Indice

Capitolo 1

Investments and Financial Markets

By *investment*, we mean the commitment of current resources to economic or financial activity with the goal of achieving future benefits. If resources and benefits are expressed in terms of money, then the investment is characterized by a cash flow stream, which occurs at some dates from the beginning to the end of the activity. In particular, the values taken by the cash flow at the initial and terminal date of the investment are respectively known as the investment's initial and terminal cash flow. The standard convention is that the parts of the cash flow stream representing a profit [resp. a loss] for the investor are to be considered with positive [resp. negative] sign and more specifically referred to as cash *inflow* [resp. *outflow*].

Esempio 1 *Consider your bank statement in particular, the transactions: the deposits, including direct deposits, checks cashed, payments received, reimbursements, and interest earned, are shown as positive amounts and are part of the inflow; the withdrawals, including purchases, ATM withdrawals, automatic payments, checks issued, bank fees are shown as negative amounts and are part of the outflow.*

Esempio 2 *We take a loan: the amount we receive must be part of our inflow. Our periodic payments to repay the loan must be part of our outflow.*

1.0.1 Investment Decision

Comparison Principle: evaluate an investment by comparing it with other investments which are available in financial markets. Financial assets constitute the reference systems for an economic evaluation of assets.

1.0.2 Arbitrage

We say that an economic or financial activity is an *arbitrage* if it produces a non-negative [resp. positive] cash flow with probability one [resp. with positive probability] without the commitment of initial or intermediate cash flow. We will make this concept more precise in what follows. However, we give here a simple funny example of arbitrage.

Esempio 3 *Assume that, while walking a road, we spot a ticket from the current national lottery lost by a careless buyer on the sidewalk. Assume we bend down to pick the ticket up and store it in the wallet. With this action, we can win money on the draw date at no cost. If we are lucky, we will get the money. If we are not lucky, we don't get the money, but still, we lose no money out of our own pockets. To summarize, by picking up the lost ticket on the sidewalk, we can make money without running the risk of losing money. We have realized an arbitrage.*

1.0.3 Risk Aversion

Risk aversion principle - mean variance analysis - utility functions

1.0.4 Dynamics

The future price of an asset has to be regarded as a stochastic process, that is a time indexed sequence of random variables. An important part of the analysis of investments in financial assets is concerned with the characterization of this process. The predictability problem.

1.1 Financial Markets

Si definiscono *mercati finanziari* i luoghi ideali nei quali vengono scambiati strumenti finanziari di varia natura. Nel contesto economico odierno, i mercati finanziari sono chiamati a svolgere due funzioni base:

- il trasferimento di risorse all'interno dell'economia tra unità in surplus e unità in deficit;
- la mitigazione mediante diversificazione e condivisione dei rischi insiti nelle attività economiche e finanziarie.

I mercati finanziari consentono infatti il trasferimento del risparmio dai soggetti che lo accumulano (prevalentemente le famiglie) ai soggetti che lo richiedono (governi, banche, imprese,...). Questi ultimi sono definiti *soggetti in disavanzo finanziario* ed emettono strumenti finanziari (titoli di stato, depositi bancari, obbligazioni, azioni,...) che cedono ai soggetti in avanzo finanziario in cambio di moneta. Lo scambio tra strumenti finanziari e moneta consente la redistribuzione dei rischi e dei profitti economici, perché vengono assunti in parte dagli acquirenti degli strumenti finanziari. Inoltre questi ultimi possono a loro volta cedere tali strumenti ad altri soggetti economici, scambiandoli in mercati appositi. Esistono quindi varie tipologie di mercati finanziari, ognuno con proprie regole e proprie caratteristiche.

La combinazione trasferimento di risorse-redistribuzione dei rischi e dei profitti costituisce la principale funzione economica dei mercati finanziari, che consentono di realizzare un'efficiente allocazione delle risorse finanziarie ai fini della formazione del capitale produttivo. In un sistema economico, domanda ed offerta di capitale devono tendere all'equilibrio e l'investimento del capitale deve essere efficiente. I mercati finanziari svolgono una funzione essenziale per il raggiungimento di questi due obiettivi.

