Tutorato di Logica - Lezione 5

Manuel Di Agostino

Università di Parma

4 novembre 2024

Correzione parziale del 29/10/2024

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 1

Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 0$$

dove $\cdot \bmod 10$ è l'operazione che restituisce il *resto* della divisione per 10. Ad esempio, $2024 \bmod 10 = 4$.

1. R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?
2. Se sì, quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?
   Suggerimento: si ricorda che per $n < 10$ si ha $n \bmod 10 = n$.

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \bmod 10 = x \bmod 10. \quad \text{(chiaramente vero, il resto è unico)}$$

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \bmod 10 = x \bmod 10. \quad \text{(chiaramente vero, il resto è unico)}$$

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ &\Rightarrow y \bmod 10 = x \bmod 10 & (= \text{simmetrico}) \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \bmod 10 = x \bmod 10. \quad \text{(chiaramente vero, il resto è unico)}$$

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ &\Rightarrow y \bmod 10 = x \bmod 10 && (= \text{simmetrico}) \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

- transitività:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow \begin{cases} x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ y \bmod 10 = z \bmod 10 \end{cases} \\ &\Rightarrow x \bmod 10 = z \bmod 10 && (= \text{transitivo}) \\ &\Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \bmod 10 = x \bmod 10. \quad \text{(chiaramente vero, il resto è unico)}$$

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ &\Rightarrow y \bmod 10 = x \bmod 10 && (= \text{simmetrico}) \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

- transitività:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow \begin{cases} x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ y \bmod 10 = z \bmod 10 \end{cases} \\ &\Rightarrow x \bmod 10 = z \bmod 10 && (= \text{transitivo}) \\ &\Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

Quindi R è di equivalenza su $\mathbb{N}$.

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Possiamo osservare che $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si ha xRy se e solo se hanno lo stesso resto nella divisione per 10;

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Possiamo osservare che $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si ha xRy se e solo se hanno lo stesso resto nella divisione per 10;
- inoltre, i resti possibili r assumono valori da 0 a 9 e per essi vale $r \bmod 10 = r$;

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Possiamo osservare che $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si ha xRy se e solo se hanno lo stesso resto nella divisione per 10;
- inoltre, i resti possibili r assumono valori da 0 a 9 e per essi vale $r \bmod 10 = r$;
- in particolare, notiamo che un intero n verifica nRr se e solo se $n \bmod 10 = r \bmod 10 = r$;

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Possiamo osservare che $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si ha xRy se e solo se hanno lo stesso resto nella divisione per 10;
- inoltre, i resti possibili r assumono valori da 0 a 9 e per essi vale $r \bmod 10 = r$;
- in particolare, notiamo che un intero n verifica nRr se e solo se $n \bmod 10 = r \bmod 10 = r$;
- poiché il resto della divisione è unico, ne deriva che n appartiene ad una delle 10 possibili classi di equivalenza, identificate dal rispettivo resto euclideo.

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Possiamo osservare che $\forall x, y \in \mathbb{N}$, si ha xRy se e solo se hanno lo stesso resto nella divisione per 10;
- inoltre, i resti possibili r assumono valori da 0 a 9 e per essi vale $r \bmod 10 = r$;
- in particolare, notiamo che un intero n verifica nRr se e solo se $n \bmod 10 = r \bmod 10 = r$;
- poiché il resto della divisione è unico, ne deriva che n appartiene ad una delle 10 possibili classi di equivalenza, identificate dal rispettivo resto euclideo.

Quindi R partiziona $\mathbb{N}$ in 10 classi di equivalenza.

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 2

Si consideri l'insieme $D = \{3, 13, 15, 27, 52, 60\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
   Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D.

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx. \qquad \text{(chiaramente vero, m=1)}$$

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx. \qquad \text{(chiaramente vero, m=1)}$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRx &\Leftrightarrow x|y \wedge y|x \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : y = mx \wedge x = ny \\ &\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : x = n(mx) && \text{(y=mx)} \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : x = (nm)x && (\cdot \text{ assoc.}) \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : 1 = (nm) \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : m = n = 1 \vee m = n = -1 \\ &\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : m = n = 1. && (x, y \in D) \end{aligned}$$

Se $m = 1$ allora $x = y$.

