Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Discrete Random Variates: applications

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

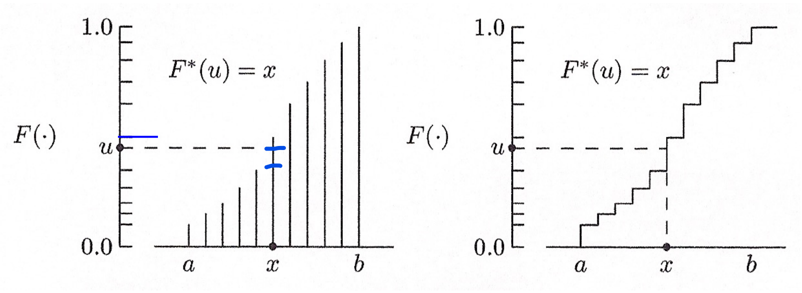
1

Equilikely è la versione discreta dell'uniforme

Equilikely(a,b) $F(x) = \frac{x-a+1}{b-a+1} \quad x = a, a+1, \ldots, b$

$$F^*(u) = \min_x \{x : u < F(x)\}$$

Minimo x tale per cui la F(x) sia maggiore di u.
Le due linee blu sulla 'x' ci dicono che tutti i valori lì dentro verranno associati ad 'u'.



$F(x\text{-}1) \le u < F(x)$ $\longleftrightarrow$ $\frac{(x-1)-a+1}{b-a+1} \le u < \frac{x-a+1}{b-a+1}$

2

$$\frac{(\cancel{x}-\cancel{1})-a+\cancel{1}}{b-a+1} \le u < \frac{x-a+1}{b-a+1}$$

$$x-a \le (b-a+1)u < x-a+1$$

$$x \le a+(b-a+1)u < x+1$$

$$x = a+\lfloor (b-a+1)u \rfloor$$

$$F^{*}(u) = a+\lfloor (b-a+1)u \rfloor$$

model 1

Example: Inventory System

in program sis2, the demand per time interval is an *Equilikely*(10,50) random variate

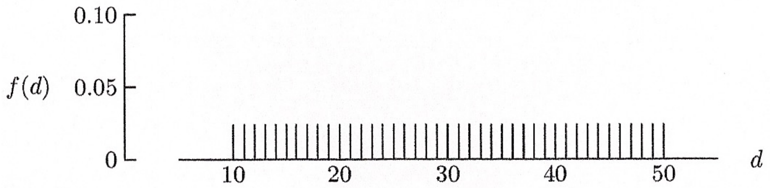
```
long Equilikely(long a, long b)
{  return (a + (long) ((b - a + 1) *
Random()));}

long GetDemand(void)
{
  return (Equilikely(10, 50)); }
…
 while (index < STOP) {
 index++;
 …
 inventory -= demand;}
```

model 1

Example: Inventory System

• μ=30, $\sigma = \sqrt{140} \cong 11.8$, and the demand pdf is flat

sembra strano che ho stessa probabilità di comprare 10 macchine che 50 macchine.

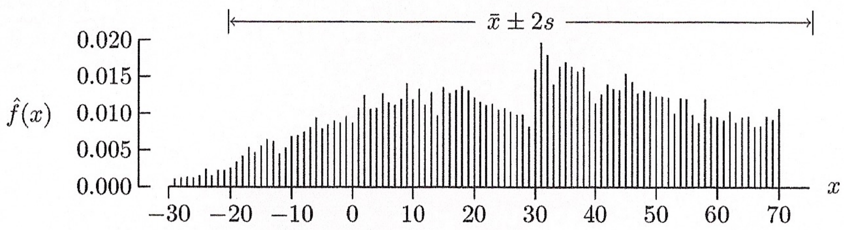


• this model is not very realistic

5

Example 3.1

- Using sis2mod to generate 10000 weeks of sample data, the inventory level histogram from sis2.out can be constructed (s,S)=(20,80)



- *x* denotes the inventory level prior to review
- $\bar{x} = 27.63, \quad s = 23.98$
- about 98.5% of the data falls within $\bar{x} \pm 2s$

Equilikely(10, 50) ? non va molto bene, come abbiamo visto prima è troppo piatta!

