Analisi statica e verifica del software

Simone Colli, Manuel Di Agostino

simone.colli@studenti.unipr.it, manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Appunti del corso tenuto dal **Prof. Vincenzo Arceri**

Università degli Studi di Parma
Anno Accademico 2025/2026

Indice

1 Introduzione **5**
1.1 Cos'è l'affidabilità del software? . . . 5
1.2 Perché l'affidabilità del software è importante? . . . 5
1.3 Validazione e Verifica . . . 6
1.4 Verifica del Software . . . 6

2 Background matematico **9**
2.1 Set notation . . . 9
2.2 Partial order . . . 9
2.3 Powerset . . . 10
2.4 Diagramma di Hasse . . . 11
2.5 Upper e lower bounds . . . 12
2.6 Supremum e Infimum . . . 13
2.7 Proprietà di lub e glb . . . 13
2.8 Lattice . . . 13
2.9 Set lattice . . . 14
2.10 Complete lattice . . . 15
2.11 Relations . . . 16
2.12 Functions (or maps) . . . 17
2.12.1 Monotonia, Embedding e Isomorfismo . . . 18
2.12.2 Funzioni che preservano join e meet . . . 19
2.13 Chains . . . 20
2.13.1 Ascending Chain Condition (ACC) . . . 21
2.14 Mappe continue . . . 21
2.15 Fixpoint . . . 22
2.15.1 Iterazioni di una funzione . . . 22
2.16 Teoremi di Punto Fisso . . . 22

3 Modellazione dei programmi **25**
3.1 Poset nell'analisi statica . . . 25
3.2 Punti fissi . . . 26
3.3 IMP . . . 27
3.3.1 Sintassi . . . 27
3.3.2 Semantica concreta . . . 27
3.4 Semantica delle tracce . . . 27
3.5 Calcolo del least fixpoint . . . 28

4 Analisi dataflow **30**
4.1 CFGs . . . 30
4.2 Analisi di dataflow . . . 31
4.2.1 Available expressions . . . 32
4.2.2 Altre analisi di dataflow . . . 34
4.3 I reticoli nelle analisi di dataflow . . . 35
4.4 Analisi distributive . . . 36

4.4.1 Constant propagation 37

Disclaimer

Nota

I seguenti appunti sono stati generati a partire dal materiale didattico e dalle note ufficiali del corso 'Analisi statica e verifica del software'. Il contenuto è stato riorganizzato, formattato e parzialmente rielaborato con l'ausilio di AI al fine di creare un documento coeso e ottimizzato per lo studio.

Si raccomanda di fare sempre riferimento al materiale originale fornito dal docente per garantire la massima accuratezza.

1 Introduzione

1.1 Cos'è l'affidabilità del software?

Definizione 1.1: Affidabilità del Software (IEEE 610.121990)

"The ability of a system or component to perform its required functions under stated conditions for a specified period of time"
Ovvero:
"La capacità di un sistema o componente di eseguire le funzioni richieste in condizioni specificate per un periodo di tempo specificato"

Definizione 1.2: Gestione dell'Affidabilità del Software (IEEE 982.11988)

"The process of optimizing the reliability of software through a program that emphasizes software error prevention, fault detection and removal, and the use of measurements to maximize reliability in light of project constraints such as resources, schedule and performance"
Ovvero:
"Il processo di ottimizzazione dell'affidabilità del software attraverso un programma che enfatizza la prevenzione degli errori software, il rilevamento e la rimozione dei guasti, e l'uso di misurazioni per massimizzare l'affidabilità alla luce dei vincoli del progetto come risorse, tempi e prestazioni"

Sfruttando le definizioni Definizione 1.1 e Definizione 1.2, è possibile riassumere che l'affidabilità del software consiste in 3 attività:

- Prevenzione degli errori.
- Rilevamento e rimozione dei guasti.
- Valutazione per massimizzare l'affidabilità, in particolare valutazioni a supporto delle prime due attività.

1.2 Perché l'affidabilità del software è importante?

L'importanza dell'affidabilità del software deriva dalle enormi conseguenze economiche e operative che i bug possono causare.

Alcune stime indicano che:

- I bug nei software costano circa 60 miliardi di dollari all'anno negli Stati Uniti.
- L'economia mondiale perde circa 250 miliardi di dollari all'anno a causa di qualsiasi tipo di attacco palese (overt attack).
- I difetti nel software rendono la programmazione molto dolorosa.

Alcuni esempi di fallimenti dovuti a bug software includono:

- Il disastro del volo 501 di Ariane 5 nel 1996, che è esploso dopo 37 secondi dal decollo a causa di un errore di overflow durante la conversione da un float 64 bit ad un intero 16 bit. Questo evento ha causato una perdita di circa 370.000.000 dollari.
- Il bug del Pentium FDIV nel 1994, che ha causato errori di calcolo nelle divisioni in virgola mobile. Questo bug ha portato a una perdita di circa 475.000.000 dollari.
- L'aggiornamento difettoso di CrowdStrike nel 2024, che ha causato più di 5000 voli cancellati. Questo evento ha impattato su banche, governi e infrastrutture critiche. Le perdite economiche sono state stimate a circa 5.400.000.000 dollari.

La lista di esempi potrebbe continuare, ma l'importante è comprendere che l'affidabilità del software è cruciale per evitare perdite economiche significative e garantire il corretto funzionamento dei sistemi.

1.3 Validazione e Verifica

La validazione e la verifica sono due processi distinti ma complementari nell'ambito dello sviluppo del software, entrambi mirati a garantire che il software soddisfi i requisiti e funzioni correttamente.

La **validazione** si concentra sulla domanda: "Stiamo costruendo il prodotto giusto?". Essa verifica che il software soddisfi le esigenze e le aspettative degli utenti finali. La **verifica**, d'altra parte, si concentra sulla domanda: "Stiamo costruendo il prodotto nel modo giusto?". Essa assicura che il software sia sviluppato correttamente secondo le specifiche tecniche e i requisiti di progetto.

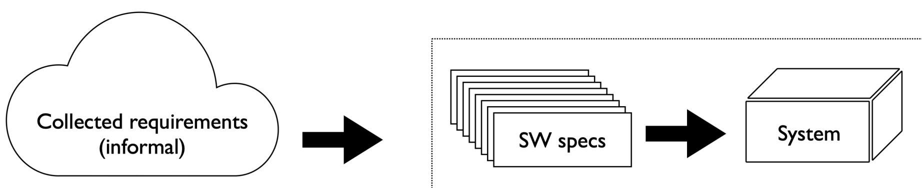


Figura 1: L'immagine illustra la differenza tra validazione e verifica.

Esempio 1.1: Risposta dell'ascensore

Un esempio pratico di validazione e verifica può essere trovato nel comportamento di un sistema di risposta dell'ascensore.
Una specifica validabile ma non verificabile potrebbe essere: "Se un utente preme il pulsante di richiesta a un piano i, un ascensore disponibile deve arrivare al piano i entro un tempo ragionevole".
Una specifica verificabile è: "Se un utente preme il pulsante di richiesta a un piano i, un ascensore disponibile deve arrivare al piano i entro 30 minuti".

1.4 Verifica del Software

Lo scopo della verifica del software è verificare alcune affermazioni di correttezza riguardante un programma:

- La **correttezza funzionale**, ovvero che il programma soddisfi i requisiti funzionali specificati.
- L'**assenza di errori non funzionali** (non cosa fa il programma, ma come lo fa), come ad esempio: soddisfacimento di vincoli spaziali e/o temporali, assenza di errori a runtime, soddisfacimento di vincoli di sicurezza, ecc.

Bad news: theres no silver bullet

Non esiste un metodo di verifica che sia contemporaneamente:

- **Automatico**: non richiede interazione umana.
- **Potente**: è in grado di dimostrare proprietà non banali (*non-trivial properties*).
- **Corretto (Sound)**: non dimostra mai una proprietà se questa non è vera.
- **Completo (Complete)**: dimostra sempre la proprietà se essa è vera e non fallisce mai nel dichiarare la correttezza di un programma corretto.

Il **teorema di Rice** afferma che tutte le proprietà non banali del comportamento di un programma scritto in un linguaggio di programmazione Turing-completo sono indecidibili. L'**indecidibilità** di una proprietà implica che non esiste alcun metodo di verifica automatico che sia allo stesso tempo **corretto** e **completo**.

2 Background matematico

Per poter discutere in modo rigoroso di tecniche di verifica del software, è necessario introdurre alcuni concetti matematici di base relativi alla teoria della computazione e alla logica formale.

