

# Performance Modeling of Computer Systems and Networks

*Prof. Vittoria de Nitto Personè*

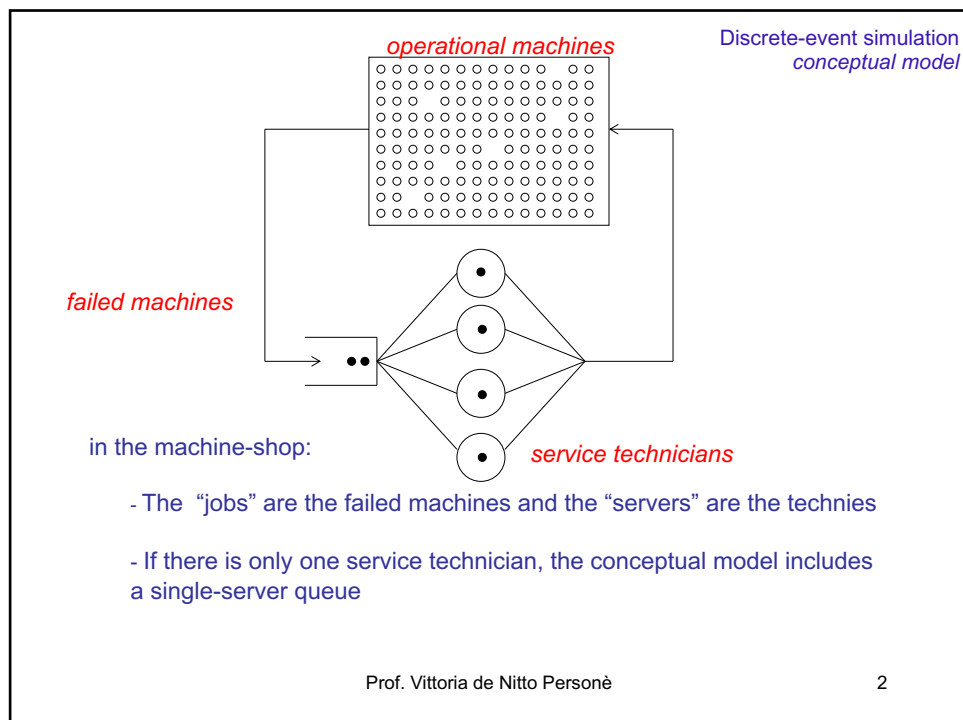
Trace-driven simulation  
Case study 1

Università degli studi di Roma Tor Vergata  
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

Copyright © Vittoria de Nitto Personè, 2021  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

