

MPSMF_lez14

▶ 0:00 / 1:38:52



Cosa facciamo oggi?

Recap:

problema del portafoglio:

Dati S_1, \dots, S_M titoli rischiosi.

Abbiamo due problemi da voler risolvere:

- Portafoglio di minimo rischio;
- Portafoglio di minimo rischio per un dato rendimento.

Il primo è un problema di ottimizzazione vincolata, per cui vogliamo risolvere il seguente problema $\min(w_1, \dots, w_M) : \sum_{m=1}^M w_m = 1, \frac{1}{2} \sigma^2(w_1, \dots, w_M)$.

Che cosa accade se introduciamo nel nostro modello un titolo S_0 non rischioso.

Lo scenario cambia in maniera significativa.

Osserviamo prima un problema preliminare.

Dati $(w_1, \dots, w_M) \in H \triangleq \{(w_1, \dots, w_M) \in R^M : \sum_{m=1}^M w_m = 1\}$

$$\sigma(w_1, \dots, w_M) = \left(\sum_{m=1}^M (w_1, \dots, w_M) \sum_{m=1}^M (w_1, \dots, w_M)^T \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Sigma(w_1, \dots, w_M) = \sum_{m=1}^M w_m \bar{r}_m$$

Analogia con quanto visto nei corsi di fisica riguardo le curve parametriche.

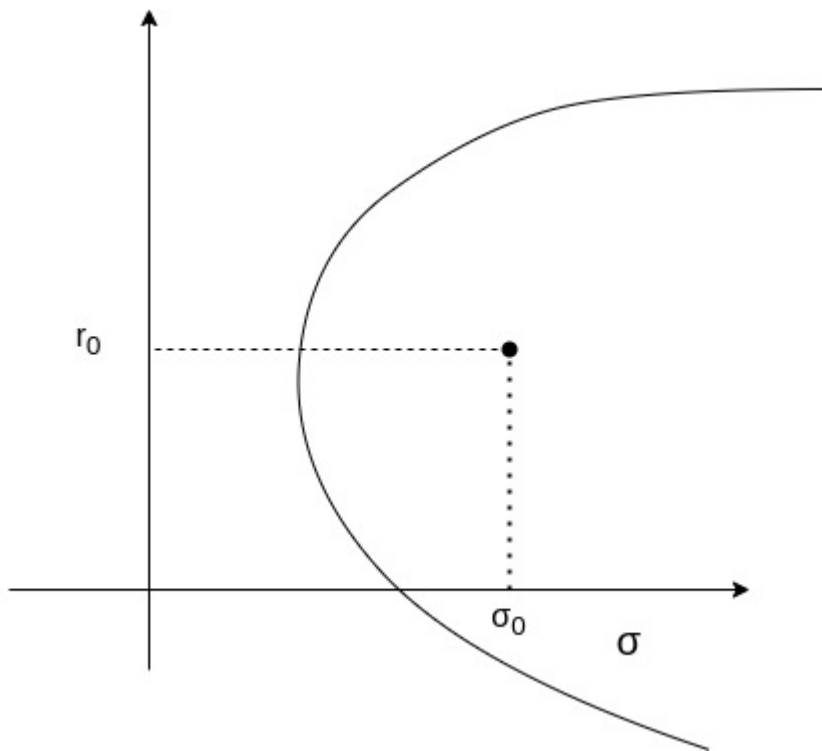
Ad esempio:

$$x(t) = r \cos wt$$

$$y(t) = r \sin wt$$

Possiamo quindi vedere $\sigma(w_1, \dots, w_M)$ esattamente allo stesso modo

Chiaramente in questo caso non andremo a produrre una "linea", ma una superficie in R^2 .



Tutta la parte interna alla superficie non ha alcun interesse dal punto di vista finanziario (peggio mi sento per la parte aventi ordinate negative).