2.1 Set notation

Definizione 2.1: Insieme

Un insieme (set) è una collezione di oggetti ben definiti e distinti. La collezione stessa è considerata un oggetto a sé stante.
Dato un insieme S è possibile dire che:

- $s \in S$ significa che l'elemento s appartiene all'insieme S.
- $S_1 \subseteq S_2 \triangleq \forall s \in S_1 \Rightarrow s \in S_2$ significa che l'insieme S_1 è un sottoinsieme di S_2 se ogni elemento di S_1 appartiene anche a S_2.
- $S_1 \cup S_2 = \{s \mid s \in S_1 \vee s \in S_2\}$ è l'unione di due insiemi, ovvero l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi.
- $S_1 \cap S_2 = \{s \mid s \in S_1 \wedge s \in S_2\}$ è l'intersezione di due insiemi, ovvero l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi.

2.2 Partial order

Definizione 2.2: Ordine parziale

Un ordine parziale (partial order) è una relazione binaria $\sqsubseteq$ su un insieme X che soddisfa le seguenti proprietà:

- Riflessività: $\forall x \in X \Rightarrow x \sqsubseteq x$, indica che ogni elemento è in relazione con se stesso.
- Anti-simmetria: $\forall x, y \in X, (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x) \Rightarrow x = y$, indica che se un elemento x è in relazione con un altro elemento y e viceversa, allora x e y sono lo stesso elemento.
- Transitività: $\forall x, y, z \in X, (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \sqsubseteq z$, indica che se un elemento x è in relazione con un elemento y, e y è in relazione con un elemento z, allora x è in relazione con z.

Esempio 2.1: Esempio informale di ordine parziale su $\mathbb{Z}$

Informalmente è possibile considerare l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con la relazione "minore o uguale di" ($\leq$) come un esempio di ordine parziale. In questo caso è possibile verificare che:

- Riflessività: Per ogni numero intero i, vale che $i \leq i$.
- Anti-simmetria: Se $i_1 \leq i_2$ e $i_2 \leq i_1$, allora $i_1 = i_2$.

- Transitività: Se $i_1 \leq i_2$ e $i_2 \leq i_3$, allora $i_1 \leq i_3$.

2.3 Powerset

Definizione 2.3: Insieme delle parti

Dato un insieme S, definito in Definizione 2.1, l'insieme delle parti (powerset) di S è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S, ed è indicato con $\mathcal{P}(S)$.
Dato un insieme S con $|S| = n$ elementi è possibile determinare che l'insieme delle parti di S ha $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ elementi.

Esempio 2.2: Alcuni esempi di powerset

Dato l'insieme vuoto $\emptyset$, il suo powerset è:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

ed ha $2^0 = 1$ elemento.
Dato un insieme $X = \{a, b\}$, il suo powerset è:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

ed ha $2^2 = 4$ elementi.
Dato l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, il suo powerset è:

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}) = \{\emptyset, \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \{0\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\}$$

ed ha un numero infinito di elementi.

Dato un powerset è possibile definire un ordine parziale $\subseteq$ su di esso e verificare che esso soddisfa le proprietà di un ordine parziale:

- **Riflessività:** $\forall X_1 \in \mathcal{P}(X). X_1 \subseteq X_1$
- **Anti-simmetria:** $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{P}(X). X_1 \subseteq X_2 \land X_2 \subseteq X_1 \Rightarrow X_1 = X_2$
- **Transitività:** $\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{P}(X). X_1 \subseteq X_2 \land X_2 \subseteq X_3 \Rightarrow X_1 \subseteq X_3$

Esercizio 2.1: Inclusione inversa su powerset

L'inclusione inversa su un powerset $\mathcal{P}(X)$ è un ordine parziale? Per verificare se $\supseteq$ è un ordine parziale su $\mathcal{P}(X)$, è necessario verificare se soddisfa le tre proprietà di un ordine parziale.

- **Riflessività:** $\forall X_1 \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow X_1 \supseteq X_1$, indica che ogni insieme è sovrainsieme di se stesso.
- **Anti-simmetria:** $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{P}(X), (X_1 \supseteq X_2 \land X_2 \supseteq X_1) \Rightarrow X_1 = X_2$, indica che se ogni elemento di X_1 è anche in X_2 e che ogni elemento di X_2 è anche in X_1, allora X_1 e

X_2 sono lo stesso insieme.

- **Transitività:** $\forall X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{P}(X), (X_1 \supseteq X_2 \wedge X_2 \supseteq X_3) \Rightarrow X_1 \supseteq X_3$, indica che se X_1 è un sovrainsieme di X_2, e X_2 è un sovrainsieme di X_3, allora X_1 è un sovrainsieme di X_3.

Poiché tutte e tre le proprietà sono soddisfatte, è possibile concludere che l'inclusione inversa $\supseteq$ è un ordine parziale su il powerset $\mathcal{P}(X)$. Quindi $\langle X, \supseteq \rangle$ è un poset.

2.4 Diagramma di Hasse

Il diagramma di Hasse è una rappresentazione grafica di un poset.

Sia $X = \{x, y, z\}$ un insieme (Definizione 2.1), ed un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ su di esso è possibile rappresentarlo tramite un diagramma di Hasse dove una linea che connette x e y indica che:

- $x \sqsubseteq y$
- $\nexists z \in X$ tale che $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$

È possibile trovare la presenza di più livelli nel diagramma di Hasse, dove un elemento x è posizionato più in alto di un elemento y se x è "immediatamente maggiore" di y.

Nota 2.1: Poset inverso

Un poset inverso è un poset ottenuto invertendo la relazione di ordine di un poset originale. Graficamente, questo si traduce nel riflettere il diagramma di Hasse rispetto ad un asse orizzontale, ovvero ruotando di 180 gradi il diagramma.

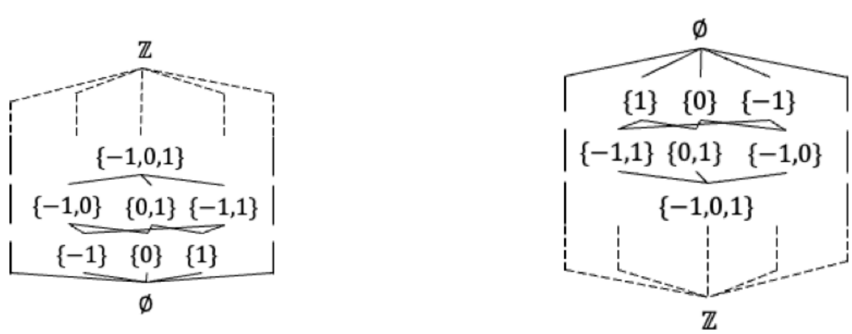


Figura 2: L'immagine illustra un esempio di diagramma di Hasse per un poset e il suo poset inverso.

2.5 Upper e lower bounds

Definizione 2.4: Upper bound and least upper bound

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ e un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è possibile dire che:

1. $y \in X$ è un upper bound di Y se $\forall y' \in Y, y' \sqsubseteq y$, ovvero se ogni elemento dell'insieme Y è minore o uguale a y.
2. y è l'upper bound più piccolo tra tutti gli upper bound di Y, ovvero $\forall y' \in UB(Y).y \sqsubseteq y'$, dove $UB(Y)$ è l'insieme di tutti gli upper bound di Y.

Definizione 2.5: Lower bound e greatest lower bound

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ e un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è possibile dire che:

1. $y \in X$ è un lowerbound di Y se $\forall y' \in Y, y \sqsubseteq y'$, ovvero se ogni elemento dell'insieme Y è maggiore o uguale a y.
2. y è il lowerbound più grande tra tutti i lowerbound di Y, ovvero $\forall y' \in LB(Y).y' \sqsubseteq y$, dove $LB(Y)$ è l'insieme di tutti i lowerbound di Y.

Esercizio 2.2: Lub e glb su powerset

Dato il Poset $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, e siano $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(X)$:

1. $S_1 \cup S_2$ è l'estremo superiore (lub) di $\{S_1, S_2\}$?
2. $S_1 \cap S_2$ è l'estremo inferiore (glb) di $\{S_1, S_2\}$?

Soluzione esercizio 1
$S_1 \cup S_2$ è l'estremo superiore (lub) di $\{S_1, S_2\}$?
Sia $L = S_1 \cup S_2$, che per essere lub deve soddisfare le condizioni elencate in Definizione 2.4 punto 1 e 2.
Punto 1:
$S_1 \subseteq L$ e $S_2 \subseteq L$.