Occupiamoci adesso di descrivere alcuni dei più comuni strumenti finanziari.

1.1.1 Bonds

I *titoli obbligazionari (bond)* sono contratti in cui l'emittente, in cambio di un prezzo alla sottoscrizione, si obbliga a remunerare l'investitore con il valore nominale del titolo sottoscritto *(principal)* alla maturità del titolo stesso, più un eventuale dividendo sotto forma di interessi pagati periodicamente in corso di maturità, noti come *cedole* (*coupons*). I titoli obbligazionari si dividono generalmente in due tipologie: i titoli a *cedola fissa (fixed coupon)*, in particolare *senza cedola (zero coupon)*, il cui dividendo è noto con certezza al momento della sottoscrizione e i titoli a *cedola variabile (variable coupon)*, il cui dividendo alla sottoscrizione è aleatorio.

In Italia, tra i titoli obbligazionari figurano numerosi Titoli di Stato, emessi dal Ministero del Tesoro per costituire risorse finanziarie da destinare agli investimenti di pubblica utilità. Tra questi ricordiamo i BTP, acronimo per Buoni del Tesoro Poliennali, a cedola fissa, i BOT, Buoni Ordinari del Tesoro, e i CTZ, Certificati del Tesoro Zero Coupon, entrambi senza cedola. Inoltre abbiamo i CCT, Certificati di Credito del Tesoro, a cedola variabile in dipendenza dall'andamento del tasso di interesse di mercato. Sempre con la finalità di raccogliere risorse per gli investimenti, titoli obbligazionari possono essere emessi anche da imprese pubbliche e private, quali ENI, ENEL, FIAT, Telecom, ecc... Inoltre nel mercato obbligazionario italiano possono essere trattate anche obbligazioni di emittenti straniere.

1.1.2 Stocks

Con *titoli azionari* (*stock*) si intendono contratti emessi da imprese pubbliche e private, sempre con lo scopo di costituire risorse per gli investimenti, che, diversamente dai titoli obbligazionari, non impegnano l'emittente alla restituzione del debito contratto con l'investitore, ma offrono all'atto della sottoscrizione una percentuale di proprietà dell'impresa emittente stessa. Ciò comporta tuttavia il diritto dell'investitore, noto come *azionista* (*share holder*), a ricevere una remunerazione periodica costituita da una percentuale dei profitti dell'impresa, proporzionale alla percentuale di proprietà sottoscritta. Tale diritto non è però garantito, potendo essere sospeso qualora l'impresa necessiti, a giudizio della maggioranza degli azionisti, di un reinvestimento degli utili prodotti. Gli investitori che sottoscrivono titoli azionari si trovano a sopportare un rischio assai più elevato rispetto ai sottoscrittori dei titoli obbligazionari, in quanto i flussi di reddito prodotti dagli investimenti azionari sono molto più aleatori rispetto a quelli prodotti dai titoli obbligazionari. Infatti, relativamente a questi ultimi almeno il capitale inizialmente investito è garantito, a meno d'insolvenza (*default*) dell'emittente. Pertanto gli investitori in titoli azionari si attendono rendimenti molto più elevati come premio per il rischio sopportato. Il rapporto che si instaura fra l'azionista e l'impresa è un rapporto partecipativo che dipende dalle caratteristiche del titolo azionario in possesso dell'azionista. Le imprese hanno infatti la possibilità di emettere azioni di tipo diverso: oltre alle azioni ordinarie, esistono anche azioni cosiddette speciali, come le azioni privilegiate e quelle di risparmio:

- le *azioni ordinarie* attribuiscono ai loro possessori pieni diritti amministrativi, consentono quindi la partecipazione alle assemblee, sia ordinarie che straordinarie, e permettono l'esercizio del diritto di voto;

- le *azioni privilegiate* garantiscono all'azionista il diritto a una determinata quota dell'utile distribuibile prima che venga assegnato il dividendo alle azioni ordinarie. Il privilegio può anche riguardare il diritto di priorità al rimborso del capitale all'atto dello scioglimento dell'impresa. Esistono inoltre azioni privilegiate che consentono un dividendo cumulabile e quindi, entro un certo numero di anni, il recupero dei dividendi non corrisposti in precedenza per mancanza o insufficienza di utili.

