esercizio lect 5

$\mu = 1.2$ j/s $\quad \lambda = 0.45$ J/s $\quad E[N_q] = 0.225$

1) $\rho = ?$ $\quad$ 2) $E[T_s]$?

poichè $\lambda < \mu$ sono in equilibrio stocastico, sistema NON COLLASSA.
STAZIONARIO

1) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.375$

2) $E[T_s] = E[T_q] + E[S]$

mi serve $E[T_q] \overset{LITTLE}{=} \frac{E[N_q]}{\lambda} = \frac{0.225}{0.45} = 0.5$,

$E[S] = \frac{1}{\mu} = 0.8\overline{3}$ s, allora

$E[T_s] = 0.5 + 0.8\overline{3} = 1.\overline{3}$ s. In ALTERNATIVA:

$E[T_s] \overset{LITTLE}{=} \frac{E[N_s]}{\lambda} = \frac{E[N_q] + \rho}{\lambda} = \frac{0.6}{0.45} \approx 1.\overline{3}$ s

3) λ' è +20%, $E[N_q] = 0.3681818$, ρ? $E[T_s]$?

$\lambda' = \lambda \cdot \underset{(20\%)}{1.2} = 0.54$ j/s $< \mu$, $\quad \rho' = \frac{\lambda'}{\mu} = 0.45$

$E[T_q'] = \frac{E[N_q']}{\lambda'} = 0.681818$ s, mentre

$E[T_s'] = E[T_q'] + E[S] = 0.681818$ s $+ 0.8\overline{3} = 1,\overline{51}$ s

4) voglio λ'' che porti il sistema al collasso

cerco λ'': $x \cdot \frac{\lambda'}{\mu} = 1$, cioè $x \cdot 0,54 = 1.2$ se $x = 2.\overline{22}$,

ovvero incremento del 122%. Poichè $\rho \to 1$ non vale più Little

$\left(E[T_s] \neq \frac{E[N_s]}{\lambda'} \right)$ e $E[T_s] \to +\infty$

lect7 ex4 Disti - esercizio

$\lambda = 15\ j/s$, $E[S] = 0{,}05837\ s$ → generale, se $\lambda \nearrow 10\%$?

$E[T_q]$ vs $E[T_q']$?
$E[T_s]$ vs $E[T_s']$?

$\lambda' = \lambda \cdot (1{,}1) = 16{,}5\ j/s$

$E[T_q] = \frac{E[S]\cdot\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1+C^2}{2}$ con $C^2 = \frac{\sigma^2(s)}{E(s)^2}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = 15 \cdot 0{,}05837 = 0{,}87555$

$E[T_q] = \frac{0{,}05837 \cdot 0{,}87555}{1-0.87555} \cdot \left(\frac{1+C^2}{2}\right) = 0.41048\left(\frac{1+C^2}{2}\right)$

$E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.41048\left(\frac{1+C^2}{2}\right) + 0.05837$

con λ

$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu} = 16{,}5 \cdot E[S] = 0{,}963105$

$E[T_q'] = \frac{0{,}05837 \cdot 0{,}963105}{1-0.963105}\left(\frac{1+C^2}{2}\right) = 1.52368\left(\frac{1+C^2}{2}\right)$

$E[T_s'] = 1{,}52368\left(\frac{1+C^2}{2}\right) + 0{,}05837$

con λ'

confronto

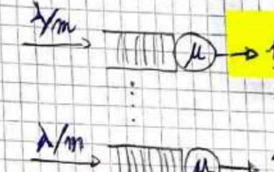
$\frac{E[T_q']}{E[T_q]} = 3.71$ cioè circa 271% in più di attesa in coda.

Per $E[T_s]$ servirebbe C^2 (dipende dal caso), ma $E[S]$ non dovrebbe comunque incidere molto.

esercizio

$\lambda = 4\ j/s$ $\quad \rho = 0.533334$

CASO 1 - SINGLE M/M/1



Sono indipendenti, allora per il singolo centro avrei $\rho = \frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)}{\mu} = 0.53334$

allora $\mu = 1.8750\ J/s$ Sono singole code M/M/1, $\lambda' = \frac{\lambda}{m}$

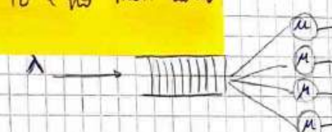
$E[T_s] = E[T_q] + E[S] = \frac{\rho E[S] + E[S] - \rho E[S]}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda}{m}}$

$= \frac{1}{1.8750 - 1} = 1{,}142857\ s$

$E[T_q] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho} = E[T_s] - E[S] = 0.609525\ s$

$\frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$ sta fuori da Σ, io l'ho messo dentro

CASO 2 - MULTISERVER M/M/m



mi serve P(sistema vuoto) =

$P(0) = \left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{(4\cdot 0.5334)^0}{0!} + \frac{4(4\cdot 0.5334)^4}{4!(1-0.53334)} + \frac{(4\cdot 0.5334)^1}{1!} + \frac{(4\cdot 0{,}5334)^4}{2!} + \frac{(4\cdot 0{,}5334)^4}{3!}\right]^{-1} \underset{\text{WOLFRAM}}{=} 0.0693$

$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} P(0) = \frac{(4\cdot 0.53334)^4}{4!(1-0.53334)} \cdot 0{,}0693 = 0{,}12816$ = PROB. SISTEMA CON SERVENTI TUTTI OCCUPATI

da cui:

$E[T_q] = \frac{P_Q \cdot \frac{E[S]}{4}}{1-\rho} = \frac{0.12816 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.8750}\right)}{4}}{1-0.53334} = 0.03661\ s$ e

$E[T_s] = E[T_q] + E[S_i] = 0.03661 + 0.53334 = 0.89943\ s$

CASO 3 - "single server potenziato"

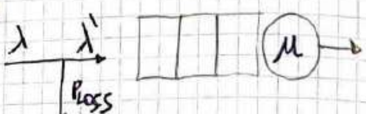
$\mu' = 4 \cdot \mu = 7.5$ J/s $\rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu'} = 0.1\overline{3}$

$$E[T_q] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho} = \frac{0.533334 \cdot 0.1\overline{3}}{1-0.53334} = 0.15238 \text{ s}$$

$$E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.15238 + 0.1\overline{3} = 0.2857 \text{ s}$$

---

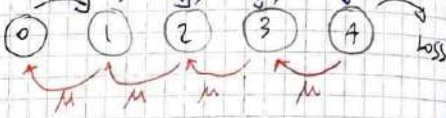
lectisMarkov Esercizio CODA FINITA



$\lambda = 5$ J/s $\quad \mu = 5$ j/s

- sistema presenta coda finita $\rightarrow$ stazionario
- L'utilizzazione è $\rho = \frac{\lambda'}{\mu}$, dove $\lambda' = \lambda(1 - P_{LOSS})$.

Per ottenerlo modello con Markov, applicando bilanciamento globale:



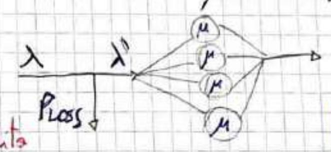
$\underbrace{\pi_0 \cdot \lambda}_{\text{esce da stato } \emptyset} = \underbrace{\pi_1 \cdot \mu}_{\text{entra in stato } \emptyset}$; $\underbrace{\pi_1 (\lambda + \mu)}_{\text{esce da stato 1}} = \underbrace{\pi_0 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \mu}_{\text{entra in stato 1}}$ . . . . . trovo

$$\begin{cases} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \\ \sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1 \end{cases} \quad \text{con } \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \quad \text{e } \pi_4 = P_{LOSS} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}{\sum_{i=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{5}$$

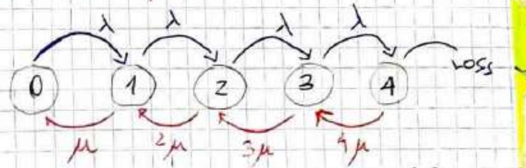
allora $\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ j/s e $\rho = \frac{4}{5} = 0.8$

Il throughput è $X = \min(\lambda', \mu) = 4$ j/s

Adesso passiamo a 4 core con $E[S] = 0.3$ s $\rightarrow \mu = 3.\overline{3}$ per core trattasi di Multiserver.



NOTA: abbiamo visto Multiser con coda infinita e senza coda, MAI multiserver con coda FINITA. Quindi non possiamo parlare di buffer size come prima. Assumiamo senza coda Erlang - B



Dobbiamo calcolare:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{5}{3.\overline{3}}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{5}{3.\overline{3}}\right)^1}{1!} + \dots + \frac{\left(\frac{5}{3.\overline{3}}\right)^4}{4!}} = 0.227353$$

necessaria per $\pi_4 = P_{LOSS}$

$$P_{LOSS} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \frac{\pi_0}{4!} = \left(\frac{5}{3.\overline{3}}\right)^4 \cdot \frac{0.227353}{4!} = 0.04795$$

allora $\lambda' = \lambda(1 - P_{LOSS}) = 4.76025$ J/s. Di conseguenza:

$$\rho' = \frac{\lambda'}{4\mu} = \frac{\text{max che entra}}{\text{max che esce}} = 0,357018$$

Throughput $X = \min(\lambda', \mu) = 4.76025$ j/s

Se volessi calcolare $E[N_s]$?

$E[N_s] = \sum_{i=1}^{4} \pi_i \cdot i = \pi_1 \cdot 1 + \pi_2 \cdot 2 + \dots + \pi_4 \cdot 4$, cioè la probabilità π_i che ci siano "i" serventi attivi, per "i" numero di serventi attivi.

Esercizio

$\lambda = 0.8$ J/s $\quad E[S] = 0.4$ s exp $\to \mu = 2.5$ J/s

QoS = $E[T_q] = 0.1$ s, se rispettato guadagno $C_1 = 5$,

se non rispettato perdo $C_2 = 3$.

CONTESTO ABSTRACT PREEMPTIVE.

Probabilità p_1, p_2 : $R = p_1 C_1 - p_2 C_2$ è massimo?

SVOLGIMENTO

Poiché il QoS è su prestazioni globali, ciò porta a considerare un sistema con PRELAZIONE, l'unico che porta miglioramenti globali.

Avere due code, voglio massimizzare R_1 e quindi p_1.

Impongo che:

$$E[T_{q_k}] = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i E[S_i^2]}{\left(1-\sum_{i=1}^{k} \rho_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right)} \overset{k=1}{\underset{exp}{=}} \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 E[S^2]}{1-\rho_1} = \frac{\rho_1 E[S]}{1-\rho_1}$$

calcolo quindi $\rho = \lambda E[S] = 0,32$. Chi è ρ_1? è $\rho \cdot p_1$

Impongo che $\frac{\rho \cdot p_1 \cdot E[S]}{1-\rho \cdot p_1} = \text{QoS} = 0.1$, risolvo:

$$\frac{0.128 \cdot p_1}{1-0.32\, p_1} = 0.1 \rightsquigarrow 0.128 \cdot p_1 = 0.1 - 0.032\, p_1 \rightsquigarrow$$

$p_1 (0,128 + 0,032) = 0.1 \rightsquigarrow p_1 = 0.625$

quindi $p_2 = 1 - p_1 = 0.375$ e quindi

$R = 0,625 \cdot 5 - 0.375 \cdot 3 = 2$

Voglio anche calcolare $E[T_S]$ delle due code.

$E[T_{S_1}] = E[T_{q_1}] + E[S] = 0.1 + 0.4 = 0.5$ s

Per $E[T_{q_2}]$ ricordo che "vede tutta la coda di classe 1".

$$E[T_{q_2}] = \frac{\rho\, E[S]}{(1-\rho)(1-\rho_1)} = \frac{(0.32) \cdot 0.4}{(1-0.32)\cdot(1-0.32 \cdot 0.625)} \simeq 0.235294$$

Attenzione! In prelazione un job di classe 2 può essere sostituito da uno di classe 1 e poi eventualmente rientrare. Devo calcolare il tempo di SERVIZIO VIRTUALE

$$E[S_{VIRT_k}] = \frac{E[S]}{1-\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i} \overset{k=2}{=} \frac{E[S]}{1-\rho_1} = \frac{0.4}{1-0.32 \cdot 0.625} = 0,5 \text{ s}$$

allora concludiamo con $E[T_{S_2}] = E[T_{q_2}] + E[S_{VIRT_2}] = 0,735294$ secondi

Esercizio Multipriority

$\lambda = 1\ J/s$ domanda media $Z = 4\cdot 10^5$ op/job, expo, astratto

2 configurazioni: $\begin{cases} \text{SINGLE SERVER} \\ \text{capacità} \Rightarrow C = 10^6\ op/s \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Dual core} \\ \text{con } \frac{C}{2} \end{cases}$

Voglio i seguenti requisiti: • $T_q < 0.15\,s$

• $T_s < 0.5\,s$ per almeno il 35% degli arrivi

SVOLGIMENTO

$$E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{4\cdot 10^5\ \frac{op}{job}}{10^6\ op/s} = 0.4\,s$$

partiamo con SINGLE SERVER

▸ SENZA CLASSI DI PRIORITÀ

inizio col calcolare $E[T_q] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)E[S]}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{(\lambda\cdot E[S])E[S]}{1-\lambda E[S]} =$

$$= \frac{1\cdot 0.4\cdot 0.4}{1-1\cdot 0.4} = 0.2\bar{6}$$

di conseguenza $E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.2\bar{6} + 0.4 = 0.6\bar{6}$

non rispetta NULLA.

▸ CON CLASSI DI PRIORITÀ

Poiché i QoS riguardano metriche del SISTEMA generale e non delle singole classi, passo al caso PREEMPTIVE, in quanto dalla teoria sappiamo che CODE NON PREEMPTIVE non apportano miglioramenti generali, ma solo locali

▸ CLASSI PRIORITÀ PREEMPTIVE

Per la classe 1, che vede solo se stessa, abbiamo:

$E[T_{q_1}] = \frac{\rho_1 E[S]}{1-\rho_1}$ con $\rho_1 = p_1\cdot\rho$. Dovrei trovare p_1 tale che $E[T_q] < 0.15\,s$ ma notiamo che il testo chiede come 2° requisito che $E[T_s] < 0.5$ per almeno il 35% dei job. Proviamo con $p_1 = 0.35$

$$E[T_{q_1}] = \frac{p_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot E[S]}{1-p_1\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{p_1\lambda E[S]^2}{1-p_1\lambda E[S]} = \frac{0.35\cdot 1\cdot 0.4^2}{1-0.35\cdot 1\cdot 0.4} = 0.06$$

$$E[T_{q_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} \underset{\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.4}{=\!=\!=} \frac{0.4\cdot 0.4}{(1-0.35\cdot 0.4)\cdot(1-0.4)} = 0.31$$

da cui $E[T_{q_{generale}}] = E[T_{q_1}]\cdot p_1 + E[T_{q_2}]\cdot p_2 = 0.065\cdot 0.35 + 0.31\cdot 0.6$

$= 0.2243\,s$, non rispecchia il 1° QoS!

Se trovassi altro p_1? Impongo che:

$$E[T_{q_1}] = \frac{p_1\cdot\rho\cdot E[S]}{1-p_1\cdot\rho} = 0.15, \text{ sviluppo:}$$

$$p_1\cdot 0.4\cdot 0.4 = 0.15 - p_1\cdot 0.15\cdot 0.4$$

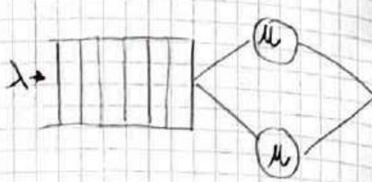
$$p_1(0.16 + 0.06) = 0.15 \rightarrow p_1 = 0.68$$

da cui $E[T_{q_1}] = 0.149$, ma comunque non rispetto!

$$\left(\underbrace{0.149}_{E[T_{q_1}]}\cdot\underbrace{0.68}_{p_1} + \underbrace{0.36}_{E[T_{q_2}]}\cdot\underbrace{0.32}_{p_2} = 0.21\right)$$

▸ Passiamo al Dual Core

Ogni core ha $E[S_i] = E[S] \cdot 2 = 0.8$ (impiega il doppio). Trattasi di M/M/2, Erlang C



Calcolo:

$$p(0) = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\right]^{-1} =$$

$$\stackrel{m=2}{=} \left[1 + 2\rho + \frac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)}\right]^{-1} = 0.428571$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m \cdot \mu_{1/2}} = 0.4$$

$\rho = \frac{\text{entrata max}}{\text{uscita max}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu_i}$ con μ_i del server "a metà" $E[S_i]$ solo nel calcolo di $E[T_S]$

Calcolo $P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} p(0) = \frac{(2 \cdot 0.4)^2}{2(1-0.4)} \cdot 0.428571 = 0.2285712$

e quindi Erlang C $E[T_q] = \frac{P_Q E[S]}{1-\rho} = \frac{(0.2285712) \cdot 0.4}{1-0.4} = 0.1523808$

$$E[T_S] = E[T_q] + E[S_i] = 0.1523808 + 0.8 = 0.9523808 > 0.5$$

Neanche questa soluzione va bene? Se unisco le 2 tecniche?

▸ Multiserver multicoda

$$E[T_q] = p_1 \cdot \frac{P_{Q_1} E[S]}{1-\rho_1} + p_2 \cdot \frac{P_Q \cdot E[S]}{(1-\rho)(1-\rho_1)}$$

Dal 2° QoS: $p_1 = 0.35$, $p_2 = 0.65$,

$\rho = 0.4 \rightarrow \rho_1 = 0.35 \cdot 0.4 = 0.14$, $\rho_2 = 0.26$

Calcolo $P_Q(\rho_1)$, in funzione di ρ_1:

$$p(0) = \left[1 + 2\rho_1 + \frac{(2\rho_1)^2}{2(1-\rho_1)}\right]^{-1} = \left[1 + 2 \cdot 0.14 + \frac{(2 \cdot 0.14)^2}{2(1-0.14)}\right]^{-1} = 0.7543$$

$$P_Q(\rho_1) = \frac{(2\rho_1)^2 \cdot p(0)}{2(1-\rho_1)} = \frac{(2 \cdot 0.14)^2 \cdot 0.7543}{2 \cdot (1-0.14)} = 0.03438$$

Per la seconda coda riuso i pezzi di prima (vedi formula)

$$E[T_q] = 0.35 \cdot \frac{0.03438 \cdot 0.4}{1-0.14} + 0.65 \cdot \frac{0.2285712 \cdot 0.4}{(1-0.14)(1-0.4)} =$$

$$= 0.12076 < QoS = 0.15 \quad !!$$

• Il 2° QoS basterebbe rispettarlo per la classe 1 (35%) ma

$$E[T_{S1}] = E[T_{q1}] + E[S] = \frac{0.03438 \cdot 0.4}{1-0.14} + 0.4 = 0.41599 < QoS = 0.5$$

è $E[S]$, non $E[S_i]$ perché per prelazione un job di classe 1 avrà a disposizione i due server (non che li usa entrambi, ma non viene restituito come i job di classe 2!)

