

Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Batch Means

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

Copyright © Vittoria de Nitto Personè, 2021
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



1

Abbiamo visto due tipi di analisi simulative:

- orizzonte finito/transiente
- orizzonte infinito/stazionario, a patto che ci sia, non è detto!

Batch Means

- ✧ Two types of DES models: transient and steady-state
- ✧ For transient, construct interval estimates using *replication*
- ✧ For steady-state, obtain *point* estimate by simulating for a long time
- ✧ Can we obtain interval estimates for steady-state statistics?

→ use method of *batch means*

Prof. Vittoria de Nitto Personè

2

2

Abbiamo visto, parlando di metodi di simulazione, la stima dell'intervallo di confidenza nel caso transiente, usando delle repliche indipendenti etc...

Nello stato stazionario simulo un tempo potenzialmente infinito PER QUEL SISTEMA, calcolo media campionaria finale di una statistica, ottengo un PUNTO DI STIMA, che però ci dice poco, e quindi vogliamo un vero e proprio intervallo di confidenza anche qui! Useremo metodo BATCH MEANS

1

ragioniamo su medie:
 primo arrivo con media=1,
 trova departure a 4.2;
 $4.2 - 1 = 3.2$ tempo attesa
 in coda.
 $3.2 + 0.8 = 4$ tempo
 risposta.
 nb:
 0.8 è il tempo di servizio =
 $1/1.25 = 0.8$
 Non è che il primo che
 prendiamo
 avrà esattamente 0.8 , sarà
 $\text{exponential}(0.8)$

Transient vs. Steady-State

Example 8.4.1: Transient vs. Steady-State Estimates

Analytically, utilization is 0.8 and expected steady-state wait is 4.0 s. (valore teorico) $\frac{\lambda}{\mu}$

Can transient estimates be accurate steady-state estimates?

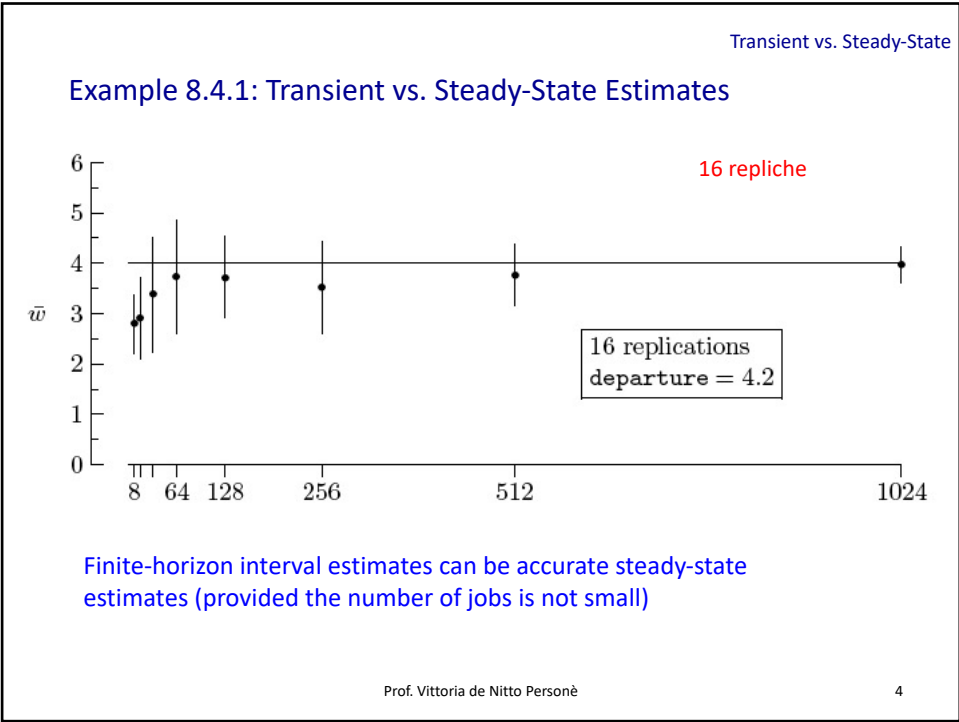
- Eliminate the initial state bias by setting departure to 4.2 : the simulation begins in its *expected* steady-state condition
- Use 16 replications to construct transient interval estimates for $8, 16, 32, \dots, 1024$ jobs

se fosse 0 sto simulando sistema che parte vuoto, con un valore non nullo potrebbe trovare sistema pieno.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