6

modello2: in una settimana ci possono essere 100 istanze possibili, su ciascuna metto probabilità 0.3 indipendente.
Questo 0.3 è "probabilità che richiesta ci sia". La media è 0.3*100 = 30, è quindi una binomiale (100, 0.3).
Però adesso è troppo concentrata su media 30 (prima era tra 10 e 50).

model 2

Alternative Inventory Demand model

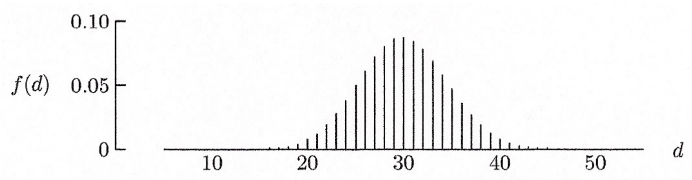
- 100 instances per time interval when demand for 1 unit may occur
- The probability of demand is 0.3 per instance (independently)

  This is *Binomial*(100,0.3) !
- the function `GetDemand` in sis2 becomes:

```
long GetDemand(void) {
        return (Binomial(100,0.3));
}
```

- μ=30, $\sigma = \sqrt{21} \cong 4.6$ and the pdf is:

standard deviation minore,
mi discosto meno dalla media.



7

La binomiale (n istanze, probabilità successo della singola istanza) (come 100 lanci di monete testa/croce).
La binomiale (30,p) è simile a Poisson(30), con "n" grande.

model 3

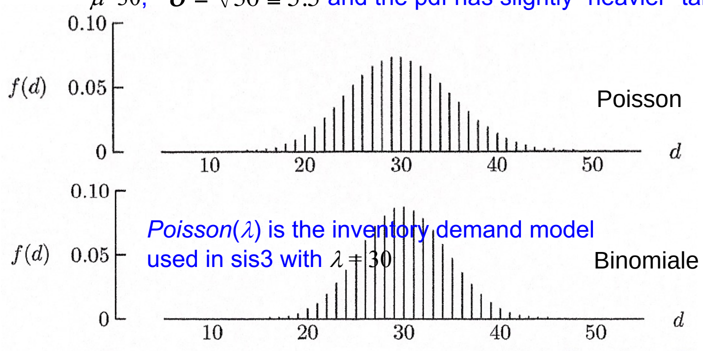
A *Poisson*(30) model

- *Binomial*(*n*,*p*) ≈ *Poisson*(*np*) for large n
- if *Binomial*(100,0.3) is realistic, should also consider *Poisson*(30)
- the function `GetDemand` in sis2 would be:

```
long GetDemand(void) {
        return (Poisson(30));
}
```

- μ=30, $\sigma = \sqrt{30} \cong 5.5$ and the pdf has slightly "heavier" tails:

le code si sono allungate.
Anche la deviazione std è un pò
cresciuta.



Poisson(λ) is the inventory demand model
used in sis3 with $\lambda = 30$

8

Rilasso il vincolo della richiesta che deve essere unitaria, passo a 50 istanti POSSIBILI in cui la domanda ci può essere o meno. Per ogni istanza la quantità richiesta è modellabile con variabile geometrica che assume valore 0 (nessuna richiesta), 1, 2, 3 ...
50 variabile geometriche sommate formano una Pascal. La standard deviation sale, graficamente si appiattisce.
Sempre a parità di media, quando faccio confronto SEMPRE A PARITA' DI MEDIA, sennò non ha senso.

model 4

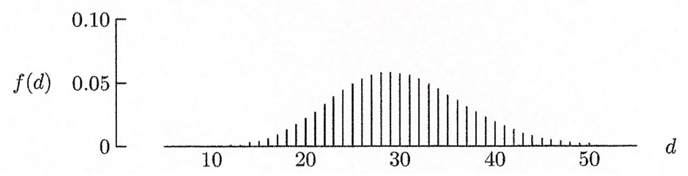
Discrete Simulation
Discrete RV applications