Consider a web server with the following system characteristics:

- Single processor with capacity 10^5 op./sec
- Exponential mean service demand 4×10^4 op./job
- System utilization 60%.

By knowing the job size, the service provider adopts a simple Size Based - priority scheduling without preemption: jobs with size less (or equal) than the average will have the highest priority (class 1); jobs with size greater than the average have the lowest priority (class 2). Determine:

a. the mean response time for both classes and the global mean response time.

The service provider wants to investigate if a dual core server would improve the service performance.

b. Conjecture the behaviour of the performance measures for both classes, by writing the mean waiting and response time definition for the dual core case.

→ solo formule, non calcoli.

SVOLGIMENTO

$C = 10^5$ op/s, $Z = 4 \cdot 10^4$ op/job $\rightarrow E[S] = \frac{Z}{C} = 0.4$ s ← exponential

da cui $\mu = \frac{1}{E[S]} = \frac{1}{0.4} = 2.5$ j/s

$\rho = 0.6 = \frac{\lambda}{\mu} \rightsquigarrow \lambda = \rho \cdot \mu = 0.6 \cdot 2{,}5 = 1{,}5$ j/s

- Size Based SENZA PRELAZIONE
  - classe 1: job con size $\leq Z = 4 \cdot 10^4$ op/job
  - classe 2: job con size $> Z = 4 \cdot 10^4$ op/job

a) $E[T_{S_1}]$? $E[T_{S_2}]$? $E[T_S]$?

Come prima cosa voglio sapere i job che vanno in classe 1, ovvero cadenti nell'area che descrive $P(E[S] \leq 0.4)$.

Trattandosi di esponenziale, cerchiamo $F(\frac{1}{\mu}) - F(0)$ con $F = 1 - e^{-\mu t}$. Uso μ e $\frac{1}{\mu}$ (media), è più convenzionale rispetto ad usare $E[S]$ ed $\frac{1}{E[S]}$ CREDO.

$P_1 = \left[1 - e^{-\mu t}\right]_0^{\frac{1}{\mu}} = 0{,}6321$ $\rightsquigarrow$ check: $\sum_{i=1}^{2} P_i = 1$ ✓

$P_2 = \left[1 - e^{-\mu t}\right]_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} = 0{,}36788$

Note P_1 e P_2, possiamo calcolare $E[S_k] = \int_{x_{k-1}}^{x_k} t \cdot f^{*}(t)\, dt$,

con $f^{*}(t) = \frac{f(t)}{F(x_k) - F(x_{k-1})}$, $f(t) = F'(t) = (1 - e^{-\mu t})' = \mu e^{-\mu t}$ per l'esponenziale!

- $E[S_1] = \int_0^{\frac{1}{\mu}} t \cdot \frac{\mu e^{-\mu t}}{P_1} dt = \frac{1}{P_1} \int_0^{\frac{1}{\mu}} \underset{f}{t} \cdot \underset{g'}{\mu e^{-\mu t}}\, dt \Rightarrow$ PARTI

$\frac{1}{P_2}\left[+\int_0^{\frac{1}{\mu}} 1 \cdot e^{-\mu t} + t \cdot (-) \cdot e^{-\mu t}\right] = \frac{1}{P_1}\left[-\frac{1}{\mu} \cdot e^{-\mu t}\Big|_0^{\frac{1}{\mu}} - t e^{-\mu t}\Big|_0^{\frac{1}{\mu}}\right] =$

$= \frac{1}{0.6321}\left[-0.4 \cdot \left[e^{-1} - 1\right] - 0.4 \cdot e^{-1}\right] = 1{,}5820\left[-0{,}14715 + 0.4 - 0.14715\right]$

$= 0{,}1672174$ s

- $E[S_2] = \frac{1}{P_2}\left[-t e^{-\mu t}\Big|_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\Big|_{\frac{1}{\mu}}^{\infty}\right] = 2{,}7181\left[0 + \frac{1}{\mu} e^{-1} - 0 + \frac{1}{\mu} e^{-1}\right]$

$= 0{,}7999$ s

Posso a $E[T_{a_1}] \overset{\text{SB\_NP\_esponenziale}}{=} \frac{\rho E[S]}{1 - \rho_1}$; $E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)}$

Non c'è bisogno di usare $E[T_{a_k}] = \frac{\lambda/2\; E(S^2)}{\left(1 - \lambda \int_0^{x_k} t \cdot f(t)\, dt\right)\left(1 - \lambda \int_0^{x_{k-1}} t \cdot f(t)\, dt\right)}$

perché posso calcolare $\begin{cases} \rho_1 = \lambda_1 E[S_1] \\ \rho_2 = \lambda_2 E[S_2] \end{cases}$ per Little ; $\lambda_1 = P_1 \cdot \lambda = 0.94815$, $\lambda_2 = P_2 \cdot \lambda = 0.55185$

$\rho_1 = 0.94815 \cdot 0{,}1672 = 0.15853$;

$\rho_2 = 0.55185 \cdot 0{,}8 = 0{,}44148$;

Faccio lo stesso calcolo, per completezza, con l'integrale sopra.

$\rho_1 = \lambda \int_0^{1/\mu} t \cdot \mu e^{-\mu t}\, dt \overset{PARTI}{=} \lambda \left[-t e^{-\mu t}\Big|_0^{1/\mu} + \int_0^{1/\mu} e^{-\mu t} \right] =$

$= \lambda \left[\frac{-1}{\mu} e^{-1} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\Big|_0^{1/\mu} \right] = \lambda\left[-\frac{1}{\mu}e^{-1} - \frac{1}{\mu}(e^{-1}-1)\right] =$

$= 1,5\,(-0,4e^{-1} - 0,4e^{-1} + 0,4) = 0.1585$

$\Rightarrow E[T_{a_1}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)}$ = come prima appunto = $\frac{0.6 \cdot 0.4}{1-0.1585} = 0.2852$

$E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{0.6 \cdot 0.4}{(1-0.1585)(1-0.6)} = 0.7130\, s$

$E[T_a] = p_1 E[T_{a_1}] + p_2 E[T_{a_2}] = 0,443003\, s$

Ora passo ai veri $E[T_{s_1}]$, ho tutto!

$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0.2852 + 0,1672 \approx 0.452\, s$

$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0,7130 + 0,7999 \approx 1,513\, s$

$E[T_s] = p_1 E[T_{s_1}] + p_2 E[T_{s_2}] = 0.6321 \cdot 0.452 + 0.36788 \cdot 1,513$

$= 0.842311$

Adesso passo al dualcore, capacità dimezzata $\frac{10^5}{2}$ op/sec, cambia il contesto, infatti parlando SOLO di dual core allora cambio solo quello; p_1, p_i, λ_i.. invariati! Scheduling astratto con coda prioritaria

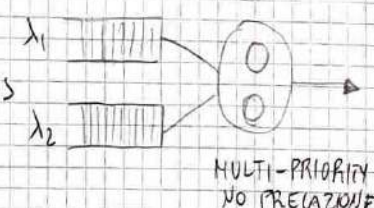
Calcolo $p(0) = \left(\sum_{i=0}^{1} \frac{(2\rho)^i}{i!} + \frac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)} \right)^{-1} =$

$= \left(1 + 2\cdot 0,6 + \frac{(2\cdot 0.6)^2}{2(1-0.6)} \right)^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$

NB: ρ invariato, $\rho = \frac{\text{max entrata}}{\text{max uscita}} = \frac{\lambda}{m\mu_{\text{dimezzato}}} = \frac{\lambda}{2\cdot\left(\frac{\mu}{2}\right)} = \frac{\lambda}{\mu}$

$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}\, p(0) = \frac{(2\cdot 0.6)^2}{2(1-0.6)} \cdot 0.25 = 0.45$

$E[T_{a_1}] = \frac{P_Q\, E[S]}{1-\rho_1} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{1-0.1583} \approx 0,21385$



quella di prima? $\lambda \cdot p_1$?

$E[T_{a_2}] = \frac{P_Q \cdot E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{0,18}{(1-0.1583)(1-0.6)} = 0,5346\, s$

$E[T_a] = p_1 \cdot E[T_{a_1}] + p_2 \cdot E[T_{a_2}] = 0,33176$

NO PRELAZIONE

$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0,2139 + 2E[S_1] = 1,0139\, s$ 0.5483348

$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0,5346 + 2E[S_2] = 1,3346\, s$ 2.1346

$E[T_s] = p_1 E[T_{s_1}] + p_2 E[T_{s_2}] = 0.6321 \cdot \cancel{1,0139} + 0.3678 \cdot \cancel{1,3346} =$ 0.5483348 2.1346

$= 1.1318\, s$

Con dual core: $E[T_a] \searrow$, $E[T_s] \nearrow$

SB →

1. Il responsabile di uno sportello comunale per il rilascio di certificati anagrafici vuole investigare le prestazioni del servizio. Analizzando lo storico dell'attività, si desume che una distribuzione uniforme *Uniform*(2, 15)[1] può ben caratterizzare il tempo di servizio (espresso in min). Gli utenti, identificati con la propria richiesta, arrivano in modo random con frequenza 0.112 req/min. Si assuma che sia possibile conoscere il tempo di servizio della pratica all'istante di arrivo. Si calcolino i seguenti indici:
   - 1.a. tempi di attesa e risposta per una pratica qualsiasi;
   - 1.b. i tempi di attesa e risposta per classi e globali assumendo di usare un meccanismo prioritario opportunamente scelto (senza prelazione);
   - 1.c. lo slowdown condizionato, per richieste di 5 min e di 10 min, nel caso 1.a;
   - 1.d. lo slowdown condizionato, per richieste di 5 min e di 10 min, nel caso 1.b;

Si commenti al riguardo del vantaggio della soluzione al punto 1.b. Indicare le assunzioni utilizzate per la soluzione.

$\mathrm{Unif}(\underset{a}{2}, \underset{b}{15})$ $\qquad \lambda = 0.112$ req/MIN

SVOLGIMENTO

$\lambda = 0.112$ [req/min], size based (tempo servizio noto) NO PRELAZ.

1.a) $E[T_a]$ e $E[T_s]$?

$$E[T_{a_1}] = E[T_a] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{\left(1 - \underbrace{\lambda \int_0^{x_k} t \cdot f(t)\,dt}_{\rho_k = \lambda_k \cdot E[S_k]}\right)}$$

→ non è exp → $\rho E[S]$ NO

$$\sigma_S^2 = E[S^2] - E[S]^2 \rightarrow E[S^2] = \sigma_S^2 + E[S]^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 14{,}08 + 72{,}25 = 86{,}3 \text{ min}$$

mentre $E[S] = \sqrt{E[S]^2} = 8.5$ min

Calcolo $\int_0^{x} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^{x} t \cdot \frac{1}{b-a}\,dt = \int_0^{x} t \cdot \frac{1}{13}\,dt = \;?$

Non so dove integrare, però so che per le size based posso sempre usare Little: $\rho = \lambda E[S] = 0.112 \cdot 8{,}5 = 0{,}952$

$$\rightarrow E[T_a] = \frac{\frac{0.112}{2} \cdot 86{,}3}{1 - 0.952} = 100{,}722 \text{ min}$$

→ alla fine è una KP

$$E[T_s] = E[T_a] + E[S] = 109{,}2 \text{ min}$$

1 b) $E[T_a]$, $E[T_s]$, $E[T_{a_k}]$, $E[T_{s_k}]$ usando code con priorità senza prelazione.

L'operazione più semplice è dividere in base a $E[S] = 8.5$ min, come nell'esercizio precedente!

Calcolo le proporzioni delle classi

$p_1 = F(E[S]) - F(a)$ con $F = \frac{x-a}{b-a}$ (cumulativa uniforme)

$$= \frac{8.5-2}{13} - \frac{2-2}{13} = \frac{1}{2} = 0.5 = p_2$$

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \cdot 0{,}5 = 0{,}056$

$$E[S_1] = \int_2^{8.5} t \cdot \frac{f'(t)}{p_1} = 2 \cdot \int_2^{8.5} t \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{2}{13} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_2^{8.5} = \frac{1}{13}(8{,}5^2 - 4) = 5.25$$

$$E[S_2] = \frac{1}{13}(15^2 - 8{,}5^2) = 11.75 \text{ min}$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{1 - \rho_1} \; ; \; E[T_{a_2}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{(1-\rho_1)(1-\rho)}$$

$\rho_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = 0{,}056 \cdot 5{,}25 = 0{,}294$ $\qquad$ ho tutto

$\rho_2 = \lambda_2 \cdot E[S_2] = 0{,}056 \cdot 11{,}75 = 0{,}658$

$$E[T_{a_1}] = \frac{\frac{0.112}{2} \cdot 86{,}3}{1 - 0.294} = 6{,}84 \text{ min}$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{\frac{0.112}{2} \cdot 86{,}3}{(1-0.294)(1-0.952)} = 142{,}6604 \text{ min}$$

→ ρ precedente!

$E[T_a] = p_1 \cdot E[T_{a_1}] + p_2 \cdot E[T_{a_2}] = 0.5\left(6.84 + 142.6604\right) = 74.75$

minore del caso precedente!

$E[T_{S_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 6.84 + 5.25 = 12{,}09$ min

$E[T_{S_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 142{,}66 + 11{,}75 = 154{,}41$ min

$E[T_S] = p_1 E[T_{S_1}] + p_2 E[T_{S_2}] = 0.5\left(12.09 + 154.41\right) = 83{,}25$ min

minore del caso precedente!

1.c slowdown per 5 e 10 min nel caso 1.a

Nel caso 1.a non ho partizionato la coda $E[T_S(x)] = \frac{E[T_a]+x}{x}$

$E[T_S(x)] = \frac{E[T_a]+x}{x}$ $\quad \frac{100.7+5}{5} = 21.144$

e $\frac{100.7+10}{10} = 11{,}072$

1.d slowdown per 5 e 10 min nel caso 1.b

Qui ho due `code` $5 < 8.5 \rightarrow E[T_{S_1}]$,

$10 > 8.5 \rightarrow E[T_{S_2}]$

- $E[T_S(x \in \text{classe } 1)] = \frac{E[T_{a_1}]+x}{x} = \frac{6.84+5}{5} = 2.36$
- $E[T_S(x \in \text{classe } 2)] = \frac{E[T_{a_2}]+x}{x} = \frac{142.66+10}{10} = 15.266$

Consider a web server with processing capacity $C = 10^5$ op/sec. The server receives requests with a mean rate 2 req/sec. The requests have different demand Z. Consider the following intervals:

- $Z < 20.000$ op
- $20.000 \text{ op} \leq Z < 40.000$ op
- $Z \geq 40.000$ op

By assuming that: Z = avg demand

i. the mean size is 40.000 op, characterized by an exponential distribution;
j. the arrival rate is characterized by a Poisson process;

Define a management mechanism of the server to satisfy the following QoS requirements:

1. Mean response time ≤ 1.5 s for all requests
2. Mean waiting time ≤ 0.5 s, for $Z < 40.000$ op.ni.

Evaluate

a. The mean *throughput* for the server with the chosen management mechanism;
b. The mean *conditional slowdown* for jobs with size x=0.1 s, 0.3 s
c. Compare the mean slowdown obtained in b. with the corresponding mean slowdown for FIFO and PS scheduling.

Please comment all the obtained results.

SVOLGIMENTO

- $C = 10^5$ op/s, $\lambda = 2 \frac{req}{s}$, $Z = \begin{cases} Z < 20K \\ 20K \leq Z < 40K \\ Z \geq 40K \end{cases}$
- Z medio $= 40K \frac{op}{s}$ ESPONENZIALE
- λ è di Poisson.

