Tutorato di Logica - Lezione 7

Manuel Di Agostino

Università di Parma

18 novembre 2024

Sommario

Sommario

Definizione (Combinazioni semplici)

*Il numero di **combinazioni semplici** di classe k di n elementi distinti è il numero di k-sottoinsiemi di un insieme S, $|S| = n$, $k \leq n$. Si indica con $C_{n,k}$ ed equivale a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esercizio 1

Dimostrare che vale

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \tag{1}$$

ricordando che se A è un insieme finito e $|A| = n$, allora $|\wp(A)| = 2^n$.

Soluzione dell'esercizio 1

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$

Soluzione dell'esercizio 1

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$

Soluzione dell'esercizio 1

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$
  - trovo l'insieme delle parti

$$\wp(A) = \wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

Soluzione dell'esercizio 1

- L'esercizio ci chiede quindi di dimostrare che la somma delle cardinalità di tutti gli *i-sottoinsiemi* di A sia proprio 2^n. Sfruttiamo l'induzione per dimostrare che $|\wp(A)| = 2^n$
- **Caso base**: $n = |A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$
  - trovo l'insieme delle parti

$$\wp(A) = \wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

  - quindi

$$|\wp(A)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$$

    ossia il caso base è verificato

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\emptyset, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\emptyset, \emptyset \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$

$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A, A \cup \{x\}\}$$

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \dots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \dots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.
  - quindi ci sono il **doppio** dei sottoinsiemi rispetto a $\wp(A)$. Inoltre $|B| = n + 1$.

- **Passo induttivo**: suppongo vera $|\wp(A)| = 2^n$, con $|A| = n$ per un certo n naturale.
  - osserviamo che per un generico insieme $B = A \cup \{x\}, x \notin A$, si ha:

$$\wp(A) = \{\varnothing, A_1, A_2, \ldots, A\}$$
$$\wp(B) = \{\varnothing, \varnothing \cup \{x\}, A_1, A_1 \cup \{x\}, A_2, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A, A \cup \{x\}\}$$

  - infatti in $\wp(B)$ ci sono i possibili sottoinsiemi di A (in quanto $A \subset B$) e tutti i sottoinsiemi di B che si possono ottenere aggiungendo l'elemento x ad essi.
  - quindi ci sono il **doppio** dei sottoinsiemi rispetto a $\wp(A)$. Inoltre $|B| = n + 1$.
  - allora

$$\begin{aligned} |\wp(B)| &= 2 \cdot |\wp(A)| \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{(Ip. induttiva)} \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.
- In particolare,

$$\binom{n}{i}$$

ci dice quanti sono i sottoinsiemi di k elementi che è possibile formare.

- Per induzione su n, abbiamo dimostrato che $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, con $|A| = n$.
- Calcolare la (1) corrisponde a valutare quindi la somma del numero di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme avente cardinalità n.
- In particolare,

$$\binom{n}{i}$$

  ci dice quanti sono i sottoinsiemi di k elementi che è possibile formare.
- Ma allora

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = |\wp(A)| = 2^n$$

$\square$

Esercizio 2

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Esercizio 2

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Soluzione dell'esercizio 2

- Il numero dei 2-sottoinsiemi di S equivale al numero di tutti i possibili sottoinsiemi di S da 2 elementi. Questi si possono contare con:

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

Esercizio 2

Sia S un insieme di 16 elementi. Qual è il numero dei 2-sottoinsiemi di S? E quello dei 14-sottoinsiemi?

Soluzione dell'esercizio 2

- Il numero dei 2-sottoinsiemi di S equivale al numero di tutti i possibili sottoinsiemi di S da 2 elementi. Questi si possono contare con:

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

- Contiamo ora i 14-sottoinsiemi:

$$\binom{16}{14} = \frac{16!}{14!2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

- Notiamo che il risultato è lo stesso! Valgono infatti la seguenti:

Proprietà

Dati n, k naturali con $k \leq n$, si hanno

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \tag{3}$$

Esercizio 3

10 professori devono scegliere un presidente, un vicepresidente ed un segretario. Si deve anche scegliere una commissione di 3 membri.