A *Pascal*(50,0.375) model

- 50 instances per time interval
- the demand per instance is *Geometric*(*p*) with p=0.375
- the function `GetDemand` in sis2 would be:

```
long GetDemand(void) {
        return (Pascal(50,0.375));
}
```

- μ=30, $\sigma = \sqrt{48} \cong 6.9$ and the pdf has heavier tails than the *Poisson*(30) pdf:



Prof. Vittoria de Nitto Personè 9

9

Invece di avere numero di istanze fisso, lo rendo randomico di media 50. Il resto non cambia. Il numero di richieste per singola istanza è sempre geometrica. Genero prima le istanze con Poisson, che poi tronco (ad esempio, impossibile che in una settimana non ci sia neanche un ordine). In Pascal ci metto istances = n° variabili geometriche generate, con rispettiva probabilità.

model 5

Discrete Simulation
Discrete RV applications

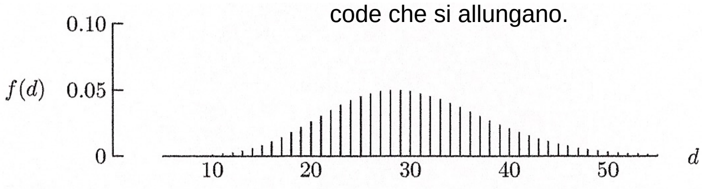
A compound demand model

- the number of demand instances per time interval is *Poisson*(50)
- the demand per instance is *Geometric*(*p*) with p=0.375
- the function `GetDemand` in sis2 becomes:

```
long GetDemand(void) {
        long instances = Poisson(50.0);   //must truncate to avoid 0
        return (Pascal(instances, 0.375));
}
```

- μ=30, $\sigma = \sqrt{66} \cong 8.1$ and the pdf has heavier tails

code che si allungano.



Prof. Vittoria de Nitto Personè 10

10

La densità è "composta": devo definire v.a. che include quantità domanda D e numero istanze I.

model 5

pdf for the compound demand

- define random variables

  D: the demand amount

  I: the number of demand instances per time interval

$$f(d) = \Pr(D = d) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(I = i) \Pr(D = d | I = i) \qquad d = 0,1,2,\ldots$$

- to compute $f(d)$, truncate infinite sum: $0 < a \le i \le b$

```
/* use the library rvms */
double sum = 0.0;
for (i = a; i <= b; i++)
        sum += pdfPoisson(50.0,i) * pdfPascal(i,0.375,d);
return sum;
/* sum is f(d) */
```


tutte le istanze tali che il numero di domande è "d". Devo troncare per non prendere 0.

11

Nel sis2 avevamo il modello Equilikely, che però era abbastanza limitato, poichè era spalmato in modo uniforme.

Comparison of Demand Models

sis2: used an *aggregate* demand for each time interval, generated as an *Equilikely*(10,50) random variate

- Aggregate demand per time interval is random
- Within an interval, time between demand instances is constant
- Example: if aggregate demand is 25, inter-demand time is 1/25=0.04

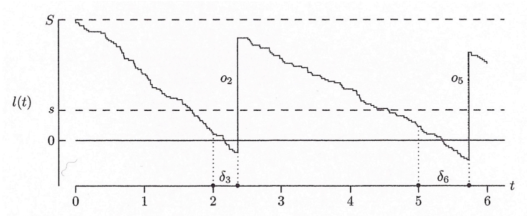
- Now (sis3) using *Exponential*(1/λ) inter-demand times
  - Demand is modeled as an arrival process
  - Average demand per time interval is λ

```
double GetDemand(void)/* ------------------------------------------------- *
                       generate the next demand instance (time) with rate 30 *
                       per time interval and exactly one unit of demand per  *
                       demand instance  * ----------------------------------*/
{ static double time = START;
  SelectStream(0);
  time += Exponential(1.0 / 30.0);
return (time);}
```


12

model 6

sis3



Program sis4

interomanda:
tra una domanda e
l'altra.