QoS:

1) $E[T_S] \leq 1.5$ $\forall$ richiesta 2) $E[T_a] \leq 0.5$ se $Z < 40K$

$E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^5} \frac{[op]}{\left[\frac{op}{s}\right]} = 0.4 \text{ s} \rightsquigarrow \mu = \frac{1}{E[S]} = 2{,}5 \left[\frac{Job}{s}\right]$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2.5} = 0.8$

Possiamo suddividere in 3 classi, perché il testo classifica tre tipi di richieste. Inoltre, la size based non è mai peggiorativa nelle singole classi, mentre globalmente va sempre meglio rispetto ad Abstract, quindi vado diretto con lui.

provo con NON PREEMPTIVE

Le 3 classi rispecchiano le 3 'z':

$C_1 = \left(0,\ \frac{2\cdot 10^4}{10^5} = 0.2\right)$; $C_2 = \left(0{,}2,\ \frac{4\cdot 10^4}{10^5} = 0.4\right)$; $C_3 = (0.4, \infty)$

CALCOLO le probabilità di appartenere a c_i:

$P_1 = F(0.2) - F(0) = 1 - e^{-\mu t}\Big|_0^{0.2} = 0.393469$

$P_2 = F(0.4) - F(0.2) = 0.238651$

$P_3 = F(\infty) - F(0.4) = 0.367879$

check $\sum p_i = P_1 + P_2 + P_3 \approx 1$

NB: essendo size based, p_i dipende dalla cumulativa dell'esponenziale ovvero dall'area occupata, che dipende da quanto il job chiede. La cumulativa dipende da μ, perché è la domanda media ad essere esponenziale, λ non c'entra nulla, è di Poisson. Inoltre la probabilità è adimensionale $\rightarrow e^{-\mu t}$ adimensionale $\rightarrow$ $-\mu t$ adimensionale $\iff \left[\frac{1}{s}\right]\cdot[s]$, frequenza, cioè tasso μ

Calcoliamo i tempi di servizio per le varie classi, $E[S_k]$

Generalmente:

$$E[S_k] = \int_a^b \frac{t\cdot \mu e^{-\mu t}}{p_i}\,dt = \frac{1}{p_i}\int_a^b \underset{f}{t}\cdot \underset{g'}{\mu e^{-\mu t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{p_i}\left[\underset{f}{t}\cdot \underset{g}{(-e^{-\mu t})} - \int_a^b \underset{f'}{1}\cdot \underset{g}{(-e^{-\mu t})}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{p_i}\left[-t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right]_a^b$$, lo applico ai singoli casi

$$E[S_1] = \frac{1}{0.393469}\left[-0.2\cdot e^{-2{,}5\cdot 0{,}2} - \frac{1}{2.5}\left(e^{-2.5\cdot 0{,}2} - 1\right)\right]$$

$= 0.0917013$ s

$a = \emptyset$
$b = 0.2$

$$E[S_2] = \frac{1}{0.238651}\left[-0.4\cdot e^{-2{,}5\cdot 0{,}4} + 0.2 e^{-2{,}5\cdot 0{,}2} - \frac{1}{2{,}5}\left(e^{-2{,}5\cdot 0{,}4} - e^{-2{,}5\cdot 0{,}2}\right)\right]$$

$= 0.291701$ s

$a = 0.2$
$b = 0.4$

$$E[S_3] = \frac{1}{0.367879}\left[+0.4 e^{-2{,}5\cdot 0{,}4} - \frac{1}{2.5}\left(\emptyset - e^{-2.5\cdot 0{,}4}\right)\right] =$$

$= 0{,}800001$ s

$b = \infty$
$a = 0.4$

- Ora calcolo $E[T_{Qk}] = \dfrac{\rho E[S]}{\left(1 - \sum_{i=0}^{k} \rho_i\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \rho_i\right)}$ → perché exp

$\rho_i = \lambda_k \cdot E[S_k]$, più semplice dell'integrale.

$\lambda_k = \lambda \cdot p_k$

$\lambda_1 = 2\cdot 0{,}393469 = 0{,}786938$, $\lambda_2 = 2\cdot 0{,}238651 = 0{,}477302$

$\lambda_3 = 2\cdot 0{,}367879 = 0{,}735758$

check $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \approx 2 = \lambda$ ✓

- Calcolo i vari ρ_k

$\rho_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = 0{,}786938 \cdot 0{,}0917013 = 0{,}07216$

$\rho_2 = \lambda_2 \cdot E[S_2] = 0{,}477302 \cdot 0{,}291701 = 0.13922$

$\rho_3 = \lambda_3 \cdot E[S_3] = 0{,}735758 \cdot 0{,}8 = 0{,}58860$

check: $p_1 + p_2 + p_3 \approx 0.8$ ✓

Ciò che devo fare è calcolare $E[T_{Q_k}]$, $E[T_{S_k}]$ e vedere l'andamento generale e rispetto il QoS.

$$E[T_{Q_1}] = \frac{\rho \cdot E[S]}{1-\rho_1} = \frac{0.8 \cdot 0,4}{1-0.07216} = 0,34488 \text{ s}$$

$$E[T_{Q_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)} = 0,4373380 \text{ s}$$

$$E[T_{Q_3}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3)} = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho)} = 2,02886 \text{ s}$$

Notiamo che $E[T_{Q_1}]$ e $E[T_{Q_2}] < 0.5$, quindi senza fare la media possiamo dire che i tempi in coda medi di C_1 e C_2 rispettano il vincolo < 0.5

Calcoliamo $E[T_{S_i}]$

- $E[T_{S_1}] = E[T_{Q_1}] + E[S_1] = 0,34488 + 0,09170 = 0,43658$
- $E[T_{S_2}] = E[T_{Q_2}] + E[S_2] = 0,4373338 + 0,291701 = 0,729034$
- $E[T_{S_3}] = E[T_{Q_3}] + E[S_3] = 2,02886 + 0,8 = 2,82886$

calcolo $E[T_S] = \sum p_i E[T_{S_i}] =$

$= (0.393469 \cdot 0,43658) + (0,238651 \cdot 0,729039) + (0,367879 \cdot 2,82886) =$

$= 1,38644477 < 1,5$ VINCOLO RISPETTATO.

NB: noto $E[S]$ medio $= 0.4$, potevo fare $E[T_S] = 0.4 + \sum p_i \cdot E[T_{Q_i}]$

PARTE "VALUTATIVA"

a) throughput medio del server

$\rho = 0.8 < 1$ ⇝ throughput è $\lambda = 2$, sistema stabile.

b) slowdown per size $x = 0.1$ e $x = 0.3$

se $x = 0.1$ → classe 1 ⇝ $\text{slowdown}(0.1) = \frac{E[T_{Q_1}] + x}{x} = 4,4488$

se $x = 0.3$ → classe 2 ⇝ $\text{slowdown}(0,3) = \frac{E[T_{Q_2}] + x}{x} = 2,45779$

c) compara con modello FIFO lo slowdown

IN FIFO: $E(sd(x)) = \frac{E[T_S(x)]}{x} = 1 + \frac{\frac{\lambda}{2} E(S^2)}{x(1-\rho)}$,

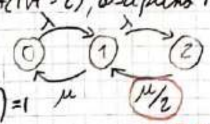
poiché caso exp diventa: $1 + \frac{\rho E[S]}{x(1-\rho)}$

$$E[sd(0.1)] = 1 + \frac{0.8 \cdot 0,4}{0.1(1-0.8)} = 17$$

$$E[sd(0.3)] = 1 + \frac{0.8 \cdot 0,4}{0.3(1-0.8)} = 6,33333$$

Assumo che web server possa tenere solo 2 job (CAPACITÀ = 2), disciplina PS.

- P_{loss} probability



è PS

Ho equazioni
$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \pi_1(\lambda+\mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \frac{\mu}{2} \\ \pi_2 \frac{\mu}{2} = \pi_1 \cdot \lambda \\ \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \pi_0\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda^2}{\mu^2}\right) = 1 \\ \pi_2 = \pi_1 \frac{2\lambda}{\mu} = \pi_0 \frac{2\lambda^2}{\mu^2} \\ \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \end{cases}$$

Trovo $\pi_0 = \left.\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 2\frac{\lambda^2}{\mu^2}}\right|_{\lambda=2,\ \mu=2.5} = 0,3246$, allora: $\begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot 0,3246 = 0.2597 \\ \pi_2 = 2\frac{\lambda^2}{\mu^2} 0,3246 = 0,3324 \end{cases}$

$P_{LOSS} = \pi_2 = 0,3324$

- media e varianza del numero di richieste

$E[\text{richieste}] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2\pi_2 = 0,9245$

$\sigma^2[\text{richieste}] = E[\text{richieste}^2] - (E[\text{richieste}])^2 =$
$= (1 \cdot \pi_1 + 2^2 \cdot \pi_2) - (0,9245)^2 = 0,7346$

- probabilità sistema vuoto?

è $\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 2\frac{\lambda^2}{\mu^2}} = 0.3246$

- throughput del sistema:

$X = \min(\lambda', \mu)$ dove $\lambda' = \lambda(1 - P_{Loss}) = 2(1 - 0,3324) = 1,3352$

allora $X = 1,3352$

1.2. Consider a single-core server hosting a web service. Requests arrive to the server according to a Poisson, with an average inter-arrival time of 200 ms.

1. a. Knowing that the maximum buffer size is N = 4 (including the jobs in service) and that each request requires on average 200 ms of processing time, compute the throughput of the system.
2. b. Consider a CPU upgrade to a faster single-core processor which can process a request in 150 ms. Compute the throughput of the upgraded system.
3. c. Consider a CPU upgrade to a slower quad-core processor, which can process a request in 300 ms using one of its processor cores. Compute the throughput of the upgraded system.

→ non può accogliere più di 4 Job, solo 4 server, NO CODA

SVOLGIMENTO

a) arrivi Poisson, $\lambda = \frac{1}{200\text{ ms}} = 5 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{ms}\right] = 5\ J/s$

$E[S] = 200$ ms, da cui

$\mu = \frac{1}{E[S]} = \frac{1}{200\text{ ms}} = 5\ J/s$

$N = 4, (3+1)$

Nel sistema entra $\lambda' = \lambda(1 - P_{LOSS})$, dove:

$P_{LOSS} = \pi_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \cdot \pi_0$, calcoliamo prima π_0.

$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{5}{5}\right)^i}$, lo mettiamo in P_{LOSS},

$$P_{Loss} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{\left(\frac{5}{5}\right)^4}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{5}{5}\right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} 1} = \frac{1}{5} = 0.2$$

allora $\lambda' = 5(1 - 0.2) = 4$ da cui

$X = \min(\lambda', \mu) = \min(4, 5) = 4.$

b) il single core passa a $E[S'] = 150$ ms, da cui ricaviamo $\mu' = \frac{1}{150\text{ ms}} = 6.6\ J/s$

Le formule non cambiano, cambia solo μ'.

$$P_{LOSS} = \frac{\left(\frac{5}{6.6}\right)^4}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{5}{6.6}\right)^i} = 0.10371 \qquad (\text{con } \pi_0 = 0.327785)$$

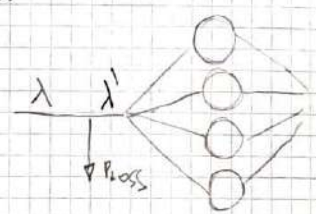
allora

$\lambda' = \lambda(1 - 0.10371) = 4.481432734$, infine

$X' = \min(\lambda', \mu') = 4.481432734$

c) passo a 4 core (quindi diventa SENZA CODA e 4 multiple server). Ogni core processa $E[S] = 300$ ms.

Allora $\mu'' = \frac{1}{300\text{ ms}} = 3.\overline{3}\ J/s$



Nel caso NO CODA si usa Erlang-B.

$\pi_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \cdot \frac{\pi_0}{4!}$ con $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}}$

$$\pi_4 = \left(\frac{5}{3.3}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{5}{3.3}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = 0.048 = P_{LOSS}$$

allora $\lambda'' = \lambda(1 - P_{LOSS}) = 5(1 - 0.048) = 4.76\ J/s$

Allora $X'' = \min(\lambda'', m \cdot \mu'') = \min(4.76, 13.\overline{3}) = 4.76 = X''$

Esercizio

$E[S] = 0.4$, NO PENALITA' se $T_Q \le 0.45$, GUADAGNO se $T_Q < 0.4$

Nelle slide sono presenti diverse λ e ρ. Decido di lavorare con $\lambda = 2$ J/s.

- **CASO NO SIZE BASED e NO PRELAZIONE**

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8$ $\qquad E[T_{Q_1}] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho_1} < 0.45?$

$$\frac{\rho E[S]}{1-\rho \cdot p_1} < 0.45 \rightarrow \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{1-0.8 p_1} < 0.45 \rightarrow 0{,}32 = 0.45 - 0{,}36 p_1$$

$$\rightarrow 0{,}36 p_1 = 0.45 - 0.32 \rightarrow p_1 = \frac{0.45-0.32}{0.36} \approx 0.36$$

Con $p_1 = 36\%$ ho $E[T_{Q_1}] = 0.4494$ s

Con $p_2 = 64\%$ ho $E[T_{Q_2}] = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{(1-\underset{\uparrow \, 0.288}{\rho_1})(1-\rho)} = 2.247$

$E[T_Q] = 0.36 \cdot E[T_{Q_1}] + 0.64 \cdot E[T_{Q_2}] = 1.6$

NON CI SIAMO PROPRIO - cit Franchino.

Anche se ponessi il vincolo sul guadagno $T_Q < 0.4$ uguale

Era prevedibile?

Sì, l'abstract migliora localmente, non in generale!

- **SIZE BASED NO PRELAZIONE**

Normalmente, partiziono rispetto alla size del job pari alla media delle job sizes, cioè $E[S]$

- classe 1 $(0, E[S] = 0.4)$ - classe 2 $(0{,}4, +\infty)$

$$p_1 = F(0.4) - F(0) = 1 - e^{-\mu t}\Big|_0^{E[S]} = 1 - e^{-1} - (1-1) = 1 - \frac{1}{e} = 0.63$$

allora $p_2 = 1 - p_1 = 0.3679$

Calcolo: $E[S_k] = \int_{x_{k-1}}^{x} t \cdot f^{*}(t)\,dt = \int_{x_{k-1}}^{x} \frac{t \cdot f(t)}{p_k} = \int_{x_{k-1}}^{x} \frac{t}{p_k} \cdot \mu e^{-\mu t}\,dt$

$$= \frac{1}{p_k} \int_{x_{k-1}}^{x} \underset{f}{t} \cdot \underset{g'}{\mu e^{-\mu t}}\,dt \overset{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{p_k}\left(-te^{-\mu t} - \int -e^{-\mu t}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{p_k}\left(-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}\int -\mu e^{-\mu t}\,dt\right) = \frac{1}{p_k}\left(-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\right)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$$E[S_1] = \frac{1}{0.6321}\left(-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\right)_0^{E[S]} =$$

$$= \frac{1}{0.6321}\left[-0.4e^{-1} - 0.4e^{-1} - (0 - 0.4)\right] = 0.1672$$

$$E[S_2] = \frac{1}{0.3679}\left(-\cancel{0} - 0.4\cancel{/0} - \left(-\frac{0.4}{e} - \frac{0.4}{e}\right)\right] = 0.8 \text{ s}$$

NB: $E[S_k]$ mi serviva perché lo uso nel denominatore di $E[T_{Q_k}]$

$$E[T_{a_1}] \overset{exp}{=} \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_K)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{(1-\lambda_K E[S_K])} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{(1-\lambda \cdot p_1 \cdot E[S_K])}$$

$$= \frac{0.8 \cdot 0{,}4}{(1-2 \cdot 0{,}6321 \cdot 0{,}1672)} = 0{,}40576$$

PROVA: $E[T_{a_1}] = \dfrac{\rho E[S]}{1-\lambda \int_0^{E[S]} t \cdot f(t)\,dt} = \dfrac{\rho E[S]}{1-\lambda \cdot p_1 \int_0^{E[S]} t \cdot \frac{f(t)}{p_1}\,dt} =$

$$= \frac{\rho E[S]}{1-\lambda \cdot p_1 \int_0^{E[S]} t \cdot f^n(t)\,dt} = \frac{\rho E[S]}{1-\lambda\, p_1 E[S_1]} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{1-2 \cdot 0{,}6321 \cdot 0.1672} = 0{,}40576 \checkmark$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{E[T_{a_1}]}{1-\rho} = \frac{0{,}40576}{0.2} = 2.0288$$

$$E[T_a] = p_1 E[T_{a_1}] + p_2 E[T_{a_2}] = 0.6321 \cdot 0{,}40576 + 0{,}3679 \cdot 2{,}0288 = 1{,}00 \text{ s.}$$

Meglio ma non basta!

Passiamo alle ABSTRACT e SIZE BASED CON PRELAZIONE

• ABSTRACT PREEMPTIVE

$$E[T_{a_1}] = \frac{\rho_1 E[S]}{1-\rho_1} = \frac{p_1 \cdot \rho \cdot 0{,}4}{1-\underbrace{p_1 \cdot \rho}_{0.28968}} = 0.16312$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = 2.0288$$

$$E[T_a] = 0{,}6321 \cdot 0{,}16312 + 2{,}0288 \cdot 0{,}3679 = 0.84950$$

• SIZE BASED PREEMPTIVE

$$E[T_{a_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^{x_K} t^2\,dF(t) + \frac{\lambda}{2} x_K^2 (1-F(x_K))}{1-\rho_1}$$

Chi è $t^2 dF(t)$? $\int t^2 \boxed{dF(t)} \longrightarrow F(t) = 1-e^{-\mu t} = y$

$e^{-\mu t} = 1-y$

$-\mu t = \ln(1-y)$

$t = -\dfrac{\ln(1-y)}{\mu}$

$$\int t^2 dF(t) = \int \left(-\frac{\ln(1-y)}{\mu}\right)^2 dy$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{\frac{2}{2}\int_0^{0.4} 0.4^2 [\ln(1-y)]^2 dy + \frac{2}{2} 0.4^2 (1-0.6321)}{1-0.289} =$$

$$= 0.225 \int_0^{0.4} \ln(1-y)^2\,dy + 0.08279$$

$1-y = z$ $\quad \to 1-0.4 = 0.6$ $\quad \to 1-0 = 1$ $\qquad -dy = dz$

$$= 0.225 \int_{0.6}^{1} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{(\ln(z))^2}\,dz + 0{,}08279 = 0.225 \left[z \cdot [\ln(z)]^2 - \int z \cdot 2\ln(z) \cdot \frac{1}{z}\,dz \right] + 0{,}08279$$

$$= 0.225 \left[z(\ln z)^2 - 2\int \underset{f'}{1} \underset{g}{\ln(z)}\,dz \right] + 0{,}08279$$

$$=0.225\left\{z(\ln z)^2 - 2\left[z\ln z - \int z\cdot\frac{1}{z}\,dz\right]\right\}\Big|_{0.6}^{1} + 0,08279 =$$

$$= 0.225\left\{z(\ln z)^2 - 2\left[z\ln z - z\right]\right\}\Big|_{0.6}^{1} + 0,08279$$

$$=0.225\left\{1\cdot 0 - 2\left[0-1\right] - 0.6(\ln 0.6)^2 + 2\left[0.6\ln 0.6 - 0.6\right]\right\} + 0,08279 =$$

$= 0.08963$

Passiamo a $E[T_{a_2}] = \int_0^{+1} \frac{0.4^2 \ln(1-y)^2\,dy + \emptyset}{(1-0.289)(1-0.8)} =$

$= 1.1235\int_0^{+1} \ln(1-y)^2\,dy = .. \; 1-y = z \to \emptyset, +1 \;,\; -dy = dz$

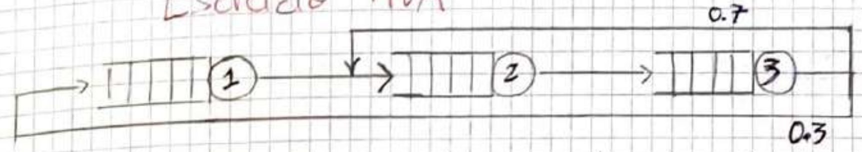
$1.1235\int_0^1 \ln(z)^2\,dy = 1.125\left[z(\ln(z))^2 - 2(z\ln z - z)\right]_0^1 =$

$= 1.1235\left[1\cdot\ln(1)^2 - \cancel{0\cdot\lim_{z\to 0}\ln(z)^2} - 2\left(0 - 1 - \cancel{0\cdot\lim_{z\to 0}\ln z} + 0\right)\right] = 2.247$

$E[T_a] = p_1 E[T_{a_1}] + p_2 E[T_{a_2}] =$

$= 0,6321\cdot 0,08963 + 0.3679\cdot 2,247 \simeq 0.88$

Esercizio MVA



DATI: $N=3$, $\mu_1 = 1$ j/s, $\mu_2 = \mu_3 = 2$ j/s

SVOLGIMENTO

Scriviamo le equazioni di bilanciamento

$$\begin{cases} y_1 = 0.3\,y_3 \\ y_2 = y_1 + 0.7\,y_3 \\ y_3 = y_2 \end{cases} \xrightarrow{y_3 \doteq 1} \begin{cases} y_1 = 0.3 \\ y_2 = 0.3+0.7 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

L'equivalente matrice di Routing è:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

• CALCOLO DELLE VISITE di "i" rispetto "j" $v_{ij} = \frac{Y_i}{Y_J}$

$\left[v_{1,1} = \frac{Y_1}{Y_1} = 1 \;;\; v_{2,1} = \frac{Y_2}{Y_1} = 3.\bar{3} \quad v_{3,1} = \frac{Y_3}{Y_1} = 3.\bar{3} \right]$ centro 1

$\left[v_{1,2} = \frac{Y_J}{Y_i} = \frac{Y_1}{Y_2} = 0,3 \;;\; v_{2,2} = v_{3,2} = \frac{Y_3}{Y_2} = 1 \right]$ centro 2

Le visite al centro 3 sono uguali: $v_{1,3} = 0.3$, $v_{2,3} = 1$, $v_{3,3} = 1$

• CALCOLO DEGLI INDICI DI PRESTAZIONI

Secondo l'algoritmo mva, dobbiamo partire dal sistema con $\emptyset$ Job, calcolare gli indici, passare al sistema con 1 Job, calcolare gli indici, rifarlo con 2 Job e poi con 3 Job. è incrementale poiché ricorsivo.