- le *azioni di risparmio* possono essere emesse solo da società quotate e si differenziano dalle azioni ordinarie per la particolarità che il loro possessore non ha diritto di voto, sia in assemblea ordinaria che straordinaria, ma ha diritto ad un dividendo maggiorato rispetto all'azionista ordinario.

1.1.3 Derivatives

Gli *strumenti finanziari derivati (derivatives)*, sono così denominati perchè il loro valore deriva dal prezzo di *un'attività sottostante (underlying asset)*, che può essere costituita da *un'attività reale (commodity derivative)*, da *un'attività finanziaria (financial derivative)*, o da un *indice* sintetico dei prezzi o dei rendimenti relativo alle precedenti attività *(index derivative)*. I derivati sono distinguibili in quattro grandi famiglie: i *contratti a termine (forwards)*, i *futures*, le *opzioni (options)* e gli *swaps*. Un'ulteriore distinzione rilevante fa riferimento ai mercati nei quali tali derivati sono quotati: si distinguono derivati scambiati in mercati organizzati, *exchange traded derivatives*, e derivati negoziati fuori mercato, *over the counter derivatives*. Un vantaggio chiave delle contrattazioni over the counter è rappresentato dal fatto che le condizioni contrattuali non devono necessariamente corrispondere a quelle fissate dai mercati, ma i contraenti sono liberi di negoziare qualunque tipo di contratto risulti di reciproco interesse. Lo svantaggio maggiore è rappresentato dal rischio di credito, o più precisamente rischio d'insolvenza. C'è infatti una probabilità, per quanto piccola, che il contratto non venga onorato. Al contrario, i mercati organizzati si prefiggono lo scopo di eliminare, o quanto meno di ridurre, il rischio di credito. I contratti forwards e gli swaps sono negoziati fuori mercato, mentre i futures, proprio per le loro caratteristiche intrinseche, sono negoziati in mercati organizzati. Le opzioni sono negoziate sia nei mercati organizzati, sia *over the counter*.

Consideriamo adesso le caratteristiche principali degli strumenti derivati ed il modo in cui vengono negoziati nel mercato.

Forwards

Un *contratto a termine (forward)* è un accordo tramite il quali due contraenti, un acquirente (*buyer*) e un venditore (*seller*), si scambiano un certo sottostante (*underlying*) a una data, detta *maturità* (*maturity*), e a un prezzo, detto *prezzo di consegna (delivery price)*, che vengono concordati alla stipula dell'accordo stesso. In ciò si differenziano dai *contratti a pronti (spot)*, che hanno regolamento immediato. I forward vengono negoziati, di solito fuori mercato, tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria e uno dei suoi clienti. In questi contratti l'acquirente assume una *posizione lunga (long position)* e, alla maturità del contratto, si obbliga a comprare il sottostante dal venditore, al prezzo di consegna concordato alla stipula. Di contro, il venditore assume una *posizione corta (short position)* e, alla maturità, si obbliga a vendere il sottostante all'acquirente al prezzo di consegna. Lo scopo dei contratti forward è garantire sia all'acquirente che al venditore la copertura dal rischio derivante dalla variabilità del prezzo dell'attività sottostante dal momento della sottoscrizione alla maturità del contratto.

