Algoritmi e Strutture Dati

Foglio 9
25/05/2023

Esercizio 1. Sia $G = (V, E)$ un grafo diretto con funzione peso $w\colon E \to \mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Considerate una nuova funzione peso data da $w'(u, v) = w(u, v) + a$ per ogni $(u, v) \in E$. I cammini minimi in G considerando prima la funzione peso w e poi quella w' sono gli stessi? Cosa succede se $w'(u, v) = a \cdot w(u, v)$ per ogni arco $(u, v) \in E$ e un certo $a > 0$?

Esercizio 2. Fornite un algoritmo che, dato un grafo diretto aciclico e pesato, trovi un cammino di peso *massimo* da una sorgente s ad un vertice raggiungibile da s. Il tempo di esecuzione deve essere $O(n + m)$.

Esercizio 3. Modificate l'algoritmo di Bellman-Ford in modo che $v.d$ venga posto a $-\infty$ per tutti i vertici v per i quali esiste un ciclo di peso negativo in qualche cammino dalla sorgente a v.

Esercizio 4. Supponete di modificare la riga 4 dell'algoritmo di Dijkstra con

while $|Q| > 1$.

Il ciclo sarà quindi eseguito $n - 1$ volte, anziché n volte. Il nuovo algoritmo è corretto?

Esercizio 5. Vogliamo verificare come non sia possibile usare la Proprietà del rilassamento del cammino per dimostrare direttamente la correttezza dell'algoritmo di Dijkstra (ricordate invece come questa fosse la strategia usata per la correttezza di Bellman-Ford). Fornite quindi un esempio di grafo diretto per il quale Dijkstra non rilassa gli archi di un cammino minimo nell'ordine.

Esercizio 6. Supponete di avere un grafo diretto pesato $G = (V, E)$ in cui gli archi che escono dalla sorgente s possono avere pesi negativi, i pesi di tutti gli altri archi sono non negativi e non ci sono cicli di peso negativo. Dimostrate che, per un tale G, l'algoritmo di Dijkstra trova correttamente i cammini minimi da s.

Esercizio 7. Create un algoritmo con tempo di esecuzione $O(n + m)$ per contare il numero totale di cammini in un grafo diretto aciclico.

Esercizio 8. Considerate un grafo diretto $G = (V, E)$ con funzione peso $w\colon E \to \mathbb{R}$ e tale che ad ogni arco sia assegnato un colore, o rosso o blu. Definiamo il peso di un cammino p in G come la somma dei pesi dei suoi archi più 5 volte il numero di coppie di archi consecutivi in p con colori diversi. Possiamo immaginare che, attraversando un cammino si debba pagare una penalità di 5 nel passare da un arco blu a uno rosso o vice versa. Fornite un algoritmo con tempo di esecuzione $O(nm)$ che trovi un cammino di peso minimo tra una coppia fissa di vertici s e t (supponendo che tale cammino esista).
Suggerimento: costruire un grafo diretto ausiliario $G' = (V', E')$, dove ad ogni vertice $v \in V$ corrispondono due vertici $v_r, v_b \in V'$.