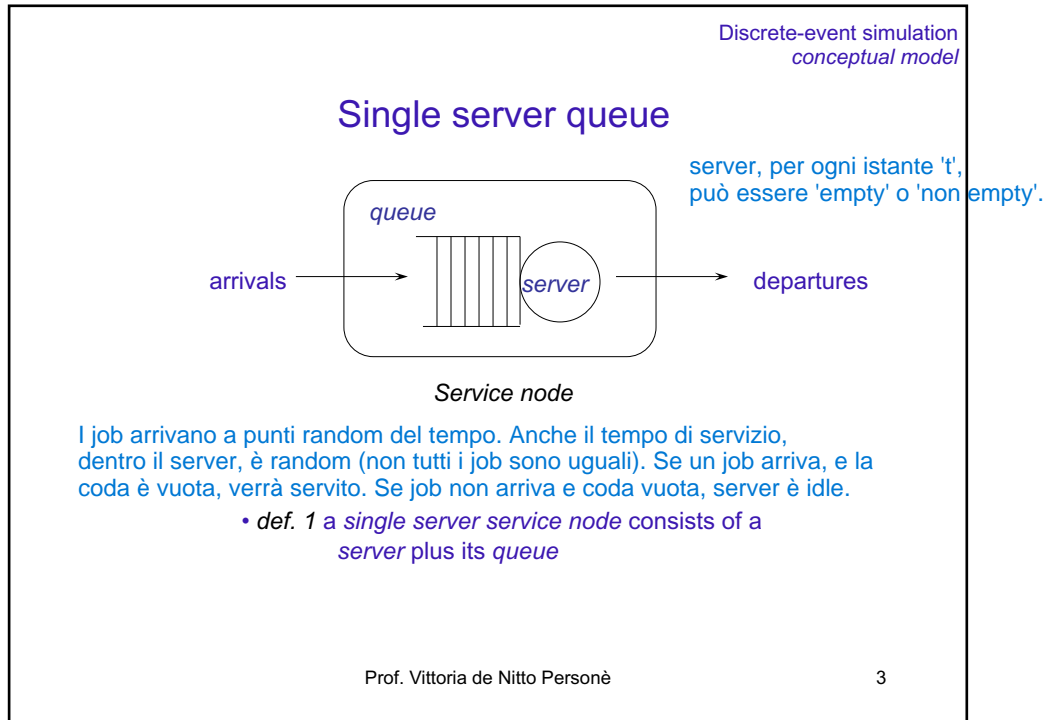


1

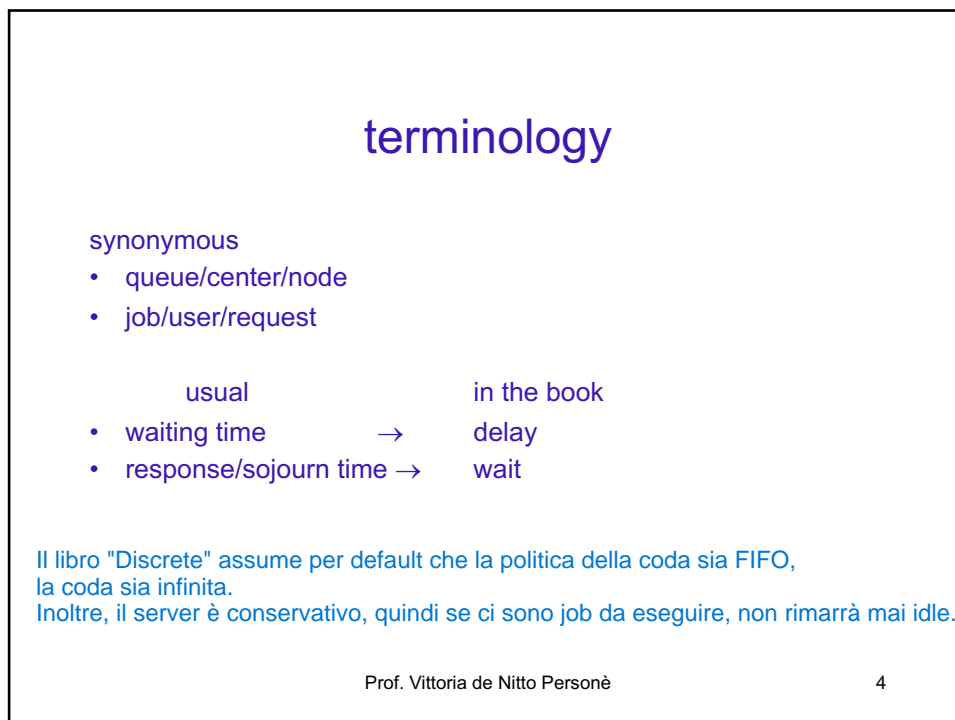


2

vedi p.22 di "Discrete"