Esempio 4 *Supponiamo che in data* 1 *marzo* 2019*. Il tesoriere di una società statunitense sappia che tra* 6 *mesi, ossia in data* 1 *settembre* 2019*, dovrà effettuare un esborso di* £1.00 *milioni e vuole coprirsi dal rischio delle fluttuazioni del tasso di cambio che in data* 1 *marzo* 2019 *è di* 1.31559£/\$*. Il tesoriere si mette in contatto con una banca britannica e appreso che la banca è disposta a vendergli le sterline, con consegna tra* 6 *mesi, al tasso di cambio forward di* 1.32734£/\$*, cioè con la maggiorazione di* 117.5 *punti forward, accetta di entrare in un contratto per l'acquisto a termine di* £1.00 *milioni. La società si trova quindi ad avere una posizione lunga in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data* 1 *marzo* 2019 *ad acquistare in data* 1 *settembre* 2019 *la somma di* £1.00 *milioni dalla banca in cambio di* \$1.32734 *milioni. La banca si trova ad avere una posizione corta in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data* 1 *marzo* 2019 *a vendere in data* 1 *settembre* 2019 *la somma di* £1.00 *milioni alla società in cambio di* \$1.32734 *milioni. Entrambe le parti hanno assunto un* impegno vincolante (binding commitment)*. Se nel corso dei* 6 *mesi successivi alla stipula il tasso di cambio spot dovesse salire rispetto al tasso forward a, diciamo,* 1.42734£/\$*, il valore del contratto per la società sarebbe di* \$100,000*, dato che le sterline invece di essere acquistate a* \$1.42734 *milioni, verrebbero pagate* \$1.32734 *milioni. Al contrario, se nel corso dei* 6 *mesi successivi alla stipula del contratto, il tasso di cambio spot dovesse scendere rispetto al tasso forward a, diciamo,*1.22734\$/£*, il valore del contratto per la società sarebbe di* −\$100,000*, dato che il contratto forward la obbligherebbe a pagare* \$100,000 *in più rispetto al prezzo di mercato delle sterline.*

L'esempio esposto illustra un aspetto chiave della copertura mediante i contratti forward, che eliminano l'incertezza circa il costo dell'attività sottostante, o il ricavato derivante dalla vendita, ma non comportano necessariamente un risultato migliore. Dal momento che entrare in un contratto forward non comporta alcun costo, il valore finale del contratto è anche pari al profitto o alla perdita derivante dal contratto.