3

3

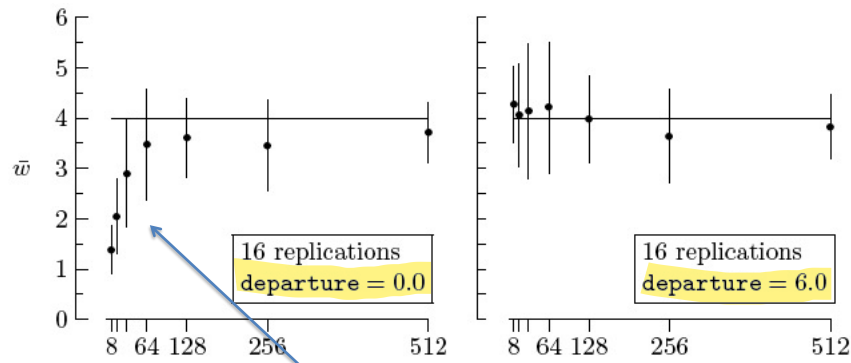


4

Example 8.4.2: Initial State Bias

Consider initial values of 0.0 and 6.0 for departure

16 repliche



initial state can have significant impact

possible to choose an initial state that eliminates the initial state bias

qui con pochi job non ci arriviamo.
C'è l'impatto delle condizioni iniziali.

Qui sembra molto meglio!

Prof. Vittoria de Nitto Personè

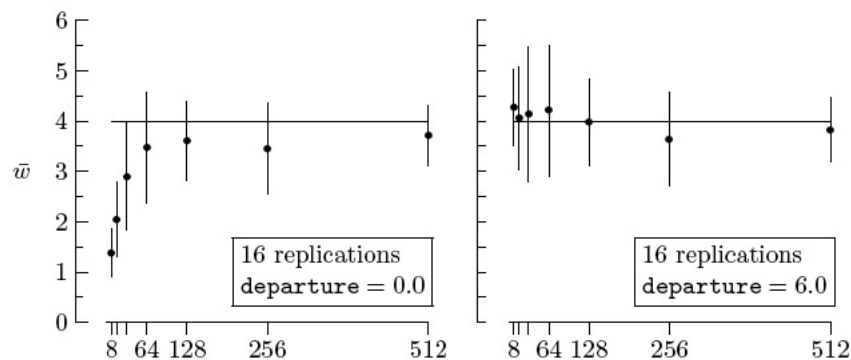
5

5

Example 8.4.2: Initial State Bias

Consider initial values of 0.0 and 6.0 for departure

16 repliche



When the number of jobs is large, estimates are very good and essentially independent of the initial state

Prof. Vittoria de Nitto Personè

6

6

Potremmo usare le repliche, ma essendo STAZIONARIO dovrei simulare tempi lunghi. Abbiamo diversi problemi: stato iniziale? Lunghezza tempo simulato? Quante repliche? Sui primi due punti abbiamo già discusso: lo stato iniziale non influenza nell'orizzonte infinito, e il tempo di simulazione deve essere abbastanza lungo. Ma sul numero delle repliche?

Transient vs. Steady-State

Interval Estimates for Steady-State

- Use replication-based transient interval estimates
- Each replication must correspond to a long simulated time period

Three issues:

- What is the initial state?
- What is the length of the simulated time?
- How many replications?

Previous example provides insight into first two issues

7

Prof. Vittoria de Nitto Personè

7

Transient vs. Steady-State

Example 8.4.3: Increase the Number of Replications

Repeat the previous experiments using 64 replications

All other parameters remain the same

64 repliche

campione più significativo del precedente!