Punto 2:
Sia U un qualsiasi insieme tale che $S_1 \subseteq U$ e $S_2 \subseteq U$. Allora U deve per contenere gli elementi di S_1 e S_2 deve essere proprio $(S_1 \cup S_2) \subseteq U$.

Soluzione esercizio 2
$S_1 \cap S_2$ è l'estremo inferiore (glb) di $\{S_1, S_2\}$?

2.6 Supremum e Infimum

Definizione 2.6: Supremum

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ e un sottoinsieme $S \subseteq X$ il supremum (o least upper bound) di S è l'elemento più piccolo tra tutti gli upper bound di S.

Definizione 2.7: Infimum

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ e un sottoinsieme $S \subseteq X$ l'infimum (o greatest lower bound) di S è l'elemento più grande tra tutti i lower bound di S.

2.7 Proprietà di lub e glb

Proposizione 2.1: Proprietà di lub e glb

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ è possibile definire:

- $\sqcup$ come il lub su X.
- $\sqcap$ come il glb su X.
- se $\sqcup$ e $\sqcap$ esistono sono unici.
- $\sqcup X$ esiste se e solo se X ha un elemento $\top$ ($\sqcup X = \top$).
- $\sqcap X$ esiste se e solo se X ha un elemento $\bot$ ($\sqcap X = \bot$).

2.8 Lattice

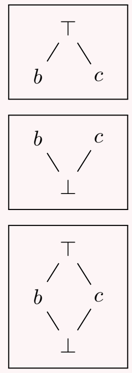
Definizione 2.8: Lattice

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$, esso è un reticolo (lattice) se soddisfa entrambe le seguenti proprietà:

- $\forall x, y \in X, \exists x \sqcup y$, ovvero per ogni coppia di elementi qualsiasi di X deve esistere il loro lub. Un poset che soddisfa questa proprietà è detto "join semi lattice".
- $\forall x, y \in X, \exists x \sqcap y$, ovvero per ogni coppia di elementi qualsiasi di X deve esistere il loro glb. Un poset che soddisfa questa proprietà è detto "meet semi lattice".

In un reticolo è presente la relazione d'ordine parziale $\sqsubseteq$ su due elementi $x, y \in X$, ovvero $x \sqsubseteq y$ se e solo se:

- $x \sqcup y = y$
- $x \sqcap y = x$



Join semi-lattice

Meet semi-lattice

Lattice

Figura 3: Rappresentazione grafica di Join semi-lattice, Meet semi-lattice e Lattice.

2.9 Set lattice

Definizione 2.9: Set lattice

Le operazioni insiemistiche definiscono una struttura di reticolo. Dato il poset $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, esso forma un reticolo rispetto alle operazioni di unione ($\cup$) e intersezione ($\cap$), denotato come:

$$\langle \mathcal{P}(X), \subseteq, \cup, \cap \rangle$$

Se l'insieme X è finito, allora il reticolo ha altezza finita.

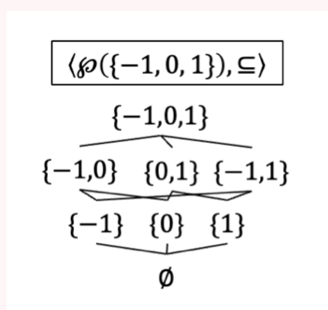


Figura 4: L'immagine illustra un esempio di reticolo su un poset finito.

Nota 2.2: Top e Bottom nei reticoli

Un reticolo non possiede necessariamente un elemento Top ($\top$) o un elemento Bottom ($\perp$). Ad esempio, il reticolo $\langle \mathbb{Z}, \leq, \max, \min \rangle$ non ha né un elemento massimo né un elemento minimo, poiché l'insieme dei numeri interi è illimitato in entrambe le direzioni.

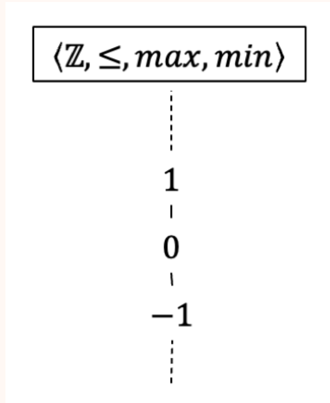


Figura 5: L'immagine illustra il reticolo su $\mathbb{Z}$, privo di elementi top e bottom.

2.10 Complete lattice

Definizione 2.10: Reticolo completo

Un reticolo $\langle X, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap \rangle$ è detto completo se:

- Ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ ha un lub (Definizione 2.4) in X.
- Ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ ha un glb (Definizione 2.5) in X.

quindi si denota come:

$$\langle X, \sqsubseteq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap \rangle$$

Nota 2.3: Lub del sottoinsieme vuoto

Se ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ ha un lub in X, allora anche il sottoinsieme vuoto $\emptyset$ deve avere un lub in X. In questo caso il lub del sottoinsieme vuoto è l'elemento bottom $\bot$ del reticolo.

Esempio 2.3: Esempi di reticolo completo e non completo

Considerando l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con la relazione "minore o uguale di" ($\leq$), si può osservare che

$$\langle \mathbb{Z}, \leq, \min, \max \rangle$$

è un reticolo ma non è completo. Infatti, non esiste un elemento top ($\top$) in $\mathbb{Z}$, poiché non esiste un numero intero massimo.
Se all'insieme dei numeri interi si aggiungono gli elementi $+\infty$ e $-\infty$, si ottiene l'insieme esteso $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$. In questo caso, il reticolo

$$\langle \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \leq, \min, \max \rangle$$

diventa un reticolo completo, poiché ora esistono sia un elemento top ($+\infty$) che un elemento bottom ($-\infty$).

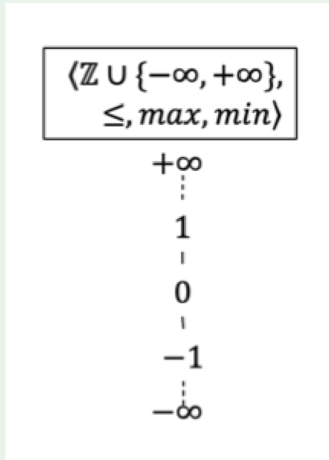


Figura 6: L'immagine illustra il reticolo su $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Proposizione 2.2: Proprietà di un reticolo completo

Un reticolo completo possiede le seguenti proprietà:

- reticolo completo $\langle X, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap \rangle$ ha un elemento top $\top$ e un elemento bottom $\perp$ e si denota come
$$\langle X, \sqsubseteq, \perp, \top, \sqcup, \sqcap \rangle$$
- I reticoli finiti sono completi.
- $\sqcup$ induce $\sqcap : \sqcap S = \sqcup\{y \mid \forall x \in S.y \sqsubseteq x\}$
- $\sqcap$ induce $\sqcup : \sqcup S = \sqcap\{y \mid \forall x \in S.x \sqsubseteq y\}$

2.11 Relations

Definizione 2.11: Prodotto cartesiano

Dati due insiemi(Definizione 2.1) X e Y, il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (x, y) dove il primo elemento appartiene a X e il secondo a Y .

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \land y \in Y\}$$

Definizione 2.12: Relazione

Una relazione R tra due insiemi X e Y è definita come un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano (Definizione 2.11):

$$R \subseteq X \times Y$$

Nota 2.4: Notazione per le relazioni

Dato una relazione $R \subseteq X \times Y$, è possibile indicare che un elemento $x \in X$ è in relazione con un elemento $y \in Y$ tramite due notazioni:

- $(x, y) \in R$, ovvero tramite relazione insiemistica.
- $x\ R\ y$, ovvero tramite notazione infissa.

Nota 2.5: Ordine parziale come relazione

Un ordine parziale $\sqsubseteq$ (Definizione 2.2) è un caso particolare di relazione definita sullo stesso insieme X. Formalmente, $\sqsubseteq$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$ ($\sqsubseteq \subseteq X \times X$). A differenza di una relazione generica, l'ordine parziale deve soddisfare le proprietà di riflessività, anti-simmetria e transitività (Definizione 2.2).

2.12 Functions (or maps)

Le funzioni (functions), sono un tipo particolare di relazione, e sono fondamentali per riuscire a modellare gli stati di un programma.