Futures

Un *contratto future (futures)*, al pari di un contratto forward, stabilisce tra due contraenti, un *acquirente* (*buyer*) e un *venditore* (*seller*), l'obbligo di acquistare o vendere un *titolo sottostante* (*underlying asset* o *underlying security*) a una data futura, nota come *data d'esercizio* (*exercise date*) o data di scadenza (*expiration date*) o maturità (*maturity*) e a un prezzo di consegna (*delivery price*), concordati alla stipula del contratto. Il sottostante può essere o un titolo di possesso di un bene reale (*commodity*), per esempio petrolio, oro, rame, grano, caffè, soia, e ci si riferisce a un tale future col termine *commodity futures*, o un titolo di possesso di una valuta (*currency*) denominato *currency futures*, o anche un titolo di possesso di un portafoglio di titoli (*stock portfolio*) del mercato finanziario, per esempio un indice borsistico, e in quest'ultimo caso si parla di *financial futures.* Acquistare [resp. vendere] futures significa impegnarsi ad acquistare [resp. a vendere] alla scadenza e al prezzo prefissati l'attività sottostante indipendentemente dal suo prezzo corrente di mercato (*market spot price*). Sottolineamo che per prezzo del future deve intendersi il prezzo d'esercizio. Le parti contraenti stipulano un contratto future a costo zero. Non c'è alcun esborso di denaro per entrare come acquirente in un contratto future, né tantomeno per entrarvi come venditore. Però alla maturità i contraenti sono obbligati all'acquisto o alla vendita del sottostante al prezzo d'esercizio. Il rispetto di quest'obbligo viene assicurato dall'imposizione di un *deposito di garanzia* (*futures margin*) ad ogni sottoscrittore di un contratto future proporzionale all'entità del contratto sottoscritto. Ovviamente l'acquisto di futures corrisponde ad una aspettativa da parte dell'acquirente di rialzo dell'attività sottostante; la vendita, invece, sottende un'aspettativa del venditore al ribasso. A differenza dei forward, i future sono di norma trattati in un mercato finanziario. Per rendere possibili le negoziazioni, il mercato standardizza certi aspetti del contratto. La standardizzazione consiste nella definizione del taglio unitario, della scadenza contrattuale e delle modalità che regolano i flussi finanziari tra le parti contraenti a garanzia del buon fine del contratto. Non è possibile negoziare futures che non soddisfino questi requisiti. Inoltre, dal momento che nel caso di contratti futures i due contraenti sono generalmente ignoti l'uno all'altro, viene anche fornito un meccanismo che assicura il rispetto del contratto da parte dei due contraenti. Infatti, tutti i contratti vengono stipulati di fatto con la *Cassa di Compensazione e Garanzia (Exchange Clearinghouse).* Questa è in genere una società per azioni avente un oggetto sociale esclusivo che le impone di assicurare il buon fine dei contratti future e di emanare regolamenti che disciplinano l'operatività del mercato di propria competenza. Quindi il prezzo di consegna dei future non è concordato tra le singole parti, ma è univocamente determinato sul *floor* del mercato organizzato in base alla legge della domanda e dell'offerta. Pertanto, è anche noto come *prezzo del future* (*futures price*). Se ci sono più investitori che vogliono assumere posizioni lunghe rispetto a quelli che vogliono assumere posizioni corte, il prezzo sale. Viceversa, il prezzo scende. La circostanza che i contratti futures rispettino degli standard e vengano stipulati con la Cassa di Compensazione rende possibile il loro annullamento tramite compensazione, ossia stipulando un contratto di segno opposto all'originale. In questo modo verrà evitata la consegna dell'attività sottostante il contratto. Infatti, acquistando un future con intenzioni speculative sarà essenziale effettuarne la vendita prima della scadenza contrattuale; se, invece, le intenzioni fossero di tipo assicurativo,ossia di copertura (*hedge*), per garantirsi un prezzo futuro certo di acquisto o vendita del sottostante, si aspetterà la scadenza prevista per provvedere all'acquisto o vendita del sottostante al prezzo stabilito.

Il mercato dei futures offre agli speculatori un'interessante *leva finanziaria (financial leverage).* Cerchiamo di chiarire meglio questo concetto mediante l'esempio seguente.

Esempio 5 *Consideriamo uno speculatore che in data* 1 *marzo* 2019 *ritenga che nei prossimi* 6 *mesi la sterlina si rafforzerà rispetto al dollaro ed è pronto a scommettere sulla sua intuizione la somma di* $\$250,000$. *Lo speculatore potrebbe semplicemente comprare l'equivalente in sterline di* $\$250,000$ *al prezzo spot sperando di conseguire un profitto quando le riconvertirà in dollari. Le sterline, una volta acquistate, verrebbero depositate in un conto fruttifero ed eventualmente rivendute tra* 6 *mesi. Ipotizziamo che il tasso di cambio spot in data* 1 *marzo* 2019 *sia* $1.31559£/\$$. *L'acquisto al prezzo spot darebbe allo speculatore il possesso immediato di* $£190,029$, *per cui se tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a, diciamo,* $1.42734£/\$$ *[resp.* $1.22734\$/£$*], lo speculatore avrebbe guadagnato [resp. perso]* $\$21,236$ *[resp.* $\$16.770$*]. Un'altra possibilità è quella di assumere una posizione lunga sulla sterlina con* 4 *contratti futures standard a* 6 *mesi (ogni future standard comporta l'acquisto di* $£62,500$*) sapendo che il tasso futures a* 6 *mesi sia di* $1.32734£/\$$. *Se tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a* $1.42734£/\$$*, i futures consentirebbero allo speculatore di comprare a* $\$1.32734$ *un bene che varrebbe* $\$1.42734$*, con un* *conseguente profitto di* £25,000. *Qualora però tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a* 1.22734£/\$, *lo speculatore, costretto a comprare a* \$1.32734 *un bene che varrebbe* \$1.22734*, avrebbe perso* £25,000. *Le alternative sembrano quindi dare origine a profitti o perdite lievemente differenti, ma questi calcoli non tengono conto degli interessi che si incassano o si pagano. Infatti, quando si considerano gli interessi percepiti sulle sterline depositate nel conto fruttifero e quelli persi sui dollari vincolati nel deposito di garanzia, i profitti o le perdite derivanti dalle due alternative risultano approssimativamente uguali. In definitiva, la differenza tra le due alternative è rappresentata esclusivamente dal fatto che l'acquisto di sterline a pronti richiede un investimento iniziale di* \$250,000*, mentre l'acquisto dei futures richiede solo che lo speculatore effettui un deposito di garanzia di circa* \$30,000.

