. Si assume allora che il contributo maggiore all'errore di lettura sia dato dalla discretizzazione che avviene durante la conversione analogico-digitale, per cui l'errore massimo risulta  $\Delta_r = 1/2^n$ , dove  $n$  rappresenta la risoluzione dell'oscilloscopio. L'acquisizione delle misure è stata effettuata con  $n = 8$  bit, quindi, assumendo una distribuzione uniforme, si ha  $\sigma_r = 0.002$ . Infine, nel caso del Picoscope, la scala rappresenta l'ampiezza dell'intervallo impostato come range sull'oscilloscopio.

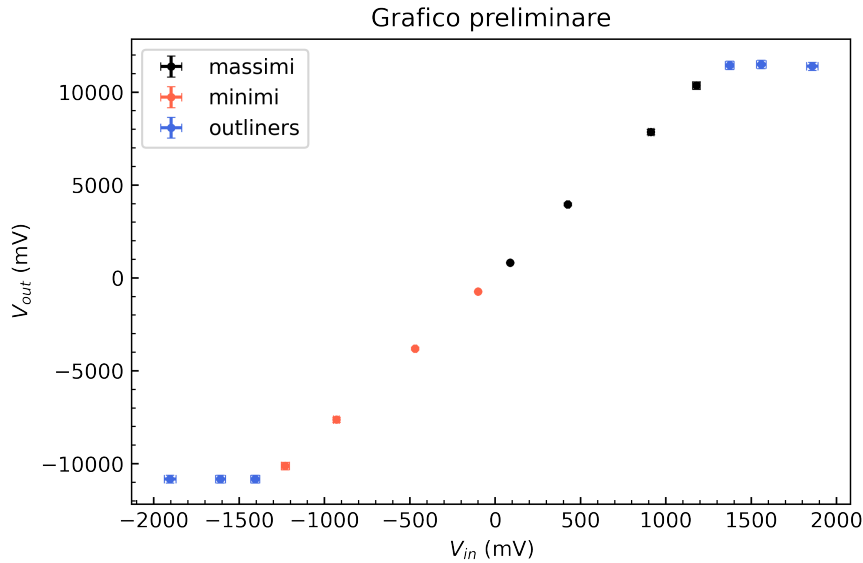


Figura 3: Grafico preliminare delle coppie  $(V_{in}, V_{out})$  dei massimi (in nero) e dei minimi (in rosso). Gli outliers dovuti al fenomeno di saturazione sono evidenziati in blu.

Dalla Figura 3 si può subito osservare come i valori di  $V_{out}$  siano amplificati di un fattore di circa 8, coerente con le aspettative. Inoltre, i valori della tensione in ingresso sono affetti dalla caduta di potenziale rispetto al valore nominale della tensine del generatore, come previsto. Si nota infine il fenomeno di saturazione descritto nella Sezione 3.2. Gli outliers corrispondenti non verranno considerati nelle analisi successive.

#### 3.4.2 Interpolazione Lineare

Si procede ora con la suddivisione dei dati in due set, corrispondenti ai massimi e ai minimi, con l'obiettivo di effettuare un'interpolazione lineare su ciascun campione e, dopo aver verificato la

compatibilità tra i parametri dei fit, fare una nuova interpolazione sui set unificati. Non è infatti possibile stabilire a priori se l'amplificazione sia la stessa tra i due set e se ci siano eventuali sfasamenti tra i due fit. Il coefficiente angolare dell'interpolazione rappresenta una nuova stima dell'amplificazione  $G$  e ci si aspetta che l'intercetta risulti compatibile con lo zero. Si noti però che gli errori associati alle ascisse ( $V_{in}$ ) non risultano trascurabili rispetto a quelli associati alle ordinate ( $V_{out}$ ). Si decide allora di eseguire un primo fit senza considerare l'errore sulle ascisse, per poi utilizzare il coefficiente angolare di questa interpolazione per proiettare gli errori di  $V_{in}$  sulle ordinate, secondo la formula

$$\sigma_y = \sqrt{(m \times \sigma_{V_{in}})^2 + \sigma_{V_{out}}^2} \quad (3)$$

I risultati dei quattro fit sono riportati nella Tabella 2. Si osservi però che il limitato numero di misure di ciascun campione rende i fit poco significativi e si attribuisce proprio a questo problema la discrepanza tra gli errori a posteriori del fit dei massimi e quello dei minimi: i primi infatti indicherebbero una leggera sottostima degli errori mentre i secondi suggeriscono una forte sovrastima, che si rispecchia anche in un  $\chi^2$  eccessivamente ridotto. I coefficienti angolari delle rette risultano inoltre scarsamente compatibili tra di loro ( $\lambda = 2.2$ ). La compatibilità tra le due intercette risulta tuttavia ottima ( $\lambda = 0.97$ ), ma la loro compatibilità con lo zero è discreta nel caso dei massimi ( $\lambda = 1.83$ ), mentre nel caso dei minimi l'intercetta risulta addirittura incompatibile con lo zero ( $\lambda = 3.21$ ).

Parametri dei fit							
Massimi				Minimi			
	$m_{pre}$	$8.80 \pm 0.11$			$m_{pre}$	$8.32 \pm 0.10$	
$m_{max}$	$8.80 \pm 0.16$	$\sigma_p$	202 mV	$m_{min}$	$8.32 \pm 0.15$	$\sigma_p$	10 mV
$q_{max}$	$64 \pm 35$ mV	$\chi^2/ndf$	3.9/2	$q_{min}$	$110 \pm 35$ mV	$\chi^2/ndf$	0.01/2

Tabella 2: Si mostrano in tabella i coefficienti angolari dei fit preliminari  $m_{pre}$  e i risultati dei fit con gli errori proiettati: in particolare si mostrano i coefficienti angolari  $m_i$ , le intercette  $q_i$ , gli errori a posteriori  $\sigma_p$  e il chi quadro  $\chi^2$  in relazione ai suoi gradi di libertà.

