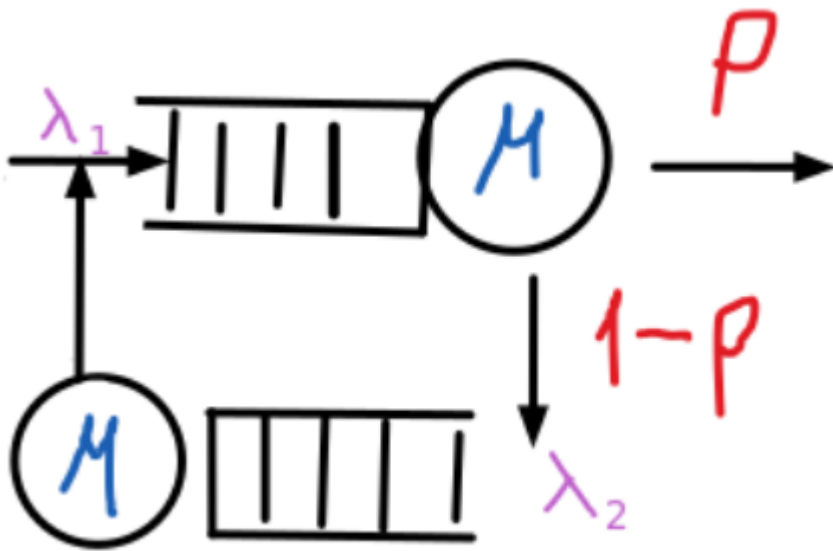


## Esercizio



Iniziamo con lo scrivere i flussi in entrata:

$$\{\lambda_1 = \gamma + \lambda_2 \quad \lambda_2 = (1 - p)\lambda_1$$

Sostituendo  $\lambda_2$  in  $\lambda_1$  otteniamo:  $\lambda_1 = \frac{\gamma}{p}$  ;  $\lambda_2 = \frac{\gamma(1-p)}{p}$

La product form è data dalle equazioni:

$$\pi(n_1, n_2) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2) \quad \pi_2(n) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i} \text{ Le visite sono:}$$

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{1}{p} \text{ e } v_2 = \frac{\lambda_2}{\gamma} = \frac{(1-p)}{p}$$

Parametri:  $\gamma = 1.3j/s$ ,  $\mu_1 = 30j/s$ ,  $\mu_2 = 25j/s$  Nel caso bilanciato, cioè  $p = 0.5$ , il 50% cicla. Nel centro 1 abbiamo 1 visita in più rispetto al centro 2. Se  $P = 0.5$  ho  $R = 0.1152$  s, Se  $P = 0.6$  ho  $R = 0.0865$  s Se  $p = 0.05$  ho 20 visite ad 1, 19 visite a 2, il tempo di risposta  $R = 68.333$  s  $\rho_1 = 0.8666$ ,  $\rho_2 = 0.988$   $E(n_1) = 6.5s$ ,  $E(n_2) = 82.333$

Nelle forme prodotto aperte, le marginali già sono in forma prodotto, nel caso chiuso no.

$$\pi(n_1, \dots, n_M) = \frac{1}{G(n)} \prod_{i=1}^N f_i(\dots) \text{ con } f_i \text{ formula dipendente dal centro } i. \text{ La funzione } G \text{ serve per normalizzare ad 1. Voglio probabilità del centro } i \text{ di contenere } n \text{ job, ovvero } P_i(n) = \sum_{\bar{s}: n_i=n} \pi(\bar{s})$$

Esistono algoritmi per calcolare gli indici senza necessità della soluzione. Noi vedremo l'algoritmo di **Mean Value Analysis**, perchè molto semplice e diffuso (accettato in ambiti industriali).

## Mean Value Analysis

Essa si basa sulle stesse ipotesi di BCMP, ovvero accettiamo *FIFO*, *esponenziale*, *PS*, *LIFO con prelazione*, ed *IS*. Definiamo il numero di job  $\doteq N$  e il numero dei centri  $\doteq M$ . **Siamo sempre in un contesto di reti chiuse.**

Gli indici dipendono *sempre* da  $N$ , anche se non sempre esplicitato.

Devo considerare un singolo centro  $i$ , e il tempo di risposta medio di un centro nella rete ci dice quanto tempo spende un job nel centro  $i$ . Vogliamo quindi calcolare  $E(t_i(N)) = E(s_i) + E(a_i(N))E(s_i)$

La prima componente è il *tempo speso in servizio*, la seconda è il *tempo speso in attesa che gli altri job terminino il servizio quando lui arriva nel centro*. Poichè siamo in una rete stocastica, stiamo trattando sempre variabili random, e denotiamo quindi  $a_i(N)$  il numero medio di job presenti all'arrivo del nostro job di riferimento  $i$  a "tutti gli istanti di arrivo". Cioè faccio tale misurazione ogni qual volta che arriva un job nuovo nel centro, mentre  $E(n)$  era su tutti gli istanti di arrivo. Solo nelle reti separabili vale il **teorema degli arrivi**, ovvero  $E(a_i(N)) = E(n_i(N - 1))$ .