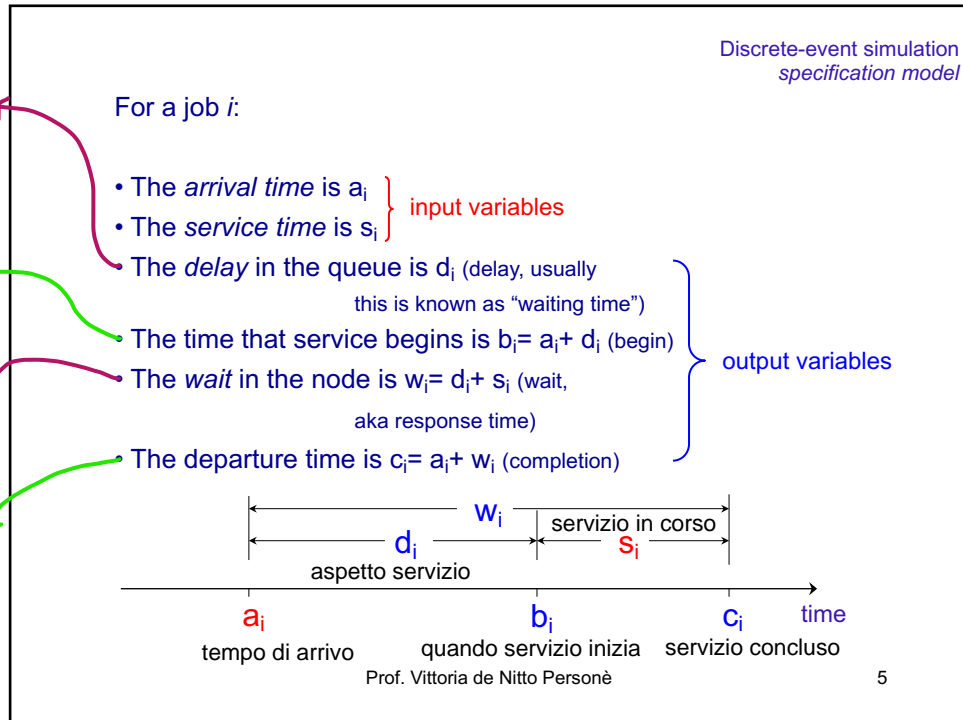
3



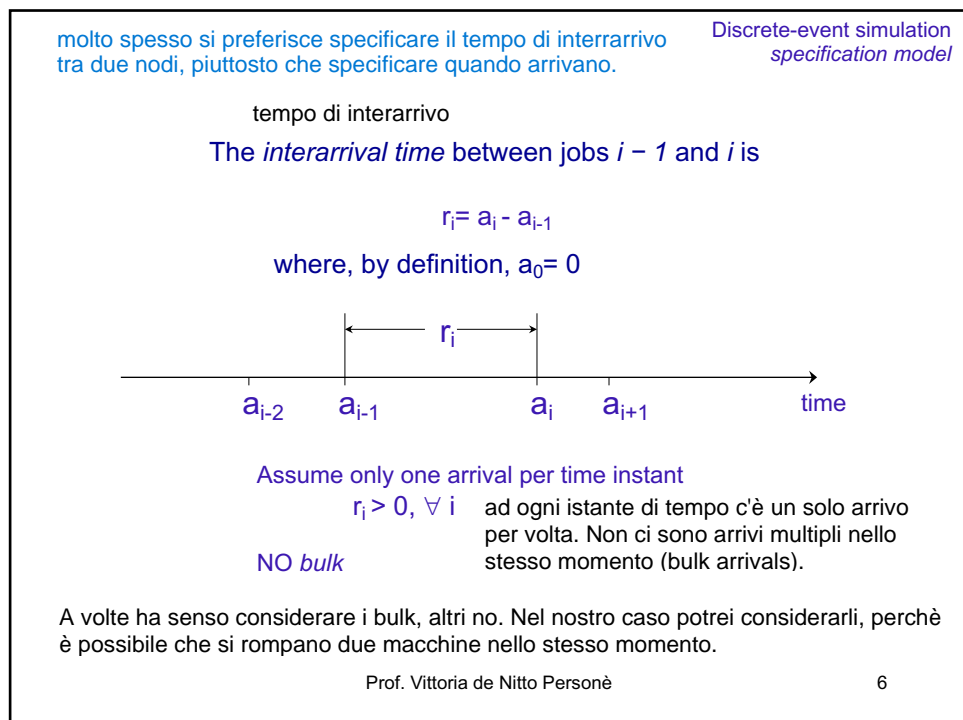
4

## Quali sono le grandezze in gioco?

p.23 "Discrete"



5



6

Facciamo affidamento sulle "tracce", perchè conosciamo arrivi, servizi dei vari job, per calcolare delay etc...

