18/04/23

PORTAFOGLI DI TITOLI - MARKOWITZ

Nel CRR il mercato è costituito da BOND e STOCK:
- il BOND ha evoluzione al tempo T: $B_T = (1+r_f)B_0$
- lo STOCK ha evoluzione al tempo T: $\begin{cases} S_T = uS_0 \\ S_T = dS_0 \end{cases}$, V.A. Binomiale

Nel portafoglio di MARKOWITZ abbiamo titoli $S_0, S_1, \dots, S_M$.
- S_0 è un BOND (qui per convenzione è S_0, non B_0) e, indicando con r_f il tasso di rendimento NON rischioso alla maturità dell'investimento, abbiamo $S_0(T) = (1+r_f) \cdot S_0(0)$
- Gli altri titoli $S_1, \dots, S_M$ sono titoli RISCHIOSI, ovvero sappiamo $S_m(0)$ ma non so $S_m(T)$, la quale è una V.A. di cui non sappiamo la distribuzione. Nell'adattamento a dati reali assumiamo finito il momento di ordine 2, e distribuzione gaussiana.

Assumiamo di avere una quantità $W>0$, partendo da tempo $\emptyset$.
Voglio trovare il modo migliore per investire, per avere un portafoglio OTTIMALE o OTTIMO ($\nexists$ di meglio).
Possiamo costruire Portafoglio di minimo rischio assoluto o portafoglio di minimo rischio per rendimento assegnato MIN σ

Inizio la costruzione, voglio un portafoglio di titoli, cioè una M-upla $\pi(0) = (Y_1(0), \dots, Y_M(0)) \in \mathbb{R}^M$, dove il singolo $Y_m(0)$ è la quantità del titolo S_M nel portafoglio, cioè il numero di azioni che ho di un certo titolo

Posso considerare anche frazioni di azioni (π, $\sqrt{2}$ azioni) o valori negativi ($-\sqrt{3}$ titoli). Cioè, in questo ultimo caso vendo allo scoperto. Introduciamo i concetti di:

POSIZIONE LUNGA: se acquisto un titolo, potenzialmente posso tenerlo per tempo indefinito ("a lungo").

POSIZIONE CORTA: vendo allo scoperto, quindi c'è di mezzo il broker che mi da il titolo, che io vendo ma del quale poi devo colmare lo scoperto nel minor tempo.

Una quantità $y_m(0)$ può anche essere $\emptyset$, cioè non metto il titolo nel portafogli. MIN 18

P.41
def. 66

Valore del Portafoglio

Parliamo prima del valore del singolo titolo $W_m(y_m, 0) = y_m \cdot S_m(0)$ cioè la quantità di azioni comprate per il valore del titolo.

Al tempo T si avrà: $W_m(y_m, T) = y_m \cdot S_m(T)$, dove però ho variabili aleatorie.

Io ho influenza SOLO sulla quantità y_m, non su S_m.

Però comprare tante azioni di un titolo non dovrebbe influenzare S_m? Sì, ma noi assumiamo di essere "poco significativi", e solo le notizie alterano S_m (es: nuovo giacimento di petrolio, ...)

Quindi S_m ha un valore NON dipendente dalle mie scelte, è una VARIABILE ESOGENA MIN 26:40

Quanto vale il portafoglio al tempo $\emptyset$? è un NUMERO REALE:

$$W(y_1, \dots, y_M, \emptyset) = \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, \emptyset) = \sum_{m=1}^{M} y_m \cdot S_m(0)$$

Al tempo T è una V.A REALE:

$$W(y_1, \dots, y_M, T) = \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, T)$$

Ciò che ho al tempo $\emptyset$ è la mia ricchezza iniziale.