• $N=0$

Per definizione: $E[n_1(N=0)] = E[n_2(0)] = E[n_3(0)] \doteq \emptyset$

• $N=1$

$E[t_{centri}(N)] = E[S_{centri}] \cdot (1 + E_{n_{centri}}(N-1))$

$E[t_1(1)] = \frac{1}{\mu_1}(1 + E_{n_1}(0)) = 1(1+0) = 1$

$E[t_2(1)] = \frac{1}{\mu_2}(1 + E_{n_2}(0)) = 0.5(1+0) = 0.5$

$E[t_3(1)] = \frac{1}{\mu_3}(1 + E_{n_3}(0)) = 0,5(1+0) = 0.5$

tempi

entrate

$\lambda_1(N=1) = \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} v_{j,1} E(t_j(N))} = \frac{1}{1 \cdot 1 + 3,\overline{3} \cdot 0,5 + 3,\overline{3} \cdot 0,5} =$

$= 0,230769$

$\lambda_2(N=1) = \frac{1}{0,3 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5} = 0,76923$

$\lambda_3(N=1) = \lambda_2(N=1) = 0,76923$

popolazione

$E(n_1(N=1)) = \lambda_1(1) \cdot E[t_1(1)]$

$E(n_1(1)) = \lambda_1(1) \cdot E[t_1(1)] = 0,230769$

$E(n_2(1)) = \lambda_2(1) \cdot E[t_2(1)] = 0,3846155$

$E(n_3(1)) = \lambda_3(1) \cdot E[t_3(1)] = 0,3846155$

• $N=2$

$E[t_1(2)] = E[S_1] \cdot (1 + E_{n_1}(1)) = 1(1 + 0,230769) = 1,230769$

$E[t_2(2)] = E[S_2] \cdot (1 + E_{n_2}(2)) = 0,5(1 + 0,3846155) = 0,69230775$

$E[t_3(2)] = 0,69230775$

$\lambda_1(2) = \frac{2}{1 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 3.\overline{3} + 0,69 \cdot 3.\overline{3}} = 0,3430$

$\lambda_2(2) = \frac{2}{0,3 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 1 + 0,69 \cdot 1} = 1,1435$

$\lambda_3(2) = \frac{2}{0,3 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 1 + 0,69 \cdot 1} = 1,1435$

$E[n_1(2)] = \lambda_1(2) \cdot E[t_1(2)] = 0,3430 \cdot 1,230769 = 1,1435$

$E[n_2(2)] = 1,1435 \cdot 0,6923 = 0,791162$

$E[n_3(2)] = 1,1435 \cdot 0,6923 = 0,791162$

• $N=3$

$E[t_1(3)] = E[S_1](1 + E_{n_1}(2)) = 1 \cdot (1 + 0,4222) = 1,4222$

$E[t_2(3)] = E[t_3(3)] = 0,5(1 + 0,791661) = 0,8958505$

$\lambda_1(3) = \frac{3}{1 \cdot 1,4222 + 3,33 \cdot 0,8958 + 3,33 \cdot 0,8958} = 0,406051$

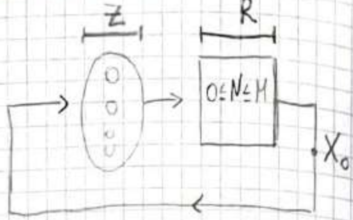
$\lambda_2(3) = \lambda_3(3) = \frac{3}{1,4222 \cdot 0,3 + 0,8958 \cdot 1 + 0,8958 \cdot 1} = 1,35244$

$E[n_1(3)] = 0,406051 \cdot 1,4222 = 0,577197$

$E[n_2(3)] = E[n_3(3)] = 1,3547 \cdot 0,895835 = 1,211402$

Esercizi Analisi Operazionale

① Ogni job genera 20 req/s, uso disco 50%, tempo medio servizio disco 0,025 s, 25 terminali, think time 18 s. Tempo risposta sistema interattivo?



SVOLGIMENTO

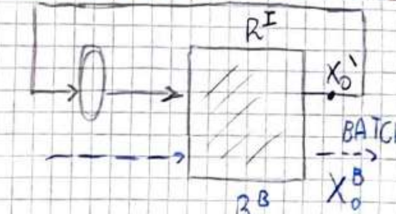
- $V_{DISK} = 20$ r/s • $U_{DISK} = 0.5$ • $S_{DISK} = 0.025$ s
- $M = 25$ • $Z = 18$ s

Il tempo di risposta interattivo è $R = \frac{M}{X_0} - Z$

Serve X_0, per la LEGGE DEL FLUSSO FORZATO $X_i = X_0 \cdot V_i$ da cui $X_0 = \frac{X_{DISK}}{V_{DISK}}$. Mi serve X_{DISK}, per la LEGGE DELL'UTILIZZAZIONE $U_i = X_i \cdot S_i$, da cui $X_{DISK} = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK}}$. Allora $X_0 = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK} \cdot V_{DISK}}$

Allora $R = \frac{25}{\left(\frac{0.5}{0.025 \cdot 20}\right)} - 18 = 7$ s

② SISTEMA MISTO



- $M = 40$ • $Z = 15$ s $R = 5$ s
- $S_{DISK} = 4 \cdot 10^{-2}$ s
- ∀ job interattivo ho 10 richieste al disco = $V^I_{DISK} = 10$ req/s
- ∀ job batch ho 5 richieste al disco = $V^B_{DISK} = 5$ req/s
- $U_{DISK} = 0.9$

SVOLGIMENTO

2.a) throughput del sistema batch?

Viene chiesto X_0^B, dal FLUSSO FORZATO $X^B_{DISK} = X^B_0 \, V^B_{DISK}$ allora $X^B_0 = \frac{X^B_{DISK}}{V^B_{DISK}}$

Mi serve X^B_{DISK}. ATTENZIONE: Non posso usare $X^B_{DISK} = \frac{U^B_{DISK}}{S^B_{DISK}}$, perché questi dati li ho GENERICI, non specifici per "B" e "I". Posso calcolare però

$$X_{DISK} = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK}} = \frac{0.9}{4 \cdot 10^{-2}} = 22.5 \text{ j/s}$$

OSSERVAZIONE: $X_{DISK} = X^B_{DISK} + X^I_{DISK}$!!

Posso trovare $X^I_{DISK} = \underbrace{X^I_0}_{\text{MANCA}} \cdot \underbrace{V^I_{DISK}}_{\text{NOTO}}$

Conosco il tempo di risposta interattivo! $R^I = \frac{M}{X_0^I} - Z = 5$

Allora $X_0^I = \frac{M}{Z+R^I} = 2$ J/s, da cui:

$$X^I_{DISK} = X_0^I \cdot V^I_{DISK} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ J/s}$$

Mettendo insieme $X^B_{DISK} = X_{DISK} - X^I_{DISK} = 22.5 - 20 = 2.5$ J/s

Finalmente: $X_0^B = \frac{X^B_{DISK}}{V^B_{DISK}} = \frac{2.5}{5} = 0.5$ J/s

2.b) Adesso tale throughput triplica. $X_0^B = 1.5$ J/s. R^I MINIMO?

Sappiamo che $R^I = \frac{M}{X_0^I} - Z$. "M e Z" fissi, vedo X_0^I.

$X_0^I = \frac{X^I_{DISK}}{V^I_{DISK}} = \frac{X_{DISK} - X^B_{DISK}}{V^I_{DISK}}$, devo $\nearrow$ numeratore

per avere $R^I \searrow$, cioè $X_{DISK} \nearrow$. Fino a quanto?

Il massimo è se l'utilizzazione $\rho \to 1$, ovvero servo tutto ciò che arriva, a "pieno regime",

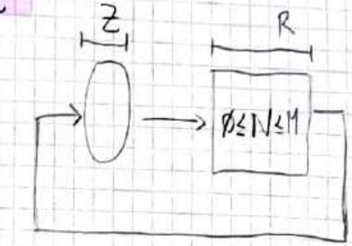
cioè $X_{DISK} = \frac{1}{S_{DISK}} = 25$ J/s (inverso tempo servizio).

da cui: $X_0^I = \frac{X_{DISK} - X^B_{DISK}}{V^I_{DISK}} = \frac{25 - (1.5 \cdot 5)}{10} = \frac{25 - 7.5}{10} = 1.75$ J/s

$X^B_{DISK} = X_0^B \cdot V^B_{DISK}$

conclusione: $R^I_{MIN} \geq \frac{M}{X_0^I} - Z = \frac{40}{1.75} - 15 = 7.9$ s

Esercizi lect27 Queue



①

- ogni Job genera 20 req/disk = V_{DISK}
- uso disco 50% = U_{DISK}
- tempo medio servizio 0.025 s = S_{DISK}
- terminali 25 = M
- think time 18 s = Z

Tempo di risposta interattivo?

Ci viene chiesto $R = \frac{M}{X_0} - Z$, di cui ci manca X_0.

Dalla legge dell'utilizzazione $U_i = X_i \cdot S_i \xrightarrow[\text{FORZATO}]{\text{FLUSSO}} (X_0 V_i) S_i$

a me serve allora: $X_0 = \frac{U_i}{V_i S_i} = \frac{U_{DISK}}{\underbrace{V_{DISK} S_{DISK}}_{\text{DOMANDA } D_{DISK}}} = \frac{0.5}{20 \cdot 0.025} = 1$ J/s

calcolo $R = \frac{25}{1} - Z = 25 - 18 = 7$ s

NOTA: $\frac{20 \text{ req}}{\text{DISK}}$ sono le VISITE, per parlare di DOMANDA devo considerare anche quanto chiedono, cioè S_i

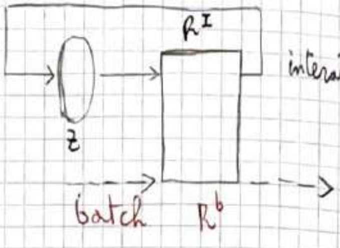
(2)

$M = 40$, $Z = 15s$, $R = 5s$

$S_{DISK} = 40 \cdot 10^{-3}\ s = 0.04\ s$

$V^{I}_{DISK} = 10$, $V^{B}_{DISK} = 5$

$U_{DISK} = 0.9$



· throughput del sistema batch?

Dal flusso forzato $X_0^B = \dfrac{X^B_{DISK}}{V^B_{DISK}}$, mi serve X^B_{DISK}.

$$X_{DISK} = X^B_{DISK} + X^I_{DISK} \rightsquigarrow X^B_{DISK} = \underbrace{X_{DISK}}_{①} - \underbrace{X^I_{DISK}}_{②}$$

① Dalla legge dell'utilizzazione $U_{DISK} = X_{DISK} S_{DISK}$, allora

$$X_{DISK} = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK}} = \frac{0.9}{0.04} = 22.5\ J/s$$

② La seconda componente è INTERATTIVA, allora posso usare

$$R = \frac{M}{X_0^I} - Z \rightarrow X_0^I = \left(\frac{R+Z}{M}\right)^{-1} = \frac{M}{R+Z} = \frac{40}{15+5} = 2\ J/s$$

mi serve insieme alla LEGGE FLUSSO FORZATO $X^I_{DISK} = X_0^I V^I_{DISK}$

$= 2 \cdot 10 = 20\ J/s$

allora $X^B_{DISK} = X_{DISK} - X^I_{DISK} = 22.5 - 20 = 2.5\ J/s$

e, concludendo, $X_0^B = \dfrac{X^B_{DISK}}{V^B_{DISK}} = \dfrac{2.5}{5} = 0.5\ J/s$

· Suppongo che $X_0^B = 1.5\ J/s$, lower bound per R^I?

$R^I = \dfrac{M}{X_0^I} - Z$ decresce se $X_0^I \nearrow$, come posso aumentarlo?

$$X_0^I = \frac{X^I_{DISK}}{V^I_{DISK}} = \frac{(X_{DISK} - X^B_{DISK})}{V^I_{DISK}}$$

$X^B_{DISK} = X_0^B V^B_{DISK} = 1.5 \cdot 5 = 7.5\ J/s$ è un valore "fisso", non posso massimizzarlo!

da massimizzare

$X_{DISK\,MAX}$ lo ho se $\rho \to 1$ (utilizzazione)

cioè se $X_{DISK\,MAX} = \dfrac{1}{S_{DISK}} = \dfrac{1}{0.04} = 25\ J/s$

allora $X_0^I = \dfrac{25 - 7.5}{10} = 1.75\ J/s$ e quindi

$$R^I = \frac{40}{1.75} - 15 = 7.9\ s$$

Bottleneck 30/05

① $T = 5$ min, $U_{CPU} = 0.3$, $D_{DISK} = 0.4$ s, $V_{DISK} = 10$, $U_{DISK} = 0.4$, $R = 15$ s, $N = 50$

Valore del think time? (Z)

Il think time Z viene dalla formula $R = \frac{M}{X_0} - Z$, dove ci manca X_0.

Per il flusso forzato $X_{DISK} = X_0 V_{DISK} \rightsquigarrow X_0 = \frac{X_{DISK}}{V_{DISK}}$, per la legge dell'utilizzazione $X_{DISK} = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK}}$,

allora $X_0 = \underbrace{\left(\frac{U_{DISK}}{V_{DISK}}\right) \frac{1}{S_{DISK}}} = \frac{U_{DISK}}{D_{DISK}} = \frac{0.4}{0.4} = 1$

da cui $Z = \frac{\overset{=N}{M}}{X_0} - R = \frac{50}{1} - 15 = 35$ s

② sistema con 2 risorse: $R_1 = 10$ s, $R_2 = 1$ s; $X_1 = 4$ tr/s, $X_2 = 8$ tr/s, $X_0 = 4$ tr/s

quale è il tempo di risposta del sistema?

Per definizione, $R = \sum V_i R_i$, ricavo le visite da flusso forzato: $X_i = X_0 V_i \rightsquigarrow V_i = \frac{X_i}{X_0}$, cioè $V_1 = \frac{X_1}{X_0} = 1$

e $V_2 = \frac{X_2}{X_0} = 2$ da cui:

$R = V_2 R_2 + V_1 R_1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 10 = 12$ s

---

③ $D_{CPU} = 4$ s; $U_{CPU} = 0.5$; $R = 15$ s, $Z = 25$ s,

numero N di utenti?

Poiché $R = \frac{N}{X_0} - Z$, cerco X_0: dalla legge dell'utilizzazione $U_{CPU} = X_{CPU} S_{CPU} \xrightarrow[\text{FORZATO}]{\text{FLUSSO}} X_0 V_{CPU} S_{CPU} = X_0 D_{CPU}$

cioè $X_0 = \frac{U_{CPU}}{D_{CPU}} = \frac{0.5}{4} = 0.125$, successivamente

$N = (R + Z) X_0 = 40 \cdot 0{,}125 = 5$ utenti

---

④ $T = 1$ h, $M = 80$ utenti, $R = 5$ s, $C = 60$/ora, $U_{CPU} = 0.8$, $U_{DISK1} = 0.5$, $U_{DISK2} = 0.5$, Z?

NON sempre usiamo tutti i dati!

Potrei usare $Z = \frac{M}{X_0} - R$, ma chi è X_0?

$X_0 = \frac{C_0}{T}$, cioè completamenti del sistema, allora

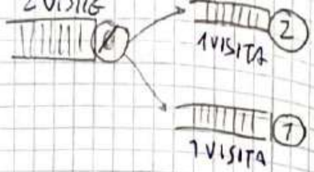
$Z = \frac{80}{\left(\frac{60}{60}\right)} - 5 = 75$ s

Quanti sono gli utenti che pensano? #think $= X_0 \cdot Z = 75$,

cioè 75 utenti che pensano mediamente 75 s

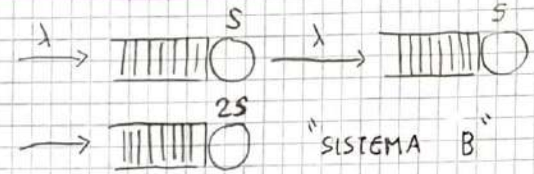
(5) Noti R_0, R_1, R_2,

quanto vale R?