Number of Replications	Mean Value (\bar{w})	Interval Estimate (approx.)
8	4.2	[3.8, 4.6]
64	4.2	[3.8, 4.6]
128	4.2	[3.8, 4.6]
256	4.2	[3.8, 4.6]
512	4.2	[3.8, 4.6]
1024	4.2	[3.8, 4.6]

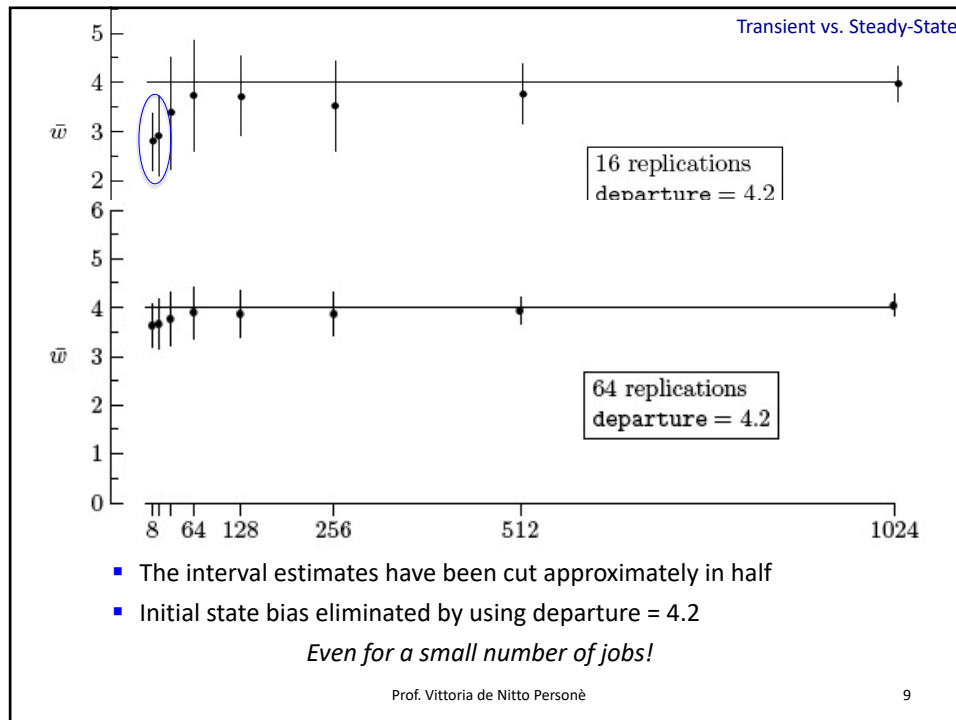
Anche con pochi job, lo stato stabile sembra essere catturato.