Poichè avevamo detto che $W > 0$, e ora stiamo dicendo che $W(y_1, \dots, y_M, 0) = W$ allora NON POSSO AVERE che $\forall m$ ho $W_M(y_m, 0) = \emptyset$. ($W > 0$, non ≥ 0)

Rendimento del portafoglio - def 72 MIN 30

esso è la V.A. reale:

$$R_T(y_1, \dots, y_M, M) = W(y_1, \dots, y_M, T) - W(y_1, \dots, y_M, 0) =$$

$$\sum_{m=1}^{M} \left[W(y_m, T) - W(y_m, 0) \right] = \sum_{m=1}^{M} R(y_m, T)$$

Rendimento al tempo T di tutti gli 'm', mentre rendimento al tempo $\emptyset$ sarebbe $\emptyset$ $\forall m$

Tale concetto è applicabile anche al pacchetto azionario m-esimo nel portafoglio.

OSSERVAZIONE:

Nel mio portafogli ho azioni ENI e STELLANTIS, che mi rendono 5€ e 3€. Perchè il portafogli mi rende 8€?

C'è linearità, ma chi me la garantisce?

L'assenza di arbitraggio, altrimenti non avrei tale certezza!

Peso di un titolo nel portafoglio - def 7.4 - MIN 36

Prima avevamo la quantità (n° azioni nel portafoglio), da non confondere col peso. Il peso è il rapporto tra il valore del singolo titolo rispetto la ricchezza iniziale totale, quindi tutto è riferito al tempo $t=0$.

$$w_m = \frac{W_m(Y_m, 0)}{W(Y_1, \dots, Y_M, 0)} = \frac{Y_m \cdot S_m(0)}{W} \quad \boxed{1} \quad \forall\, m = 1, \dots, M. \text{ con } W>0$$

Si ricava anche $Y_m = \dfrac{w_m}{S_m(0)} \cdot W$ $\boxed{2}$ con $S_m(0) > 0$

C'è corrispondenza BIUNIVOCA tra $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$, inoltre entrambi i denominatori di $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono >0.

Se c'è tale corrispondenza, perché interessarsi ai pesi invece che parlare solo di quantità?

Con i PESI, rispetto alle QUANTITÀ, riusciamo a risolvere con più facilità i problemi! Perché? MIN 42

Perché la somma di tutti i pesi è "1", delle quantità no.

$$\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$$

Ci dice altro?

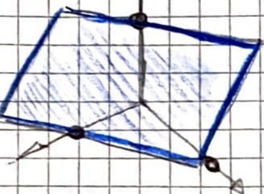
Tale "struttura" è indicativa di un IPERPIANO di $\mathbb{R}^M$.

Se ho titoli S_1, S_2 e quantità $(Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Passo ai pesi: $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ se $w_1 + w_2 = 1$, che è l'equazione di una retta.

Con 3 titoli?

$(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{R}^3$, mentre per i pesi $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, ovvero un piano passante per i versori degli assi di $\mathbb{R}^3$.



L'equazione di un iperpiano ortogonale al vettore $(v_1, \dots, v_M) \in \mathbb{R}^M$ e passante per il punto $(x_1^0, \dots, x_M^0) \in \mathbb{R}^M$ è: $\sum_{m=1}^{M} v_m (x_m - x_m^0) = 0$,

noi poi abbiamo l'equazione $\sum_{m=1}^{M} \omega_m = 1$, scrivibile anche come $\sum_{m=1}^{M} \left(\omega_m - \frac{1}{M}\right) = 0$. Ma a noi cosa serve ciò?

Insieme dei portafogli fattibili - def 77 MIN 52

$\mathbb{H} = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} \omega_m = 1 \right\}$, esso è iperpiano di $\mathbb{R}^M$ passante per i versori degli assi $(1, 0, \dots 0), \dots (0, 0, \dots, 1)$.

È anche iperpiano ortogonale al vettore $(1, \dots, 1)$ passante per $\left(\frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M}\right)$. Lo abbiamo "dimostrato" sopra!