$R = \sum V_i R_i = 2 R_0 + 1 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

(6)



SISTEMA "A" DI JACKSON

$S = 0.5\,s$, $\lambda = 0.4$ tr/s $\quad \frac{R_A}{R_B}$?

SISTEMA "A", 1° centro: $R = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{S} - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{0.5} - 0.4} = \frac{5}{8}\,s$

infatti è un single server con coda, e $R = E[T_S]$ nell' M/M/1. Se sistema di Jackson → per Burke ciò che esce dal 1° centro entra totalmente nel 2° centro, che si comporterà uguale!

$R_A = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{5}{4}\,s$.

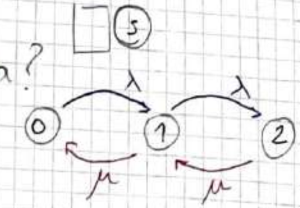
$R_B = E[T_{SB}] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5 \cdot 2} - 0.4} = \frac{5}{3}\,s$, allora

$\frac{R_A}{R_B} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4} = 0.75$ cioè

$R_A = 0.75\,R_B$, meglio R_A, poiché $R_A < R_B$

(7) M/M/1/2 , $\lambda = 0.5$ req/s , $S = 0.5$

N° medio richieste nel centro? Varianza?



SISTEMA CHIUSO → MARKOV

scrivo eq. bilanciamento dei flussi

$$\begin{cases} \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \\ \pi_1 (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases}$$

"ciò che esce da '0' = ciò che entra in '0'"

NB $\pi_0 \frac{\lambda}{\mu} (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \rightarrow \frac{\pi_0}{\mu} (\lambda^2 + \lambda\mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu$

$\rightarrow \frac{\pi_0}{\mu} (\lambda^2 + \lambda\mu - \lambda\mu) = \pi_2 \mu \rightarrow \pi_2 = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$

$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu$

$\pi_2 = \left(\pi_0 \frac{\lambda}{\mu} (\lambda + \mu) - \pi_0 \lambda\right) \cdot \frac{1}{\mu}$ cioè:

$\pi_1 = \pi_0 \cdot 0{,}25$; $\pi_2 = (\pi_0 \cdot 0{,}25 (2{,}5) - \pi_0 \cdot 0.5) \cdot 0{,}5$
$= \pi_0 \cdot 0{,}0625$

trovo π_0 : $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 = \pi_0 (1 + 0{,}25 + 0{,}0625)$

$\rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1 + 0{,}25 + 0{,}0625} = 0{,}7619$ da cui $\begin{cases} \pi_1 = 0.1905 \\ \pi_2 = 0.0476 \end{cases}$

- N° medio richieste nel centro: $0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 =$
  $= 1 \cdot 0{,}1905 + 2 \cdot 0{,}0476 = 0{,}2857 = E[\text{req. medie}]$
- varianza $= E[\text{req. medie}^2] - (E[\text{req. medie}])^2 =$
  $= (1^2 \cdot 0{,}1905 + 2^2 \cdot 0{,}0476) - (0{,}2857)^2 = 0.29928$

Bottleneck parte 2, 1/06/23

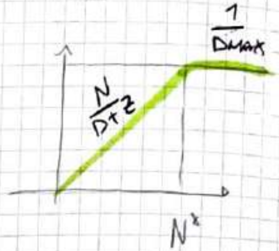
① $D_1 = 1s$, $D_2 = 1s$, $D_3 = 2s$, $Z = 6s$

Throughput massimo?

Vale sempre: $X(N) \le \min\left(\frac{1}{D_{MAX}}, \frac{N}{D+Z}\right)$

$$\frac{1}{D_{MAX}} = \frac{1}{D_3} = \frac{1}{2} = 0.5 \ \frac{req}{s}$$

$$\frac{N}{D+Z} = \frac{N}{(1+1+2)+6} = \frac{N}{10} \ \frac{req}{s}$$



quale dei due prendere dipende da N^*,
prima di N^* $X_0 = \frac{N}{10}$, dopo $X_0 = 0.5$. Chi è N^*?

Impongo $\frac{1}{D_{MAX}} = \frac{N^*}{D+Z} \rightarrow N^* = \frac{D+Z}{D_{MAX}} = \frac{(1+1+2)+6}{2} = 5$

NB: anche se c'è D_1, D_2, D_3 non vuol dire che ci sono 3 utenti. 3 D_i = 3 centri

---

② $D_1 = 1s$, $D_2 = 2s$, $D_3 = 2s$, $N = 2$, X_0?

Voglio throughput esatto, non bound. APPLICO MVA, cerco "$\lambda_i(2)$" $= X(2) = \frac{2}{\sum R_i(2)}$, "MVA riadattato"

in MVA "originale" era $\forall$ centro, ora cerco di renderlo "globale"

Idea: $\underbrace{V_i \cdot E(t_i(N))}_{R_i(N)} = \underbrace{E(S_i)(1+E(n_i(N-1))) \cdot V_i}_{D_i}$

$$R_i(N) = D_i(1+E(n_i(N-1)))$$

procedo iterativamente:

$n_1(0) = 0$, $n_2(0) = 0$, $n_3(0) = 0$

$R_1(1) = D_1(1+0) = D_1 = 1s$

$R_2(1) = D_2(1+0) = D_2 = 2s$

$R_3(1) = D_3 = 2s$

da cui $X(1) = \frac{1}{R_1(1)+R_2(1)+R_3(1)} = 0.2$ con

$E[n_1(1)] = X(1) \cdot R_1(1) = 0,2 \cdot 1 = 0.2$ (utenti nel "centro 1", o che fanno domanda D_1)

$E[n_2(1)] = E[n_3(1)] = \frac{2}{5} = 0.4$

Procedo

$R_1(2) = D_1(1+E[n_1(1)]) = 1(1+0.2) = 1.2 = \frac{6}{5}$

$R_2(2) = R_3(2) = 2.8 = \frac{14}{5}$

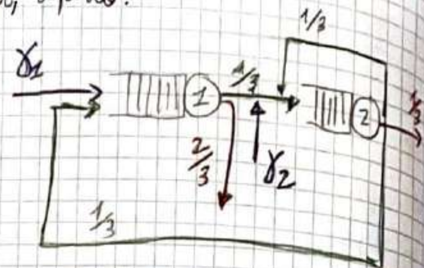
finalmente: $X(2) = \frac{2}{R_1(2)+R_2(2)+R_3(2)} = \frac{5}{17} = 0.29411$

③ Sia dato un sistema di router, aperto.

$\mu_1 = 3$ pkt/s ; $\mu_2 = 5$ pkt/s

- max frequenza tollerabile al 1° router se $\gamma_2 = 1$ pkt/s?

Mi chiede γ_1^{MAX}.



Trovo le equazioni del traffico: IN FUNZIONE DI γ_1

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \\ \lambda_2 = \gamma_2 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \end{cases}$$

cioè "quali sono le entrate di "1"" (Throughput)

$$\lambda_2 = \gamma_2 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_2 = \gamma_2 + \frac{\lambda_1}{3}$$

La saturazione la ho sia se $\rho_1 \to 1$ sia se $\rho_2 \to 1$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{3}{2}\underset{\gamma_2}{(1)} + \frac{\lambda_1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_1}{2}\right) = \gamma_1 + \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{6} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \sim \lambda_1 = \frac{6}{5}\gamma_1 + \frac{3}{5} \\ \lambda_2 = \frac{3}{5}\gamma_1 + \frac{9}{5} \end{cases}$$

vuol dire che $\gamma_1 = 2$ non va bene per il router 1 ma va bene per il router 2

devo vedere:
$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1 \text{ cioè } \frac{\frac{6}{5}\gamma_1 + \frac{3}{5}}{3} < 1 \iff \gamma_1 < 2 \\ \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1 \text{ cioè } \frac{\frac{3}{5}\gamma_1 + \frac{9}{5}}{5} < 1 \iff \gamma_1 < 5.\overline{3} \end{cases}$$

La prima condizione è la più stringente: $\gamma_1^{MAX} \leq 2 \frac{pkt}{s}$

NB. il testo parlava di "tolleranza della rete" per questo ho visto le utilizzazioni di entrambi!

- $\gamma_1 = 0.9\,\gamma_1^{MAX} = 1.8$ pkt/s, tempo risposta per pkt che entra nel sistema dal centro 1?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{3}{2}\gamma_2 + \frac{\lambda_1}{2} \end{cases} \cdots \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{5}\gamma_1 + \frac{3}{5} \\ \lambda_2 = \frac{3}{5}\gamma_1 + \frac{9}{5} \end{cases} \underset{=}{\gamma_1 = 1.8} \begin{cases} \lambda_1 = 2.76 \frac{pkt}{s} \\ \lambda_2 = 2.88 \frac{pkt}{s} \end{cases}$$

con questi valori $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0.92$, $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0.576$

Essendo due code M/M/1 il tempo di risposta vede tener conto delle visite.

$$E[T_{S_1}] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = 4.16667 = \frac{\lambda_1 E[S_1]}{1-\rho_1} + E[S_1] = \frac{0.92 \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0.92} + \frac{1}{3}$$

$$E[T_{S_2}] = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = 0.471698$$

questi sono i tempi <entrata, uscita> dal centro 1 e centro 2.

Le visite sono: $V_{1,\gamma_1} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1} = \frac{2.76}{1.8} = 1.5\overline{3}$

entra nel sistema

e $V_{2,\gamma_1} = \frac{\lambda_2}{\gamma_1} = \frac{2.88}{1.8} = 1.6$

$$E[t_{R_1}] = \sum V_i R_i = 1{,}5\overline{3} \cdot 4{,}16667 + 1{,}6 \cdot 0{,}471698 = 7.1436$$

$$E[n_1] = \lambda_1 \cdot E(t_1) = 2{,}76 \cdot 4{,}16667 = 11.5$$

$$E[n_2] = 1.3585$$

sotto ipotesi esponenziali!

tiene conto grazie alle visite che un pkt entrante nel router 2 potrebbe uscire subito dal centro 1, oppure entrare nel router 2 ed uscire da lui.

Esercizi per casa

① $U_{CPU} = 0.5$, $R = 15s$ $Z = 5s$, $N = 100$,

D_{CPU} ?

$$R = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{N}{\left(\frac{U_{CPU}}{D_{CPU}}\right)} - Z \rightarrow 15 + 5 = \frac{100}{0.5} \cdot D_{CPU}$$

$$\rightarrow D_{CPU} = \frac{20 \cdot 0.5}{100} = \frac{1}{10} \leadsto X_0 = \frac{0.5}{\frac{1}{10}} = 5$$

② $T = 1h = 60 \text{ min} = 3600s$, $C = 900$, $M = 60$

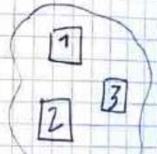
$N_{think} = 57.5$, $R = ?$

$$R = \frac{M}{X_0} - Z \rightarrow Z = \frac{\#think}{X_0} \; ; \; X_0 = \frac{C}{T} = 0.25$$

allora $R = \dfrac{60}{\frac{C}{T}} - \dfrac{57.5}{\frac{C}{T}} = \dfrac{1}{0.25}(60 - 57.5) = 10s$

③ Sistema chiuso con 3 centri.

$D_1 = 1s$, $D_2 = 2s$, $D_3 = 3s$, $Z = 21s$



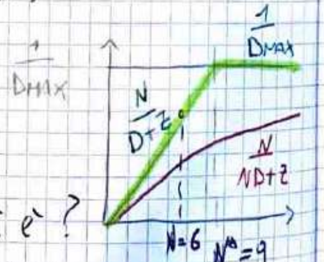
upper bound del throughput con 6 utenti?

$$X(N) \leq \min\left\{\frac{1}{D_{MAX}}, \frac{N}{D+Z}\right\}$$

$$N = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{6}{(3+2+1)+21}\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right\}$$

prima di N^* è $\frac{2}{9}$, dopo è $\frac{1}{3}$. N^* chi è?

$$\frac{1}{D_{MAX}} \equiv \frac{N^*}{D+Z} \rightarrow N^* = \frac{D+Z}{D_{MAX}} = \frac{(3+2+1)+21}{3} = 9$$



$N=6$ è $\frac{2}{9}$

Esempio Bottleneck

$Z = 20s$, $S_1 = 0{,}05s$ $S_2 = 0{,}08s$ $S_3 = 0{,}04s$

abbiamo presi da NON SO DOVE
$$\begin{cases} V_0 = 0{,}05\, V_1 \\ V_1 = V_0 + V_2 + V_3 \\ V_2 = 0{,}55\, V_1 \\ V_3 = 0{,}4\, V_1 \end{cases} \underset{V_0 = 1}{\text{Fisso}} \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = \frac{1}{0.05} = 20 \\ V_2 = 0{,}55 \cdot 20 = 11 \\ V_3 = 8 \end{cases}$$

Note VISITE ed i TEMPI SERVIZIO, ricavo DOMANDE $D_i = V_i \cdot E[S_i]$

$D_1 = V_1 S_1 = 20 \cdot 0{,}05 = 1s$, $D_2 = V_2 S_2 = 11 \cdot 0{,}08 = 0{,}88$

$D_3 = V_3 S_3 = 8 \cdot 0{,}04s = 0{,}32$ $D = \sum D_i = D_1 + D_2 + D_3 = 2{,}2$

$D_{MAX} = D_1 = 1s$

- N° terminali "pensanti"? $N_{Think} = \underbrace{X_0}_{\text{throughput} = \frac{1}{\text{Domanda MAX}}} \cdot Z = \frac{1}{D_{MAX}} \cdot Z = 20$ utenti

- se $X_0 = 0{,}715$ J/s e $R_0 = 5{,}2s$, quanti terminali collegati?

$$R_0 = \frac{N}{X_0} - Z \leadsto (R_0 + Z) X_0 = N = (5{,}2 + 20) \cdot 0{,}715 = 18$$

- se $N = 30$, $X_0 = 1$, $Z = 20$, è vero che $R_0 = 8s$? Quanto deve valere X_0?

$$R_0 = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{30}{1} - 20 = 10s > 8s \quad \text{NO!}$$

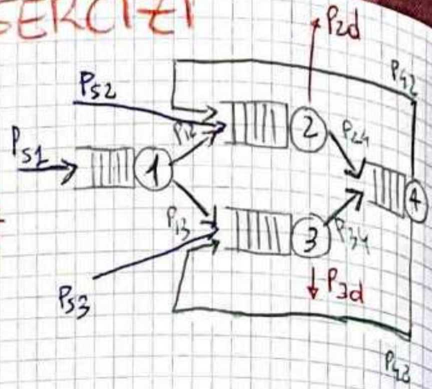
Dovrei avere: $\left(\dfrac{R_0 + Z}{N}\right)^{-1} = X_0 = \dfrac{N}{R_0 + Z} = 1{,}071428 = \dfrac{1}{D_{MAX}}$

$$\Rightarrow D_{MAX} = \frac{1}{1{,}071428} = 0{,}9\overline{3} = V_1 \cdot S_1' \iff S_1' = \frac{0.9\overline{3}}{V_1} = 0{,}04666 < S_1$$

il nuovo tempo di servizio per soddisfare i requisiti. $\dfrac{S_1}{S_1'} = 1{,}071428$

FOGLI ESERCIZI

Rete Jackson



③ $P_{S1} = \frac{3}{5}$ $P_{S2} = \frac{3}{10}$ $P_{S3} = \frac{1}{10}$

$P_{42} = \frac{1}{5}$ $P_{43} = \frac{4}{5}$ $P_{2d} = P_{3d} = \frac{2}{3}$

$\mu_1 = 18$ J/s $\mu_2 = 18$ J/s $\mu_3 = 30$ J/s

$\mu_4 = 15$ J/s $\gamma = 10$ J/s

① $P_{12} = \frac{2}{3}$, $P_{13} = \frac{1}{3}$, quale è il system response time?

Il sistema è aperto, inoltre, possiamo ricavare $P_{24} = P_{34} = \frac{1}{3}$ poiché $P_{2d} = P_{3d} = \frac{2}{3}$.