Definizione 2.13: Funzione

Una funzione f tra due insiemi X e Y è un particolare tipo di relazione $R \subseteq X \times Y$ che soddisfa la proprietà di unicità dell'immagine.
Formalmente, per ogni elemento x nel dominio, esiste al massimo un elemento y nel codominio tale che $(x, y) \in f$:

$$\forall (x, y) \in f, \nexists (x', y') \in f.(x = x' \land y \neq y')$$

Una funzione è definita al massimo una volta su un dato input.

Esempio 2.4: Cerchio su un piano cartesiano

Un cerchio su un piano cartesiano non rappresenta una funzione, poiché un singolo valore di x può essere associato a due valori distinti di y (uno sopra l'asse x e uno sotto). Questo viola la proprietà di unicità dell'immagine definita per le funzioni.

Nota 2.6: Non tutte le relazioni sono funzioni

Un ordine parziale (Definizione 2.2) non è generalmente una funzione, poiché un elemento può essere minore o uguale a molti altri elementi (uno-a-molti).

Definizione 2.14: Notazione delle funzioni

Dato $f : X \to Y$, dove X è il dominio e Y è il codominio:

- Notazione estensionale: Una funzione definita su punti specifici si scrive come:

$$f = [x_0 \mapsto y_0, x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n]$$

  che è equivalente all'insieme di coppie $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

- Lambda notazione: Si utilizza $\lambda x.\mathit{espressione}$ per definire una funzione anonima. Ad esempio $\lambda x.f(x) \equiv f$.

2.12.1 Monotonia, Embedding e Isomorfismo

Definizione 2.15: Funzioni monotone, embedding ordinato e isomorfe

Dati due posets $\langle X, \sqsubseteq_X \rangle$ e $\langle Y, \sqsubseteq_Y \rangle$, e una funzione $f : X \to Y$, è possibile dire che:

- La funzione f è monotona se $x_1 \sqsubseteq_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \sqsubseteq_Y f(x_2)$.
- La funzione f è un embedding ordinato se $x_1 \sqsubseteq_X x_2 \iff f(x_1) \sqsubseteq_Y f(x_2)$.
- La funzione f è un isomorfa se è un embedding ordinato ed è suriettiva, ovvero: $\forall y \in Y, \exists x \in X. f(x) = y$.

Esempio 2.5: Esempio di funzione monotona, embedding ordinato e suriettiva

Data $f : \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \to \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, definita come $f(x) = x + 1$, è possibile osservare che:

- La funzione è monotona.
- La funzione è un embedding ordinato.
- La funzione è suriettiva.

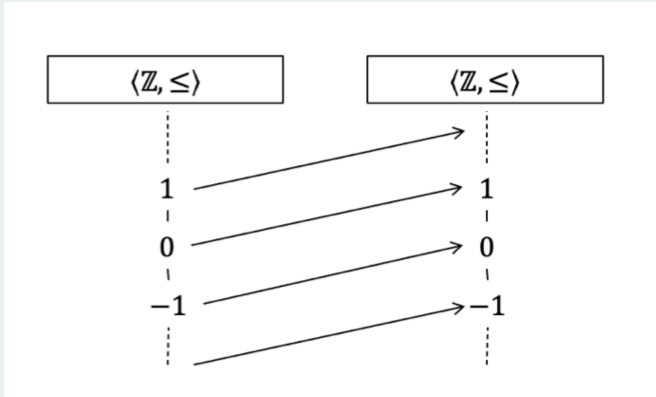


Figura 7: L'immagine illustra la funzione $f(x) = x + 1$ come monotona, embedding ordinato e suriettiva.

Esempio 2.6: Esempio di funzione monotona ma che non è un embedding

Data $f : \langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq \rangle \to \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, definita come $f(X) = \max(X)$, è possibile osservare che:

- La funzione è monotona.
- La funzione non è un embedding.

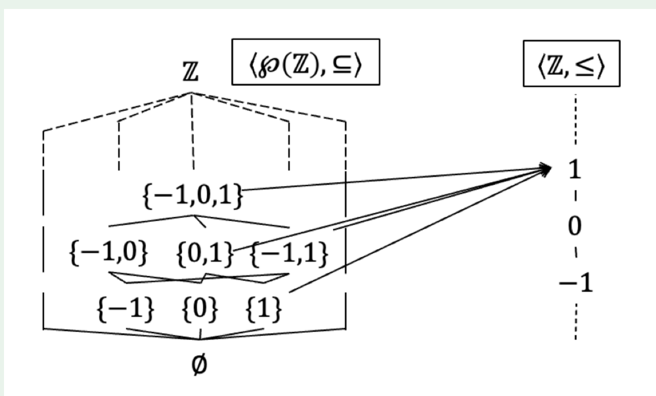


Figura 8: L'immagine illustra la funzione $f(X) = \max(X)$ come monotona ma non un embedding.

2.12.2 Funzioni che preservano join e meet

Dati due reticoli $\langle X, \sqsubseteq_X, \sqcup_X, \sqcap_X \rangle$ e $\langle Y, \sqsubseteq_Y, \sqcup_Y, \sqcap_Y \rangle$, e una funzione $f : X \to Y$, è possibile dire che:

- La funzione f preserva i join se $f(x_1 \sqcup_X x_2) = f(x_1) \sqcup_Y f(x_2)$.

- La funzione f preserva i meet se $f(x_1 \sqcap_X x_2) = f(x_1) \sqcap_Y f(x_2)$.

Nota 2.7: Mantenimento della Monotonia

Una funzione che preserva i join o i meet è monotona, ma una funzione che è monotona non necessariamente preserva i join o i meet.

2.13 Chains

Definizione 2.16: Catena

Dato un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$, una catena (chain) S se tutti gli elementi contenuti sono completamente ordinati, ovvero:

$$\forall x, y \in S. x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$$

Esempio 2.7: Esempio di catena

Dato un poset $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq \rangle$ con reticolo rappresentato nell'immagine sottostante (9), esempi di catene sono:

- $\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$
- $\{\{0\}, \{-1, 0, 1\}\}$

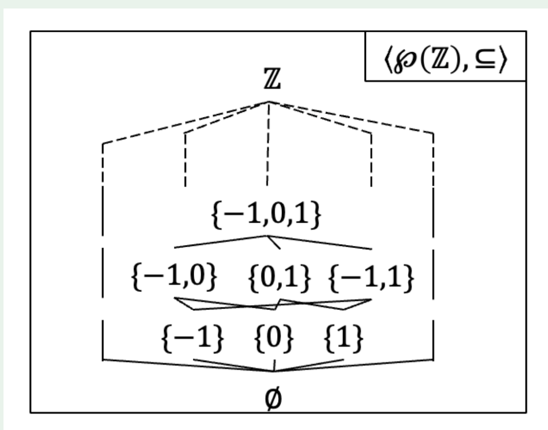


Figura 9: L'immagine illustra un reticolo su $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

2.13.1 Ascending Chain Condition (ACC)

Definizione 2.17: Catena Ascendente

Una catena ascendente è una sequenza di elementi $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indicizzata dai numeri naturali tali che:

$$i \leq j \implies l_i \sqsubseteq l_j$$

Ovvero $l_0 \sqsubseteq l_1 \sqsubseteq l_2 \sqsubseteq \dots$.

Definizione 2.18: Ascending Chain Condition (ACC)

Un poset soddisfa la Ascending Chain Condition (ACC) se ogni catena ascendente infinita si stabilizza (non è strettamente crescente per sempre).
Matematicamente, una catena (l_n) si stabilizza se:

$$\exists k \geq 0. \forall j \geq k. l_k = l_j$$

Questo significa che, dopo un certo indice k, tutti gli elementi successivi sono uguali a l_k (il punto fisso della sequenza).

Esempio 2.8: Esempio di catena ascendente infinita non è strettamente crescente

Un esempio di catena ascendente infinita non strettamente crescente è la seguente:

$$\exists k \geq 0. \forall j \geq k. l_k = l_j$$

Perché dopo un certo numero di passi k, tutti gli elementi successivi della catena sono uguali a l_k. Ovvero la catena si stabilizza.

2.14 Mappe continue

Definizione 2.19: Mappa continua

Dati due reticoli (o poset) $\langle X, \sqsubseteq_X, \sqcup_X, \sqcap_X \rangle$ e $\langle Y, \sqsubseteq_Y, \sqcup_Y, \sqcap_Y \rangle$ e una funzione $f : X \to Y$ (Definizione 2.13), essa è detta continua se per ogni catena $C \subseteq X$ (Definizione 2.16) tale che $\bigsqcup_X C$ esiste, valgono le seguenti condizioni:

- $\bigsqcup_Y f(C)$ esiste;
- $f(\bigsqcup_X C) = \bigsqcup_Y f(C)$.