Sto riducendo la dimensione, passo da "M" a "M-1".
Se prendo M-pla di pesi nell'iperpiano e riesco a far vedere che mi realizza portafoglio di minimo rischio, poi so le Y_m da usare partendo dai pesi. MIN 54

Torniamo al concetto di rendimento del titolo

$$R_m(T) = W_m(Y_m, T) - W_m(Y_m, 0) = Y_m \cdot (S_m(T) - S_m(0))$$

vogliamo passare al tasso di rendimento.

Il tasso di rendimento del titolo m-esimo è:

$$r_m(T) = \frac{W_m(Y_m,T) - W_m(Y_m,0)}{W_m(Y_m,0)} = \text{ se } Y_m \neq 0 \left(\begin{array}{c}\text{per il}\\ \text{denominatore}\end{array}\right)$$

$$= \frac{\cancel{Y_m}\,[S_m(T) - S_m(0)]}{\cancel{Y_m} \cdot S_m(0)} \quad \forall m = 1, \dots, m$$

NB: per come sono state definite, le variabili $r_m(T)$ hanno momento finito di ordine 2, e assumeremo $r_1(T), \dots, r_M(T)$ congiuntamente gaussiane. Sono V.A.

Tasso interessante perché proporziona il guadagno rispetto all'investimento

Il tasso di rendimento ATTESO è: (def 81)

$$\bar{r}_m(T) = E[r_m(T)] = \frac{E[S_m(T)] - S_m(0)}{S_m(0)}$$

Il tasso di rendimento del PORTAFOGLIO al tempo $t = T$

è: $r(Y_1, \dots, Y_M, T) = \frac{W(Y_1, \dots, Y_M, T) - W(Y_1, \dots, Y_M, 0)}{W(Y_1, \dots, Y_M, 0)}$,

e si può dimostrare che è anche uguale alla somma pesata dei tassi di rendimento dei SINGOLI TITOLI AZIONARI:

$$r(Y_1, \dots, Y_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \cdot r_m(T)$$

MIN 1:05

Vista la corrispondenza pesi - quantità, possiamo dire: $r(Y_1, \ldots, Y_M, T) \equiv r(w_1, \ldots, w_M, T)$. La VARIANZA chi è?

La VARIANZA del titolo m-esimo è:

$D^2[S_m(T)] = E[S_m^2(T)] - E[S_m(T)]^2$, scrivibile anche come varianza del suo tasso di rendimento, $\sigma_m^2 = D^2[R_m(T)] \; \forall m$

Per il portafoglio abbiamo varianza di un vettore dei titoli, cioè andiamo a trattare una matrice così fatta:

$$Var[r(w_1, \ldots, w_M, T)] = \begin{bmatrix} D^2[S_1(T)] & \cdots & cov(S_1(T), S_2(T)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & D^2[S_M(T)] \end{bmatrix}$$ dove

nella formula COVARIANZA e VARIANZA del titolo, prof usa $S_m(T)$ a lezione, tasso R_m su NOTE

sulla diagonale principale abbiamo le varianze dei singoli titoli, le restanti sono covarianze.

Chiamiamo questa matrice di varianza covarianza così:

$$\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \cdots & \sigma_{1,M} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \sigma_{2,M} & \cdots & \sigma_M^2 \end{bmatrix}$$ dove gli elementi di tipo

covarianza sono: $\sigma_{l,m} = E[r_l(T) \cdot r_m(T)] - E[r_l(T)] \cdot E[r_m(T)]$

Inoltre la correlazione dei titoli azionari l-esimo ed m-esimo in base ai loro tassi è: $\rho_{l,m} = \dfrac{\sigma_{l,m}}{\sigma_l \cdot \sigma_m} \; \forall l, m$

Vogliamo calcolare: $\underbrace{\underset{1\times M}{(w_1,\dots,w_m)} \cdot \underset{M\times M}{\Sigma} \cdot \underset{M\times 1}{(w_1,\dots,w_m)^T}}_{\in \mathbb{R}}$, si scrive:

$$= \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \cdot \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^{M} w_l \cdot w_m \cdot \sigma_{l,m}$$ (osservazione 88)

La matrice "Σ" è simmetrica, e adesso la chiamiamo "Q".