Facendo tale sostituzione alla formula sopra, abbiamo:  $E(t_i(N)) = E(s_i)(1 + E(n_i(N - 1)))$

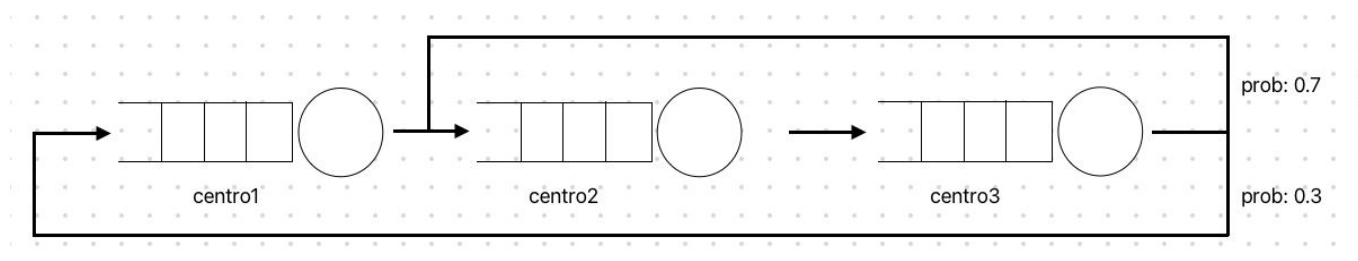
che è un ricorsione, in cui vediamo che:  $N = 0 \quad E(n_1(0)) = E(n_2(0)) = \dots = E(n_M(0)) = 0$

Quindi a  $N = 1$ , avrò  $E(n_i(N - 1)) = E(n_i(0)) = 0$  e quindi  $E(t_i(N = 1)) = E(s_i)$

Possiamo ricavare il throughput del centro  $i$ ,  $\lambda_i(N)$ , ma ci serve  $E(n_i(N))$  per usare Little, che non posso sapere, perchè essendo la formula ricorsiva conosco solo gli indici *passati*.

In alternativa sfrutto le visite.  $\lambda_i(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^N v_{j,i} E(t_j(n))}$  e quindi  $E(n_i(n)) = \lambda_i(n) E(t_i(n))$

Esempio:



Definiamo  $M = 3$ ,  $N = 3$ ,  $\mu_1 = 1 \text{ j/s}$ ,  $\mu_2 = \mu_3 = 2 \text{ j/s}$  Valutiamo lo spazio degli stati:

$$E =$$

$$\{(3, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 3)\}$$

Sono 10 stati perchè  $\binom{N+M-1}{M-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 10$ . Le prestazioni dei centri 2 e 3 saranno uguali, avendo stesso tasso e stesse visite. Scrivo sistema di equazioni linearmente indipendenti.

$$y_1 = 0.3y_3$$

$$y_2 = y_1 + 0.7y_3$$

$$y_3 = y_2$$

Potrei trovare anche matrice routing 3x3: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

che posso abbreviare in  $\bar{y} = \bar{y}P$

Devo fissare *arbitrariamente* un valore nel sistema delle visite, fisso  $y_3 = 1$  ad esempio, perchè è la più semplice.

Troviamo:  $y_1 = 0.3, y_2 = 1, y_3 = 1$

Vogliamo calcolare le visite **rispetto al centro 1**.  $v_{1,1} = 1, v_{2,1} = \frac{y_2}{y_1} = 3.3333 = v_{3,1} = \frac{y_3}{y_1} = 3.3333$

Questo è perchè ho preso 1 come punto di osservazione. Se cambiassi col **centro 2**:

$$v_{2,2} = v_{3,2} = \frac{y_2}{y_2} = 1, v_{1,2} = \frac{y_1}{y_2} = 0.3$$

Rispetto al centro 3? uguali.

$$v_{1,3} = 0.3, v_{2,3} = v_{3,3} = 1$$

Adesso procediamo con gli indici di prestazione per i vari centri, partendo dalla presenza di 1 *job*:

$$n = 1$$

Calcoliamo il tempo di risposta medio, per ogni centro, partendo da 1 *job*.

$$E(t_1(1)) = E(s_1)(1 + E_{n_1}(0)) = 1 \cdot (1 + 0) = 1$$

$$E(t_2(1)) = E(s_2)(1 + E_{n_2}(0)) = 0.5 \cdot (1 + 0) = 0.5$$

$$E(t_3(1)) = 0.5$$

Questi primi tre risultati derivano dal fatto che, per  $n = 1$  abbiamo  $E(t_j(1)) = E(s_i) = 1/\mu_i$

Calcoliamo le **entrate rispetto al centro 1**:

$$\lambda_1(1) = \frac{1}{1 \cdot 1 + 3.33 \cdot 0.5 + 3.33 \cdot 0.5} = 0.230769 \text{ avendo al denominatore } \sum_{j=1}^N v_{j,i} E(t_j(n)).$$