Discrete-event simulation  
Trace-driven simulation

## trace-driven simulation

Ho i dati, come calcolo le misure di prestazione?

- The model is driven by external data:  
Given the arrival times  $a_i$  and service times  $s_i$ , **can the delay times  $d_i$  be computed?**  
ovvero, noti tempi servizio e tempi di arrivo, come faccio a sapere l'attesa in coda dei singoli job?
- For some queue disciplines, this question is difficult to answer  
Parliamo di ULTIMO COMPLETAMENTO, solo un job davanti a me.
- If the queue discipline is FIFO,  $d_i$  is determined by when  $a_i$  (the arrival) occurs relative to  $c_{i-1}$  (the previous departure)

Nell'esempio, l'ordine di riparazione è FIFO, altre volte è più complesso.  
Se l'arrivo è dopo il completamento del job precedente a me (non ho attesa), il delay è 0.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

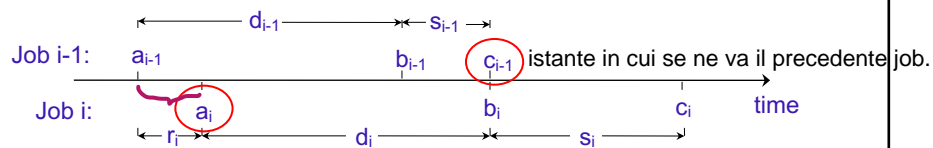
7

7

Discrete-event simulation  
Trace-driven simulation

### Case 1. The job arrives *before* the previous job completes

$$a_i < c_{i-1}$$



Se io arrivo e il job precedente è ancora presente, attendo un tempo pari a:  
"tempo di completamento job precedente - tempo in cui sono arrivato io"

$$d_i = c_{i-1} - a_i = [a(i-1) + w(i-1)] - a(i) = a(i-1) - a(i) + w(i-1) = r(i) + [s(i-1) + d(i-1)]$$

$r_1$  = tempo interrarrivo tra i due job.

Inoltre in job (i-1) c'è un tempo " $b(i-1)$ ", perchè anche il job precedente avrà atteso il suo predecessore.

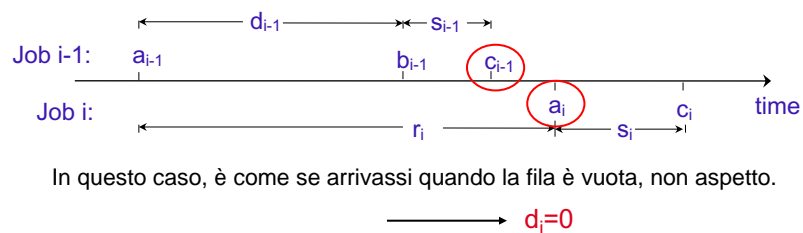
Prof. Vittoria de Nitto Personè

8

8

Case 2. The job arrives *after* the completion of the previous job

$$a_i \geq c_{i-1}$$



Prof. Vittoria de Nitto Personè

9

9

p.27 output statistics

## Output statistics

- The purpose of simulation is insight — gained by looking at statistics
- The importance of various statistics varies on perspective:
  - User perspective (job): wait time is most important
  - Manager perspective: utilization is critical
- Statistics are broken down into two categories
  - Job-averaged
  - Time-averaged

Facciamo ciò per ottenere indici, che possono esser più o meno importanti a seconda dell'attore coinvolto: ciò che vede l'utente è diverso da ciò che vede un manager.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

10

10

Osservo 1000 job, di ciascuno mi calcolo tempo risposta (istante arrivo, istante che esce), voglio la media. Sommo e divido per 1000. E' una statistica JOB average. Uguale per interarrivi e tempi servizi medi.