8

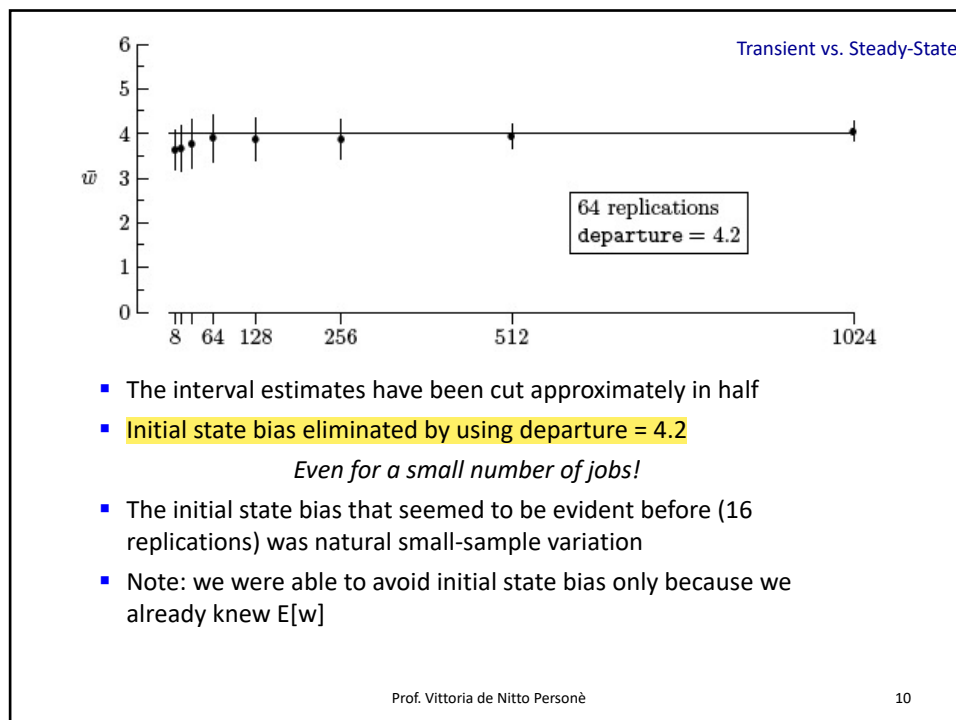
Prof. Vittoria de Nitto Personè

8

Qui vediamo un confronto tra 16 repliche (grafico in alto) e 64 repliche (grafico sotto).