1. In quanti modi si possono fare queste scelte?

Inoltre i 10 professori fanno da tutori ad un gruppo di allievi.

2. Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

Soluzione dell'esercizio 3

(1) In quanti modi si possono fare queste scelte?

- Il problema di scegliere presidente, vice e segretario è analogo all'esercizio visto nella lezione precedente; ci sono

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

modi per farlo (l'ordine conta, differenzia i ruoli nelle triplette formate)

Soluzione dell'esercizio 3

(1) In quanti modi si possono fare queste scelte?

- Il problema di scegliere presidente, vice e segretario è analogo all'esercizio visto nella lezione precedente; ci sono

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

modi per farlo (l'ordine conta, differenzia i ruoli nelle triplette formate)

- Per scegliere la commissione da 3 membri l'ordine è ininfluente; bisogna cercare quanti sono i 3-sottoinsiemi possibili da un insieme d 10 elementi (presidente, vice e segretario possono far parte della commissione):

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 4 \cdot 3$$

- A questo punto, per il principio del prodotto le possibili scelte sono:

$$\left(\frac{10!}{(10-3)!}\right) \cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!} \cdot \frac{10!}{3!7!} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{10!}{7!}\right)^2 = 86400$$

che equivale ai modi di scegliere le seguenti coppie:

$$(d, c) \in D \times C$$

con D, insieme delle triple possibili di presidente, vice e segretario e C, insieme dei possibili 3-sottoinsiemi formati sui 10 professori.

Soluzione dell’esercizio 3

(2) Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

- Ogni allievo può scegliere uno tra i 10 professori disponibili; un professore può quindi essere scelto più di una volta

Soluzione dell'esercizio 3

(2) Se 3 nuovi allievi si aggiungono al gruppo, in quanti modi diversi i 3 allievi possono scegliere i loro tutori?

- Ogni allievo può scegliere uno tra i 10 professori disponibili; un professore può quindi essere scelto più di una volta
- La risposta equivale al numero di **disposizioni con ripetizione** di classe 3 di 10 elementi distinti:

$$D_{10,3} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

Esercizio 4

12 amici, dopo aver partecipato ad una cena, si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri.

1. Quante sono le strette di mano?

Provate! (5 min.)

Soluzione dell'esercizio 4

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11

Soluzione dell'esercizio 4

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11
- Inoltre, se a saluta b, è equivalente a dire che b saluta a. Quindi l'ordine delle coppie è ininfluente

Soluzione dell'esercizio 4

- Ogni persona stringe la mano ad altre 11
- Inoltre, se a saluta b, è equivalente a dire che b saluta a. Quindi l'ordine delle coppie è ininfluente
- Possiamo contare i possibili 2-sottoinsiemi su 12 elementi per trovare la risposta:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

Esercizio 5

Uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Solo 5 su 10.

1. Quante possibili scelte ha?
2. E se deve per forza scegliere 2 tra le prime 5 e le restanti 3 tra le ultime 5?

Provate! (5 min.)

Soluzione dell'esercizio 5

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

Soluzione dell'esercizio 5

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

(2) E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

- Bisogna scegliere 2 domande tra le prime 5 e le rimanenti 3 tra le altre 5

Soluzione dell'esercizio 5

(1) Quante possibili scelte ha?

- Bisogna scegliere 5 domande tra 10 elementi, l'ordine non è importante:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

(2) E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

- Bisogna scegliere 2 domande tra le prime 5 e le rimanenti 3 tra le altre 5
- Quindi possiamo sfruttare il principio del prodotto:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \left(\frac{5!}{2!3!}\right)^2 = 100$$

Sommario

Sommario

1. Combinatoria
   - Combinazioni
2. Logica Proposizionale
   - Introduzione

Definizione (Alfabeto)

*Si dice **alfabeto** e si indica con A un insieme per cui:*

- $A \neq \varnothing$
- $|A| = n, n \in \mathbb{N}$

Definizione (Stringa, lunghezza di una stringa)