- Based on sis3 but with a more realistic inventory demand model
- The inter-demand time is an *Exponential*($1/\lambda$) random variate
- Whether or not a demand occurs at demand instances is random with probability p
- To allow for the possibility of more than 1 unit of demand, the demand amount is a *Geometric*(p) random
- Expected demand per time interval is $\dfrac{\lambda p}{(1-p)}$ lambda = tasso arrivi

13

model 6

The auto dealership

- The inventory demand model for sis4 corresponds to λ customers per week on average
- Each customer will buy probabilità geometrica
  - 0 autos with prob $(1-p)$
  - 1 auto with prob $(1-p)p$
  - 2 autos con prob $(1-p)p^2$, etc.
- with λ=120 p=0.2, average demand is 30 deve rimanere invariata.

$$30.0 = \frac{\lambda p}{(1-p)} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)p^x = \underbrace{\lambda(1-p)p}_{19.2} + \underbrace{2\lambda(1-p)p^2}_{7.68} + \underbrace{3\lambda(1-p)p^3}_{2.304} + \ldots$$

- $\lambda(1-p)$=96.0 customers buy 0 autos
- $\lambda(1-p)p$=19.2 customers buy 1 auto
- $\lambda(1-p)p^2$=3.84 customers buy 2 autos
- $\lambda(1-p)p^3$=0.768 customers buy 3 autos, etc.

96 utenti comprano 0 auto,
19.2 utenti ne comprano 1, etc...
IN MEDIA

14

Ma come faccio a capire se devo usare esponenziale, geometrica, etc.., parametri da usare?
Esperienza, prelievo dati. Non c'è un manuale che mi dice cosa usare.

Per due processi stocastici diversi devo prendere due stream diversi.

model 6 sis4.c

uncoupled processes

```
double GetDemand(long *amount)
{
 static double time = START;
 SelectStream(0);
 time += Exponential(1.0 / 120.0);  /* demand instance */
 SelectStream(2);
 *amount = Geometric(0.2);          /* demand amount   */
 return (time);
}
...
if (t.current == t.demand) { /* process an inventory demand */
   sum.demand += amount;
   inventory  -= amount;
   t.demand    = GetDemand(&amount);
}
```

la domanda sum.demand viene incrementata di "amount"; non più di 1.

```
if (t.current == t.demand) { /* process an inventory demand */
    sum.demand++;
    inventory--;
    t.demand = GetDemand();
}
```

vecchia versione!!

sis3.c

15

Nel modello 6, con la geometrica, non c'è limite agli acquisti di auto. Non ha molto senso! Meglio troncare e far riferimento ad un range finito, posso partire da "a" e "b" e passare alle probabilità di coda, oppure partire dall'inversa. Nella slide successiva vediamo come applicarla al nostro modello.

Truncation: examples

- In the previous example, no bound on number of autos purchased
- Can be made more realistic by truncating possible values
- Start with random variable X with possible values $\chi=\{0, 1, 2, \dots\}$ and cdf $F(x)=\Pr(X \le x)$
- want to restrict X to the finite range $0 \le a \le x \le b < \infty$
- if $a > 0$, $\alpha = \Pr(X < a) = \Pr(X \le a\text{-}1) = F(a\text{-}1)$
- $\beta = \Pr(X > b) = 1\text{-}\Pr(X \le b) = 1\text{-}F(b)$
- $\Pr(a \le X \le b) = \Pr(X \le b) - \Pr(X < a) = F(b) - F(a\text{-}1)$

  essentially, always true iff $F(b) \cong 1.0$ and $F(a\text{-}1) \cong 0.0$

16

Parto da probabilità delle code, uso le inverse e calcolo i due punti 'a' e 'b'.
Posso fare verifica con cumulativa, e vedo che sia a destra che sinistra viene probabilità più piccola di alfa e beta. Stiamo escludendo una quantità piccola

