Tutorato di Logica - Lezione 2

Manuel Di Agostino

Università di Parma

14 ottobre 2024

Sommario

Sommario

Definizione (Rel. d'equivalenza)

*Data una relazione $R \subseteq A \times A$, essa si dice essere d'***equivalenza** *sse*

- **riflessiva**: $\forall x \in A.(xRx)$
- **simmetrica**: $\forall x, y \in A.(xRy \Rightarrow yRx)$
- **transitiva**: $\forall x, y, z \in A.(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Esercizio 1 Appello del 23/01/2024

Sia R la relazione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}. R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3k$$

Ad esempio, $23 - 8 = 3 \cdot 5$, quindi vale $R(8, 23)$.

1. Dimostrare che R su $\mathbb{N}$ è di equivalenza.
2. Quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Suggerimento: se $R(x, y)$, allora x e y hanno lo stesso *resto* nella divisione per 3.

Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che R è di equivalenza.

- riflessività:

$$\begin{aligned} xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k \end{aligned}$$

  che è chiaramente vero per $k = 0$.

Soluzione dell'esercizio 1

Dimostro che R è di equivalenza.

- riflessività:

$$\begin{aligned} xRx &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 3k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 3k \end{aligned}$$

  che è chiaramente vero per $k = 0$.

- simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : y - x = 3a \\ &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : a' = -a \wedge y - x = -3a' \\ &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : -(x - y) = -3a' \\ &\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : (x - y) = 3a' \\ &\Leftrightarrow yRx. \end{aligned}$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
& x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j) \\
\Rightarrow \quad & \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l \\
\Leftrightarrow \quad & xRz.
\end{aligned}
$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
& x, y, z \in \mathbb{N} \wedge xRy \wedge yRz \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3j \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - y = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - (3j + x) = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - 3j - x = 3k \\
\Leftrightarrow \quad & \exists j, k \in \mathbb{Z} : y = 3j + x \wedge z - x = 3(k + j) \\
\Rightarrow \quad & \exists l \in \mathbb{Z} : z - x = 3l \\
\Leftrightarrow \quad & xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è di equivalenza.

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti.

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, 0 \leq r < 3$$

Soluzione dell'esercizio 1

Come conto il numero di classi di equivalenza? Osserviamo che

- $0R3, 3R6, 6R9, \ldots$
- $1R4, 4R7, 7R10, \ldots$
- $2R5, 5R8, 8R11, \ldots$

L'ipotesi è che ci siano 3 classi di equivalenza con $0, 1, 2$ come rispettivi rappresentanti. Per la divisione intera euclidea ogni numero naturale n si può scrivere come

$$n = 3 \cdot k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

che equivale a

$$n - r = 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 3$$

ossia

$$rRn, 0 \leq r < 3$$

Poiché $r \in \{0, 1, 2\}$, è evidente che n può essere in relazione con soltanto uno dei 3 possibili resti. Quindi l'**insieme quoziente** è

$$\mathbb{N}/R = \{[0], [1], [2]\}$$

Esercizio 2 Parziale del 02/11/2023

Sia $R \subseteq \mathbb{N}$ la relazione così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$$

dove $\cdot \bmod 5$ è l'operazione che restituisce il *resto* della divisione per 5. Ad esempio $27 \bmod 5 = 2$.

1. R su $\mathbb{N}$ è di equivalenza?
2. Se sì, quante classi di equivalenza si ottengono partizionando $\mathbb{N}$ con R?

Suggerimento: si ricorda che per $n < 5$ si ha $n \bmod 5 = n$.

Esercizio 3 Appello del 09/01/2024

Sia R la relazione su $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : R(x, y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \wedge q \neq 0$$

Dimostrare che R su $\mathbb{R}^*$ è di equivalenza.

Esercizio 4 Appello del 14/02/2023

Sia $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, con $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$ l'insieme delle coppie di numeri naturali, in cui si è escluso lo zero. Supponiamo di applicare ad A la relazione R così definita:

$$\forall (a, b), (c, d) \in A : R((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow ad = cb$$

La relazione R è di equivalenza?

Esercizio 5 Appello del 31/01/2023

Sia R una relazione di equivalenza su un insieme A. Tale insieme contiene almeno tre alementi a, b, c e inoltre

$$\neg R(a,b) \land \neg R(a,c) \land \neg R(b,c)$$

cioè a, b, c non sono in relazione tra loro.
Si supponga che R abbia tre classi di equivalenza, definite in questo modo:

$$A_1 = \{x \in A : R(a,x)\} \quad A_2 = \{x \in A : R(b,x)\} \quad A_3 = \{x \in A : R(c,x)\}$$

e inoltre $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

1. Dimostrare che $A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset, \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Esercizio 6 Appello del 16/01/2023

Sia A un insieme non vuoto. Si consideri suddiviso in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

dove A_1, A_2, A_3 sono insiemi non vuoti e disgiunti a due a due.
Sia R la relazione definita in questo modo:

$$\forall x, y \in A : R(x, y) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, 3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i$$

1. Dimostrare che R è di equivalenza.