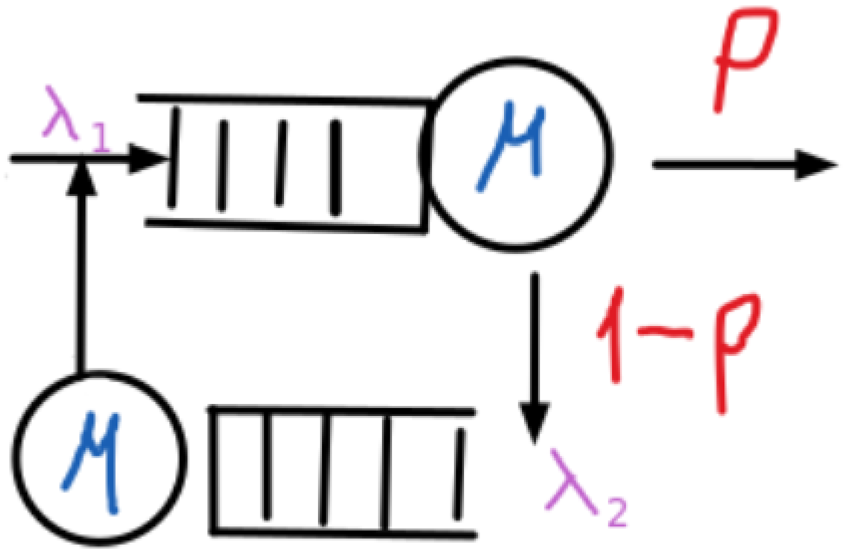
Esercizio



Iniziamo con lo scrivere i flussi in entrata:

$$\{\lambda_1 = \gamma + \lambda_2 \ \{\lambda_2 = (1-p)\lambda_1$$

Sostituendo λ_2 in λ_1 otteniamo: $\lambda_1 = \frac{\gamma}{p}$; $\lambda_2 = \frac{\gamma(1-p)}{p}$

La product form è data dalle equazioni:

$\pi(n_1, n_2) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2) \ \pi_2(n) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$ Le visite sono:

$v_1 = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{1}{p}$ e $v_2 = \frac{\lambda_2}{\gamma} = \frac{(1-p)}{p}$

Parametri: $\gamma = 1.3j/s$, $\mu_1 = 30j/s$, $\mu_2 = 25j/s$ Nel caso bilanciato, cioè $p = 0.5$, il 50% cicla. Nel centro 1 abbiamo 1 visita in più rispetto al centro 2. Se P = 0.5 ho R = 0.1152 s, Se P = 0.6 ho R = 0.0865 s Se p = 0.05 ho 20 visite ad 1, 19 visite a 2, il tempo di risposta R = 68.333 s $\rho_1 = 0.8666$, $\rho_2 = 0.988$ $E(n_1) = 6.5s$, $E(n_2) = 82.333$

Nelle forme prodotto aperte, le marginali già sono in forma prodotto, nel caso chiuso no.

$\pi(n_1, ..., n_M) = \frac{1}{G(n)} \prod_{i=1}^{N} f_i(...)$ con f_i formula dipendente dal centro i. La funzione G serve per normalizzare ad 1. Voglio probabilità del centro i di contenere n job, ovvero $P_i(n) = \sum_{\bar{s}:n_i=n} \pi(\bar{s})$

Esistono algoritmi per calcolare gli indici senza necessità della soluzione. Noi vedremo l'algoritmo di **Mean Value Analysis**, perchè molto semplice e diffuso (accettato in ambiti industriali).

Mean Value Analysis

Essa si basa sulle stesse ipotesi di BCMP, ovvero accettiamo *FIFO, esponenziale*, *PS*, *LIFO con prelazione*, ed *IS*. Definiamo il numero di job $\doteq N$ e il numero dei centri $\doteq M$. Siamo sempre in un contesto di reti chiuse.

> Gli indici dipendono *sempre* da N, anche se non sempre esplicitato.

Devo considerare un singolo centro i, e il tempo di risposta medio di un centro nella rete ci dice quanto tempo spende un job nel centro i. Vogliamo quindi calcolare $E(t_i(N)) = E(s_i) + E(a_i(N))E(s_i)$

La prima componente è il *tempo speso in servizio*, la seconda è il *tempo speso in attesa che gli altri job terminino il servizio quando lui arriva nel centro*. Poichè siamo in una rete stocastica, stiamo trattando sempre variabili random, e denotiamo quindi $a_i(N)$ il numero medio di job presenti all'arrivo del nostro job di riferimento *i* a "tutti gli istanti di arrivo". Cioè faccio tale misurazione ogni qual volta che arriva un job nuovo nel centro, mentre $E(n)$ era su tutti gli istanti di arrivo. Solo nelle rete separabili vale il **teorema degli arrivi**, ovvero $E(a_i(N)) = E(n_i(N-1))$.