Si noti infine che nell'interpolazione sono stati considerati sia i contributi degli errori di lettura che quelli di guadagno verticale, in quanto l'acquisizione delle misure è avvenuta a scale diverse. Questo tuttavia introduce una correlazione tra le misure di cui il fit lineare non tiene conto e che quindi porta ad una sottostima degli errori sui parametri e ad una compatibilità peggiore tra i due set. Tuttavia, nonostante queste considerazioni, l'incompatibilità dell'intercetta dei minimi con lo zero non può essere ignorata: essa infatti suggerisce un possibile errore sistematico di offset e vista la ottima compatibilità con l'intercetta del fit dei massimi si può assumere che tale sistematica sia presente in entrambi i set e che sia costante, ovvero che si tratti di una interferenza di fondo. Sebbene uno shift verticale costante non influenzi il coefficiente angolare dell'interpolazione (cioè la nuova stima di  $G$ ) si sceglie comunque di non unire i due campioni, ma di analizzare le grandezze picco-picco delle tensioni in ingresso e in uscita, secondo la formula  $V_{pp} = V_{max} - V_{min}$ . In questo modo infatti, non solo si dovrebbe riuscire a eliminare il contributo di errore di shift verticale comune a entrambi i set, ma è possibile ridurre anche un eventuale sistematica di offset tra i due campioni, purchè costante per tutti i dati.

Come mostrato in precedenza, si procede prima con un fit preliminare in cui si trascura il contributo degli errori delle ascisse, per poi sfruttare il coefficiente angolare così ottenuto per proiettare gli errori sulle ordinate secondo l'Equazione 3, potendo così fare un nuovo fit che tiene conto di entrambe le incertezze. Nella Figura 4 sono riportati i risultati del fit. Si noti come la compatibilità dell'intercetta con lo zero sia ora  $\lambda = 1.0$ , confermando quindi l'ipotesi di un offset verticale comune a entrambi i set e che è stato rimosso una volta presa la differenza. Anche il chi quadro risulta ora perfettamente compatibile con i suoi gradi libertà ( $\lambda = 1.0$ ), confermando quindi l'ipotesi di andamento lineare dei dati. Il coefficiente angolare, che rappresenta la nostra stima dell'amplificazione  $G$ , risulta discretamente compatibile con il valore teorico previsto dall'Equazione 1 ( $\lambda = 1.4$ ). Dal grafico dei residui si

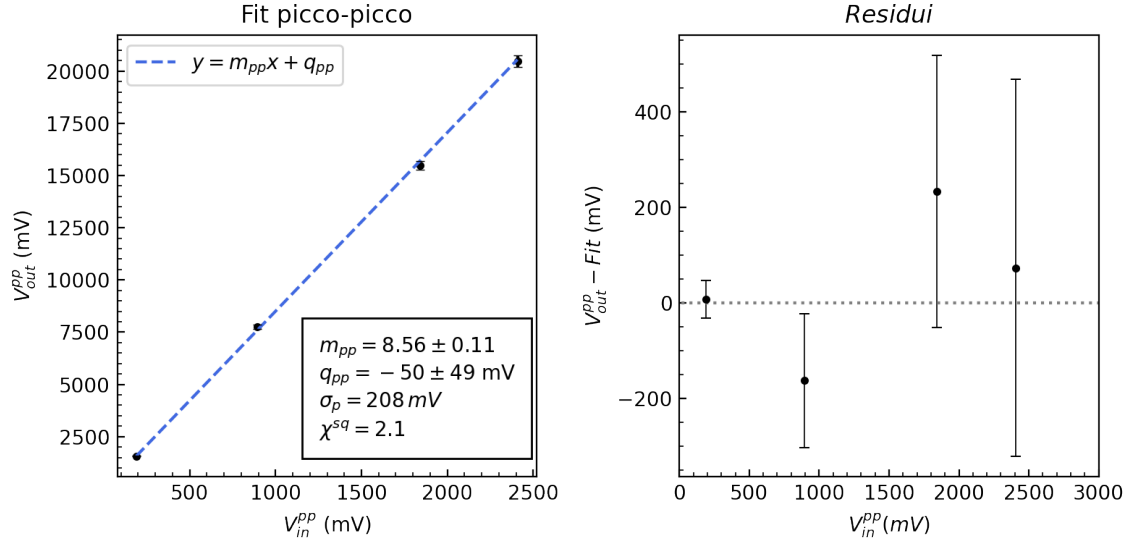


Figura 4: Si mostra in figura il grafico dell'interpolazione dei dati picco-picco coi relativi residui. Vengono inoltre riportati i parametri più significativi del fit.

evidenzia inoltre una buona stima degli errori, con l'eccezione dell'ultimo dato in cui l'incertezza è stata chiaramente sovrastimata. Data la forte presenza di errori sistematici, si è scelto di non proseguire con l'analisi di ulteriori indicatori statistici.