Essendo una rete di Jackson ciò che esce da un centro è ciò che entra nel centro collegato, inoltre è come se stessi trattando reti separabili (centri studiabili in modo indipendente)

scrivo le equazioni di flusso

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma \cdot \frac{3}{5} = 6 \\ \lambda_2 = \gamma \cdot \frac{3}{10} + \lambda_1 \frac{2}{3} + \lambda_4 \frac{1}{5} \\ \lambda_3 = \gamma \cdot \frac{1}{10} + \lambda_1 \frac{1}{3} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 + 4 + \frac{\lambda_4}{5} \\ \lambda_3 = 1 + 2 + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{3} \end{cases}$$

Sostituisco λ_2 e λ_3 nell'equazione di λ_4, trovando $\lambda_4 = 5$, che uso per trovare

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 3+4+1 = 8 \\ \lambda_3 = 1+2+4 = 7 \quad \lambda_4 = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = 5 \end{cases}$$

Adesso trovo le visite rispetto γ, cioè prima di entrare nel sistema

$V_{1\gamma} = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{3}{5}$, $V_{2\gamma} = \frac{\lambda_2}{\gamma} = \frac{4}{5}$, $V_{3\gamma} = \frac{\lambda_3}{\gamma} = \frac{7}{10}$, $V_{4\gamma} = \frac{\lambda_4}{\gamma} = \frac{1}{2}$

Trovo $R_i = E[T_{S_i}] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$ $\forall$ centro

$E[T_{S_1}] = \frac{1}{18-6} = \frac{1}{12}$ s $\quad E[T_{S_2}] = \frac{1}{18-8} = \frac{1}{10}$ s

$E[T_{S_3}] = \frac{1}{30-7} = \frac{1}{23}$ s $\quad E[T_{S_4}] = \frac{1}{15-5} = \frac{1}{10}$ s

Trovo $E[t_R] = \sum V_i E[T_{S_i}]$

$E[t_R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{23} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}2104347$ s

② P_{12} e P_{13} tali che server 1 e 2 hanno stessa utilizzazione

devo imporre $\rho_2 = \rho_3$ cioè $\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$ cioè

$$\begin{cases} \frac{\gamma \cdot \frac{3}{10} + \lambda_1 \cdot P_{12} + \lambda_4 \cdot \frac{1}{5}}{18} = \frac{\gamma \cdot \frac{1}{10} + \lambda_1 \cdot P_{13} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5}}{30} \\ P_{12} + P_{13} = 1 \end{cases}$$ setto $\lambda_4 = 5$

$$\begin{cases} \frac{3 + \lambda_1 P_{12} + 1}{18} = \frac{1 + \lambda_1 P_{13} + 4}{30} \\ P_{12} + P_{13} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4 + 6P_{12}}{18} = \frac{5 + 6P_{13}}{30} \\ P_{13} = 1 - P_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30(4 + 6P_{12}) = 18(5 + 6P_{13}) \\ P_{13} = 1 - P_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} 180 P_{12} + 120 = 90 + 108 P_{13} \\ P_{13} = 1 - P_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 180 P_{12} + 30 = 108 P_{13} \\ P_{13} = 1 - P_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} 180 P_{12} + 30 = 108 - 108 P_{12} \\ P_{13} = 1 - P_{12} \end{cases} \rightarrow P_{12} = \frac{78}{288} = \frac{13}{48} \approx 0.27$$

$\rightarrow P_{13} = 1 - \frac{13}{48} = \frac{35}{48} \approx 0{,}73$

③ Con P_{12} e P_{13} trovati, come si evolve R?

Avevamo
$$\begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 + \lambda_1 \frac{13}{48} + \lambda_4 \cdot \frac{1}{5} \\ \lambda_3 = 1 + \lambda_1 \frac{35}{48} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{3} \end{cases} \xrightarrow{\lambda_4 = 5} \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 + 6 \cdot \frac{13}{48} + 1 = \frac{45}{8} \\ \lambda_3 = 1 + 6 \cdot \frac{35}{48} + 4 = \frac{75}{8} \\ \lambda_4 = 5 \end{cases}$$

VISITE e TEMPI:

$V_{1\gamma} = \frac{3}{5}$, $V_{4\gamma} = \frac{1}{2}$ (INVARIATE) ; $V_{2\gamma} = \frac{\frac{45}{8}}{10} = \frac{9}{16}$; $V_{3\gamma} = \frac{\frac{75}{8}}{10} = \frac{15}{16}$

$E[T_{S_1}] = \frac{1}{12}$; $E[T_{S_4}] = \frac{1}{10}$ (INVARIATE)

$E[T_{S_2}] = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{1}{18 - \frac{45}{8}} = \frac{8}{99}$; $E[T_{S_3}] = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{1}{30 - \frac{75}{8}} = \frac{8}{165}$

R TOTALE:

$$E[T_R] = \sum v_{i\gamma} \cdot E[T_{S_i}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{99} + \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{165} =$$
$$= 0{,}200\overline{09}$$

Ultimo Es p. 1 del foglio ES

$C = 10^3$ op/sec. Le richieste arrivano nel seguente modo:

- 80% $Z = 1875$ op/Job
- 20% $Z = 7500$ op/Job

Il flow d'arrivo è uniformemente partizionato in 2 classi; secondo ABSTRACT PRIORITY.

Arrival process è esponenziale e servizi iperesponenziali.

a) massimo flow ammissibile tale che $E[T_S] < 10$

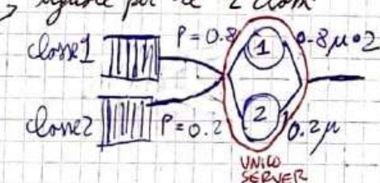
Sappiamo che $E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{1875 \cdot 0{,}8 + 7500 \cdot 0{,}2}{10^3} = 3$

e quindi $\mu = \frac{1}{E[S]} = 0.3\overline{3}$

Calcolo $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3\lambda$, allora $\rho_1 = 1{,}5\lambda$ e $\rho_2 = 1{,}5\lambda$ perché il flusso è uniformemente partizionato.

Poiché abbiamo due classi, dobbiamo trovare $E[T_S] = 0{,}5\,E[T_{S_1}] + 0{,}5\,E[T_{S_2}]$ sempre perché partizionati uniformemente.

Parto da $E[T_{S_1}] = E[T_{Q_1}] + E[S]$ uguale per le 2 classi.



$$E[T_{Q_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{1 - \rho_1} = \frac{14{,}0625\lambda}{1 - 1.5\lambda}$$

code astratte, ho usato l'hyperexponential solo per calcolare $E[S^2]$

$$E[T_{Q_2}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{14{,}0625\lambda}{(1-1.5\lambda)(1-3\lambda)}$$

sapendo che $\sigma^2(S) = g(p)E^2[S] = \left(\frac{1}{2p(1-p)} - 1\right)E[S]^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} - 1\right)9 = 19{,}125 s^2$

e quindi $E[S^2] = +E^2[S] + \sigma^2 = 28{,}125\ s^2$

$E[T_{S_1}] = E[T_{Q_1}] + E[S] = \dfrac{14{,}0625\lambda}{1-1{,}5\lambda} + 3$

$E[T_{S_2}] = E[T_{Q_2}] + E[S] = \dfrac{14{,}0625\lambda}{(1-1.5\lambda)(1-3\lambda)} + 3$

allora

$E[T_{S_{TOT}}] = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{equiprobabili}}\left[E[T_{S_1}] + E[T_{S_2}]\right] < 10$ svolgo

$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{14{,}0625\lambda}{1-1{,}5\lambda} + 6 + \dfrac{14{,}0625\lambda}{(1-1.5\lambda)(1-3\lambda)}\right] < 10$

$0{,}5 \cdot 14{,}0625\lambda\left(\dfrac{1-3\lambda+1}{(1-1{,}5\lambda)(1-3\lambda)}\right) < 10-3$

$\lambda\left(\dfrac{2-3\lambda}{(1-1.5\lambda)(1-3\lambda)}\right) < \dfrac{7}{0{,}5 \cdot 14{,}0625} = 0.9955555$

$2\lambda - 3\lambda^2 < 0.9955555\left((1-1.5\lambda)(1-3\lambda)\right)$

$2\lambda - 3\lambda^2 < 0.997555\left(1-3\lambda-1{,}5\lambda+4{,}5\lambda^2\right)$

$2\lambda - 3\lambda^2 < 0.995555 - 4{,}47999\lambda + 4{,}47999\lambda^2$

$7{,}47999\lambda^2 - 6{,}47999\lambda > -0{,}995555$

cerco $7{,}48\lambda^2 - 6{,}48\lambda + 0{,}995 = 0$

$\dfrac{+6{,}48 \pm \sqrt{6{,}48^2 - 4 \cdot 7{,}48 \cdot 0{,}995}}{2 \cdot 7{,}48} = \dfrac{6{,}48 \pm 3{,}49}{14{,}99}$ → $0.666 = \lambda_2$; $0.1998 = \lambda_1$

quindi come massimo flusso ammissibile prendo $\lambda_1 = 0.1998$ J/s

b) assume $\lambda = 0.2$, scheduling astratto garantisce $E[T_{Q_1}] = 2s$?

avrei $E[T_{Q_1}] = \dfrac{14{,}0625 \cdot 0{,}2}{1-1{,}5 \cdot 0{,}2} = 4{,}01$. Se modifico p_1?

$\dfrac{2{,}8125}{1-0{,}2p_1} \leq 2 \iff 0{,}8125 \leq -0{,}4p_1 \Rightarrow p_1 < 0$ NO.

c) valuta $E[T_{S_K}]$ ed $E[T_{Q_K}]$ $\forall$ classe considerando le caratteristiche dell' Hyperex.

come abbiamo visto:

$E[T_{Q_1}] = 4{,}01s \rightsquigarrow E[T_{S_1}] = 7{,}01s$

$E[T_{Q_2}] = 10{,}044s \rightsquigarrow E[T_{S_2}] = 13{,}044s$

$\Big\}\ E[T_{S_{TOT}}] = \frac{1}{2}\left(E[T_{S_1}] + E[T_{S_2}]\right) = 10.027$

l' Hyperexponential condiziona E[S] perché posso operare a due tassi μ diversi (di cui ne faccio la media).

(in realtà sono 2 carichi diversi, la capacità del server è invariato, ma ciò porta a diversi E[S] e μ) di cui faccio la media perché le classi sono mischiate. In $E[T_Q]$ serve per trovare $E[S^2]$, tramite $\sigma^2(S)$.

d) con tempi di servizio EXP, prova che $E[T_S]$ è indipendente dalle partizioni delle due classi.

siamo nel caso ESPONENZIALE, non penso più all' hyperexp.

$\underset{1coda}{E[T_Q]} = \dfrac{\rho E[S]}{1-\rho}$; $\underset{2code}{E[T_Q]} = \dfrac{p_1 \rho E[S]}{1-\rho_1} + \dfrac{p_2 \rho E[S]}{(1-\rho)(1-\rho_1)} =$

$= \dfrac{p_1 \rho E[S](1-\rho) + p_2 \rho E[S]}{(1-\rho)(1-\rho_1)} = \dfrac{E[S](\rho \cdot p_1 - p_1\rho^2 + \rho p_2)}{(1-\rho)(1-\rho_1)} = \dfrac{E[S](\rho - \rho^2 p_1)}{(1-\rho)(1-\rho_1)} =$

$= \dfrac{E[S]\rho(1-\rho \cdot p_1)}{(1-\rho)(1-\rho_1)} = \dfrac{E[S]\rho}{\dots}$ perché in exp $\rho \cdot p_1 = \rho_1$. SOLO IN QUESTO CASO.

es. n° 2 p.2 dei compiti

coda chiusa dove:

$D_1 = 10 \quad D_2 = 5 \quad N = 3 \quad Z = 10$

Quale è il tempo di risposta?

Trovandoci in centro chiuso usiamo la M.V.A, riadattata perché voglio un tempo globale, non ∀ centro:

$$\underbrace{V_i E(t_i(N))}_{R_i(N)} = E[S_i]\left(1 + E(n_i(N-1))\right) \cdot V_i$$

$$R_i(N) = D_i\left(1 + E(n_i(N-1))\right)$$

procedo iterando:

$R_1(1) = D_1(1+0) = 10 \qquad R_2(1) = D_2(1+0) = 5$

Dalla teoria $\lambda_i(N) = \dfrac{n}{\sum v_{j,i} E(t_j(n))}$, nel nostro riadattamento 'generale' abbiamo $X_0(n) = \dfrac{n}{\sum R_i}$

quindi $X_0(1) = \dfrac{1}{10+5} = \dfrac{1}{15}$

L'ultima formula è $E(n_i(n)) = X_0(n) \cdot R_i(m)$

cioè $E(n_1(1)) = X_0(1) \cdot R_1(1) = \dfrac{1}{15} \cdot 10 = \dfrac{2}{3}$

e $E(n_2(1)) = \dfrac{1}{15} \cdot 5 = \dfrac{1}{3}$

Passiamo a 2 utenti.

$R_1(2) = D_1(1 + E n_1(1)) = 10\left(1+\frac{2}{3}\right) = 10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3}$

$R_2(2) = D_2(1 + E n_2(1)) = 5\left(1+\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

$X_0(2) = \dfrac{2}{\frac{50}{3}+\frac{20}{3}} = \dfrac{2}{\frac{70}{3}} = \dfrac{3}{35}$

$E(n_1(2)) = \frac{3}{35} \cdot \frac{50}{3} = \frac{10}{7}$, $E(n_2(2)) = \frac{3}{35} \cdot \frac{20}{3} = \frac{4}{7}$

Passiamo a 3 utenti:

$R_1(3) = D_1(1 + E n_1(2)) = 10\left(1+\frac{10}{7}\right) = 10 \cdot \frac{17}{7} = \frac{170}{7}$

$R_2(3) = D_2(1 + E n_2(2)) = 5\left(1+\frac{4}{7}\right) = 5 \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{7}$

$X_0(3) = \dfrac{3}{\frac{170}{7}+\frac{55}{7}} = \dfrac{7}{75}$ quello che mi serve per:

solo per sistemi interattivi

$R_{TOT} = R_1(3) + R_2(3) = 32.142\ s$, NON POTEVO USARE $R = \dfrac{N}{X_0} - Z$

Notiamo come la somma di $E(n_1(1)) + E n_2(1) = 1$, $E(n_1(2)) + E(n_2(2)) = 2$, check di correttezza.

Inoltre l'R trovato è > $\dfrac{N}{X_0} - Z$ con $X_0 = \dfrac{1}{D_{MAX}} = \dfrac{1}{D_1}$

ovvero $\dfrac{3}{\frac{1}{10}} - 10 = 20$, cioè "il tempo risposta più piccolo possibile" esercizio 1 pagina 2

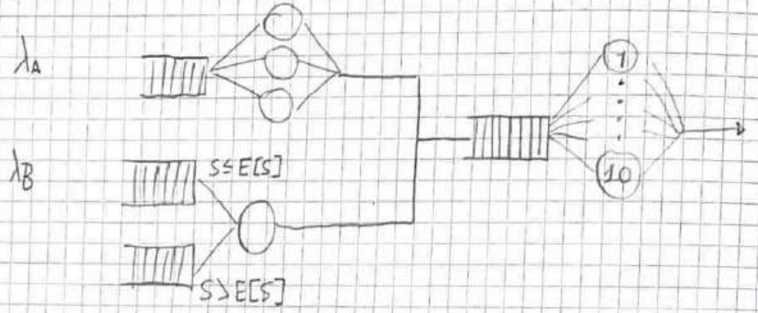
2 servizi "A" e "B", entrambi arrivi Poisson. Le richieste vengono prima elaborate da servers dedicati (A → servizio 'a', B → servizio 'b') e poi server 'C' comune ad entrambi. Servizi esponenziali.

server A: $C_A = 10^4$ op/msec $Z_A = 8 \cdot 10^3$, $\lambda_A = 1.5$, $m_A = 3$, FIFO

server B: $C_B = 10^5$ op/msec $Z_B = 4 \cdot 10^4$, $\lambda_B = 2$, SB non preemptive con 2 code priorità: $S \le E(S)$, $S > E(S)$.

server C: $C_C = 10^3$, $Z_C = 2 \cdot 10^3$, $m_C = 10$, FIFO

a) il modello della rete



b) $E[T_{SA}]$? (del solo centro 'A')

Calcolo $E[S_{A_i}] = \frac{Z_0}{C_A} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^4} = \frac{4}{5}$ ms $\longrightarrow \mu_i = \frac{5}{4} = 1.25$

questi valori sono riferiti ad un server, non ai 3 in //.

Sappiamo che $E[T_{Q_A}] = \frac{P_Q \cdot E[S]}{1-\rho}$ dove:

$E[S]$: tempo per liberare un server qualsiasi $= \frac{E[S_{Ai}]}{3} = 0{,}2666$

$\rho = \frac{\text{massimo input}}{\text{massimo output}} = \frac{\lambda}{3\mu_i} = 0.4$

P_Q = prob che sia pieno $= \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} P(0)$ → prob idle

$$P(0) = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{2} \frac{(3 \cdot 0{,}4)^i}{i!} + \frac{3 \cdot 0{,}4}{3!(1-0.4)} \right]^{-1} = [1 + 1{,}2 + 0{,}72 + 0{,}48]^{-1}$$

$= 0{,}2941$

$\leadsto P_Q = \frac{(3 \cdot 0{,}4)^3}{3!(1-0{,}4)} \cdot 0{,}2941 = 0{,}1411$

finalmente, $E[T_{Q_A}] = \frac{0{,}1411 \cdot 0{,}2666}{1-0.4} = 0{,}0627$

e $E[T_{S_A}] = E[T_{Q_A}] + \underbrace{E[S_{A_i}]}_{0.8 = \frac{4}{5}} = 0{,}8627$

c) $E[T_S]$ per ogni richiesta

Server B

$E[S_B] = \frac{Z_B}{C_B} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^5} = 0{,}4$ ms. Adesso opero nelle due classi

$E[S_1] = \int_0^{0.4} t \cdot f^*(t) = \frac{1}{F(0.8) - F(0)} \int_0^{0.4} t \cdot f(t)\,dt$

dove $F = 1 - e^{-\mu t} \leadsto F(0{,}4) - F(0) = (1 - e^{-\mu E[S]}) - 0 = 0.6321 = P_1$

e quindi $P_2 = 1 - 0{,}6321 = 0{,}3679$.

$f = F' = -\mu e^{-\mu t}$

Calcolo $\frac{1}{0.6321}\int_0^{0.4} \underset{f}{t}\cdot \underset{g'}{\mu e^{-\mu t}} \underset{PARTI}{=} \frac{1}{0.6321}\left(\underset{fg}{-te^{-\mu t}} - \int_0^{0.4} \underset{f'g}{-e^{-\mu t}}\,dt \right)$

$= \frac{1}{0.6321}\left(-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} \right)\Big|_0^{0.4} = 0{,}1672$ ms

Dato $E[S_1] = 0{,}1672$ ms voglio $E[Ta_1] = \frac{\rho_B\, E[S]}{1-\rho_1}$

$\rho_1 = \lambda \cdot p_1 \cdot E[S_1] = 2 \cdot 0{,}6321 \cdot 0{,}1672 = 0{,}2113$

NON È $\rho_1 = p_1 \cdot \rho$, errore grave! ; $\rho_B = \frac{\lambda_B}{\mu_B} = \frac{2}{2{,}5} = 0.8$

$E[Ta_1] = \frac{0.8 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}2113} = 0{,}4057$ ms.

Allora $E[T_{S_1}] = E[Ta_1] + E[S_1] = 0{,}5729$

▸ Passiamo alla seconda coda.