*Si dice **stringa** su un alfabeto A una qualsiasi **successione finita** di simboli di A.*
*Data x stringa su A, indichiamo con $|x|$ la sua **lunghezza**, ossia il numero di simboli di A da cui è composta.*

Definizione (Stringa vuota)

*Indichiamo con ϵ la **stringa vuota**, ossia l'unica stringa x tale che $|x| = 0$.*

Definizione

*Dato un alfabeto A, indichiamo con A^* l'insieme di tutte le stringhe su A. Il simbolo $*$ viene detto **stella di Kleene**.*

Definizione (induttiva di $|\cdot|$)

Sia $x \in A^*$ una stringa. Definiamo la sua lunghezza $|s|$ induttivamente come:

$$|s| = \begin{cases} 0 & se\ s = \epsilon \\ 1 + |r| & se\ s = cr, c \in A, r \in A^* \end{cases}$$

Esercizio 6

Sia A un alfabeto di n simboli.

1. Qual è il numero delle stringhe su A, ossia $|A^*|$?

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
    - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
    - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \dots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
    - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \dots$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - $4 = 2^2$ stringhe di lunghezza 2: $A_2 = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$

- Proviamo con qualche esempio concreto. Consideriamo l'insieme $\{\}$
  - Possiamo costruire un'unica stringa, ossia ϵ
- Consideriamo ora l'alfabeto con un solo elemento: $\{\mathtt{0}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{00}, \mathtt{000}, \ldots$
- Consideriamo un alfabeto con due elementi: $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - Possiamo costruire le seguenti stringhe: $\epsilon, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}, \ldots$
- Fissiamo ora $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, insieme di 2 simboli, e ragioniamo su quante sono le possibili stringhe di lunghezza k che è possibile formare:
  - $1 = 2^0$ stringa di lunghezza 0: $A_0 = \{\epsilon\}$
  - $2 = 2^1$ stringhe di lunghezza 1: $A_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$
  - $4 = 2^2$ stringhe di lunghezza 2: $A_2 = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$

$$\vdots$$

  - 2^k stringhe di lunghezza k

- Notiamo che A^* si può scrivere come l'unione infinita di tutti gli insiemi che contengono stringhe lunghe k, ossia:

$$A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \tag{4}$$

- Notiamo che A^* si può scrivere come l'unione infinita di tutti gli insiemi che contengono stringhe lunghe k, ossia:

$$A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \tag{4}$$

- Potremmo pensare di **ordinare lessicograficamente** tutte queste stringhe. Ad ognuna di esse corrisponderà quindi una posizione:

$$\begin{array}{rcl} \epsilon & \mapsto & 0 \\ \mathtt{0} & \mapsto & 1 \\ \mathtt{1} & \mapsto & 2 \\ \mathtt{00} & \mapsto & 3 \\ \mathtt{01} & \mapsto & 4 \\ \mathtt{10} & \mapsto & 5 \\ \mathtt{11} & \mapsto & 6 \\ \mathtt{000} & \mapsto & 7 \\ & \vdots & \end{array}$$

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definizione per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5}$$

dove $\mathcal{I} : A^* \to \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definizione per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5}$$

dove $\mathcal{I} : A^* \to \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.
Ad esempio: $\sigma(\mathtt{1}) = (2^1 - 1) + 1 = 2$, $\sigma(\mathtt{010}) = (2^3 - 1) + 2 = 9$

- Stiamo quindi definendo una funzione $\sigma : A^* \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni stringa un numero naturale. Una possibile definizione per σ è la seguente:

$$\sigma(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{i=0}^{|\mathtt{x}|-1} 2^i + \mathcal{I}(\mathtt{x}) = (2^{|\mathtt{x}|} - 1) + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5}$$

  dove $\mathcal{I} : A^* \to \mathbb{N}$ calcola il valore decimale della stringa binaria considerata.
  Ad esempio: $\sigma(\mathtt{1}) = (2^1 - 1) + 1 = 2$, $\sigma(\mathtt{010}) = (2^3 - 1) + 2 = 9$
- Si dimostra che la funzione di ordinamento σ è biettiva. Questo è equivalente a dire che

$$|A^*| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

  ossia le possibili stringhe su A^* sono numerabili!