### 3.4.3 Stime di G

In Figura 5 sono state riportate tutte le stime dell'amplificazione  $G$  del circuito calcolate nei paragrafi precedenti: dai coefficienti angolari dei fit dei massimi e dei minimi sono state ottenute due stime  $G_{\max}$ ,  $G_{\min}$ , compatibili tra di loro ( $\lambda_{\max/\min} = 2.2$ ), anche se debolmente. Da queste due stime si decide di effettuare una media pesata, anchessa riportata in Figura 5, ottenendo così un nuovo valore  $\langle G \rangle$  in ottimo accordo con la stima  $G_{pp}$  ottenuta dall'analisi picco picco ( $\lambda_{pp/\langle G \rangle} = 0.1$ ). Queste ultime due stime presentano inoltre una buona compatibilità con il valore  $G_{th}$  previsto dall'Equazione 1 ( $\lambda_{\langle G \rangle/th} \approx \lambda_{pp/th} = 1.4$ ). Nonostante però tali compatibilità siano inferiori rispetto all'accordo che ha  $G_{\min}$  con l'aspettativa teorica ( $\lambda_{\min/th} = 1.11$ ), si decide comunque di assumere come stima migliore dell'amplificazione del circuito  $G_{pp}$  in quanto si tratta del valore meno influenzato da errori sistematici, come spiegato nella Sezione 3.4.2.

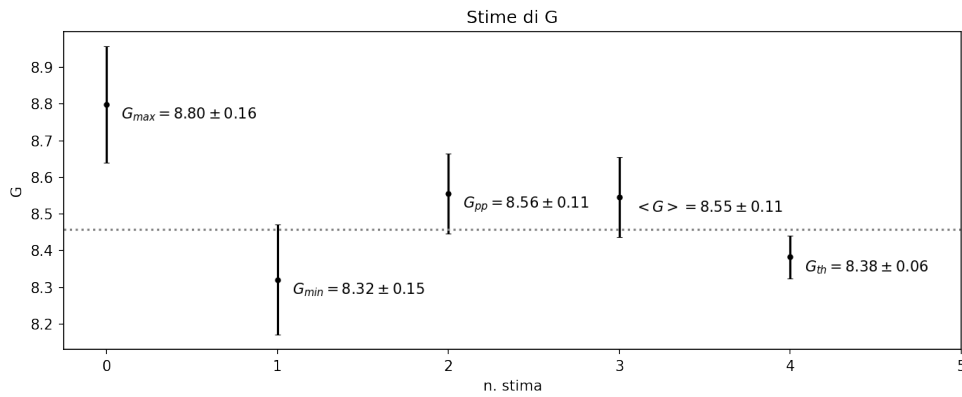


Figura 5: Nel grafico vengono presentate tutte le stime dell'amplificazione del circuito. In ordine da sinistra verso destra: 0) stima ottenuta partendo dal set di massimi, 1) dal set di minimi, 2) dai valori picco-picco 3) dalla media pesata dei massimi e minimi, 5) aspettativa teorica.

## 4 Circuito Derivatore

In questa sezione ci si propone di studiare la risposta in frequenza del circuito rappresentato in Figura 6. Si tratta di un filtro attivo passa alto e derivatore a basse frequenze. In particolare, si vuole stimare la frequenza di taglio e confrontarla con le aspettative teoriche e con le simulazioni.

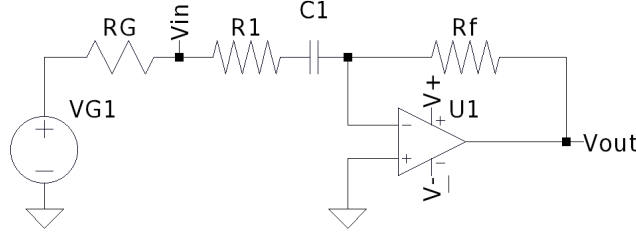


Figura 6: Rappresentazione a costanti concentrate del circuito derivatore utilizzato. Si mette in evidenza la resistenza non trascurabile del generatore  $R_G$  che implica una tensione  $V_{in}$  inferiore rispetto a quella nominale del generatore di funzioni.

### 4.1 Configurazione Sperimentale

Il circuito viene realizzato aggiungendo a quello mostrato in Figura 1 la capacità  $C_1 = 2.05 \pm 0.05$  nF. In questo modo ci si aspetta che la frequenza di taglio sia

$$f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 9.6 \pm 0.2 \text{ kHz} \quad \sigma_{f_t} = f_t \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C_1}}{C_1}\right)^2} \quad (4)$$

Si è quindi configurato il generatore di funzioni in modo tale da erogare un'onda triangolare di ampiezza 1 V e frequenza 1 kHz, con l'obiettivo di verificare il funzionamento da derivatore. Successivamente si ripristina la forma d'onda sinusoidale per ricavare una prima stima sperimentalmente della frequenza di taglio, modificando opportunamente la frequenza del generatore e osservando l'amplificazione ottenuta. Ci si aspetta infatti che in corrispondenza della frequenza di taglio valga la relazione

$$H(f_t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_f}{R_1} = \frac{G}{\sqrt{2}} = 5.93 \pm 0.04 \quad \sigma_{H_f} = \frac{\sigma_G}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

dove  $H = |V_{out}/V_{in}|$  rappresenta la funzione di trasferimento, mentre  $G$  è il guadagno calcolato in Equazione 1.