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\
&\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : y = mx \wedge z = ny \\
&\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : z = n(mx) && \text{(y=mx)} \\
&\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : z = (nm)x && (\cdot \text{ assoc.}) \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z} : z = ux && (u = nm \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

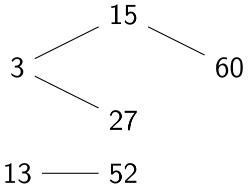
Quindi R è d'ordine su D. Non è però totale, infatti:

$$3, 13 \in D : 3 \nmid 13 \wedge 13 \nmid 3$$

Soluzione dell'esercizio 2

(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

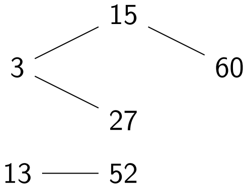
- Disegnamo il diagramma di Hasse:



Soluzione dell'esercizio 2

(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Disegnamo il diagramma di Hasse:



- Osservando il grafico, si nota che la relazione ha due elementi minimali: 3 e 13. Inoltre, essa ha tre elementi massimali: 27, 52 e 60.

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 3

Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=1}^{n} (8i^3 + 2)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Soluzione dell'esercizio 3

- Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (1) e (4) del formulario.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(8i^3+2) &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\sum_{i=1}^{n} 1 && \text{(linearità della somma)}\\
&= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 2n && \text{(formule (1) e (4))}\\
&= 2n^2(n+1)^2 + 2n.
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (1) e (4) del formulario.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(8i^3+2) &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\sum_{i=1}^{n} 1 && \text{(linearità della somma)}\\ &= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 2n && \text{(formule (1) e (4))}\\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n.\end{aligned}$$

- Ora, dimostriamo per induzione la proprietà

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n}(8i^3+2) = 2n^2(n+1)^2 + 2n$$

- **Caso base**. Sia $n = 1$. Quindi, $P(1)$ diventa:

$$\sum_{i=1}^{1}(8i^3 + 2) = 2 \cdot 1^2(1 + 1)^2 + 2 \cdot 1$$
$$8 \cdot 1^3 + 2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2$$
$$10 = 10$$

  Perciò $P(1)$ è vera e il caso base è verificato.

- **Caso base**. Sia $n = 1$. Quindi, $P(1)$ diventa:

$$\sum_{i=1}^{1}(8i^3 + 2) = 2 \cdot 1^2(1+1)^2 + 2 \cdot 1$$
$$8 \cdot 1^3 + 2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2$$
$$10 = 10$$

  Perciò $P(1)$ è vera e il caso base è verificato.

- **Passo induttivo**. Dobbiamo dimostrare che vale $P(n+1)$, data $P(n)$. Scriviamo la proprietà $P(n+1)$.

$$P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(8i^3 + 2) = 2(n+1)^2(n+2)^2 + 2(n+1)$$

- Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1}(8i^3+2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(8i^3+2) + 8(n+1)^3 + 2 \\
&= 2n^2(n+1)^2 + 2n + 8(n+1)^3 + 2 && \text{(ip. induttiva)} \\
&= 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3 + 2(n+1) && \text{(raccolgo 2, III e IV)} \\
&= 2(n+1)^2(n^2+4(n+1)) + 2(n+1) && \text{(raccolgo } 2(n+1)^2\text{, I e II)} \\
&= 2(n+1)^2(n^2+4n+4) + 2(n+1) \\
&= 2(n+1)^2(n+2)^2 + 2(n+1) && \text{(quadrato del binomio)}
\end{aligned}$$

La catena di uguaglianze mi ha portato a dimostrare $P(n+1)$ a partire dall'ipotesi induttiva, quindi il passo induttivo è verificato. $\square$

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 1

Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 10k$$

Ad esempio, $2024 - 2004 = 10 \cdot 2$, quindi $R(2024, 2004)$.

1. R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?
2. Se sì, quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?
   Suggerimento: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 10.