Nota 2.8: Utilità delle mappe continue

Le mappe continue sono fondamentali nell'analisi statica perché permettono di applicare il Teorema di Kleene per calcolare i punti fissi (fixpoints) tramite iterazione.

2.15 Fixpoint

L'analisi statica riduce spesso il problema della verifica di un programma alla ricerca della soluzione di un sistema di equazioni ricorsive. La soluzione di tali equazioni corrisponde al concetto matematico di punto fisso.

Definizione 2.20: Punto Fisso

Dato un insieme X e una funzione $f : X \to X$:

- Un elemento $x \in X$ è un punto fisso di f se $f(x) = x$.
- L'insieme di tutti i punti fissi di f è denotato come $Fix(f) = \{x \mid f(x) = x\}$.

In un poset $\langle X, \sqsubseteq \rangle$, sono interessanti due tipi particolari di punti fissi:

- Least Fixpoint (lfp), ovvero il punto fisso più piccolo.

$$\forall y \in Fix(f).x \sqsubseteq y$$

- Greatest Fixpoint (gfp), ovvero il punto fisso più grande.

$$\forall y \in Fix(f).x \sqsupseteq y$$

2.15.1 Iterazioni di una funzione

Per calcolare un punto fisso, spesso si ricorre all'applicazione ripetuta della funzione.

Definizione 2.21: Iterazioni

Le iterate di una funzione $f : X \to X$ a partire da un elemento x sono definite per induzione come:

- $f^0(x) = x$
- $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$

Nota 2.9: Stabilizzazione

Se l'insieme X è finito, la sequenza delle iterazioni $f^0, f^1, \ldots$ deve necessariamente stabilizzarsi (raggiungere un punto fisso o entrare in un ciclo) in al massimo $|X|$ passi. Formalmente:

$$\forall k \geq |X|.\exists n < |X|.f^k(x) = f^n(x)$$

Se X è infinito, la sequenza potrebbe non terminare mai.

2.16 Teoremi di Punto Fisso

Esistono due teoremi principali che garantiscono l'esistenza (e talvolta la costruttibilità) dei punti fissi. La scelta del teorema dipende dalle proprietà della funzione f (Definizione 2.15)

Teorema 2.1: Teorema di Knaster-Tarski

Sia $\langle X, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap \rangle$ un reticolo e sia $f : X \to X$ una funzione monotona. Allora:

1. $\langle Fix(f), \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap \rangle$ è un reticolo completo.
2. Il least fixpoint (lfp) è dato dal meet di tutti i "post-fixpoints", ovvero $lfp(f) = \sqcap\{l \mid l \sqsupseteq f(l)\}$
3. Il greatest fixpoint (gfp) è dato dal join di tutti i "pre-fixpoints", ovvero $gfp(f) = \bigsqcup\{l \mid l \sqsubseteq f(l)\}$

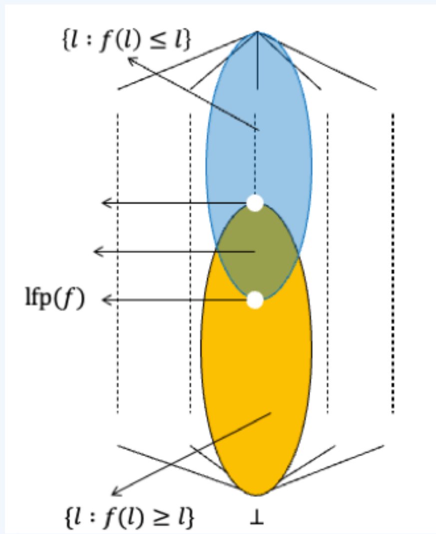


Figura 10: L'immagine illustra un esempio grafico del Teorema di Knaster-Tarski.

Teorema 2.2: Teorema di Kleene

Sia $\langle X, \sqsubseteq, \perp, \top, \sqcup, \sqcap \rangle$ un reticolo completo e sia $f : X \to X$ una funzione continua (Definizione 2.15). Allora f ha un least fixpoint che può essere calcolato costruttivamente come il limite della catena ascendente che parte dal bottom ($\perp$):

$$lfp(f) = \bigsqcup_{n \geq 0} f^n(\perp)$$

Nota 2.10: Confronto tra i Teoremi

I due teoremi di punto fisso presentano differenze chiave:

- Knaster-Tarski: Richiede solo la monotonia. Questo teorema è più generale ma non fornisce un algoritmo costruttivo (dice solo "esiste ed è uguale all'intersezione di . . . ").

- Kleene: Richiede la continuità (condizione più forte). Questo teorema fornisce un algoritmo iterativo $(f(\perp), f(f(\perp)), \dots)$ per calcolare il risultato.

3 Modellazione dei programmi

L'obiettivo dell'analisi statica è certificare che un programma sia sicuro rispetto a determinati errori, come ad esempio la divisione per zero.

3.1 Poset nell'analisi statica

L'idea fondamentale è calcolare i possibili valori che una variabile può assumere in ogni punto del programma, considerando tutte le possibili esecuzioni. Per fare questo è possibile utilizzare i reticoli (Definizione Definizione 2.8).

Esempio 3.1: Esempio di reticolo su un programma

Considerando il programma seguente:

```
1: i = read ();
2 if ( i != 0 )
3   j = 5 / i ;
4 else
5   j = 0;
6 return;
```

e definendo il reticolo dei valori interi come $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq, \cup, \cap \rangle$ è possibile calcolare i possibili valori delle variabili i e j in ogni punto del programma.

Program point	**Valori**
1	$i = \{\},\ j = \{\}$
2	$i = \mathbb{Z},\ j = \{\}$
3	$i = \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ j = \{5/i\}$
5	$i = \{0\},\ j = \{0\}$
6	$i = \mathbb{Z},\ j = \{-5, -2, -1, 0, 1, 2, 5\}$

Per ottenere i valori di j al punto 6, è stato necessario calcolare l'unione dei valori di j provenienti dai punti 3 e 5, utilizzando l'operazione di least upper bound (operazione di join, unione insiemistica in questo caso).
Per ottenere i valori di i al punto 2, è stato necessario considerare che la funzione `read()` può restituire qualsiasi valore intero. Dopo di che tramite un'operazione di "filtro" $filter(i \neq 0)$ è possibile restringere i valori di i per entrare nel ramo vero dell'if. Per il calcolo del punto 3, invece è stato necessario applicare l'operazione di intersezione tra i valori di i al punto 2 e il filtro $filter(x \neq 0)$ per ottenere i valori di i validi per quel ramo.
Ipotizzando che la funzione `read()` possa restituire valori interi in $\{-1, 0, 1\}$, è possibile riscrivere il codice del programma di esempio come:

```
1: i = {-1, 0, 1} ;
2 if ( i != 0 )
```

```
3   j = 5 / i ;
4 else
5   j = 0;
6 return;
```

Di conseguenza i valori delle variabili in ogni punto del programma diventano:

Program point	**Valori**
1	$i = \{\},\ j = \{\}$
2	$i = [-1, 1],\ j = \{\}$
3	$i = [-1, -1] \cup [1, 1],\ j = [-5, 5]$
5	$i = [0, 0],\ j = [0, 0]$
6	$i = [-1, 1],\ j = [-5, 5]$

3.2 Punti fissi

Quando il programma contiene dei cicli (come `while`), il numero di esecuzioni possibili diventa arbitrario o infinito. Per analizzare queste strutture, utilizziamo il concetto di punto fisso (Definizione Definizione 2.20). L'analisi procede iterativamente accumulando informazioni (tramite il Join $\cup$) finché lo stato non si stabilizza.

Esempio 3.2: Analisi di un ciclo su dominio infinito (Non terminazione)

Considerando il programma seguente che presenta un ciclo infinito che incrementa un contatore:

```
1: i = 0;
2: while (?)
3:   i++;
4: ...
```

Utilizzando il reticolo $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq, \cup, \cap \rangle$, è possibile calcolare i valori di i al punto 2 (l'ingresso del ciclo). Lo stato al punto 2 è definito come l'unione del valore iniziale (da 1) e del valore di ritorno dal ciclo (da 3):

$$Val(2) = \{0\} \cup (Val(3) + 1)$$

Passo passo:

Iterazione	**Valori al Punto 2**	**Valori al Punto 3**
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{0\}$	$\emptyset$
2	$\{0\}$	$\{0\}$
3	$\{0\} \cup \{0+1\} = \{0,1\}$	$\{0\}$
4	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
5	$\{0,1\} \cup \{1+1\} = \{0,1,2\}$	$\{0,1\}$
...	...	...