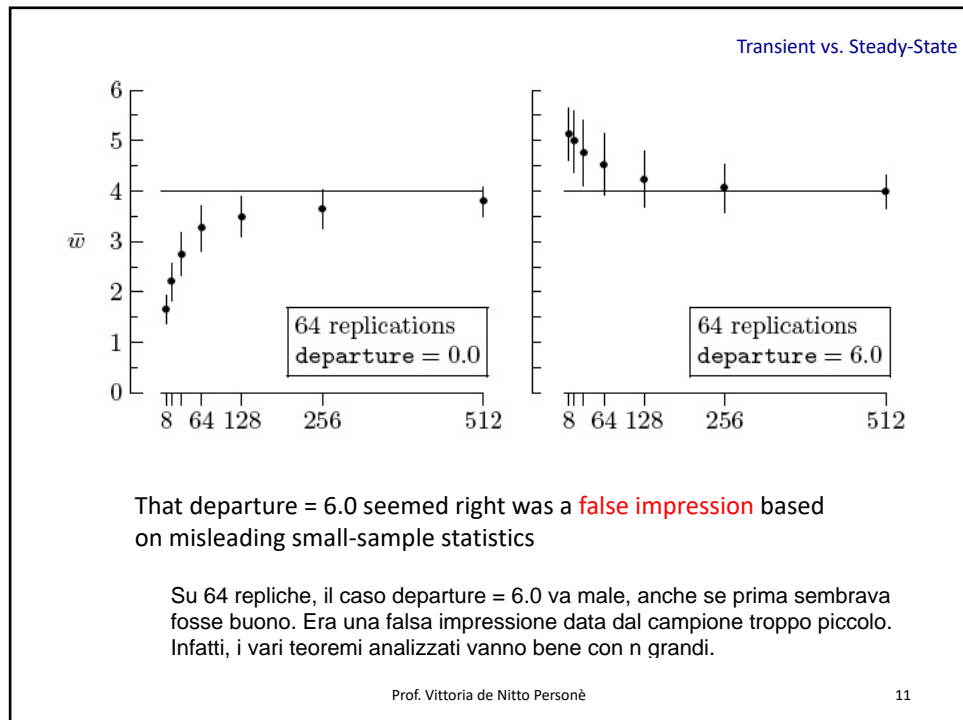


9

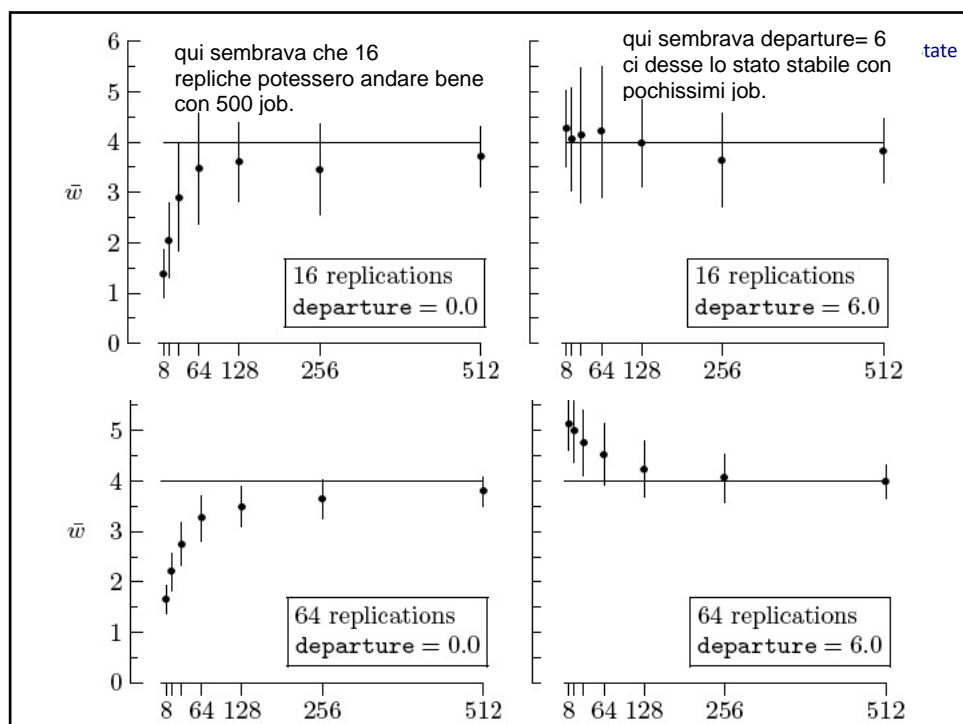


10

La dimensione di 16 repliche era troppo piccola, la variabilità pesava troppo. Con 64 repliche, condizioni invariate, l'influenza dello stato iniziale si perde. Abbiamo potuto settare a 4.2 perchè conoscevamo il valore teorico! Altrimenti non posso.



11



12

Due run devono partire dallo stesso stato, i generatori usati dalle due repliche devono NON sovrapporsi (basta fare un ciclo che esternamente inizializza il generatore, dentro il ciclo, cioè il run, faccio procedere il generatore). Repliche indipendenti. Inoltre, se prendo ad esempio 16 repliche, ho un campione di 16 elementi.

1/06/2023

Summary

- Want interval estimates for steady-state
- Replicated transient statistics can be used
- However, **initial bias problem**
- Need technique that avoids the initial bias problem

Anche qui voglio che la statistica cada in un certo range, cioè intervallo di confidenza.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

13

13

l'idea delle batch means è: invece di fare repliche indipendenti, faccio simulazione lunga e la vivo in batch, il bias c'è (è difficile partire da stato stabile, prima era solo un esempio, ma anche facendolo, a seconda dell'inizializzazione, il bias resta anche al crescere delle repliche!)

Batch Means

Method of Batch Means (usato nello stazionario, ma in realtà è il più usato)

- Previously, each replication was initialized with same state (inteso come stato del sistema)
- Gives initial bias problem

Batch means: prendo 'run' lungo e lo spezzo in 'repliche'

- **Make one long run and partition into batches**
- Compute an average statistic for each batch
- Construct an interval estimate using the batch means
- Initial state bias is eliminated perchè run lungo, lo stato iniziale è solo a inizio run, e si perde
- State at the beginning of each batch is the state at the end of previous batch

Al massimo il primo batch ne è influenzato.

non c'è sovrapposizione!

Prof. Vittoria de Nitto Personè

14

14

Fare stima su orizzonte infinito mi permette di disinteressarmi allo stato iniziale, perchè si perderà!

Obiettivo: creazione del campione nel caso orizzonte INFINITO.
 devo creare campione lungo 'n', faccio unico lungo run, le 'x' sono indici di riferimento,
 e ogni 'b' definisce un batch, di ciascuno di questi definisco media campionaria.