Se volessi calcolarmi popolazione media allora parlo di statistiche time-average.

esempio, popolazione in una scuola:

per 8 ore ci sono 100 persone (studenti + insegnanti), per 8 ore ci sono 20 persone (bidelli), per 8 ore non c'è nessuno.

allora avrò popolazione media:  $[100 \cdot 8 + 20 \cdot 8 + 0 \cdot 8] / 24$ , dove 24 sono le ore della giornata completa, e io voglio popolazione per ogni ora, ho deciso io così, potrei ragionare anche in giorni!

## Job-averaged statistics

- Average interarrival time

è l'inverso,  
frequenza arrivo media. *Arrival rate*

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{a_n}{n}$$

$$\frac{1}{\bar{r}}$$

$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + [a(N) - a(N-1)]$ ,  
ma vedo che molti elementi si annullano.  
Restano  $a_N - a_0$ , ma  $a_0$  è 0. quindi resta  $a_N$ ,  
che divido per  $N$ .

- Average service time

*Service rate*

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i$$

$$\frac{1}{\bar{s}}$$

qui non ho semplificazione, sommo e basta.

esempio: se ultimo job arriva ad  $a(N) = 320$ , e  $N = 10$ , allora  $r = a(N)/N = 32$  secondi/Job  
Allora arrival rate è  $1/\bar{r} = 0.031$ , ovvero mi arrivano 0.031 jobs al secondo.  
Se, per esempio, service rate  $1/\bar{s} = 0.029$  jobs al secondo, il server non riesce a processare tutti i job che arrivano (service rate < arrival rate) in media.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

11

11

Attenzione:  
Service time e  
interarrival time sono  
espressi come secondi/job.  
I rate, essendo reciproci,  
sono jobs al secondo.

## Job-averaged statistics

- The average delay and average wait are defined as

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i$$

Recall  $w_i = d_i + s_i$ ,  $\forall i$ , hence

tempo risposta medio

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i + s_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = \bar{d} + \bar{s}$$

attesa media + servizio medio

Sufficient to compute any two of  $\bar{w}, \bar{d}, \bar{s}$

note due, è facile calcolare la terza.  
inoltre servizio medio è input, quindi basta delay da calcolare.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

12

12

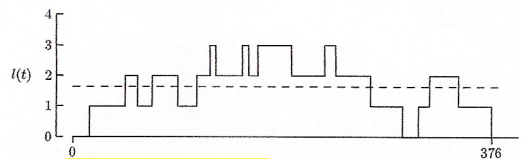
E' buona norma, in fase di controllo, non limitarsi a dire "ho due variabili, calcolo la terza in funzione di quelle che ho"  
bensì calcolare tutto in modo indipendente, e DOPO verificare se abbiamo rispettato il controllo di consistenza.

## time-averaged statistics

For SSQ, need three additional functions

 $l(t)$  e  $q(t)$  sono  $>0$ , potenzialmente illimitati, a meno che non metta io dei paletti.

- $l(t)$ : number of jobs in the service node at time  $t$  service node = nel sistema
- $q(t)$ : number of jobs in the queue at time  $t$
- $x(t)$ : number of jobs in service at time  $t$  o opera, o non opera il server. (per questo 0 o 1).