The auto dealership

model 5

- the number of demand instances per time interval is *Poisson*(50)
- the demand per instance is *Geometric*(p) with p=0.375

For the *Poisson*(50) random variable I, determine a and b so that

$$\Pr(a \leq I \leq b) \cong 1.0$$

- use $\alpha = \beta = 10^{-6}$ and `rvms`

a = idfPoisson(50.0, α);
b = idfPoisson(50.0,1.0 - β);

- results: $a = 20$, $b = 87$
- consistent with the bounds produced by the conversion:

$\Pr(I < 20)$ = cdfPoisson(50.0, 19) $\cong 0.48 \times 10^{-6} < \alpha$
$\Pr(I > 87) = 1.0$ - cdfPoisson(50.0, 87) $\cong 0.75 \times 10^{-6} < \beta$

17

model 5

Effects of truncation

- truncating *Poisson*(50) to the range $\{20, \ldots, 87\}$ is insignificant: truncated and un-truncated random variables have (essentially) the same distribution

18

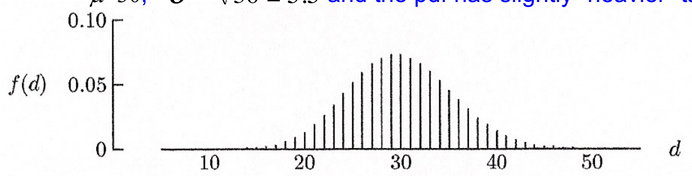
model 3

A *Poisson*(30) model

- *Binomial*(n,p) ≈ *Poisson*(np) for large n
- if *Binomial*(100,0.3) is realistic, should also consider *Poisson*(30)
- the function `GetDemand` in sis2 would be:

```
long GetDemand(void) {
        return (Poisson(30));
}
```

- μ=30, $\sigma = \sqrt{30} \cong 5.5$ and the pdf has slightly "heavier" tails:



19

Qui voglio troncare tra 20 e 40. Un primo approccio è quello nello snippet: in pratica tutti i numeri <20 e >40 li vado a "cumulare" proprio in 20 e 40. Ma questi sono valori limite, cosi facendo gli do rilevanza, io devo escluderli invece.

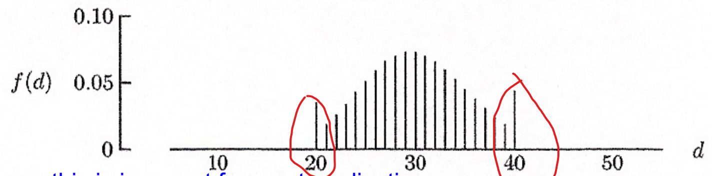
model 3

The auto dealership
incorrect truncation

- use *Poisson*(30) demand model in program sis2
- truncate the demand to the range $20 \le d \le 40$

```
d = Poisson(30.0);
if (d < 20)
        d = 20;
if (d > 40)
        d = 40;
return d;
```

- original left and right tails "grouped together" at 20 and 40



- this is incorrect for most applications

20

Come farlo CORRETTAMENTE?

Truncation by cdf modification

- troncate *Poisson*(30) to range $20 \le d \le 40$
- the *Poisson*(30) pdf is:

Qui normalizzo rispetto alla cumulativa che voglio usare. Quindi non cumulo sugli estremi, ma li "sommo uniformemente" su tutti. Sto normalizzando invece che metterla agli estremi.

$$f(d) = \exp(-30)\frac{30^d}{d!} \qquad d = 0,1,2,...$$

$$\Pr(20 \le D \le 40) = F(40) - F(19) = \sum_{d=20}^{40} f(d) \cong 0.945817$$

- compute a new truncated random variable D_t with pdf $f_t(d)$

$$f_t(d) = \frac{f(d)}{F(40) - F(19)} \qquad d = 20,21,...,40$$

Lo stesso posso fare sulla cumulativa.