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 10 \cdot k \qquad \text{(chiaramente vero, } k = 0\text{)}$$

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 10 \cdot k \qquad \text{(chiaramente vero, } k = 0\text{)}$$

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 10 \cdot k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -(y - x) = 10 \cdot k && \text{(raccolgo } -1 \text{ a sx.)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : (y - x) = 10 \cdot (-k) && \text{(molt. per } -1 \text{ ambo i membri)} \\ &\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : (y - x) = 10 \cdot j && (j = -k) \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x - y = 10j \\ y - z = 10k \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x - y = 10j \\ y = z + 10k \end{cases} \\
&\Rightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - (z + 10k) = 10j \qquad (y = z + 10k) \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - z = 10j + 10k \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - z = 10(j + k) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z} : x - z = 10i \qquad \text{(i=j+k)} \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x - y = 10j \\ y - z = 10k \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x - y = 10j \\ y = z + 10k \end{cases} \\
&\Rightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - (z + 10k) = 10j \qquad (y = z + 10k) \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - z = 10j + 10k \\
&\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{Z} : x - z = 10(j + k) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z} : x - z = 10i \qquad \text{(i=j+k)} \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è di equivalenza su $\mathbb{N}$.

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Consideriamo la divisione intera di x per 10 e la divisione intera di y per 10. Si otterranno, rispettivamente, un quoziente Q e un resto R per x, e un quoziente Q' e un resto R' per y:

$$x = 10 \cdot Q + R$$
$$y = 10 \cdot Q' + R'$$

Soluzione dell'esercizio 1

(2) Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

- Consideriamo la divisione intera di x per 10 e la divisione intera di y per 10. Si otterranno, rispettivamente, un quoziente Q e un resto R per x, e un quoziente Q' e un resto R' per y:

$$x = 10 \cdot Q + R$$
$$y = 10 \cdot Q' + R'$$

- sottraendo la seconda equazione alla prima, si ottiene:

$$x - y = 10 \cdot (Q - Q') + (R - R') \tag{1}$$

- chiaramente $R(x, y)$ se e solo se esiste un intero k tale che $x - y = 10k$. Osserviamo che in (1), $Q - Q'$ è un numero intero. Quindi $R(x, y)$ se e solo se imponiamo che $k = Q - Q'$ e $R - R' = 0$, ovvero $R = R'$. Da questo ragionamento si deduce che vale $R(x, y)$ se e solo se x e y hanno lo stesso resto $R = R'$ nella divisione per 10;

- chiaramente $R(x, y)$ se e solo se esiste un intero k tale che $x - y = 10k$. Osserviamo che in (1), $Q - Q'$ è un numero intero. Quindi $R(x, y)$ se e solo se imponiamo che $k = Q - Q'$ e $R - R' = 0$, ovvero $R = R'$. Da questo ragionamento si deduce che vale $R(x, y)$ se e solo se x e y hanno lo stesso resto $R = R'$ nella divisione per 10;
- poiché i possibili resti sono 10 e variano da 0 a 9, tale è anche il numero di possibili classi di equivalenza, identificate dal rispettivo resto euclideo.

- chiaramente $R(x, y)$ se e solo se esiste un intero k tale che $x - y = 10k$. Osserviamo che in (1), $Q - Q'$ è un numero intero. Quindi $R(x, y)$ se e solo se imponiamo che $k = Q - Q'$ e $R - R' = 0$, ovvero $R = R'$. Da questo ragionamento si deduce che vale $R(x, y)$ se e solo se x e y hanno lo stesso resto $R = R'$ nella divisione per 10;
- poiché i possibili resti sono 10 e variano da 0 a 9, tale è anche il numero di possibili classi di equivalenza, identificate dal rispettivo resto euclideo.

Quindi R partiziona $\mathbb{N}$ in 10 classi di equivalenza.

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 2

Si consideri l'insieme $P_3 = \{1, 3, 8, 27, 81, 243\}$ delle prime sei potenze di 3, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in P_3 : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su P_3 è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su P_3 ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali? *Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme P_3.

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx. \qquad \text{(chiaramente vero, m=1)}$$

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx. \qquad \text{(chiaramente vero, m=1)}$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy \land yRx &\Leftrightarrow x|y \land y|x \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : y = mx \land x = ny \\ &\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : x = n(mx) && \text{(y=mx)} \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : x = (nm)x && (\cdot \text{ assoc.}) \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : 1 = (nm) \\ &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : m = n = 1 \lor m = n = -1 \\ &\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : m = n = 1. && (x, y \in D) \end{aligned}$$

Se $m = 1$ allora $x = y$.