$p_2 = 0{,}3679$,

$E[S_2] = \frac{1}{0.3679}\left(-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} \right)\Big|_{0.4}^{\infty} = \frac{1}{0.3679}\left(0 + 0.4e^{-1} - 0 + E[S]e^{-1} \right)$

$= 0{,}8$ ms

$E[Ta_2] = \frac{\rho_B\, E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho_B)} = \frac{0.8 \cdot 0{,}4}{(1-0{,}2113)(1-0.8)} = 2{,}02865$ ms

allora $E[T_{S2}] = E[Ta_2] + E[S_2] = 2{,}02865 + 0{,}8 = 2{,}8286$ ms

$E[T_{S\,globale}] = p_1\, E[T_{S_1}] + p_2 E[T_{S2}] = 1{,}40277203$ ms

sistema C

$\lambda_C = \lambda_A + \lambda_B = 3{,}5$ J/ms $\quad E[S_{C_i}] = 2$ ms , $E[S_C] = \frac{E[S_{C_i}]}{m} = 0{,}2$ ms

$\rho_C = \frac{\lambda_C}{10 \cdot \underset{\mu_{C_i}}{\frac{1}{2}}} = \frac{3{,}5}{10 \cdot 0{,}5} = 0{,}7$

calcolo $P(0) = \left[\sum_{i=0}^{9} \frac{(10\rho_C)^i}{i!} + \frac{10\rho^{10}}{10!(1-\rho_C)} \right]^{-1} =$

$= (1 + 7 + 24{,}5 + 57{,}166 + 100{,}041 + 140{,}058 + 163{,}401 +$
$163{,}401 + 142{,}9762 + 111{,}20372 + 259{,}475)^{-1} = 0{,}001098$

$P_Q = \frac{(10 \cdot 0{,}7)^{10}}{10!\,(1-0.7)} \cdot 0{,}001098 = 0{,}284903$

$E[Ta_C] = \frac{P_Q\, E[S]}{1-\rho_C} = \frac{0{,}2849 \cdot 0{,}2}{0{,}3} = 0{,}1899$

$E[T_{SC}] = E[Ta_B] + E[S_{B_i}] = 0{,}1899 + 2 = 2{,}1899$

Ora, le richieste possono essere di tipo 'A':

$V_{A/A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A} = 1 \qquad V_{B/A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{2}{1.5} = 1{,}3\overline{3} \qquad V_{C/A} = \frac{\lambda_C}{\lambda_A} = \frac{3.5}{1.5} = 2.\overline{33}$

$E(t_{R_A}) = V_{A/A} \cdot E[T_{SA}] + V_{B/A} \cdot E[T_{SB}] + V_{C/A} \cdot E[T_{SC}] =$

$1 \cdot 0{,}8627 + 1{,}3333 \cdot 1{,}40277203 + 2{,}3333 \cdot 2{,}1899 = 7{,}84204936$

o di tipo 'B'

$V_{A/B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75 \qquad V_{B/B} = 1 \quad , V_{C/B} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75$

$E(t_{R_B}) = 0{,}75 \cdot 0{,}8627 + 1 \cdot 1{,}40277203 + 1{,}75 \cdot 2{,}1899 = 5{,}882122$

d) slowdown di $x=0,4$ server A; $x=0,2$ server B, $x=0,2$ a server C

$$E[Sd_A(0,4)] = \frac{E[T_{qA}]+x}{x} \quad \frac{0,0627}{0,4}+1 = 1,15675 \text{ msec}$$

coda 1!

$$E[Sd_B(0,2)] = \frac{E[T_{q1}]+x}{x} = \frac{0,4057}{0,2}+1 = 3,0285 \text{ msec}$$

$$E[Sd_C(0,2)] = \frac{E[T_{qC}]+x}{x} = \frac{0,1899}{0,2}+1 = 1,9495 \text{ msec}$$

esercizio 1 p.3

15% req. critiche, 60% standard, 25% nuovi utenti.

Req 1: abbandono nuovi utenti se $E[T_q] > 3$ min. (25%)

REQ2: richieste critiche completate con $E[T_S] < 5$ min. (15%)

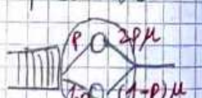
REQ3: perdo cliente se $E[T_S] > 30$ min (60%)

ARRIVI POISSON $\lambda = 0,23$ req/min.

SERVIZI HYPEREXP con $E[S]=4$, $p=0.35$

a) tempo di servizio $\forall$ stage dell'Hyperexp con percentuale

$$\begin{cases} p\,E[S_1] + (1-p)E[S_2] = E[S] \\ \mu_1 = 2p\mu = \frac{2p}{E[S]} \rightsquigarrow \mu_1^{-1} = E[S_1] = \frac{E[S]}{2p} \end{cases}$$



1 server media $E[S]$

$$\cancel{0,35}\frac{E[S]}{2\cdot\cancel{0,35}} + (1-p)E[S_2] = E[S]$$

$$\rightsquigarrow E[S_2] = \frac{E[S]}{2(1-p)} = 3,0769$$

analogamente, mettendo $E[S_2]$ nell'equazione e cercando $E[S_1]$:

$$p\,E[S_1] + \cancel{(1-p)}\frac{E[S]}{\cancel{(1-p)}} = E[S] \rightsquigarrow E[S_1] = \frac{E[S]}{2p} = 5,71428$$

b) meccanismo per soddisfare req1 e req2

$$\text{voglio} \begin{cases} \text{I}: E[T_S] < 5 \text{ min con } p_1 = 0,15 \\ \text{II}: E[T_q] < 3 \text{ min con } p_2 = 0,25 \end{cases}$$

Li ho ordinati io, perché 1° req è più stringente

Uso sicuro le classi, posso provare con o senza prelazione.
Con prelazione ho $E[T_q]$ migliori, ma per $E[T_S]$ non posso dire nulla.

Servizi Hyperexp!! Non uso $\rho E[S]$, ma $\frac{\lambda}{2}E[S^2]$

Poiché: $\sigma^2(x) = g(p)E[S]^2$ con $g(p) = \frac{1}{2p(1-p)} - 1$, ho:

$$\sigma^2(x) = \left(\frac{1}{2\cdot 0,35\cdot 0,65} - 1\right)4^2 = 19,1648 \quad \text{e poi}$$

$$\sigma^2(x) = E[x^2] - E[x]^2 \rightsquigarrow E[S^2] = \sigma^2(x) + E[S]^2 = 35,1648$$

$0.92 = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\rho_1 = \lambda_1 E[S] = \lambda\cdot p_1\cdot E[S] = 0,23\cdot 0,15\cdot 4 = 0,138 = \rho\cdot p_1 \quad (p_1 = 0.15)$$

$$\rho_2 = \lambda_2 E[S] = \lambda\cdot p_2\cdot E[S] = 0,23\cdot 0,25\cdot 4 = 0,23$$

• CON PRELAZIONE

$$E[T_{q_1}] = \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 E[S^2]}{1-\rho_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0,23\cdot 0,15\cdot 35,1648}{1-0,138} = 0,7037$$

$$E[S_{virt_1}] = E[S] \rightsquigarrow E[T_{S_1}] = E[T_{q_1}] + E[S_{virt_1}] = 4,703 \text{ min}$$

va bene! Devo vedere l'altro requisito.

$$E[T_{Q_2}] = \frac{\frac{1}{2}E[S^2](\lambda_1+\lambda_2)}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 35,1648\,(0,23\cdot 0,15+0,23\cdot 0,25)}{(1-0,138-0,23)(1-0,138)}$$

$= 2,9692$ min ✓

rispettati entrambi.

b) meccanismo per req2 e req3

il req2 (servizi critici) lo modello esattamente come prima, con $E[T_S] = 4,07 < 5$ ✓

Vediamo il req3: $E[T_S] < 90$ min ; $\rho_3 = \lambda_3 E[S] = 0,552$

$$E[T_{Q_{req3}}] = \frac{\frac{1}{2}E[S^2]\, 0,23\cdot(0,15+0,6)}{(1-0,138-0,552)(1-0,138)} = 11,35 \text{ min}$$

$$E[S_{virt}] = \frac{E[S]}{1-0,138} = 4,6403 \text{ min}$$

allora $E[T_{S_{req3}}] = 11,35 + 4,6403 = 15,9904$ min ✓.

Potevo usare NON PREEMPTIVE?

Non credo, perché avrei avuto: $E[T_{Q_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2}E[S^2]}{1-\rho_1} = 4,6913$, a cui sommare $E[S]$ superando il requisito.

c) slowdown per richieste di 1 min. E nel caso PS?

$$E[sd(x)] = \frac{E[T_Q]}{x} + 1 = \frac{\frac{\frac{\lambda}{2}E[S^2]}{1-\rho}}{1} + 1 = 51,5494$$

$\rho = \lambda E[S] = 0,92$

KP

inoltre non saprei dove collocarlo pure se fosse.

(nessuno ha parlato di code o altro!)

Nel PS (equo)

$$E[sd(x)] = \frac{1}{1-\rho} = 12,5 \quad \forall x$$

d) dimostra, per uno dei meccanismi precedenti, e in generale, le relazioni tra $E[T_Q]$ ed $E[T_S]$ tra "i" ed "i+1" classi.

Parto da $E[T_Q]$ generale, voglio far vedere che:

$$E[T_{Q_k}] = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E[S^2]}{(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i)} \le \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i E[S^2]}{(1-\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)} = E[T_{Q_{k+1}}]$$

NUMERATORE: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \le \sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \lambda_{k+1} \iff 0 \le \lambda_{k+1}$ ✓

DENOMINATORE: $\frac{1}{\cancel{(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)}(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i)} \le \frac{1}{(1-\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i)\cancel{(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i)}} \iff$

$1-\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i \le 1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i \iff \sum_{i=2}^{k-1}\rho_i \le \sum_{i=1}^{k+1}\rho_i$ vero se $\forall \rho_i > 0$,

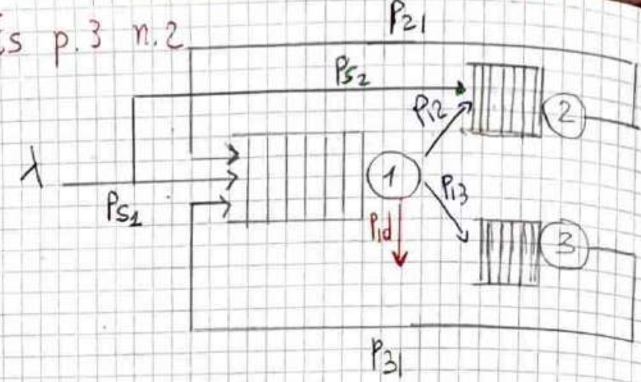
con $\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i - \sum_{i=1}^{k-1}\rho_i \ge 0$, ma sarebbe vero con $\rho_k + \rho_{k+1} \ge 0$ ovvio.

Per $E[T_S]$ basta vedere che $E[S_{virt_k}] \le E[S_{virt_{k+1}}]$ cioè

$\frac{E[S]}{1-\sum_{k=1}^{k-1}\rho_i} \le \frac{E[S]}{1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i} \iff 1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i \le 1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i$ cioè $\sum_{i=1}^{k}\rho_i \ge \sum_{i=1}^{k-1}\rho_i$

cioè $\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i + \rho_k \ge \sum_{i=1}^{k-1}\rho_i \iff \rho_k \ge 0$ ✓

Es p.3 n.2



DATI: $P_{S1} = \frac{2}{5}$, $P_{1d} = \frac{1}{2}$, $P_{12} = \frac{1}{10}$

$\lambda = 3$ J/s $\quad \mu_1 = 10$ J/s $\quad \mu_2 = 15$ J/s $\quad \mu_3 = 5$ J/s

Possiamo ricavare anche:

$P_{S2} = 1 - P_{S1} = \frac{3}{5}$, $\quad P_{13} = 1 - P_{1d} - P_{12} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

$P_{21} = P_{31} = 1$

La rete non è chiusa, ma è di Jackson.

1) n° visite ∀ stazione

Scrivo le equazioni dei flussi:

$$\begin{cases} \lambda_1 = P_{S1}\lambda + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = P_{S2}\lambda + \lambda_1 \cdot P_{12} \\ \lambda_3 = P_{13} \cdot \lambda_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{5} + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot \frac{1}{10} \\ \lambda_3 = \frac{2}{5}\lambda_1 \end{cases}$$

essendo il sistema NON chiuso, applico le sostituzioni:

$$\lambda_1 = \frac{6}{5} + \underbrace{\left(\frac{9}{5} + \frac{\lambda_1}{10}\right)}_{\lambda_2} + \underbrace{\frac{2}{5}\lambda_1}_{\lambda_3} \rightsquigarrow \frac{\lambda_1}{2} = 3 \rightsquigarrow \lambda_1 = 6$$

$\lambda_2 = \frac{9}{5} + \frac{6}{10} = \frac{12}{5}$

$\lambda_3 = \frac{12}{5}$

Le visite rispetto a λ esterno sono:

$V_{1,\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{6}{3} = 2$; $V_{2,\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\frac{12}{5}}{3} = \frac{4}{5}$ $\quad V_{3,\lambda} = \frac{4}{5}$

b) Response time ∀ stazione

sono code M/M/1 (Jackson → exp) quindi posso usare

$$E[T_{S_i}] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

$E[T_{S_1}] = \frac{1}{10-6} = 0.25$ s ; $E[T_{S_2}] = \frac{1}{15 - \frac{12}{5}} = 0.07936$ s

$E[T_{S_3}] = \frac{1}{5 - \frac{12}{5}} = 0,38461$ s

c) tempo risposta del sistema

$$E[t_{r_\lambda}] = \sum_i v_{i\lambda} E[T_{S_i}]$$

$= 2 \cdot 0,25 + \frac{4}{5} \cdot 0,07936 + \frac{4}{5} \cdot 0,38461 = 0,871176$

d) P_{12} e P_{13} tale che il tempo di risposta del sistema sia minimo?

vediamo che $E[T_{S_3}]$ rallenta di più rispetto $E[T_{S_2}]$, allora cerco di mandare più visite a $E[T_{S_2}]$!

$V_{2,\lambda}\uparrow$, $V_{3,\lambda}\downarrow \iff \lambda_2\uparrow, \lambda_3\downarrow$ cioè:

$\lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot P_{12} > \lambda_3 = P_{13}\lambda_1$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot P_{12} \\ \lambda_3 = \lambda_1 P_{13} \\ P_{12} + P_{13} + \underbrace{P_{1d}}_{=\frac{1}{2}} = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} P_{12} = \frac{1}{2} \\ P_{13} = 0 \end{matrix}$$

con $\lambda_2 = \frac{9}{5} + \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{24}{5}$ e $\lambda_3 = 0$

concludo:

$V_1 = 2 \quad V_2 = \frac{8}{5} \quad V_3 = 0$

$E[t_r] = 2 \cdot E[T_{S_1}] + \frac{8}{5} \cdot E[T_{S_2}] = 0,626984$ s ✓

esercizio 1 p. 4

Sistema con utenti non paganti e paganti, che hanno priorità preemptive. $E[T_S]$ è l'unità di misura della soddisfazione.

Devo valutare:

1) $E[T_{S_1}]$ è il mean response time minore.
2) $E[T_{S_2}]$ è il mean response time peggiore
3) globalmente, la prelazione migliora $E[T_{S\,medio}]$

Prova SE tali affermazioni sono corrette, e per quali arrivi e servizi.

SVOLGIMENTO

Prendiamo 2 classi di priorità "1" e "2", se dimostro che $E[T_{S_1}] \leq E[T_{S_2}]$ allora i primi due punti sono veri, avendo solo due classi $\Rightarrow E[T_{S_1}]$ è MIN, $E[T_{S_2}]$ è MAX.

$$E[T_{S_1}] = E[T_{Q_1}] + E[S_{virt\_1}]$$

generale: $\dfrac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\lambda_i E[S^2]}{(1-\sum_{i=1}^{K-1}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{K}\rho_i)}$ $\qquad \dfrac{E[S]}{1-\sum_{i=1}^{K-1}\rho_i}$

Per $E[T_{S_1}]$ cioè $K=1$ ho:

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 E[S^2]}{(1-0)(1-\rho_1)} + \frac{E[S]}{1-0}$$

, per $E[T_{S_2}]$, $K=2$

$$\wedge \qquad \wedge$$

$$\frac{\frac{1}{2}E[S^2](\lambda_1+\lambda_2)}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} + \frac{E[S]}{1-\rho_1}$$

Vediamo che $E[T_{QK}]$ ha numeratore per $K=2$ > numeratore $K=1$ e denominatore $K=2$ < denominatore $K=1$

Stesso ragionamento per $E[S\,virt]$, infatti:

$$\frac{E[S]}{1} < \frac{E[S]}{1-\rho_1} \iff 1-\rho_1 < 1 \quad \text{ma } \rho_1 \geq 0 \text{ quindi vero!}$$

Per il punto 3 sappiamo che non è sempre vero, infatti:

PRELAZIONE

$$E[T_{S_1}] = \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 E[S^2]}{1-\rho_1} + E[S] \qquad E[T_{S_2}] = \frac{\frac{1}{2}E[S^2]\overbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}^{\lambda}}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)} + \frac{E[S]}{1-\rho_1}$$

$$\wedge \qquad = \qquad = \qquad \vee$$

NO PRELAZIONE

$$E[T_{S_1}] = \frac{\frac{1}{2}\lambda E[S^2]}{1-\rho_1} + E[S] \qquad E[T_{S_2}] = \frac{\frac{1}{2}E[S^2]\lambda}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)} + E[S]$$

Quindi in generale non posso dirlo sempre, con prelazione la classe 1 va sempre meglio, ma le altre no!

Non ho fatto ipotesi su servizi e arrivi, ma nel caso di arrivi di Poisson e servizi exp, la memoryless annulla tutti i vantaggi e $E[T_S]^{preem.\,priority} = E[T_S]^{KP}$.

1 vale sempre con arrivi Random (distr. Poisson).

2 vale sempre con arrivi Random (distr. Poisson)

Dati $C = 10^5$ op/sec, $\bar{z} = 5 \cdot 10^4$ op/Job, $\rho = 0,75$

Calcola $E[T_{Q,1}]$ ed $E[T_{S,1}]$ se $\lambda_1 = 0.3\lambda$, EXPON.