Infine, per studiare la risposta in frequenza del circuito e ottenere una stima più precisa della frequenza di taglio, si decide di variare la frequenza del generatore tra 10 kHz e 100 kHz e di registrare l'amplificazione del segnale. Si prevede che la funzione di trasferimento sia data da

$$H(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \frac{R_f}{R_1} \quad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (6)$$

Ci si aspetta quindi che il circuito si comporti come un derivatore a basse frequenze e che si ottenga il guadagno massimo  $G$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

### 4.2 Procedura di Acquisizione Dati

Innanzitutto, si registra la risposta del circuito ad un'onda triangolare di ampiezza 1 V e frequenza 1 kHz. Si riporta in Figura 7 uno screenshot dell'output dell'oscilloscopio. Si osserva che la risposta è un'onda quadra, ovvero la derivata del segnale di ingresso. Si conferma quindi l'ipotesi di circuito derivatore. Si riscontrano tuttavia delle deformazioni nell'onda quadra, attribuibili all'alta frequenza dell'onda di ingresso: trattandosi di un filtro passa alto infatti, ci si aspetta che il comportamento da derivatore sia più accentuato a basse frequenze.

Successivamente, come anticipato, si configura in ingresso un'onda sinusoidale di ampiezza 1 V e si registrano i valori  $V_{in}$  e  $V_{out}$ , modificando la frequenza del generatore di funzioni fino ad ottenere un'amplificazione compatibile con quella calcolato nell'Equazione 5. Si stima così una frequenza di taglio di  $f_t \approx 9.5$  kHz.

Si procede poi con un'analisi più dettagliata del comportamento in frequenza, variando la frequenza del generatore da 100 Hz a 100 kHz e campionando un numero maggiore di ampiezze  $V_{in}$  e  $V_{out}$  in prossimità della frequenza di taglio appena calcolata. Si osserva subito un primo discostamento dall'aspettativa teorica: si registra in fatti un'attenuazione del guadagno per frequenze elevate, in chiara contraddizione con le considerazioni della Sezione 4.1, in cui si era previsto un aumento dell'amplificazione per valori di frequenza maggiori.

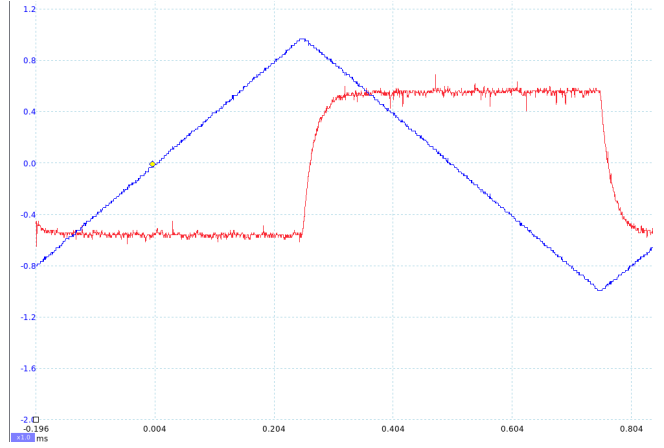


Figura 7: Screenshot dell'oscilloscopio con un'onda triangolare in input. Si osserva in output un'onda quadra deformata.

### 4.3 Dati e analisi

Si vuole ora riassumere la risposta in frequenza del circuito tramite un grafico di Bode e confrontarlo con le simulazioni di LTspice. Si procede poi con la stima della frequenza di taglio in due metodi alternativi: in un primo momento tramite delle interpolazioni lineari e paraboliche del grafico di bode, e in seguito da un fit in scala lineare di un intorno della frequenza di taglio.

#### 4.3.1 Grafico di Bode

Per realizzare il grafico di Bode a partire dalle coppie  $(V_{in,i}, V_{out,i})$  si calcola il logaritmo della funzione di trasferimento

$$H_i = \frac{V_{out,i}}{V_{in,i}} \quad \sigma_{H,i} = H_i \sqrt{\left( \frac{\sigma_L \times \text{scala}_{in,i}}{V_{in,i}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_L \times \text{scala}_{out,i}}{V_{out,i}} \right)^2} \quad (7)$$

dove  $\sigma_L = 0.002$  rappresenta l'errore di lettura dell'oscilloscopio mentre  $\text{scala}_{in,i}$  e  $\text{scala}_{out,i}$  sono le scale utilizzate per l'acquisizione del segnale in ingresso e in uscita rispettivamente. L'errore di scala non viene invece considerato in quanto, prendendo il logaritmo, il guadagno si trasferisce sull'intercetta.

In Figura 8 è rappresentato il grafico di Bode, in cui le funzioni di trasferimento sono riportate in decibel e le ascisse vengono rappresentate in scala logaritmica. Nel grafico viene riportata anche la simulazione LTspice, che evidenzia un ragionevole accordo con i dati sperimentali. Tuttavia, a frequenze elevate si nota il fenomeno di attenuazione del guadagno osservato nella sezione 4.2. Si prevede che per frequenze superiori questa anomalia risulti ancora più evidente. Ci si ritiene comunque soddisfatti dell'andamento dei dati rispetto alla simulazione, soprattutto considerando l'ampio range di frequenze che si sta analizzando. Si cerca ora di stimare la frequenza di taglio e, osservando che i punti del grafico di Bode seguono sostanzialmente due andamenti, si

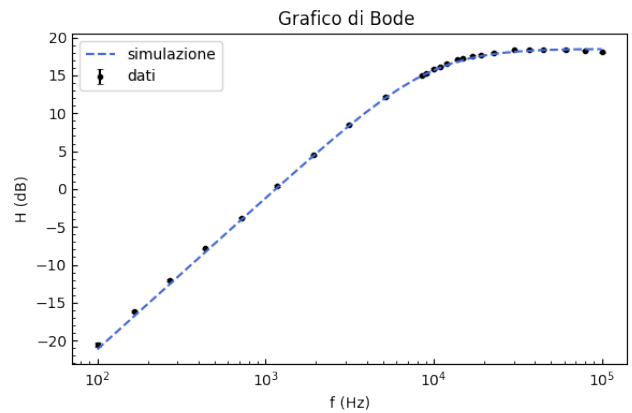


Figura 8: Grafico di Bode dei dati sperimentali confrontato con la simulazione LTspice.