Poichè  $n = 1$ , ho  $E(t_j(1)) = E(s_i) = 1/\mu_i$ , quindi al denominatore stiamo moltiplicando le visite rispetto *al centro 1* per i vari tassi di servizio. Dalle definizioni:

$$E(n_1(1)) = \lambda_1(1) \cdot E(t_1(1)) = 0.230769$$

$$\text{Analogamente, per il centro 2 e 3 si hanno: } \lambda_2(1) = \frac{1}{1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1} = 0.769231 = \lambda_3(1)$$

$$E(n_2) = E(n_3) = 0.3846155$$

$$n = 2$$

Adesso abbiamo incrementato di 1 il numero di job, incrementiamo mano a mano perchè le formule sono ricorsive, devo partire dal caso base di sistema con 0 job e mano a mano incrementare.

$$E(t_1(2)) = E(S_1)(1 + E_{n_1}(1)) = 1 \cdot (1 + 0.230769) = 1.230769$$

$$E(t_2(2)) = E(S_2)(1 + E_{n_2}(1)) = 0.5 \cdot (1 + 0.3846155) = 0.69230775$$

$$E(t_3(2)) = 0.69230775$$

$$\text{Mi focalizzo sul centro 1: } \lambda_1(2) = \frac{2}{1 \cdot 1.23 + 0.69 \cdot 3.333 + 0.69 \cdot 3.333} = 0.3430$$

$$E(n_1(2)) = 0.3430 \cdot 1.230769 = 0.4222$$

Passiamo ai centri 2 e 3

$$\lambda_2(2) = \lambda_3(2) = \frac{2}{0.3 \cdot 1.23 + 0.69 + 0.69} = 1.1435$$

$$E(n_2(2)) = E(n_3(2)) = 1.1435 \cdot 0.6923 = 0.791661$$

$$n = 3$$

Per il centro 1:

$$E(t_1(3)) = E(S_1)(1 + E_{n_1}(2)) = 1 \cdot (1 + 0.4222) = 1.4222$$

Per i centri 2 e 3:

$$E(t_2(3)) = E(t_3(3)) = E(S_2)(1 + E_{n_2}(3)) = 0.5 \cdot (1 + 0.791661) = 0.8958305$$

Calcoliamo gli indici per il centro 1:

$$\lambda_1(3) = \frac{3}{1 \cdot 1.4222 + 3 \cdot 33 \cdot 0.8958 + 3 \cdot 33 \cdot 0.8958} = 0.406051$$

$$E(n_1(3)) = 0.406051 \cdot 1.4222 = 0.577197$$

Calcoliamo gli indici per il centro 2 e 3:

$$\lambda_2(3) = \frac{3}{1.422 \cdot 0.3 + 0.8958 \cdot 1 + 0.8958 \cdot 1} = 1.35244 = \lambda_3(3)$$

$$E(n_2(3)) = E(n_3(3)) = 1.3544 \cdot 0.895835 = 1.211402$$

Che verifiche posso eseguire?

- La somma delle popolazioni medie deve restituire l'uguaglianza  $N = \sum_{i=1}^N E(n_i(N)) \approx 3$
- Possiamo anche calcolare l'utilizzazione  $U_1 = 0.406176$  ed  $U_2 = U_3 = 0.67696$  '
  - Sono centri chiusi -> stazionari -> utilizzazione è  $\lambda_i(3) / \mu_i$ , era più semplice del previsto!

Questi sono tutti indici *locali*. Possiamo parlare anche di indici *globali*, ma dobbiamo sempre scegliere un punto di osservazione, perchè la rete è chiusa.

Vogliamo calcolare il *tempo di risposta rispetto al centro 1*, ovvero da quando il centro 1 lancia una richiesta al resto del sistema fino a quando questo sottosistema manda indietro una risposta. Tutto è in funzione di  $N = 3$ . Calcolo il tempo di risposta rispetto al centro 1.

$$E(t_{1,1}(3)) = v_{2,1} \cdot E(t_2(3)) + v_{3,1} \cdot E(t_3(3)) = 5.99 \text{ s}$$

$$E(t_{2,2}(3)) = v_{1,2} \cdot E(t_1(3)) + v_{3,2} \cdot E(t_3(3)) = 1.33 \text{ s}$$

Il secondo valore è più piccolo perchè dato che c'è il ciclo è più facile che si ritorni più velocemente a 2 direttamente da 3 facendo un giro più corto. Il tempo di ciclo è un giro completo rispetto al numero di visite che faccio negli altri rispetto al mio riferimento. Queste cose stanno anche sul libro.

$$\text{Tempo di ciclo rispetto a 1: } E(t_{c,1}(3)) = E(t_{2,1}(3)) + E(t_1(3)) = 7.41 \text{ s}$$

$$E(t_{c,2}(3)) = v_{1,2}E(t_1(3)) + v_{3,2}E(t_3(3)) + v_{2,2}E(t_2(3)) = 2.23 \text{ s}$$

Il tempo di ciclo rispetto 2 è scritto bene, ovvero tutti i centri moltiplicati per le visite.  
 Il tempo di ciclo rispetto ad '1' credo abbia degli errori nella forma, non nel risultato.