Si nota che l'insieme continua a crescere ($\{0,1,2,3,\dots\}$) e, poiché il reticolo $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ha altezza infinita, l'algoritmo non raggiunge mai un punto fisso in tempo finito.

3.3 IMP

IMP è un linguaggio imperativo minimale che supporta assegnamenti, sequenze, condizionali e cicli.

3.3.1 Sintassi

La sintassi del linguaggio è definita dalle seguenti produzioni grammaticali:

- **Espressioni aritmetiche (e):**
$$e ::= x \mid n \mid e_1 \ op_a \ e_2$$
dove x è una variabile, $n \in \mathbb{Z}$ è un intero, e $op_a \in \{+, -, *, \div\}$.
- **Espressioni booleane (b):**
$$b ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \neg b \mid b_1 \ op_b \ b_2 \mid e_1 \ op_c \ e_2$$
dove $op_b \in \{\&\&, ||\}$ (logici) e $op_c \in \{==, <, >, \leq, \geq\}$ (confronto).
- **Statement (s):**
$$s ::= x := e; \mid \textbf{skip} \mid s_1 s_2 \mid \textbf{if } b\textbf{then } s_1\textbf{else } s_2 \mid \textbf{while } b\textbf{do } s_1$$

3.3.2 Semantica concreta

3.4 Semantica delle tracce

Per analizzare il comportamento di un programma, è necessario definire cosa significa "eseguirlo". La semantica di traccia modella l'esecuzione come una sequenza (traiettoria) di stati nel tempo.

Definizione 3.1: Traccia

Una traccia $\tau \in X^\infty$ è una sequenza di stati che rappresenta una singola evoluzione del programma. Le tracce possono essere:

- **Finite:** L'esecuzione termina in uno stato finale.
- **Infinite:** L'esecuzione non termina (es. ciclo infinito).
- **Parziali:** Rappresentano un prefisso dell'esecuzione fino a un certo punto intermedio.

Definizione 3.2: Semantica delle tracce

È possibile modellare la semantica concreta, ovvero l'insieme di tutte le possibili esecuzioni, utilizzando un reticolo definito come:

$$\langle \mathcal{P}(X^{\infty}), \subseteq, \cup, \cap \rangle$$

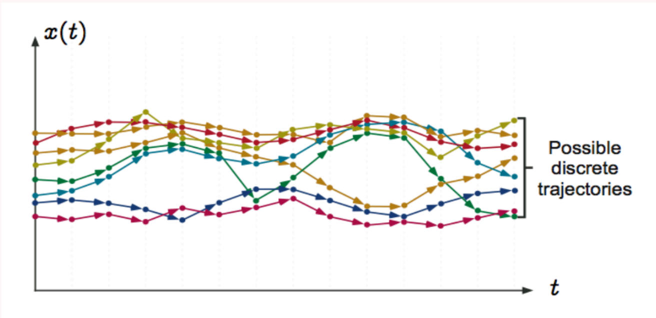


Figura 11: L'immagine illustra l'insieme delle tracce di un programma.

Nota 3.1: Calcolo della semantica

La semantica del programma viene calcolata come il least fixpoint (lfp) di una funzione che costruisce le tracce passo dopo passo:

1. Si parte dalle tracce di lunghezza 1 (stati iniziali).
2. Si applica iterativamente la funzione di transizione per estendere le tracce parziali.
3. Si uniscono ($\cup$) i risultati fino a raggiungere il punto fisso.

Questo processo cattura sia le esecuzioni che terminano, sia quelle che divergono (loop infiniti).

3.5 Calcolo del least fixpoint

Il calcolo della semantica di un programma P si riduce alla ricerca del least fixpoint (lfp) della sua funzione semantica F_P.

Proposizione 3.1: Procedura Iterativa

Il least fixpoint si calcola iterando la funzione F_P a partire dall'elemento *bottom* ($\perp$) del reticolo, procedendo dal "basso verso l'alto":

$$lfp(F_P) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} F_P^n(\perp)$$

La sequenza delle iterazioni costruisce progressivamente la semantica:

- Passo 0: $F^0(\perp) = \perp$ (stato iniziale vuoto o non inizializzato).
- Passo 1: $F^1(\perp) = F(\perp)$ (prime esecuzioni parziali, es. stati iniziali).
- Passo k: $F^k(\perp)$ (insieme delle esecuzioni parziali di lunghezza fino a k).

Il processo termina quando si raggiunge un punto fisso, ovvero quando $F^{k+1}(\perp) = F^k(\perp)$.

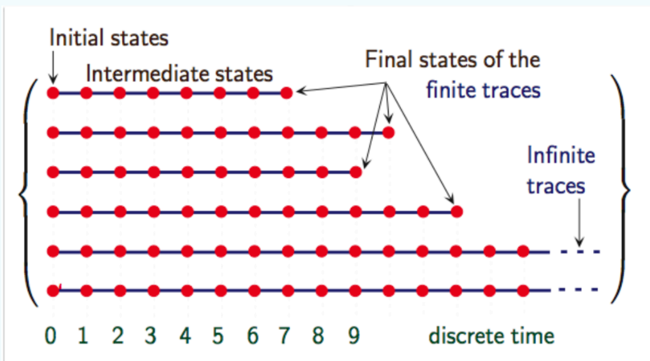


Figura 12: L'immagine illustra l'insieme delle tracce finite e infinite di un programma, con gli stati iniziali, stati intermedi e stati finali.

Nota 3.2: Significato delle iterazioni

In questo modo, ad ogni passo dell'iterazione otteniamo un insieme di esecuzioni parziali. L'unione di tutte queste iterazioni fino al punto fisso ci fornisce la semantica completa del programma, che include sia le tracce finite che quelle infinite.

4 Analisi dataflow

4.1 CFGs

Nelle analisi di tipo dataflow i programmi vengono rappresentati come control flow graph (CFG), dove i nodi rappresentano gli statement del programma e gli archi rappresentano i possibili flussi di controllo tra di essi.

Esempio 4.1: CFG di un programma semplice

Consideriamo il seguente programma:

```
1 y = a - b ;
2 x = y + b ;
3 while ( y > a + b )
4   y = y - x * x;
```

La sua rappresentazione come CFG è la seguente:

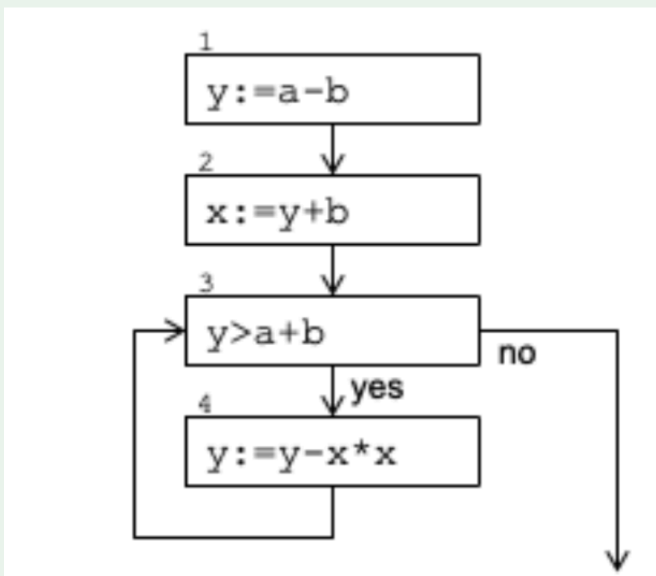


Figura 13: L'immagine illustra il CFG del programma di esempio.

Definizione 4.1: Struttura di un CFG

Dato un programma P, il suo control flow graph (CFG) è formato da:

- Un insieme di nodi (blocchi) identificati da $i \in \mathbb{N}$
- Un insieme di archi rappresentati come coppie $(i_1, i_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dove i_1, i_2 sono nodi del CFG.

Dato un CFG, è possibile definire:

- $nodes(G)$ come l'insieme di tutti gli indici dei blocchi in G.
- $stmt(G, i)$ lo statement associato al blocco i in G.
- $edges(G) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ come l'insieme di tutti gli archi in G.