decide di effettuare due fit: uno parabolico ( $y = ax^2 + bx + c$ ) e uno lineare ( $y = dx + e$ ). I risultati di entrambi sono riportati in Figura 9. Dalla prima interpolazione si stima il massimo  $H_{\max}$  della funzione di trasferimento dal vertice della parabola

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad H_{\max} = -\frac{b^2}{4a} + c = 18.45 \pm 0.04 \text{ dB} \quad (8)$$

dove l'errore su  $H_{\max}$  viene calcolato con la formula

$$\sigma_{H_{\max}} = \sqrt{x_v [x_v^3 \sigma_a^2 + 2x_v^2 \text{cov}(a, b) + x_v(\sigma_b^2 + 2\text{cov}(a, c)) + 2\text{cov}(b, c)] + \sigma_c^2} \quad (9)$$

Dal fit lineare invece si ricava l'ascissa per cui la retta vale  $H_{\max}$ , tale  $x$  rappresenta la stima della frequenza di taglio

$$f_t = \frac{H_{\max} - e}{d} = 4.009 \pm 0.006 \text{ dec} \quad (10)$$

$$\sigma_{f_t} = f_t \sqrt{\left(\frac{\sigma_{H_{\max}}}{H_{\max} - e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_e}{H_{\max} - e}\right)^2 + 2\frac{\text{cov}(e, d)}{(H_{\max} - e)d}} \quad (11)$$

Si converte infine il risultato ottenuto in Hz, ottenendo  $f_t = 10.21 \pm 0.14 \text{ kHz}$ . La frequenza di taglio così ottenuta risulta debolmente compatibile con quella stimata con l'Equazione 4 ( $\lambda = 2.5$ ). Dal grafico dei residui si osserva però una componente sistematica particolarmente evidente nella regione lineare, in cui i residui seguono un chiaro andamento parabolico. Si crede che questo comporti una sottostima del coefficiente angolare  $d = 19.31 \pm 0.10 \text{ dB/dec}$ , incompatibile con l'aspettativa teorica  $d_{th} = 20 \text{ dB/dec}$ , e che si traduce in una sovrastima della frequenza di taglio, giustificando quindi la scarsa compatibilità con l'aspettativa teorica.

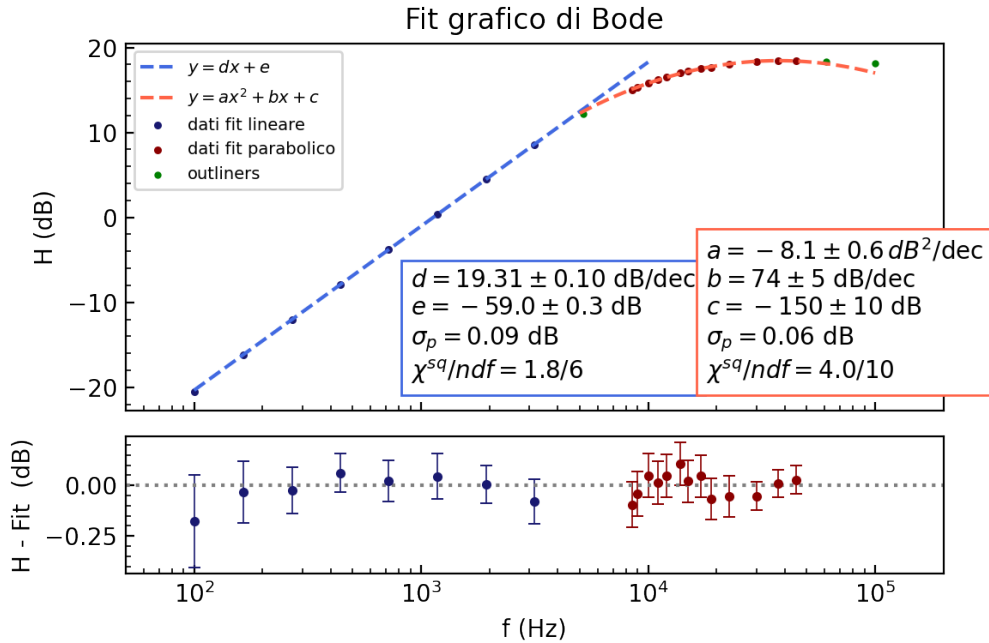


Figura 9: Nel grafico vengono riportati il fit lineare (in blu) e quello parabolico (in rosso). Si evidenziano inoltre gli outliers (in verde), non considerati durante i fit. In basso viene mostrato anche il grafico dei residui.