Options

Il *contratto di opzione* (*option*) è un contratto tra due contraenti, un *titolare (holder)* ed un *garante (writer)*, che sancisce l'acquisizione di un diritto e l'assunzione di un obbligo. Grazie alla stipula di un contratto di opzione il titolare, dietro la corresponsione di un *premio (prime)*, acquisisce il diritto di acquistare dal garante, nel caso di *opzione d'acquisto (call option)*, o di vendere al garante, nel caso di *opzione di vendita (put option)*, un attivo finanziario rischioso, *titolo sottostante (underlying risky asset* o *underlying security)*, entro un *scadenza (maturity* o *expiration)* e a un *prezzo d'esercizio (exercise* o *strike price)* pattuiti all'atto della stipula del contratto. Si dice che il titolare assume una *posizione lunga (long position)* sull'opzione. Il garante, in cambio del premio, si obbliga a soddisfare alla scadenza il titolare del diritto d'opzione. Si dice che il garante assume una *posizione corta (short position)* sull'opzione. Differentemente da un contratto forward o futures in cui le parti contraenti sono entrambe obbligate a onorarlo. Un contratto d'opzione garantisce al titolare il diritto di acquistare o vendere senza obbligo d'esercitarlo. Al contrario il garante è obbligato a farsi carico dell'eventuale esercizio dell'opzione da parte del titolare. Inoltre, mentre la negoziazione di contratti forward o future non implica alcun costo, fatta eccezione per il deposito di garanzia nel caso dei future, l'acquisto di un'opzione richiede un pagamento immediato. Da notare che chi acquista un'opzione call scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sopra del prezzo d'esercizio, ossia assume una *posizione rialzista* (*bullish position*) sul sottostante, mentre chi vende l'opzione call assume una *posizione ribassista* (*bearish position*). Viceversa, chi acquista un'opzione put scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sotto del prezzo d'esercizio, ossia assume una posizione ribassista sul sottostante, mentre chi vende l'opzione put assume una posizione rialzista. Le opzioni sono negoziabili sia nei mercati over the counter, sia nei mercati organizzati: si tratta in quest'ultimo caso delle cosiddette *listed options*. Il funzionamento dei mercati organizzati è in larga misura simile a quello dei mercati dei future. Le opzioni più comunemente trattate sono le *opzioni americane (american options)* possono essere esercitate in qualsiasi momento antecedente alla data di scadenza. Le opzioni di più semplice modellizzazione matematica sono le *opzioni europee (european options)* che possono essere esercitate solo alla data di scadenza.