4.2 Analisi di dataflow

Le analisi di dataflow sono tecniche tradizionali utilizzate principalmente per le ottimizzazioni nei compilatori. Queste analisi si basano sulla rappresentazione del programma tramite CFG e utilizzano un approccio formale basato su sistemi di equazioni.

Le equazioni vengono costruite definendo le relazioni tra gli stati entranti (*entry*) e uscenti (*exit*) di ogni blocco del CFG.

Nota 4.1: Scopo dell'analisi

La proprietà di interesse è solitamente semplice e orientata a ottimizzare l'esecuzione a runtime (ad esempio, evitando di calcolare due volte la stessa espressione).

Nota 4.2: Classificazione delle analisi di dataflow

Le analisi dataflow classiche possono essere classificate secondo due criteri principali:

- **Direzione del flusso**: indica se l'analisi procede seguendo il flusso di controllo del programma (**forward**) o contro di esso (**backward**).
- **Semantica della proprietà**: indica se l'analisi determina ciò che **può** accadere (**may/possible**) o ciò che **deve** accadere (**must/definite**).

Il tipo di classificazione determina importanti aspetti formali:

- **Forward vs Backward**:
  - Forward: $entry(i)$ dipende da $exit(j)$ dei predecessori
  - Backward: $exit(i)$ dipende da $entry(j)$ dei successori
- **May vs Must**:
  - May (possible): si utilizza l'unione ($\cup$) al join point (basta che la proprietà valga lungo *un* cammino)
  - Must (definite): si utilizza l'intersezione ($\cap$) al join point (la proprietà deve valere lungo *tutti* i cammini)

Queste caratteristiche determinano la struttura del reticolo e l'operatore di join utilizzato nell'analisi.

4.2.1 Available expressions

Definizione 4.2: Available expressions

"For each program point, which expressions must have already been computed, and not later modified, on all paths to the program point"
Formalmente un'espressione e è disponibile in un punto del programma p se e solo se e è stata calcolata lungo ogni cammino che porta a p e nessuna delle variabili che occorrono in e è stata ridefinita dopo il calcolo di e.

Nota 4.3: Obiettivi dell'analisi

Quest'analisi è un'analisi **forward** e **must** che ha come obiettivi principali:

- Eliminazione di sottoespressioni comuni (Common Subexpression Elimination): evitare di ricalcolare espressioni il cui valore è già disponibile.
- Allocazione ottimale dei registri: memorizzare le espressioni più frequentemente utilizzate in registri temporanei.

Dominio dell'analisi Sia AE l'insieme di tutte le espressioni aritmetiche non banali che compaiono nel programma. Lo stato dell'analisi in ogni punto del programma è un elemento di $\mathcal{P}(AE)$, ovvero un sottoinsieme delle espressioni aritmetiche.

Definizione 4.3: Funzioni ausiliarie

È possibile definire le seguenti funzioni ausiliarie:

- $AExp : Expr \to \mathcal{P}(AE)$ restituisce l'insieme delle espressioni aritmetiche non banali contenute in un'espressione e.
- $AExpB : BExpr \to \mathcal{P}(AE)$ restituisce l'insieme delle espressioni aritmetiche non banali contenute in un'espressione booleana b.
- $FV : AE \to \mathcal{P}(Var)$ restituisce l'insieme delle variabili libere (free variables) che occorrono in un'espressione a.

Funzioni di trasferimento Per ogni statement del programma, è necessario definire le funzioni *gen* e *kill* che descrivono come lo statement modifica l'insieme delle espressioni disponibili.

Definizione 4.4: Gen e Kill

Considerando un assegnamento $x := e$, dove x è una variabile ed e un'espressione.

- **Killed**: Quando x viene assegnata, tutte le espressioni che contengono x non sono più valide (vengono "uccise") perché il valore di x è cambiato.

$$kill(x := e) = \{a \in AE \mid x \in FV(a)\}$$

Dove $FV(a)$ è l'insieme delle variabili libere in a.

- **Gen**: Quando x viene assegnata, l'espressione e calcolata diventa disponibile, a condizione che x non compaia nell'espressione stessa (altrimenti il valore appena calcolato verrebbe subito invalidato dall'assegnamento stesso).

$$gen(x := e) = \{a \in AE \mid x \notin FV(a)\}$$

Equazioni di flusso Per ogni blocco $i \in nodes(G)$ del CFG, definiamo lo stato entrante $entry(i)$ e lo stato uscente $exit(i)$.

Definizione 4.5: Stato entrante

Lo stato entrante di un blocco i è dato dall'intersezione degli stati uscenti di tutti i suoi predecessori:

$$entry(i) = \bigcap\{exit(j) \mid (j,i) \in edges(G)\}$$

la scelta dell'intersezione ($\cap$) è determinata dalla natura **must** dell'analisi: un'espressione è disponibile solo se è disponibile lungo tutti i cammini che raggiungono il blocco.

Nota 4.4: Blocco iniziale

Se i non ha predecessori (blocco iniziale), allora $entry(i) = \emptyset$.

Definizione 4.6: Stato uscente

Lo stato uscente di un blocco i è calcolato applicando la funzione di trasferimento allo stato entrante:

$$exit(i) = (entry(i) \setminus kill(stmt(G,i))) \cup gen(stmt(G,i))$$

Ovvero:

1. Si parte dalle espressioni disponibili in ingresso: $entry(i)$
2. Si rimuovono le espressioni invalidate: $\setminus kill(stmt(G,i))$
3. Si aggiungono le espressioni generate: $\cup gen(stmt(G,i))$

Da queste funzioni è possibile riscrivere le funzioni gen e $kill$ in modo più generale:

- $kill(x := \texttt{e}) = \{a \in AE \mid x \in FV(\texttt{a})\}$
- $gen(x := \texttt{e}) = \{a \in AE \mid x \notin FV(\texttt{a})\}$

Definizione 4.7: Funzione di Trasferimento

In un'analisi dataflow, una funzione di trasferimento f_i è una funzione matematica associata a ciascun blocco (o istruzione) i del CFG che descrive come l'esecuzione di quel blocco trasforma lo stato dell'analisi.

Formalmente, dato un reticolo completo L che rappresenta il dominio dell'analisi, la funzione di trasferimento mappa lo stato in ingresso nello stato in uscita:

$$f_i : L \to L$$

$$exit(i) = f_i(entry(i))$$

Nelle analisi dataflow classiche (es. available expressions), la funzione di trasferimento assume tipicamente la forma:

$$f_i(x) = (x \setminus kill_i) \cup gen_i$$

dove:

- x è lo stato in ingresso ($entry(i)$).
- $kill_i$ è l'insieme degli elementi invalidati dall'istruzione i.
- gen_i è l'insieme degli elementi generati dall'istruzione i.

Nota 4.5: Monotonia

Affinché l'algoritmo iterativo (worklist) converga sicuramente a un punto fisso (terminazione), è richiesto che le funzioni di trasferimento siano monotone rispetto all'ordinamento del reticolo $\sqsubseteq$. Ovvero:

$$x \sqsubseteq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Le funzioni basate su *gen* e *kill* soddisfano sempre questa proprietà.

4.2.2 Altre analisi di dataflow

Come accennato nella nota (Nota 4.2), le analisi di dataflow possono essere classificate secondo vari criteri. In aggiunta all'analisi delle available expressions, esistono numerose altre analisi di dataflow utilizzate per diversi scopi nell'ottimizzazione del codice. Alcuni esempi di altre analisi viste nel corso di linguaggi interpreti e compilatori di dataflow includono:

- **Live variables**
- **Reaching definitions**
- **Very busy expressions**

L'immagine seguente classifica alcune di queste analisi in base alla direzione del flusso e alla semantica della proprietà

	Possible	**Definite**
Foward	**Reaching definitions** *"For each program point, which assignments **may** have been made and not overwritten, when program execution reaches this point along **some path**."*	**Available expressions** *"For each program point, which expressions **must** have already been computed, and not later modified, on **all paths** to the program point"*
Backword	**Live variables** *"For each program point, which variables **may** be live at the exit from the program point. A variable is live if its content will be read in **some path** starting from the program point."*	**Very busy expressions** *"For each program point, which expressions **must** be very busy at the exit from the point. An expression is very busy if it will be always used in **all paths** starting from a label before any of the variables occurring in it are redefined."*

Figura 14: L'immagine illustra la classificazione di alcune analisi di dataflow.