### 4.3.2 Stima frequenza di taglio in scala lineare

La strategia per stimare la frequenza di taglio del circuito dalla funzione di trasferimento in scala lineare è la seguente: si individua un intorno della frequenza di taglio sufficientemente stretto da evidenziare un andamento lineare dei dati in modo da poter effettuare un fit del tipo  $y = fx + g$ . In questo modo, è possibile ricavare la frequenza di taglio dall'ascissa per cui l'intercetta vale  $H_{\max}/\sqrt{2}$

$$f_t = \frac{H_{\max} - \sqrt{2}f}{\sqrt{2}g} \quad (12)$$

$$\sigma_{f_t} = f_t \sqrt{\left(\frac{\sigma_{H_{\max}}}{H_{\max} - \sqrt{2}f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{\sqrt{2}g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_f}{H_{\max} - \sqrt{2}f}\right)^2 + 2\frac{\text{cov}(f, g)}{(H_{\max} - \sqrt{2}f)\sqrt{2}g}} \quad (13)$$

dove l'errore sulla pendenza si ottiene sommando quadraticamente l'errore del fit con i contributi di scala: poichè le misure nell'intervallo considerato sono state prese con la stessa scala, gli errori sistematici non alterano l'andamento dei residui e quindi nemmeno la bontà del fit. Si decide quindi di considerare nell'interpolazione solamente gli errori di lettura e correggere successivamente l'incertezza sulla pendenza

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_{g,\text{fit}}^2 + 2g^2\sigma_k^2} \quad (14)$$

dove il fattore 2 deriva dalla presenza di due errori di scala, relativi ai due segnali  $V_{\text{in}}$  e  $V_{\text{out}}$ . I risultati del fit sono riportati in Figura 10. Si nota un'ottima compatibilità del chi quadro col suo valore atteso ( $\lambda = 0.7$ ), con una leggera sovrastima degli errori, evidenziata dalla deviazione standard a posteriori. Usando i risultati del fit nell'Equazione 12 e scegliendo  $H_{\max} = 8.36 \pm 0.04$ , cioè la stima ottenuta nella Sezione 4.3.1 e convertita in scala lineare, segue che il nuovo valore della frequenza di taglio del circuito è  $f_t = 9.3 \pm 0.3$  kHz. Tale stima è in ottimo accordo con le previsioni teoriche calcolate nell'Equazione 4 ( $\lambda = 0.8$ ).

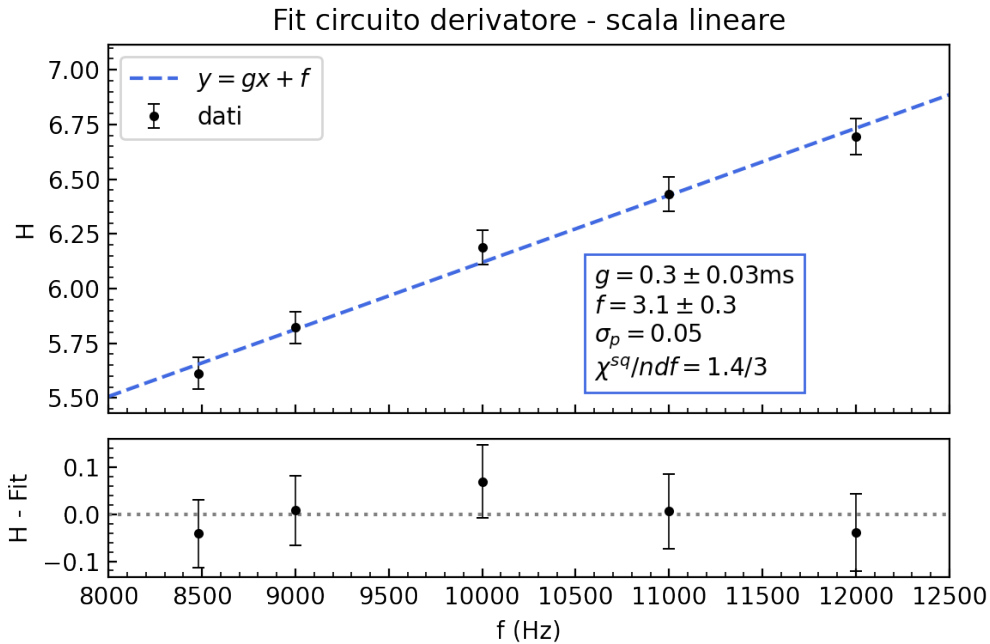


Figura 10: Nella figura viene riportato il fit della funzione di trasferimento in scala lineare. In basso viene mostrato anche il grafico dei residui.

## 5 Circuito Sommatore

In quest'ultima sezione ci si propone di verificare il comportamento di sommatore invertente del circuito rappresentato in Figura 11.

### 5.1 Configurazione sperimentale

Il circuito utilizzato nella Sezione 3 viene modificato, sostituendo la resistenza di feedback  $R_f$  con la resistenza più simile a  $R_1$  a disposizione,  $R_2 = 8.06 \pm 0.04 k\Omega$  ( $\lambda = 0.7$ ). Inoltre, è stato aggiunto un ingresso con la resistenza  $R_{1b} = 8.08 \pm 0.04 k\Omega$ , compatibile sia con  $R_1$  ( $\lambda = 0.4$ ) che con  $R_2$  ( $\lambda = 0.4$ ). Sull'ingresso  $V_{G1}$  viene applicata una tensione sinusoidale di ampiezza 2 V e frequenza 1 kHz, mentre l'ingresso  $V_2$  viene collegato ad un generatore di tensione costante a 5 V, incluso nella schedina di alimentazione. Vengono quindi misurate con l'oscilloscopio le ampiezze dei segnali in ingresso e in uscita.