Poniamo $\rho = 0,75 = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = \lambda \cdot \frac{\bar{z}}{C} = \lambda \cdot 0,5 = 0,75$

da cui $\lambda = 0,75 \cdot \frac{1}{0,5} = 1,5$. Allora $\lambda_1 = 0,3 \cdot 1,5 = 0,45$

e $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{0,45}{\mu} = 0,225$

$$E[T_{S_1}] = E[T_{Q_1}] + E[S]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 E[S^2]}{1-\rho_1} + 0,5$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot 0,45 \cdot \cancel{2} \cdot (0,5)^2}{1-0,225} + 0,5$$

$$= 0,645161 \checkmark$$

Per exp.

$\sigma^2 = E[S^2] - E[S]^2 = \frac{1}{\mu^2}$

$\to E[S^2] = \sigma^2 + E[S]^2 = \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{2}{\mu^2}$

cioè $E[S^2] = 2E[S]^2$

b) $E[T_Q(x=1)]$ con schedule SRPT.

Ci viene detto che $E[T_Q(x=1)] = \dfrac{\overbrace{\frac{\lambda}{2}\int_0^{x=1} t^2\, dF(t)}^{C} + \overbrace{\frac{\lambda}{2}x^2(1-F(x))}^{A}}{\underbrace{\left(1-\lambda\int_0^{x=1} t\, dF(t)\right)^2}_{B}}$

RISOLVIAMOLA IN "PEZZI"

A: $\frac{\lambda}{2} 1^2 \left[1 - (1 - e^{-\mu})\right] \Big|_{\substack{\mu=2 \\ \lambda=1,5}} = 0,1015014$

B) $\left(1 - \lambda\int_0^1 t \cdot d(1-e^{-\mu t})\right)^2 = \left[1 - 1,5\int_0^1 \underset{f}{t}\, \underset{g'}{(2e^{-2t})}dt\right]^2 =$

$\left[1 - 1,5\left(-\underset{f}{t}\, \underset{g}{e^{-2t}} - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-2t})dt\right)\right]^2 =$

$\left[1 - 1,5\left(-te^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_0^1\right]^2 = \left[1 - 1,5\left(-e^{-2} + 0 - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\right)\right]^2$

$= 0,307475$

C) $0,75\int_0^1 \underset{f}{t^2} \cdot \underset{g'}{d(1-e^{-2t})} = 0,75\int_0^1 \underset{f}{t^2}\, \underset{g'}{(2e^{-2t})}dt =$

$= 0,75\left[t^2 \cdot (-e^{-2t}) - \int(-e^{-2t}) \cdot 2t\right] =$

$= 0,75\left[-t^2e^{-2t} + \int_0^1 2t \cdot e^{-2t}\,dt\right] =$

$= 0,75\left[-e^{-2} + 0 + \left(-e^{-2} + 0 - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\right)\right] = 0,121246$

$\to E[T_Q(x=1)] = \frac{0,121246 + 0,1015014}{0,307475} = 0,7244406$ s

c) % Job con $E[T_Q] \leq E[T_Q(1)]$?

SRPT è size based, $F(t)$ rappresenta l'area = n° Job, allora

$F(1) - F(0) = (1 - e^{-\mu t})\Big|_0^1 = (1 - e^{-2t})\Big|_0^1 = [1 - e^{-2} - (1-1)] =$

$= 1 - e^{-2} = 0,864665$, $F(1) - F(0) =$ servizio da '0' a '1' sec.

esercizio n° 2 p. 4 degli esercizi

Abbiamo un sistema interattivo dove:

$T = 10\ min = 600\ s$ $N = n°\ users = 50$ servers = 10

R = avg response time / trans = 20 s

$D_{MAX} = 1$ sec/trans $D_{TOT} = 2$ sec/trans

n° completamenti = $C = 90$

N° utenti pensanti?

Sappiamo, dalla teoria, che $N_{think} = \underbrace{Z}_{tempo} \cdot \underbrace{X_0}_{Throughput}$

Sappiamo che: $X_0 = \frac{C}{T} = \frac{90}{600} = 0{,}15$ Job/s

e inoltre $R = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{50}{0{,}15} - Z = 20$

$\Longleftrightarrow Z = 313{,}\overline{3}$ s

Concludiamo con $N_{think} = 313{,}\overline{3} \cdot 0{,}15 = 47$

Ultimo esercizio p.4 foglio esercizi

Dati:

$C = 10^5$ op/sec ; exp $Z = 4 \cdot 10^4$ op/Job $\rho = 0{,}6$

Nota la job size (size based) in una size based

senza prelazione con due classi:

classe 1 se $Z \leq E[S]$
classe 2 se $Z > E[S]$

$E[T_{S_K}]$ e $E[T_{S_{glob}}]$?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che $E[S] = \frac{Z}{C} = 0{,}4$, da cui $\mu = \frac{1}{E[S]} = 2{,}5$

e $\rho = 0{,}6 = \frac{\lambda}{\mu}$ da cui $\lambda = \rho\mu = 1{,}5$

Calcolo $E[S] = \frac{1}{F(0{,}4) - F(0)} \int_0^{0.4} t \cdot s(t)\,dt$

$F(0.4) - F(0) = 1 - e^{-\mu t}\Big|_0^{0.4} = 0{,}6321 = p_1 \rightsquigarrow p_2 = 0{,}3679$

$\int_0^{0.4} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^{0.4} \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{(\mu e^{-\mu t})}_{g'}\,dt = \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{(-\mu e^{-\mu t})}_{g} - \int \underbrace{-e^{-\mu t}}_{f'g}\,dt$

$= -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\Big|_0^{0.4} = 0{,}10569$

allora $E[S_1] = \frac{0{,}10569}{0{,}6321} = 0{,}1672$

Analogamente $E[S_2] = \frac{1}{0.3679}\left[-te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right]\Big|_{0.4}^{\infty} \simeq 0,8\ s$

Quindi $E[S_1] = 0,167210 \quad E[S_2] = 0,8\ s$

Calcolo $E[T_{QK}]$

$E[T_{Q1}] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho_1}$ con $\rho_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = \lambda \cdot p_1 E[S_1]$

$= 1,5 \cdot 0,6321 \cdot 0,167210 = 0,15854$

da cui

$E[T_{Q1}] = \frac{0,6 \cdot 0,4}{1-0,15854} \approx 0,28522\ s$

e $E[T_{S1}] = E[T_{Q1}] + E[S_1] = 0,28522 + 0,167210 = 0,45243\ s$

$E[T_{Q2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{E[T_{Q1}]}{(1-\rho)} = \frac{0,28522}{0,4} = 0,71305\ s$

e $E[T_{S2}] = E[T_{Q2}] + E[S_2] = 0,71305 + 0,8 = 1,51305\ s$

Concludo con $E[T_{S\,GLOB}] = p_1 E[T_{S1}] + p_2 E[T_{S2}] =$

$= 0,842670\ s$

[congettura] un dual core migliora le performance?

Sarebbe multi server con multi Priority, di tipo SIZE BASED

$E[T_{Q1}] = \frac{\rho_{Q1} E[S]}{1-\rho_1}$, $E[T_{Q2}] = \frac{\rho_Q E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)}$

Se considero il caso con PRELAZIONE (quello usato sopra)

allora $E[T_{S1}] = E[T_{Q1}] + \underset{E[S_{virt\_1}]}{\underset{\shortparallel}{E[S]}}$ e

$E[T_{S2}] = E[T_{Q2}] + \underbrace{\frac{E[S]}{1-\rho_1}}_{E[S_{virt\_2}]}$

Esercizi "vari" Fanfa

Dati: tempo medio interattivo = 6 s , $Z = 5000$ op/job

$C = 1000$ op/s

1) calcola μ, $E[S]$, λ, $E[T_a]$, $E[T_s]$, $E[N_a]$, $E[N_s]$ FIFO

$$\lambda = \frac{1}{\text{interattivo}} = \frac{1}{6} \qquad E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{5 \cdot 10^3}{10^3} = 5\,s$$

$$\mu = \frac{1}{E[S]} = 0.2 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{0.2} = \frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$$

$$E[T_a] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{1-\frac{5}{6}} = 25$$

$$E[T_s] = E[T_a] + E[S] = \frac{1}{\mu - \lambda} = 30\,s$$

$$E[N_a] = \lambda \cdot E[T_a] = \frac{1}{6} \cdot 25 = 4.1\overline{6}$$

$$E[N_s] = E[N_q] + \underbrace{\lambda E[S]}_{\rho} = \lambda \cdot E[T_s] = 5$$

$$\text{slowdown}(0.5) = \frac{E[T_a]}{0,5} + 1 = \frac{25}{0,5} + 1 = 50 + 1 = 51$$

2) Calcolo di $E[T_s]$ con due classi SIZE BASED, in base al valore di $E[S]$

Con due code, il n° dei job per ciascuna delle due classi è: classe 1: $F(E[S]) - F(0)$, classe 2: $F(\infty) - F(E[S])$

$$F(x) = 1 - e^{-\mu t} \rightsquigarrow \text{classe } 1: \; 1 - e^{-\mu \cdot E[S]} - (1 - e^{-\mu \cdot 0}) =$$
$$= 1 - e^{-\mu \cdot \frac{1}{\mu}} - (1-1) = 1 - e^{-1} = 0,6321$$

allora in classe 2 si avranno $1 - 0,6321 = 0,3679 = p_2$

Passiamo a $E[S_k] = \frac{1}{p_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} t \cdot f(t)\,dt$

CLASSE 1:

$$E[S_1] = \frac{1}{0.6321} \int_0^{E[S]} \underset{f}{t} \cdot \underset{g'}{(\mu e^{-\mu t})}\,dt = \frac{1}{0.6321} \left[t(-e^{-\mu t}) - \int 1 \cdot (-e^{-\mu t}) \right]_0^{E[S]}$$

$$= \frac{1}{0.6321} \left[-t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right]_0^{E[S]} = \frac{1}{0.6321} \left[-E[S] e^{-1} + 0 - E[S] e^{-1} + E[S] \right] \Bigg|_{E[S]=5}$$

$$= 2,0901$$

CLASSE 2

$$E[S_2] = \frac{1}{0,3679} \left[-t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right]_{E[S]}^{\infty} = \frac{1}{0.3679} \left[-0 - 0 - \left(-E[S] e^{-1} - E[S] e^{-1} \right) \right] \Bigg|_{E[S]} =$$

$\approx 10\,s$

Calcoliamo $E[T_{a_k}]$ ed $E[T_{s_k}]$, prima per la classe 1.

$$E[T_{a_1}] = \frac{\rho E[S]}{(1 - \rho_1)} = \frac{\rho E[S]}{(1 - \lambda \cdot p_1 \cdot E[S_1])} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{(1 - \frac{1}{6} \cdot 0,6321 \cdot 2,09)} = 5,3431$$

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 5,3431 + 2,09 = 7,4332\,s$$

poi per la classe 2:

$$E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{E[T_{a_1}]}{1-\rho} = \frac{5,3431}{1-\frac{5}{6}} = 32,0586\,s$$

$$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 42,0586\,s$$

Calcoliamo anche

$E[T_{S\,glob}] = \sum p_i E[T_{S_i}] = 0{,}6321 \cdot E[T_{S_1}] + 0{,}3679\, E[T_{S_2}] =$

$= 0{,}6321 \cdot 7{,}4332 + 0{,}3679 \cdot 42{,}0856 = 20{,}18181$

$E[N_S] = \lambda \cdot E[T_S] = \frac{1}{6} \cdot 20{,}18181 = 3{,}3636$

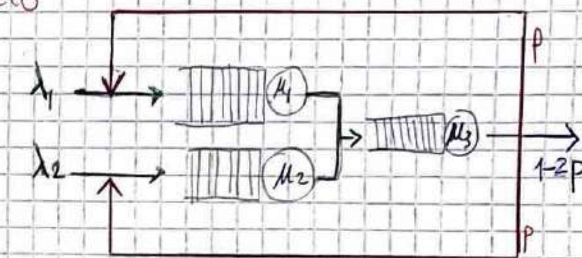
$E[S_d(0{,}5)] = \frac{E[T_{a1}]}{0{,}5} + 1 = \frac{5{,}3432}{0{,}5} + 1 = 11{,}6865$

Nel caso fair (Processor Sharing) $= \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 6\ s$

Speedup tra tempi di attesa? (per $x = 0{,}5$)

$\frac{E[T_{Q\,FIFO}]}{E[T_{Q_2}]} = \frac{25}{5{,}3431} = 4{,}6789$

Altro esercizio



$\lambda_1 = \lambda_2 = 20$

$\mu_1 = 30 \quad \mu_2 = 40 \quad \mu_3 = 60$

voglio avere distribuzione stazionaria di probabilità, cioè $\rho_1, \rho_2, \rho_3 < 1$

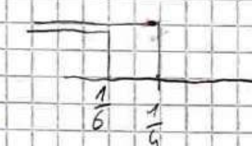
trovo prima le entrate.

$$\begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_2' = \lambda_2 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda_1' + \lambda_2' \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1' = 20 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_2' = 20 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3 = 40 + 2p\lambda_3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1' = \frac{20}{1-2p} \\ \lambda_2' = 20 + \frac{40p}{1-2p} = \frac{20}{1-2p} \\ \lambda_3(1-2p) = 40 \rightsquigarrow \lambda_3 = \frac{40}{1-2p} \end{cases}$$

dobbiamo imporre:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\lambda_1'}{\mu_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2p} < 1 \\ \rho_2 = \frac{\lambda_2'}{\mu_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-2p} < 1 \\ \rho_3 = \frac{\lambda_3'}{\mu_3} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-2p} < 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < 1-2p \\ \frac{1}{2} < 1-2p \\ \text{come la } 1^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3} < -2p \\ -\frac{1}{2} < -2p \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{3} > 2p \\ \frac{1}{2} > 2p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} > p \\ \frac{1}{4} > p \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} p < \frac{1}{6} \\ p < \frac{1}{4} \end{cases}$$



$\rightsquigarrow p < \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$

Procediamo con $p = 0.1$ che è $< 0.1\overline{6}$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{20}{1-2\cdot 0,1} = 25 \\ \lambda_2' = \dfrac{20}{1-2\cdot 0,1} = 25 \\ \lambda_3 = \dfrac{40}{1-2\cdot 0,1} = 50 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \rho_1' = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6} = 0,8\overline{3} \\ \rho_2' = 0,8\overline{3} \\ \rho_3' = \dfrac{5}{3} = 1,\overline{6} \end{cases}$$

Calcoliamo i tempi di attesa per ogni centro:

$$E[T_{ak}] = \frac{\rho_k E[S_k]}{1-\rho_k} \quad \text{da cui:}$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{\rho_1 E[S_1]}{1-\rho_1} = \frac{0,8\overline{3}\cdot \frac{1}{30}}{1-0,8\overline{3}} \approx 0,1666667\ s$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{\rho_2 E[S_2]}{1-\rho_2} = \frac{0,625\cdot \frac{1}{40}}{1-0,625} \approx 0,041667\ s$$

$$E[T_{a_3}] = \frac{\rho_3 E[S_3]}{1-\rho_3} = \frac{0,8\overline{3}\cdot \frac{1}{60}}{1-0,8\overline{3}} \approx 0,083333\ s$$

con tempi di risposta:

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0,2$$

$$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0,041667 + \frac{1}{40} = 0,066667$$

$$E[T_{s_3}] = E[T_{a_3}] + E[S_3] = 0,09999$$

Per il tempo di risposta del sistema calcolo le visite:

$$V_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{25}{40} = 0,625 \qquad V_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{25}{40} = 0,625$$

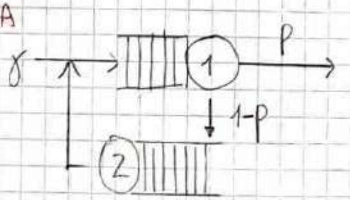
$$V_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{50}{40} = 1,25 \text{, da cui:}$$

$$E[t_r] = V_1 E[T_{s_1}] + V_2 E[T_{s_2}] + V_3 E[T_{s_3}] = 0,291667\ s$$

Minimizzare il tempo di risposta vuol dire imporre $\rho_1 = \rho_2$

NB: non è legato all'esercizio fatto, è una cosa in generale.

Esercizio p.60 FANFA



DATI

$\gamma = 1,3\ J/s \quad p = 0,05$

$\mu_1 = 30\ J/s \quad \mu_2 = 25\ J/s$

Calcolare $E(t_r)$ del sistema e γ_{MAX} ammissibile

SVOLGIMENTO

- scrivo eq flussi in entrata $\forall$ centro, risolvendoli

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma + \lambda_2 \\ \lambda_2 = (1-p)\lambda_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = \gamma + [(1-p)\lambda_1] \\ \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} p\lambda_1 = \gamma \\ \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\gamma}{p} \\ \end{cases}$$

quindi $\lambda_1 = \frac{\gamma}{p} = \frac{1.3}{0.05} = 26$, $\lambda_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)\cdot\gamma = 24.7$

- scrivo utilizzazioni e visite (rispetto γ)

- $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{26}{30} = 0.8666$ • $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{24.7}{25} = 0,988$

- $V_{1/\gamma} = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{26}{1.3} = 20$ • $V_{2/\gamma} = \frac{24.7}{1.3} = 19$

- scrivo i tempi di risposta $\forall$ centro, poi Tempo risposta del sistema

$$E[T_{s_1}] = \frac{1}{\mu_1-\lambda_1} = \frac{1}{30-26} = 0,25 \quad ; \quad E[T_{s_2}] = \frac{1}{\mu_2-\lambda_2} = \frac{1}{25-24.7} = 3,\overline{3}$$

$$E[t_r] = \sum E[T_{si}]\cdot V_{i/\gamma} = 0,25\cdot 20 + 3,\overline{3}\cdot 19 = 68,\overline{3}$$

γ_{MAX} lo trovo imponendo.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma}{p} \rightsquigarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1 \\ \lambda_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)\gamma \rightsquigarrow \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma < p \cdot \mu_1 = 1,5 \\ \gamma < \frac{p}{1-p} \cdot \mu_2 = 1,3157 \end{cases}$$

allora $\gamma < 1,3157$.

Fin