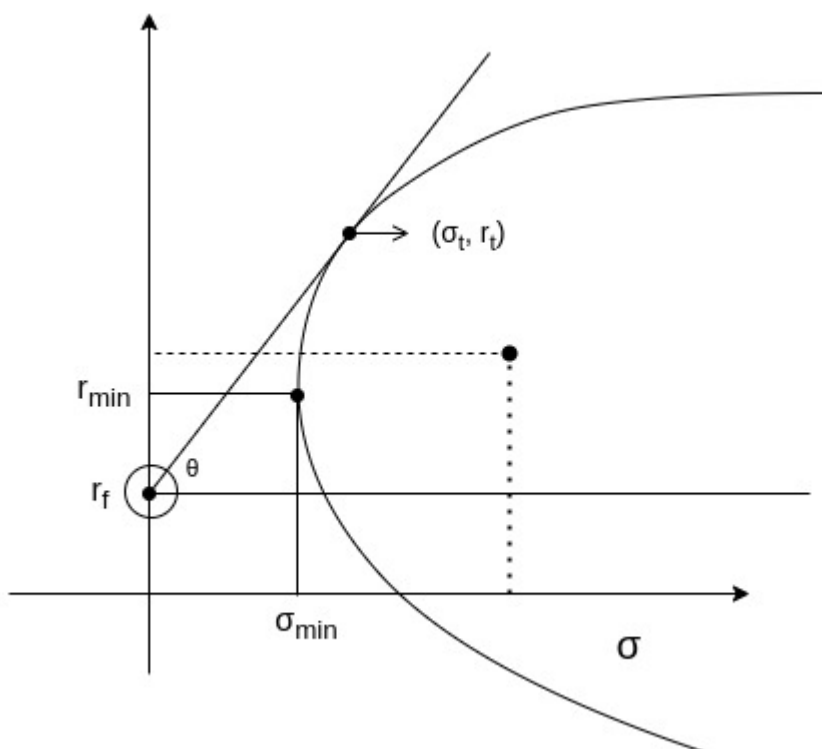
Perché la parte interna comunque non ci interessa?

Prendiamo il portafoglio come in figura? Ci investiresti? No! Perché "basterebbe spostarsi" verso ordinate maggiori per ottenere un portafoglio migliore.

Ciò che ci rimane quindi è solamente la così detta **frontiera efficiente**.

Osservazione: Il mercato, sulla base della legge "domanda e offerta" faccia i conti "meglio di chiunque".

Supponiamo di tracciare la retta tangente lungo la frontiera di efficiente:



$$\frac{\bar{r} - r_0}{\sigma} = \tan(\theta)$$

$$\bar{r} = \sum_{m=1}^M w_m \bar{r}_m$$

$$\sigma = \left(\sum_{l,m=1}^M \sigma_{l,m} w_l w_m \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_0 = \sum_{m=1}^M w_m r_0$$

$$\sigma = \frac{\sum_{m=1}^M (\bar{r}_m - r_0) w_m}{\left(\sum_{l,m=1}^M \sigma_{l,m} w_l w_m \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Il problema da considerare è quindi quello di considerare (primo teorema di Sharp):

$$\max(w_1, \dots, w_M) \in H \cap K_{\bar{r}}$$

Secondo teorema di Sharp:

$$(V_1^*, \dots, V_M^*) : \sum_{m=1}^M \sigma_{l,m} v_l = \bar{r}_m - r_0$$

e tale che: $V^* \triangleq \sum_{m=1}^M \theta_m^* > 0$

Cosa significa dal punto di vista finanziario quest'ultima condizione?

Significa che noi stiamo costruendo il nostro portafoglio partendo da una ricchezza iniziale positiva (da rivedere).

Le componenti $(w_1^{(T)}, \dots, w_M^{(T)})$ che determinano il portafoglio tangente sono date dalla seguente relazione:

$$w_m^{(T)} = \frac{V_M^*}{V^*}$$

(Un progetto d'esame potrebbe essere quello di portare questi risultati combinando la parte teorica con la parte applicativa. Nessuno fino ad ora ha mai portato questa roba).

Perché vogliamo costruire il portafoglio tangente? Abbiamo visto solo come fare ora.

Lo abbiamo indicato così:

$$\sigma_T(w_1^{(T)}, \dots, w_M^{(T)})$$

$$\bar{r}_T(w_1^{(T)}, \dots, w_M^{(T)})$$

Se io prendo un portafoglio (w_1, \dots, w_M) , e svolgo la seguente combinazione lineare $\alpha(w_1^{(T)}, \dots, w_M^{(T)}) + (1 - \alpha)(\frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M})$ ottengo i portafoglio che mi permettono di descrivere i punti della retta (tangente).

Sulla retta c'è sempre un portafoglio migliore. (A parità di investimento ce ne è uno con rischio minore. A parità di rischio c'è un investimento migliore).
(Capital Market Line).

Un portafoglio del genere è sempre ammissibile (la somma è sempre 1).

Questa scoperta ci consente di migliorare il risultato della **frontiera efficiente**.
Tutto lo sforzo matematico sta quindi nel determinare i pesi del portafoglio tangente, tutto il resto ce lo fornisce il mercato.

Uno potrebbe dire: "ma questo problema potrebbe essere difficile da risolvere".
I matematici con il teorema di Sharp possono calcolarselo.