Trattandosi di un sommatore pesato, ci si aspetta che valga la relazione

$$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1}V_1 - \frac{R_2}{R_{1b}}V_2 \quad (15)$$

Data la compatibilità delle tre resistenze, l'equazione può essere semplificata, e la risposta del circuito diventa semplicemente la somma delle tensioni in ingresso, invertite di segno (si tratta comunque di un amplificatore in configurazione invertente)

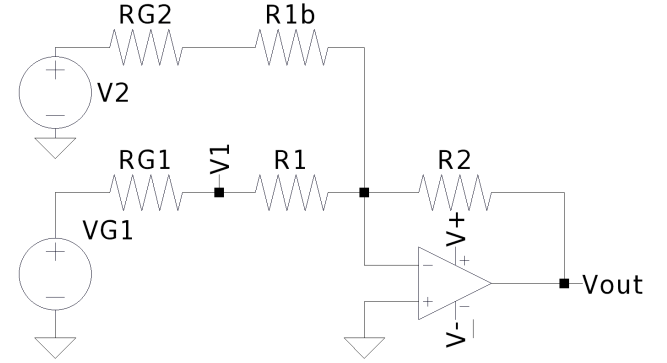


Figura 11: Schema a variabili concentrate del circuito sommatore invertente utilizzato. Si noti la distinzione tra i punti  $V_{G1}$  e  $V_1$  dovuta dalla resistenza non trascurabile del generatore di funzioni. La resistenza  $R_{G2}$  si assume invece trascurabile.

$$V_{out} = -(V_1 + V_2) \quad \sigma_{V_{out}} = \sqrt{\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2} \quad (16)$$

dove  $\sigma_{V_1}$  e  $\sigma_{V_2}$  rappresentano gli errori associati alle misure dell'oscilloscopio, calcolati con l'Equazione 2.

### 5.2 Procedura di Acquisizione Dati

Inizialmente vengono sono utilizzate le due sonde collegate ai canali A e B dell'oscilloscopio per registrare gli ingressi  $V_1$  e  $V_2$ . Si sceglie di acquisire per ogni segnale tre misure coi cursori delle tensioni, in corrispondenza del massimo, del minimo e del semiperiodo della sinusoidale del primo ingresso. Successivamente, avendo a disposizione solo due canali nell'oscilloscopio, si sposta la sonda B per registrare la tensione di uscita nei tre punti di interesse.

### 5.3 Dati e analisi

Si vuole ora confrontare i dati acquisiti con le simulazioni di LTspice. Si procede poi con un confronto tra le misure sperimentali e il segnale in uscita previsto dall'Equazione 16. In Tabella 3 sono riportate le misure acquisite.

#### 5.3.1 Simulazione del circuito

In Figura 12 vengono riportate due simulazioni del circuito ottenute con LTspice, a cui vengono sovrainposti i punti sperimentali. Tuttavia, poichè durante l'esperienza si è preferito concentrarsi solo sui punti più significativi, non è stata utilizzata la funzione per esporare i dati direttamente dal

Misure significative sommatore invertente			
Descrizione	$V_1$	$V_2$	$V_{out}$
Massimo	$1.85 \pm 0.03 \text{ V}$	$5.10 \pm 0.10 \text{ V}$	$-6.94 \pm 0.13 \text{ V}$
Minimo	$-1.84 \pm 0.03 \text{ V}$	$5.10 \pm 0.10 \text{ V}$	$-3.25 \pm 0.07 \text{ V}$
Semiperiodo	$0.000 \pm 0.009 \text{ V}$	$5.10 \pm 0.10 \text{ V}$	$-5.07 \pm 0.10 \text{ V}$

Tabella 3: Si mostrano in tabella i valori misurati con l'oscilloscopio e le relative incertezze. Si osservi che la sensibilità dell'oscilloscopio non è sufficiente a misurare nessuna cifra diversa da zero per la tensione  $V_1$  in corrispondenza del semiperiodo.

Picoscope. I valori mostrati in figura sono invece stati estrapolati da due screenshot dell'oscilloscopio dal software WebPlotDigitizer. La prima simulazione (a sinistra nella Figura 12) viene effettuata usando come tensione del secondo ingresso il valore nominale di 5 V. Si osserva però un leggero discostamento dai dati sperimentali della tensione  $V_2$ , che presenta un offset verticale  $V_{offset} \approx 100 \text{ mV}$  che si riflette anche nell'andamento della tensione di uscita. Si attribuisce questo effetto ad un background dovuto a delle interferenze nella scheda di alimentazione. Si effettua quindi la seconda simulazione (a destra) sostituendo al valore del secondo generatore la misura sperimentale  $V_2 = 5.10 \text{ V}$ . Dalla Figura 12 si osserva chiaramente un migliore accordo tra i dati sperimentali e la simulazione.