Facendo tale sostituzione alla formula sopra, abbiamo: $E(t_i(N)) = E(s_i)(1 + E(n_i(N-1))$

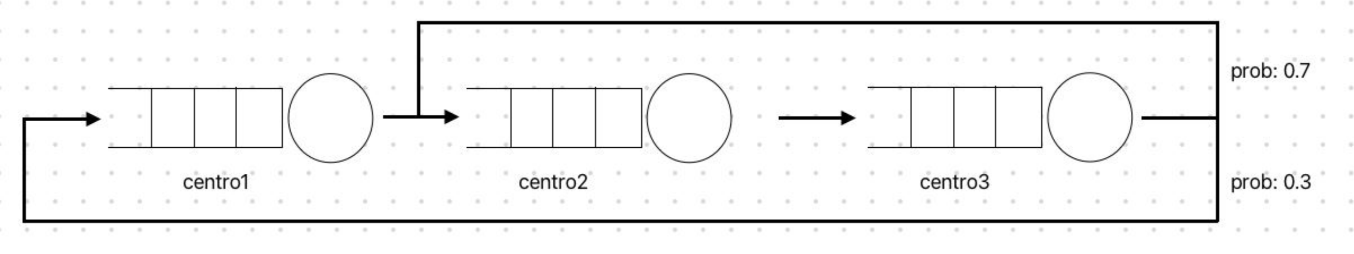
che è un ricorsione, in cui vediamo che: $N = 0 \quad E(n_1(0)) = E(n_2(0)) =, ..., = E(n_M(0)) = 0$

Quindi a $N = 1$, avrò $E(n_i(N-1)) = E(n_i(0)) = 0$ e quindi $E(t_i(N = 1)) = E(s_i)$

Possiamo ricavare il throughput del centro i, $\lambda_i(N)$, ma ci serve $E(n_i(N))$ per usare Little, che non posso sapere, perchè essendo la formula ricorsiva conosco solo gli indici *passati*.

In alternativa sfrutto le visite. $\lambda_i(n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{N} v_{j,i} E(t_j(n))}$ e quindi $E(n_i(n)) = \lambda_i(n)E(t_i(n))$

Esempio:



Definiamo $M = 3,\ N = 3,\ \mu_1 = 1\ j/s,\ \mu_2 = \mu_3 = 2\ j/s$ Valutiamo lo spazio degli stati:

$E =$
$\{(3,0,0),(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1),(1,0,2),(0,3,0),(0,2,1),(0,1,2),(0,0,$

Sono 10 stati perchè $\binom{N+M-1}{M-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 10$. Le prestazioni dei centri 2 e 3 saranno uguali, avendo stesso tasso e stesse visite. Scrivo sistema di equazioni linearmente indipendenti.

$y_1 = 0.3y_3$

$y_2 = y_1 + 0.7y_3$

$y_3 = y_2$

Potrei trovare anche matrice routing 3x3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$

che posso abbreviare in $\bar{y} = \bar{y}P$

Devo fissare *arbitrariamente* un valore nel sistema delle visite, fisso $y_3 = 1$ ad esempio, perchè è la più semplice.

Troviamo: $y_1 = 0.3, y_2 = 1, y_3 = 1$

Vogliamo calcolare le visite **rispetto al centro 1**. $v_{1,1} = 1, v_{2,1} = \frac{y_2}{y_1} = 3.3333 = v_{3,1} = \frac{y_3}{y_1} = 3.3333$

Questo è perchè ho preso 1 come punto di osservazione. Se cambiassi col **centro 2**:

$v_{2,2} = v_{3,2} = \frac{y_2}{y_2} = 1,\ v_{1,2} = \frac{y_1}{y_2} = 0.3$

Rispetto al centro 3? uguali.

$v_{1,3} = 0.3,\ v_{2,3} = v_{3,3}$=1

Adesso procediamo con gli indici di prestazione per i vari centri, partendo dalla presenza di $1\ job$:

$n = 1$

Calcoliamo il tempo di risposta medio, per ogni centro, partendo da *1 job*.

$E(t_1(1)) = E(s_1)(1 + E_{n_1}(0)) = 1 \cdot (1 + 0) = 1$

$E(t_2(1)) = E(s_2)(1 + E_{n_2}(0)) = 0.5 \cdot (1 + 0) =\ 0.5$

$E(t_3(1)) = 0.5$

Questi primi tre risultati derivano dal fatto che, per $n = 1$ abbiamo $E(t_j(1)) = E(s_i) = 1/\mu_i$

Calcoliamo le **entrate rispetto al centro 1**:

$\lambda_1(1) = \frac{1}{1 \cdot 1 + 3.33 \cdot 0.5 + 3.33 \cdot 0.5} = 0.230769$ avendo al denominatore $\sum_{j=1}^{N} v_{j,i} E(t_j(n))$.