C'è un fatto interessante.

Disegniamo un rettangolo e stabiliamo che l'area di questo rettangolo è la
Capitalizzazione totale di mercato.

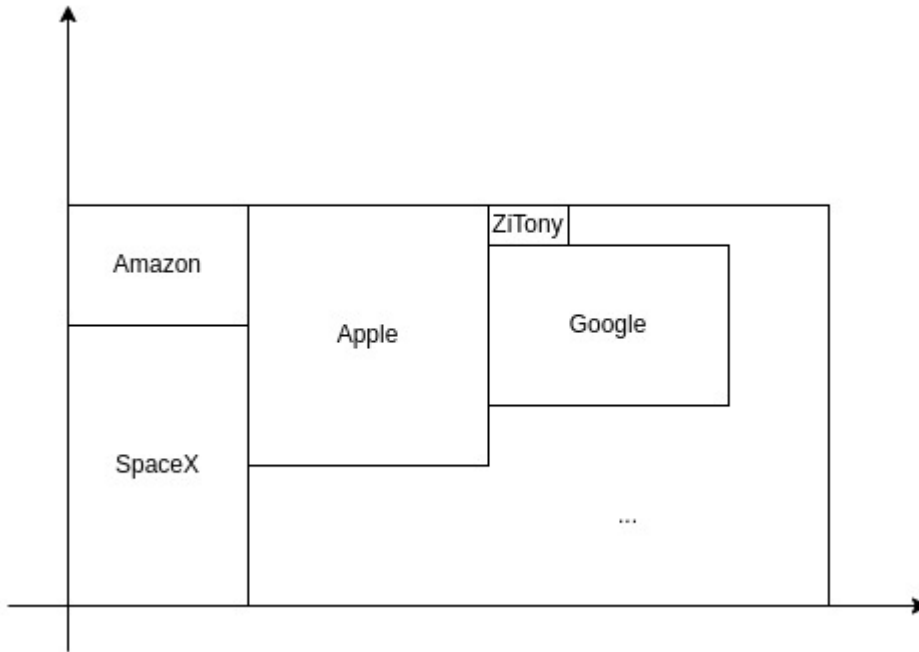
Il numero di azioni di una certa azienda che sono disponibili sul mercato si chiama **flottante**. (Quindi il valore dell'azienda è diviso tanti pezzi. Una parte se li tiene l'azienda e gli altri, detti **flottanti** vengono messi sul mercato. Il loro valore è stabilito dal mercato).

Se sul mercato metto il 70% dei pezzettini, cosa impedisce a qualcun'altro di poterli comprare tutti e quindi "sovvertire" l'azienda e prendere completamente il possesso? Nessuno te lo vieta, devi solo avvisare un certo ente (questo tipo di evento si chiama "rastrellamento" (non so se è un nome ufficiale)).

Supponiamo che abbiamo diviso l'azienda (Amazon) in 1 milione di pezzettini significa che avremo sul mercato 700.000 pezzettini. Per cui se il mercato ha stabilito che ogni singolo pezzettino vale 150\$ allora il valore di Amazon sarà di $150 * 700.000\$$ ed è il capitale.

Facciamo sta roba per tutte le aziende e otteniamo la capitalizzazione totale (cap. tot è la somma di tutte le capitalizzazioni parziali).

Questo è lo schema che ci esce fuori:



Questi oggetti li costruisce il mercato.

Alla fine non vanno determinate le coordinate del portafoglio tangente, basta vedere quanto le singole aziende sono capitalizzate nel mercato e farne il rapporto con il totale.

Il quadro appena presentato ovviamente è funzione del tempo, perché il valore delle azioni è funzione del tempo. Quindi è un quadro dinamico.

Quindi per calcolarmi le coordinate del portafoglio tangente, devo calcolarmi le singole capitalizzazioni? Nah ... ci sono dei tizi che lo fanno per voi. In particolare gli strumenti che fanno ciò sono gli ETF.

L'investitore alla fine non deve fare quasi niente. Deve solo scegliere quanta parte della sua ricchezza investire sul titolo non rischioso e quanta sul titolo rischioso.

Le banche si inventano delle strategie che loro chiamano "dinamiche". Con queste strategie tendono ad andare oltre la capital market line (retta tangente), ma sono rischiose, perché avvolte queste strategie possono anche andare sotto.

Monte consiglia che per un piccolo investitore la scelta **ETF+Bond** è il miglior modo per ottimizzare. (Roba più spinta ha senso solo per grandi investitori).

(Eh ma io voglio guadagnare di più ... e allora rischiatela e gioca alla lotteria).