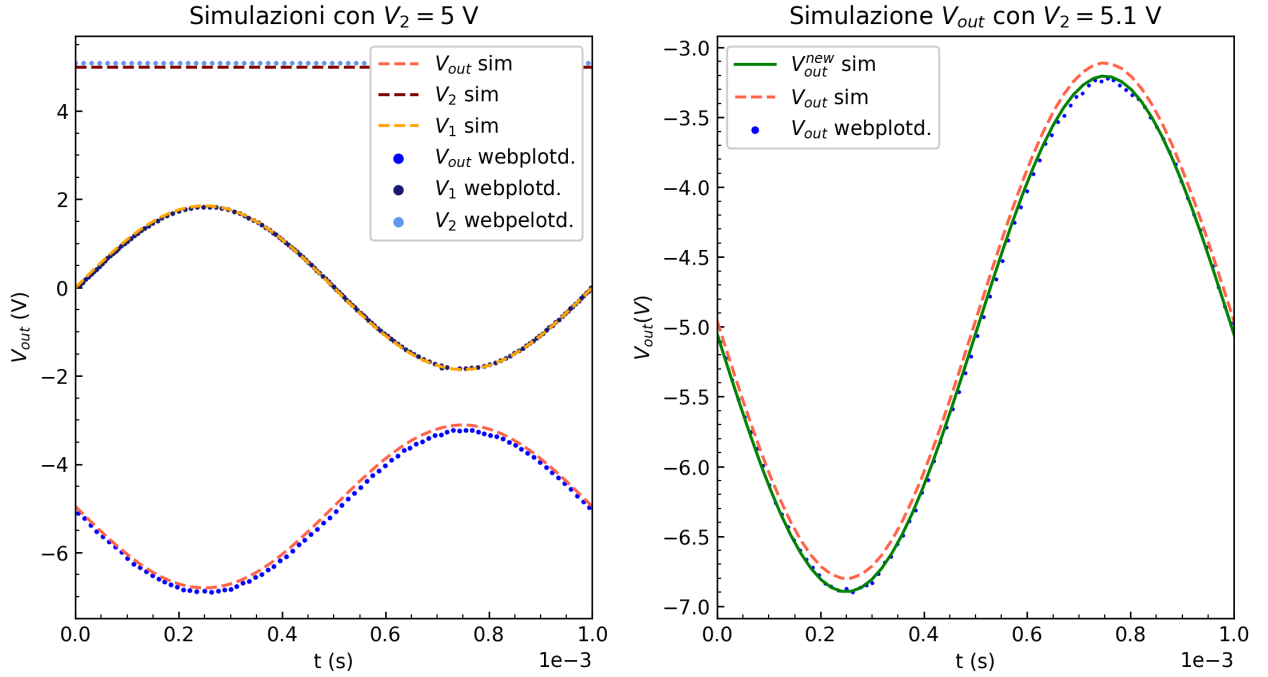


Figura 12: Nel grafico a sinistra vengono riportate le simulazioni di LTspice (linee tratteggiate) e i dati estratti da WebPlotDigitizer, per tutti e tre i segnali. Nel grafico a destra si mostra come la nuova simulazione ottenuta imponendo  $V_2 = 5.1 \text{ V}$  descrive più fedelmente la tensione in uscita

### 5.3.2 Verifica del comportamento di sommatore

Inserendo i dati della Tabella 3 nell'equazione 5.1, si prevedono i seguenti valori di tensione in uscita:

$$V_{out}^{\max} = -6.94 \pm 0.11 \text{ V} \quad V_{out}^{\min} = -3.26 \pm 0.10 \text{ V} \quad V_{out}^{T/2} = -5.10 \pm 0.18 \text{ V} \quad (17)$$

Nella tabella 4 vengono confrontati questi valori con quelli misurati: si osserva un'ottima compatibilità per tutte e tre le misure, confermando quindi il comportamento di circuito sommatore.

Compatibilità dati e previsioni			
Descrizione	$V_{\text{out}}$ atteso	$V_{\text{out}}$ misurato	$\lambda$
Massimo	$-6.94 \pm 0.11 \text{ V}$	$-6.94 \pm 0.13 \text{ V}$	0.01
Minimo	$-3.26 \pm 0.10 \text{ V}$	$-3.25 \pm 0.07 \text{ V}$	0.1
Semiperiodo	$-5.10 \pm 0.10 \text{ V}$	$-5.07 \pm 0.10 \text{ V}$	0.2

Tabella 4: Si mostrano in tabella i valori della tensione di uscita misurati con l'oscilloscopio e vengono confrontati con i valori previsti. Si mostra inoltre la compatibilità  $\lambda$  tra le due stime.

## 6 Conclusioni

Si riassume ora l'analisi effettuata nelle sezioni precedenti: si è cominciato verificando la linearità dell'amplificatore operazionale dallo studio del fit in Figura 4, ottenuto dai valori picco-picco delle tensioni misurate, così da eliminare la sistematica di offset verticale osservata. La pendenza della retta interpolante ( $G = 8.56 \pm 0.11$ ) corrisponde alla miglior stima dell'amplificazione del circuito mostrato in Figura 1. Nella Sezione 4 si è poi verificato il comportamento da derivatore del circuito rappresentato in Figura 6 e si è studiata la sua risposta in frequenza con l'obiettivo di ottenere una stima della frequenza di taglio: dall'analisi del grafico di Bode in Figura 9 si è ottenuta una prima stima  $f_t = 10.21 \pm 0.14 \text{ kHz}$ , scarsamente compatibile con l'aspettativa teorica a causa delle sistematiche evidenziate dal grafico dei residui. Si è poi spostata l'attenzione sull'analisi in scala lineare, e dall'interpolazione mostrata in Figura 10 si è ottenuto  $f_t = 9.3 \pm 0.3 \text{ kHz}$ , in ottima compatibilità con le aspettative teoriche. Si assume quindi questa come miglior stima della frequenza di taglio del circuito. Infine, nella Sezione 5 si è verificato il comportamento di sommatore invertente del circuito rappresentato in Figura 11: inizialmente vengono confrontati i dati con le simulazioni ottenute con LTspice, da cui si evidenzia un segnale di fondo di  $\approx 100 \text{ mV}$  dovuto a interferenza nella scheda di alimentazione. Sono state poi confrontati i dati sperimentali con le aspettative teoriche in corrispondenza del massimo, del minimo e del semiperiodo del segnale del generatore di funzioni. In tutti e tre i casi si è riscontrato un'ottima compatibilità con le previsioni, come si evince dalla Tabella 4.