- transitività:

$$\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\
&\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : y = mx \wedge z = ny \\
&\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : z = n(mx) && \text{(y=mx)} \\
&\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : z = (nm)x && (\cdot \text{ assoc.}) \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z} : z = ux && (u = nm \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}$$

Quindi R è d'ordine su D. Inoltre è totale; infatti, considerati due elementi appartenenti all'insieme P_3, entrambi saranno potenze di 3 e il minore tra i due divide l'altro.

Soluzione dell'esercizio 2

(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Disegnamo il diagramma di Hasse:

$$1 \text{ --- } 3 \text{ --- } 9 \text{ --- } 27 \text{ --- } 81 \text{ --- } 243$$

Soluzione dell'esercizio 2

(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Disegnamo il diagramma di Hasse:

$$1 - 3 - 9 - 27 - 81 - 243$$

- Osservando il grafico, si nota che la relazione ha un minimo: 1. Inoltre, essa ha un massimo: 243.

Correzione parziale del 29/10/2024

Esercizio 3

Calcolare il valore della seguente somma:

$$\sum_{i=0}^{n} (2^i + 6i^2)$$

Poi dimostrarlo per induzione.

Soluzione dell'esercizio 3

- Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (3) e (5) del formulario.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}(2^i + 6i^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 6\sum_{i=0}^{n} i^2 && \text{(linearità della somma)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 6\cdot 0^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 && \text{(definizione di sommatoria)} \\
&= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{(formule (3) e (5))} \\
&= 2^{n+1} - 1 + n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (3) e (5) del formulario.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}(2^i + 6i^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 6\sum_{i=0}^{n} i^2 && \text{(linearità della somma)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 6 \cdot 0^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 && \text{(definizione di sommatoria)} \\
&= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{(formule (3) e (5))} \\
&= 2^{n+1} - 1 + n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}
$$

- Ora, dimostriamo per induzione la proprietà

$$P(n) : \sum_{i=0}^{n}(2^i + 6i^2) = 2^{n+1} - 1 + n(n+1)(2n+1)$$

- **Caso base**. Sia $n = 0$. Quindi, $P(0)$ diventa:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0}(2^i + 6i^2) &= 2^{0+1} - 1 + 0(0+1)(2 \cdot 0 + 1) \\
2^0 + 6 \cdot 0^2 &= 2 - 1 + 0 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Perciò $P(0)$ è vera e il caso base è verificato.

- **Caso base**. Sia $n = 0$. Quindi, $P(0)$ diventa:

$$\sum_{i=0}^{0}(2^i + 6i^2) = 2^{0+1} - 1 + 0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)$$
$$2^0 + 6 \cdot 0^2 = 2 - 1 + 0$$
$$1 = 1$$

  Perciò $P(0)$ è vera e il caso base è verificato.
- **Passo induttivo**. Dobbiamo dimostrare che vale $P(n+1)$, data $P(n)$. Scriviamo la proprietà $P(n+1)$.

$$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1}(2^i + 6i^2) = 2^{n+2} - 1 + (n+1)(n+2)(2n+3)$$

- Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1}(2^i + 6i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2^i + 6i^2) + 2^{n+1} + 6(n+1)^2 \\
&= 2^{n+1} - 1 + n(n+1)(2n+1) + 2^{n+1} + 6(n+1)^2 && \text{(ip. induttiva)} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 + n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2 && \text{(sommo i } 2^{n+1}\text{)} \\
&= 2^{n+2} - 1 + (n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) && \text{(racc. } (n+1)\text{)} \\
&= 2^{n+2} - 1 + (n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) \\
&= 2^{n+2} - 1 + (n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6) && \text{(distrib. su } n\text{)} \\
&= 2^{n+2} - 1 + (n+1)(2n(n+2) + 3(n+2)) && \text{(racc. } 2n \text{ e } 3\text{)} \\
&= 2^{n+2} - 1 + (n+1)(n+2)(2n+3). && \text{(racc. } n+2\text{)}
\end{aligned}
$$

La catena di uguaglianze mi ha portato a dimostrare $P(n+1)$ a partire dall'ipotesi induttiva, quindi il passo induttivo è verificato. □