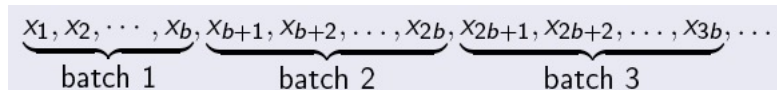
in questo caso solo i primi batch sono influenzati da stato iniziale, perchè poi lo stato va avanti. Quando inizia nuovo batch esso continua, non riparte dall'inizio, reinizializzo solo variabili per fare nuovi calcoli di statistiche, cioè quelle per calcolare \bar{X}_j . E' UN ERRORE PORTARTI DIETRO LE VARIABILI SENZA INIZIALIZZARLE.

Batch Means

Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

Consider a sequence of samples x_1, x_2, \dots, x_n il nostro campione

1. Select a batch size $b > 1$ (dopo vedremo delle linee guida)
2. Group the sequence into k batches ho sezionato in k gruppi questo "run lungo"



and for each calculate the batch mean questa media è l'elemento del mio campione

$$\bar{x}_j = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \bar{x}_{(j-1)b+i} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

3. Compute \bar{x} and s of batch means $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$
 calcolo media e dev std il mio campione di lunghezza k, indipendente ed identicamente distribuito

Prof. Vittoria de Nitto Personè

15

15

Batch Means

Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

il calcolo dell'intervallo di confidenza viene calcolato come abbiamo visto in altri casi.

4. Pick a *level of confidence* $1 - \alpha$ (typically $\alpha = 0.05$)
5. Calculate the critical value $t^* = \text{idfStudent}(k - 1, 1 - \alpha/2)$
6. Calculate the interval endpoints $\bar{x} \pm t^* s / \sqrt{k - 1}$
 - $(1 - \alpha) \times 100\%$ confident that the true *unknown* steady-state mean lies in the interval
 - **Provided b is large, true even if the sample is autocorrelated** (quello originario)

NB: è importante specificare se lavoro nel transiente o nello stazionario, e quale sia l'intervallo di confidenza.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

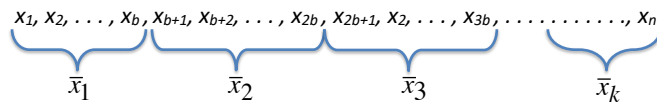
16

16

Effect of Batch Parameters

Provided (non scarto nulla)
no points are discarded:

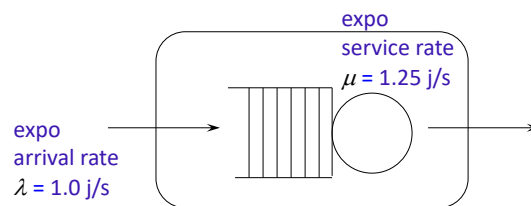
$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



(se ho 100 numeri, li sommo e divido per 100.
E' uguale se sommo i primi 20 e divido per 20, e poi sommo i primi 80 e divido per 80. Non posso scartare, sennò altero, anche se poco, la media.

- Choice of (b, k) has no impact on the point estimate
- Only the width of the interval estimate is affected

17

Example 8.4.5: Effect of (b, k) 

Consider the queue is initially idle, use ssq2 to generate $n = 32768$ consecutive waits (utilizzazione: 0.8)

Using batch means with different (b, k) : 'k' batch di lunghezza 'b'

(b, k)	(8, 4096)	(64, 512)	(512, 64)	(4096, 8)
\bar{w}	3.94 ± 0.11	3.94 ± 0.25	3.94 ± 0.29	3.94 ± 0.48

- Note that 3.94 is independent of (b, k)
 - Width of the interval estimate is not
- cambia l'ampiezza dell'intervallo, con campione piccolo questo intervallo è più grande (vedi ultimo caso)

18

Non devo però forzare un campione troppo grande, potrei non rappresentare più la media teorica

Is the Method of Batch Means Valid?