Poichè $n = 1$, ho $E(t_j(1)) = E(s_i) = 1/\mu_i$, quindi al denominatore stiamo moltiplicando le visite rispetto *al centro 1* per i vari tassi di servizio. Dalle definizioni:

$E(n_1(1)) = \lambda_1(1) \cdot E(t_1(1)) = 0.230769$

Analogamente, per il centro 2 e 3 si hanno: $\lambda_2(1) = \frac{1}{1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1} = 0.769231 = \lambda_3(1)$
$E(n_2) = E(n_3) = 0.3846155$

$n = 2$

Adesso abbiamo incrementato di 1 il numero di job, incrementiamo mano mano perchè le formule sono ricorsive, devo partire dal caso base di sistema con 0 job e mano a mano incrementare.

$E(t_1(2)) = E(S_1)(1 + E_{n_1}(1)) = 1 \cdot (1 + 0.230769) = 1.230769$

$E(t_2(2)) = E(S_2)(1 + E_{n_2}(1)) = 0.5 \cdot (1 + 0,3846155) = 0.69230775$

$E(t_3(2)) = 0.69230775$

Mi focalizzo sul centro 1: $\lambda_1(2) = \frac{2}{1 \cdot 1.23 + 0.69 \cdot 3.333 + 0.69 \cdot 3.333} = 0.3430$

$E(n_1(2)) = 0.3430 \cdot 1.230769 = 0.4222$

Passiamo ai centri 2 e 3

$\lambda_2(2) = \lambda_3(2) = \frac{2}{0.3 \cdot 1.23 + 0.69 + 0.69} = 1.1435$

$E(n_2(2)) = E(n_3(2)) = 1.1435 \cdot 0.6923 = 0.791661$

$n = 3$

Per il centro 1:

$E(t_1(3)) = E(S_1)(1 + E_{n_1}(2)) = 1 \cdot (1 + 0.4222) = 1.4222$

Per i centri 2 e 3:

$$E(t_2(3)) = E(t_3(3)) = E(S_2)(1 + E_{n_2}(3)) = 0.5 \cdot (1 + 0.791661) = 0.8958305$$

Calcoliamo gli indici per il centro 1:

$$\lambda_1(3) = \frac{3}{1 \cdot 1.4222 + 3.33 \cdot 0.8958 + 3.33 \cdot 0.8958} = 0.406051$$

$$E(n_1(3)) = 0.406051 \cdot 1.4222 = 0.577197$$

Calcoliamo gli indici per il centro 2 e 3:

$$\lambda_2(3) = \frac{3}{1.422 \cdot 0.3 + 0.8958 \cdot 1 + 0.8958 \cdot 1} = 1.35244 = \lambda_3(3)$$

$$E(n_2(3)) = E(n_3(3)) = 1.3544 \cdot 0.895835 = 1.211402$$

Che verifiche posso eseguire?

- La somma delle popolazioni medie deve restituire l'uguaglianza $N = \sum_{i=1}^{N} E(n_i(N)) \approx 3$
- Possiamo anche calcolare l'utilizzazione $U_1 = 0.406176$ ed $U_2 = U_3 = 0.67696$ (Non ho capito come ricavarle, dovrei calcolare $1 - p_i(0)$ma dovrei sapere le probabilità degli stati! Boh)

Questi sono tutti indici *locali*. Possiamo parlare anche di indici *globali*, ma dobbiamo sempre scegliere un punto di osservazione, perchè la rete è chiusa.

Vogliamo calcolare il *tempo di risposta rispetto al centro 1*, ovvero da quando il centro 1 lancia una richiesta al resto del sistema fino a quando questo sottosistema manda indietro una risposta. Tutto è in funzione di $N = 3$. Calcolo il tempo di risposta rispetto al centro 1.

$$E(t_{2,1}(3)) = v_{2,1} \cdot E(t_2(3)) + v_{3,1} \cdot E(t_3(3)) = 5.99\ s$$

$$E(t_{2,2}(3)) = v_{1,2} \cdot E(t_1(3)) + v_{3,2} \cdot E(t_3(3)) = 1.33\ s$$

Il secondo valore è più piccolo perchè dato che c'è il ciclo è più facile che si ritorni più velocemete a 2 direttamente da 3 facendo un giro più corto. Il tempo di ciclo è un giro completo rispetto al numero di visite che faccio negli altri rispetto al mio riferimento. Queste cose stanno anche sul libro.

Tempo di ciclo rispetto a 1: $E(t_{c,1}(3)) = E(t_{2,1}(3)) + E(t_1(3)) = 7.41\ s$

$$E(t_{c,2}(3)) = v_{1,2} E(t_1(3)) + v_{3,2} E(t_3(3)) + v_{2,2} E(t_2(3)) = 2.23\ s$$