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco
- Ne segue che è possibile ordinare le stringhe generate da A con una funzione di ordinamento $\sigma_A : A^* \to \mathbb{N}$ biettiva

- Il caso generale in cui $|A| = n \in \mathbb{N}$ è analogo. Infatti, dati n simboli distinti è sempre possibile definire per essi un ordinamento lessicografico univoco
- Ne segue che è possibile ordinare le stringhe generate da A con una funzione di ordinamento $\sigma_A : A^* \to \mathbb{N}$ biettiva
- Quindi $\forall n \in \mathbb{N}.|A| = n$ si ha che

$$|A^*| = \aleph_0 \tag{6}$$

(**Bonus**) Esempio di possibile fuzione σ_S, con $S = \{\star, \heartsuit, \diamond\}$

- Definiamo il seguente ordinamento tra gli elementi dell'insieme:

$$\star \leq \heartsuit \leq \diamond$$

- A questo punto le stringhe di S^* possono essere univocamente ordinate:

$$\epsilon \leq \star \leq \heartsuit \leq \diamond \leq \star\star \leq \star\heartsuit \leq \star\diamond \leq \heartsuit\star \leq \ldots$$

- La definizione di σ_S potrebbe essere la seguente:

$$\sigma_S(\mathtt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathtt{x} = \epsilon \\ \sum_{m=0}^{|\mathtt{x}|-1} |S|^m + \mathcal{I}(\mathtt{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\mathcal{I}$ così definita:

$$\mathcal{I}(\mathtt{x}) = \sum_{p=0}^{|x|-1} i(\mathtt{x}_p) \cdot |S|^p$$

ponendo $i(\star) = 0, i(\heartsuit) = 1, i(\diamond) = 2$ e considerando x_p come il simbolo in posizione p-esima contando da destra.

Esercizio 7

Qual è il coefficiente del termine $x^7 y^3$ nello sviluppo di $(2x - y)^{10}$?

Esercizio 7

Qual è il coefficiente del termine x^7y^3 nello sviluppo di $(2x - y)^{10}$?

Soluzione dell'esercizio 7

- Poniamo $a = 2x, b = -y$; il binomio diventa della forma

$$(a + b)^{10}$$

Esercizio 7

Qual è il coefficiente del termine x^7y^3 nello sviluppo di $(2x - y)^{10}$?

Soluzione dell'esercizio 7

- Poniamo $a = 2x, b = -y$; il binomio diventa della forma

$$(a + b)^{10}$$

- Ricordiamo ora il **teorema binomiale**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Basta quindi considerare $n = 10, k = 3$ e calcolare il coefficiente binomiale opportuno, per trovare il coefficiente del termine $a^7 b^3$:

$$\binom{n}{k} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

- Basta quindi considerare $n = 10, k = 3$ e calcolare il coefficiente binomiale opportuno, per trovare il coefficiente del termine a^7b^3:

$$\binom{n}{k} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

- Ricordiamo poi che $a = 2x, b = -y$, quindi:

$$120 \cdot (2x)^7(-y)^3 = -120 \cdot 128x^7y^3 = -15360x^7y^3$$

Esercizio 8

Si calcoli:

$$(x - 2y)^5$$

Soluzione dell'esercizio 8

- Poniamo $a = x, b = -2y$ in modo da avere:

$$(a + b)^5$$

Soluzione dell'esercizio 8

- Poniamo $a = x, b = -2y$ in modo da avere:

$$(a+b)^5$$

- Per il teorema binomiale:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^5\\
&= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5\\
&= x^5 + 5x^4(-2y) + 10x^3(-2y)^2 + 10x^2(-2y)^3 + 5x(-2y)^4 + (-2y)^5\\
&= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5
\end{aligned}$$