Definizione 4.8: Reaching definitions

"For each program point, which assignments may have been made and not overwritten, when program execution reaches this point along some path"
Un'assegnazione $d : x := e$ al blocco i raggiunge (reaches) un punto del programma p se esiste almeno un cammino dal blocco i al punto p lungo il quale la variabile x non viene ridefinita.
Quest'analisi è di tipo **forward** e **may**; l'informazione si propaga in avanti nel CFG ed è sufficiente che un'assegnazione raggiunga il punto lungo almeno un cammino.

Definizione 4.9: Live variables

"For each program point, which variables may be live at the exit from the program point. A variable is live if its content will be read in some path starting from the program point"
Una variabile x è viva (live) in un punto del programma p se esiste almeno un cammino che parte da p lungo il quale il valore di x viene utilizzato prima di essere ridefinito.
Quest'analisi è di tipo **backward** e **may**; l'informazione si propaga all'indietro nel CFG (dai successori ai predecessori) ed è sufficiente che la variabile sia utilizzata lungo almeno un cammino futuro.

Definizione 4.10: Very busy expressions

"For each program point, which expressions must be very busy at the exit from the point. An expression is very busy if it will be always used in all paths starting from a label before any of the variables occurring in it are redefined"
Un'espressione e è molto impegnativa (very busy) in un punto del programma p se lungo ogni cammino che parte da p l'espressione e viene calcolata prima che qualsiasi variabile che occorre in e venga ridefinita.
Quest'analisi è di tipo **backward** e **must**; l'informazione si propaga all'indietro nel CFG e l'espressione deve essere utilizzata lungo tutti i cammini futuri.

4.3 I reticoli nelle analisi di dataflow

Tutte le analisi di dataflow discusse operano su dei reticoli completi (Definizione 2.10).

Definizione 4.11: Reticolo delle analisi dataflow

Ogni analisi dataflow può essere definita come una tupla che rappresenta un reticolo completo (Definizione 2.10). Per le analisi viste, i reticoli sono:

1. **Available expressions**: $\langle \mathcal{P}(AE), \supseteq, \emptyset, AE, \cap, \cup \rangle$.
2. **Live variables**: $\langle \mathcal{P}(Var), \subseteq, \emptyset, Var, \cup, \cap \rangle$.
3. **Reaching definitions**: $\langle \mathcal{P}(Def), \subseteq, \emptyset, Def, \cup, \cap \rangle$.
4. **Very busy expressions**: $\langle \mathcal{P}(BE), \supseteq, \emptyset, BE, \cup, \cap \rangle$.

Affinché l'algoritmo iterativo termini sicuramente, il reticolo deve soddisfare la ascending chain condition (Definizione 2.18).

Nota 4.6: Modellazione analisi statiche

Non tutte le analisi statiche possono essere modellate come analisi di dataflow.

4.4 Analisi distributive

Le analisi dataflow classiche appartengono alla categoria delle analisi distributive Questa proprietà matematica è fondamentale perché garantisce che l'analisi possa essere risolta con algoritmi standard efficienti, ma ne limita anche la potenza espressiva.

Definizione 4.12: Distributività

Sia $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq, \emptyset, X, \cup, \cap \rangle$ un reticolo completo (Definizione 2.10) e $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una funzione (Definizione 2.13). f si dice **distributiva** se:

$$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$$

per ogni $x, y \in \mathcal{P}(X)$.

Nota 4.7: Intuizione

Quanto descritto nella definizione sopra (Definizione 4.12) in termini intuitivi, significa che il risultato dell'analisi è identico sia che si uniscano le informazioni prima di eseguire l'istruzione, sia che le si uniscano dopo averla eseguita su ogni singolo ramo.

Nota 4.8: La potenza delle analisi distributive

Le analisi distributive tengono traccia di **come** la computazione avviene (es. variabili che sono assegnate ed espressioni che vengono calcolate) all'interno del programma e non del **cosa** il programma calcola.
Per questo motivo le analisi complesse non sono generalmente distributive e molto spesso non possono essere modellate come analisi di dataflow.

4.4.1 Constant propagation

Un esempio di analisi non distributiva è la constant propagation.

Definizione 4.13: Constant propagation

" For each program point, whether or not a variable has a constant value whenever an execution reaches that point "
Un reticolo per la constant propagation può essere definito come:

$$CP = \langle \mathbb{Z} \cup \{\bot\} \cup \{\top\}, \sqsubseteq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap \rangle$$

dove $\bot$ rappresenta il valore costante di una variabile non definita, $\top$ rappresenta il valore non costante (variabile) e l'operatore di join $\sqcup$ è definito come:

$$c_1 \sqcup c_2 = \begin{cases} c_1 & \text{se } c_1 = c_2 \\ \top & \text{altrimenti} \end{cases}$$

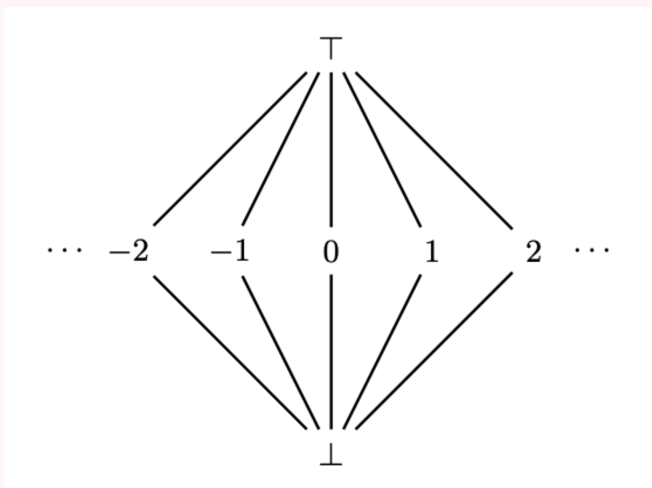


Figura 15: L'immagine illustra il reticolo per la constant propagation.

Nota 4.9: Non distributività della constant propagation

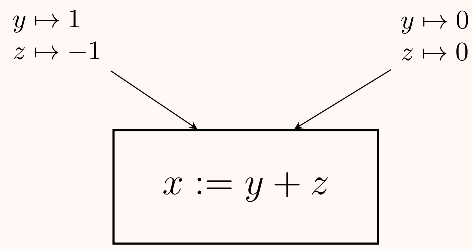
Considerando il seguente frammento di codice:

```
if (condition) then
    y := 1
    z := -1
else
    y := 0
```

```
    z := 0
end if

x := y + z
```

Da qui è possibile costruire il seguente CFG:



Dal CFG sopra è possibile costruire due insiemi di stati:

- Stato s_0 (nodo sinistro): $\{y \mapsto 1, z \mapsto -1\}$
- Stato s_1 (nodo destro): $\{y \mapsto 0, z \mapsto 0\}$

La funzione di trasferimeno al join point (l'istruzione $x := y + z$) calcola il nuovo stato:

$$f(s_{in}) = f(s_0 \sqcup s_1)$$

dove $\sqcup$ è l'operatore di join del reticolo CP.
Per verificare se la constant propagation è distributiva, è necessario calcolare $f(s_0 \sqcup s_1)$ e confrontarlo con $f(s_0) \sqcup f(s_1)$.:
Prima di eseguire l'istruzione, l'analisi unisce le informazioni provenienti dai due rami:

- Per y: $1 \sqcup 0 = \top$.
- Per z: $-1 \sqcup 0 = \top$.

Quindi lo stato unito è $s_{join} = [y \mapsto \top, z \mapsto \top]$.
Successivamente l'analisi valuta $x := y + z$ usando lo stato s_{join}:

$$x := \top + \top \implies x \mapsto \top$$

Quindi $f(s_0 \sqcup s_1) = [x \mapsto \top, y \mapsto \top, z \mapsto \top]$, portando al risultato che x non è costante.

Tuttavia, se l'analisi fosse distributiva si dovrebbe ottenere lo stesso risultato unendo i risultati delle singole esecuzioni ($f(s_0) \sqcup f(s_1)$):

- Nel ramo sinistro (s_0): $x := 1 + (-1) = 0$.
- Nel ramo destro (s_1): $x := 0 + 0 = 0$.
- Unione dei risultati: $0 \sqcup 0 = 0$.

Poiché il risultato reale dell'analisi ($\top$) è diverso e meno preciso del risultato ideale (0):

$$f(s_0 \sqcup s_1) \neq f(s_0) \sqcup f(s_1)$$

$$\top \neq 0$$

si dimostra che la propagazione delle costanti non è un'analisi distributiva.