By definition  $l(t)=q(t)+x(t) \quad \forall t$  $l(t) = 0, 1, 2, \dots$  $q(t) = 0, 1, 2, \dots$  $x(t) = 0, 1$ 

The three functions are piecewise constant

Prof. Vittoria de Nitto Personè

13

13

Over the time interval  $(0, \tau)$ :time-averaged number in the node:  $\bar{l} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau l(t) dt$  alla fine sto calcolando l'area, dividendo per il tempo tau.time-averaged number in the queue:  $\bar{q} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau q(t) dt$ 

time-averaged number in service:  $\bar{x} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) dt$   
 tempo è tau,  $x(t)$  è 0 o 1.  
 Se sempre pieno, integro su 1, ovvero trovo  $\tau/\tau = 1$   
 Se sempre vuoto, integro su 0,  $0/\tau = 0$

Def. Utilization

The proportion of time that the server is busy

Since  $l(t)=q(t)+x(t) \quad \forall t$ 

$$\bar{l} = \bar{q} + \bar{x}$$

Quindi  $\bar{x}$  medio mi dice la proporzione a livello di tempo in cui il server è occupato.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

14

14

Che relazione c'è tra queste statistiche?

How are job-averaged and time-average statistics related?

**Little's Law (1961)** ha un'applicabilità molto più alta di quella che vediamo ora.

If (a) queue discipline is FIFO,

(b) service node capacity is infinite, and (anche se non vale, posso applicare Little)

(c) server is idle both at the beginning and end of the observation interval ( $t = 0, t = c_n$ ) istante iniziale e finale vuole server vuoto.

then

$$\int_0^{c_n} l(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i \quad \text{popolazione centro - tempo risposta}$$

$$\int_0^{c_n} q(t) dt = \sum_{i=1}^n d_i \quad \text{popolazione coda - tempo attesa}$$

$$\int_0^{c_n} x(t) dt = \sum_{i=1}^n s_i \quad \text{popolazione server - tempo servizio}$$

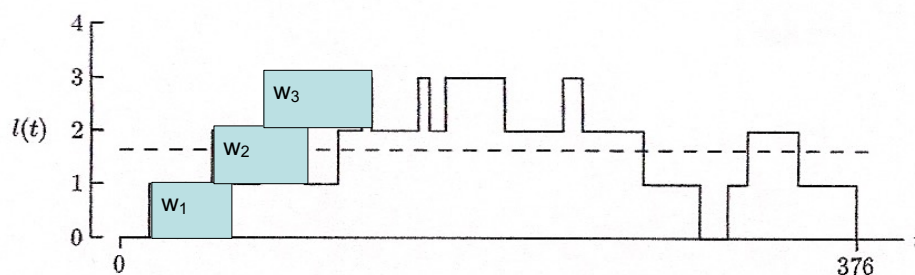
Prof. Vittoria de Nitto Personè

15

15

A livello intuitivo, ha senso confrontare in QUESTI CASI DI STUDIO integrali e sommatorie, in quanto alla fine trattiamo funzioni stepwise. Infatti per dimostrarlo basta scrivere  $l(t)$  come sommatoria di una funzione indicatrice del singolo job "i", da mettere dentro l'integrale. Questa funzione indicatrice vale 1 se job sta nel service node (nel sistema), 0 altrimenti. Porto fuori la sommatoria, mi rimane l'integrale su questa funzione indicatrice del job "i". Il job "i" sta nel sistema dal suo arrivo "a(i)" al suo completamento "c(i)", quindi  $c(i) - a(i)$ . Ma questo è " $w(i)$ ", cioè il tempo di risposta.

Parto da tempo 0, a tempo 376.  $W(i)$  è tempo risposta.