For interval estimation, the batch means must be *iid Normal*

1. Are the batch means *Normal*?

As b increases, mean of b RVs tends to Normal

2. Is the data actually independent?

Autocorrelation (Section 4.4) becomes zero if b is large

Therefore, as b increases, method of batch means becomes increasingly more valid

Guidelines for Choosing (b , k)

- Note: If b is too large, k will be small giving wide interval estimates

- Number of batches k :

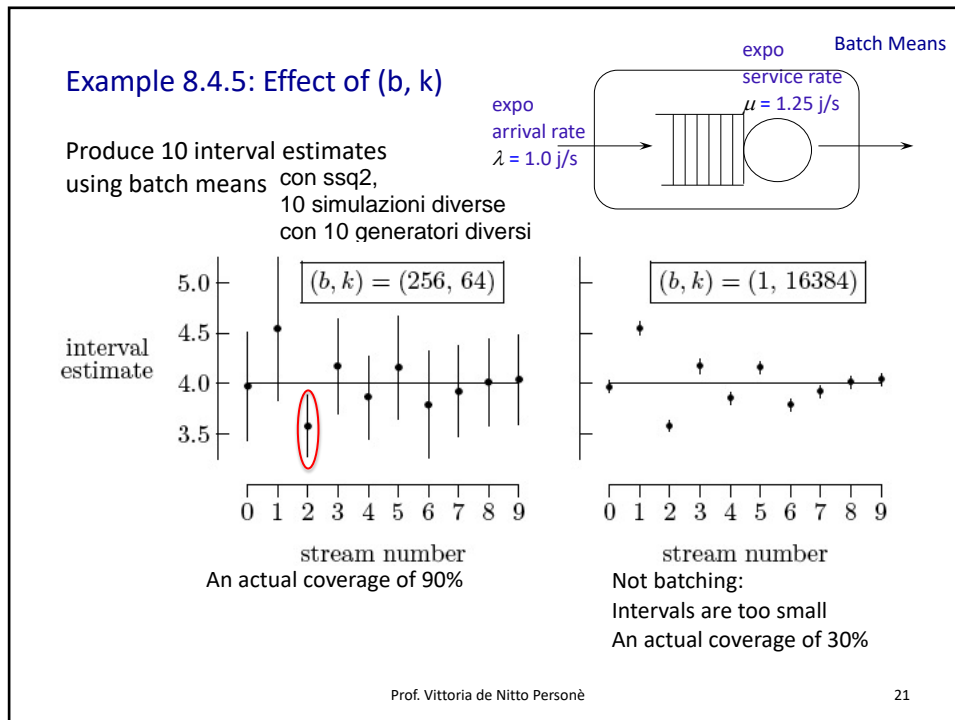
- Avoid small-sample variation
- $k \geq 32$; $k = 64$ is recommended

- Batch size b : se troppo grande elimino variabilità.

- Want to ensure (approximate) independence
- b should be at least twice the autocorrelation "cut-off" lag (Section 4.4)

(See example 8.4.6)

(non difficile da calcolare, spesso lo possiamo calcolare per avere info sulla dimensione di 'b')



nel grafico a sinistra gli intervalli di confidenza sono piccoli. (sono dei punti più che delle linee). Se non so il valore teorico non posso dire con certezza quale tra quei "puntini" sia il valore medio giusto.

21

Nel primo grafico catturiamo meglio il valore teorico, nel secondo no!
 Devo usare questo metodo soprattutto con analisi stazionaria.

Run singolo ha senso col transiente.

Nel primo esempio, c'è una 'differenza' di 256 tra batch 'i' e batch 'i+1'.

Nel secondo caso, 1 campione lungo 16384, la variabilità si annulla.

Ogni batch usa numeri diversi, non devono sovrapporsi.

Ogni batch è come fosse simulazione del sistema in un altro giorno o in altro scenario.

Lo stato iniziale del sistema non influisce l'orizzonte infinito, ma solo il finito.

Se stimo il transiente, e volessi che il sistema partisse con 23 job, OGNI replica dovrebbe partire con 23 job.

Ogni batch è come fosse una replica, che non si cura dello stato iniziale del sistema.

I generatori in entrambi i casi DEVONO ANDARE AVANTI, non li metto a caso, sennò potrei prendere un 'pezzo di ruota' già usato.