Truncation by cdf modification

- the corresponding truncated cdf is

$$F_t(d) = \sum_{t=20}^{d} f_t(t) = \frac{F(d) - F(19)}{F(40) - F(19)} \qquad d = 20,21,...,40$$

- mean and standard deviation of D_t

normalizzata,
poco più piccole perchè sia hanno meno valori!

$$\mu_t = \sum_{d=20}^{40} d f_t(d) \cong 29.841 \qquad \sigma_t = \sqrt{\sum_{d=20}^{40} (d - \mu_t)^2 f_t(d)} \cong 4.720$$

- mean and standard deviation of *Poisson*(30)

non normalizzata

$$\mu = 30.0 \qquad \sigma = \sqrt{30} \cong 5.477$$

Applico troncamento tramite inversa.
Genero numero random, d = 30 è la media.
Applico l'algoritmo dell'inversa:
se u >= F(d) = punto in cui siamo con 30,
allora devo andare avanti: d++
Altrimenti, vedo se sto sotto 20, se sì genero 20,
sennò devo andare 'indietro'.

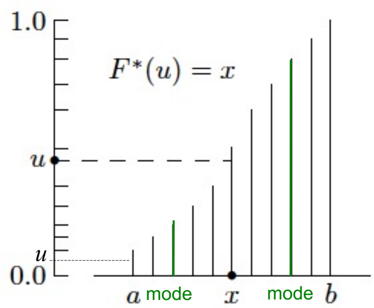
"Cerco il minimo per cui sia minore di u"

model 3

Truncation by cdf modification

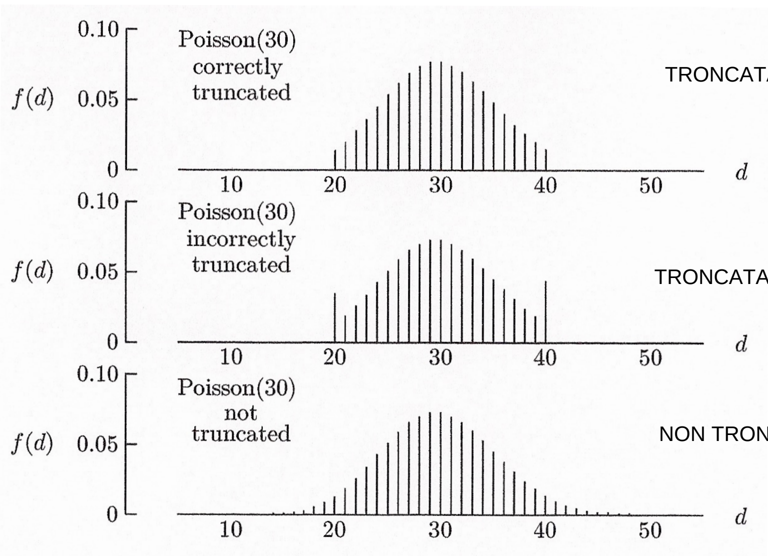
- A random variate truncated to $20 \leq d \leq 40$ can be generated by inversion, using the truncated cdf $F_t(\cdot)$ and the Algorithm 2

```
u = Random();
d = 30;
if (Ft(d) <= u)
      while (Ft(d) <= u)
            d++;
else if (Ft(20) <= u)
            while (Ft(d-1) > u)
                  d--;
      else
            d = 20;
return d;
```



23

Illustration of pdfs



TRONCATA BENE

TRONCATA MALE

NON TRONCATA

24

Truncation - conclusion

see the book for the following

1. the truncation by cdf modification in general
2. a different approach called *truncation by constrained inversion*
3. the simple technique *truncation by acceptance-rejection*

Important points

The modeler should be familiar with

Starter pack di conoscenza

- How these distribution arise
- The support, χ
- The mean, μ
- The variance, σ^2
- The shape of the pdf

- how these distributions relate to one another

Exercises

- Generating Discrete RV, use of libraries: exerc. 6.2.4
- Truncation: exerc. 6.3.1, 6.3.2