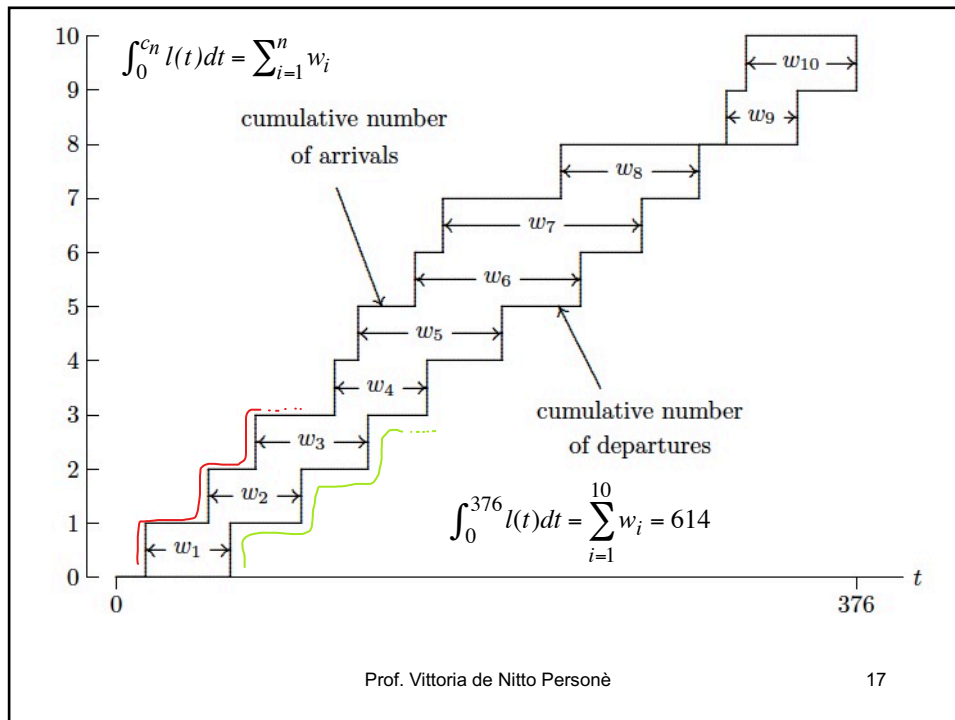
Prof. Vittoria de Nitto Personè

16

16



Questa è la cumulativa del numero di arrivi (bordo superiore),  
e cumulativa del numero di partenze (bordo inferiore), Little dimostra che l'integrale  
che l'integrale e la somma coincidono. Noi l'abbiamo visto da un punto di vista puramente grafico.



17

Discrete-event simulation  
Output statistics

Using  $\tau = c_n$  in  $\bar{l} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} l(t) dt$  definizione di media, se metto tau = istante ultimo completamento  $c(n)$

along with Little's Theorem, we have:

$$c_n \bar{l} = \int_0^{c_n} l(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i = n \bar{w}$$

As a consequence:  $\bar{l} = \frac{n}{c_n} \bar{w}$  forma che usiamo noi, relazione tra medie.

Same holds for:  $\bar{q} = \frac{n}{c_n} \bar{d}$   $\bar{x} = \frac{n}{c_n} \bar{s}$

$\frac{n}{c_n}$  represents the **average system throughput in  $c_n$**   
Note that, for infinite queue, this corresponds to the **average arrival rate**

n° job/ tempo  
throughput medio.  
Mi dice quanti job serve nell'unità di tempo, per quel periodo di osservazione.

Prof. Vittoria de Nitto Personè 18

18

Ho sistema sottoposta a frequenza di arrivo, smaltisce con frequenza di servizio,  
il rapporto freq. arrivo/ freq. servizio.

### Def. Traffic intensity

The ratio of the arrival rate to the service rate

intensità di traffico  
può essere >1

$$\frac{1/\bar{r}}{1/\bar{s}} = \frac{\bar{s}}{\bar{r}} = \frac{\bar{s}}{a_n/n} = \left( \frac{c_n}{a_n} \right) \bar{x}$$

Ho utilizzazione  $\leq 1$ ,  
perchè vista come proporzione  
rispetto al tempo, quindi non  
può essere >1

$$\bar{x} = \frac{n}{c_n} \bar{s} \quad \text{sfrutto Little}$$

When  $c_n/a_n$  is close to 1.0, the traffic intensity and utilization  
will be nearly equal

Per tempi estesi può effettivamente tendere a 1, allora in questi casi  
l'intensità di traffico e utilizzazione sono CIRCA la stessa cosa, ma generalmente  
non è detto!