DEF 100: Q è simmetrica semidefinita positiva se:

$(w_1,\dots,w_M) \cdot Q \cdot (w_1,\dots,w_M)^T \geq 0 \quad \forall (w_1,\dots,w_M) \in \mathbb{R}^M$.

Q è POSITIVA se $(w_1,\dots,w_M) \cdot Q \cdot (w_1,\dots,w_M)^T > 0$
$\forall (w_1,\dots,w_M) \in \mathbb{R}^M$ tranne $(0,0,\dots,0)$.

Arriviamo a stesse conclusioni se parliamo di AUTOVALORI, cioè semidefinita positiva se tutti autovalori ≥ 0, positiva se tutti autovalori > 0.

PROP 102: Σ semidefinita positiva, Σ è definita positiva se il tasso di rendimento di NESSUN titolo è scrivibile come combinazione lineare/affine dei restanti, cioè:

$$\nexists m \in \{1,\dots,M\} : r_m(T) = \alpha + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{M} \beta_l \cdot r_l(T)$$

con opportuni $\alpha, \beta_l \in \mathbb{R}$, con $l = 1,\dots M$ e $l \neq m$.

L'obiettivo è avere titoli poco correlati, scorrelati è quasi IMPOSS.

Per dimostrare la prop. 102, possiamo scrivere

$$(w_1, \dots, w_M) \cdot \Sigma \cdot (w_1, \dots, w_M)^T = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{l,m=1 \\ l<m}}^{M} w_l w_m \sigma_{l,m}$$

$$= \dots = D^2 [r(w_1, \dots, w_M, T)] \geq 0 \text{, allora}$$

Σ è semidefinita positiva. Per non avere Σ (cioè strettamente) positiva
dovrei avere $Var = \emptyset$, cioè un portafogli di Dirac,
cioè $\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T) = \alpha$ e scrivere $r_m(T) = \alpha + \sum_{l=1} \beta_l \cdot r_l(T)$

~ . ~ . ~ . ~

Insieme convesso e funzione convessa

Chiamiamo S il sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.
La funzione convessa più semplice è la RETTA,
ma non è strettamente convessa, quella è la PARABOLA,
dove la corda che unisce due punti è $\geq$ valori della
funzione, cioè, nel caso m-dimensionale:

$$f\left(\alpha (x_1, \dots, x_m) + (1-\alpha)(y_1, \dots, y_m)\right) \leq \alpha \cdot f + (1-\alpha) \cdot f$$

(Per la parabola è $<$, non $\leq$)

~ . ~ . ~ .

Teorema per minimizzazione portafoglio

Se ho funzione $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ convessa, ed S è sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^M$, e il problema è trovare il MINIMO al variare di $(x_1, \dots, x_m) \in S$ della funzione $f(x_1, \dots, x_m)$. Tale problema o non ha soluzione, o se c'è, una soluzione locale è soluzione globale.

Se strettamente convesso la soluzione esiste sempre.

(f convessa su sottoinsieme convesso) $\Rightarrow$ problema del minimo ha sempre soluzione. Come lo usiamo noi?

Se considero $(w_1, \dots, w_M) \cdot \Sigma \cdot (w_1, \dots, w_M)^T$ ha autovalori > 0 allora è strettamente convessa. Sull'iperpiano che è un convesso di $\mathbb{R}^M$ il problema ha sempre unica soluzione.

AUTOVALORI > 0 $\doteq$ titoli NON COMBINAZIONE LINEARE CON ALTRI

Se portafogli è fatto così (condizione di NON SINGOLARITÀ) allora esiste portafogli di rischio MINIMO, sotto non posso scendere. Il portafoglio di titoli diventa un titolo rischioso caratterizzato dal rischio del portafoglio di minimo rischio