Esempio 6 *Consideriamo un contratto di opzione call europea su* 100 *azioni Amazon in data di sottoscrizione* 01 *marzo* 2019*, con scadenza* 21 *giugno* 2019 *e prezzo d'esercizio di* \$1,700 *(per azione). Con la titolarità di questo contratto ottieniamo il diritto di acquistare* 100 *azioni Amazon in data* 21 *giugno* 2019 *dal sottoscrittore pagandole* \$1,700 *l'una. Ci sono due possibili scenari futuri, secondochè il prezzo spot del titolo Amazon alla scadenza vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno un prezzo spot superiore a* \$1,700*, ad esempio* \$1,896.17*, allora esercitiamo il diritto di opzione, compramo dal sottoscrittore del contratto le* 100 *azioni, pagandole* \$170,000*, e le rivendiamo all'istante sul mercato a* \$189,617*. Il guadagno è quindi di* \$19,617 *al quale va tuttavia sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto;*
- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno un prezzo spot inferiore a* \$1,700 *(o uguale), allora non esercitamo il diritto di opzione, in quanto esercitandolo ci troveremmo a comprare al prezzo*

di $1,700$ *delle azioni che sul mercato valgono di meno. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.*

Come si vede dall'esempio, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio. Da notare anche che mentre l'acquisto di un'opzione call consente, in linea di principio, guadagni illimitati, la vendita di un'opzione call può causare perdite illimitate. Ciò è illustrato dai due grafici seguenti

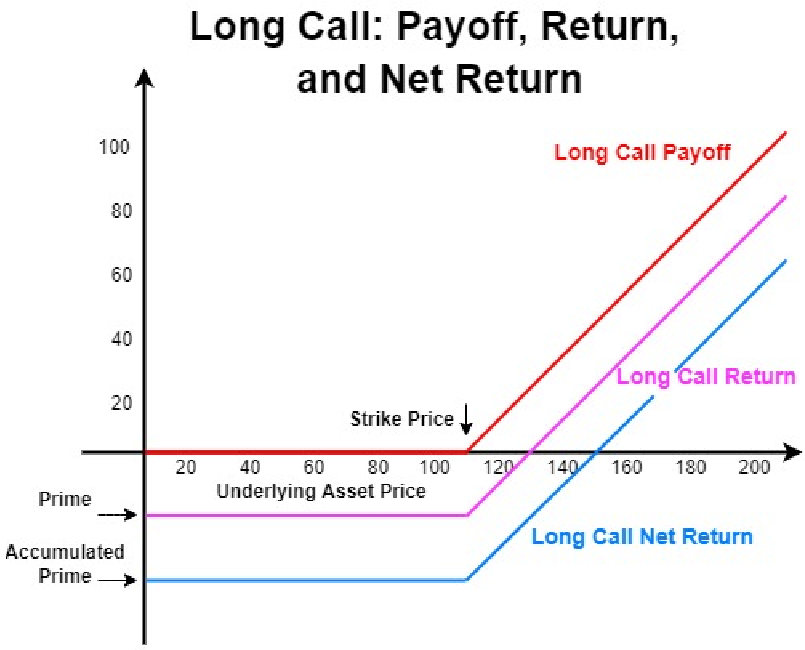

Figura 1.1: Payoff per una posizione lunga su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della call.

Presentiamo adesso un esempio analogo riferito alle opzioni put.

Esempio 7 *Consideriamo un contratto di opzione put europea su* 100 *azioni Amazon in data di sottoscrizione* 05 *marzo* 2019 *con scadenza* 21 *giugno* 2019 *e prezzo d'esercizio* $1,700$ *(per azione). Sottoscrivendo questo contratto ottieniamo il diritto di vendere* 100 *azioni Amazon in data* 21 *giugno* 2019 *al prezzo di* $1,700$ *l'una. Anche in questo caso ci sono due possibili scenari futuri, secondochè alla scadenza il prezzo spot del titolo Amazon vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno, un prezzo spot inferiore a* $1,700$*, ad esempio* $1,496.17$*, allora compriamo sul mercato le* 100 *azioni pagandole* $149,617$ *e, esercitando il diritto di opzione, le rivendiamo all'istante al sottoscrittore del contratto a* $170,000$*. Il guadagno è quindi di* 20.383 *ai quali va ancora sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto.*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno, un prezzo spot superiore a* $1,700$ *(o uguale), allora rinunciamo a esercitare il diritto di opzione, perchè esercitandolo ci troveremmo a vendere al prezzo di* $1,700$ *delle azioni che sul mercato valgono di più. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.*

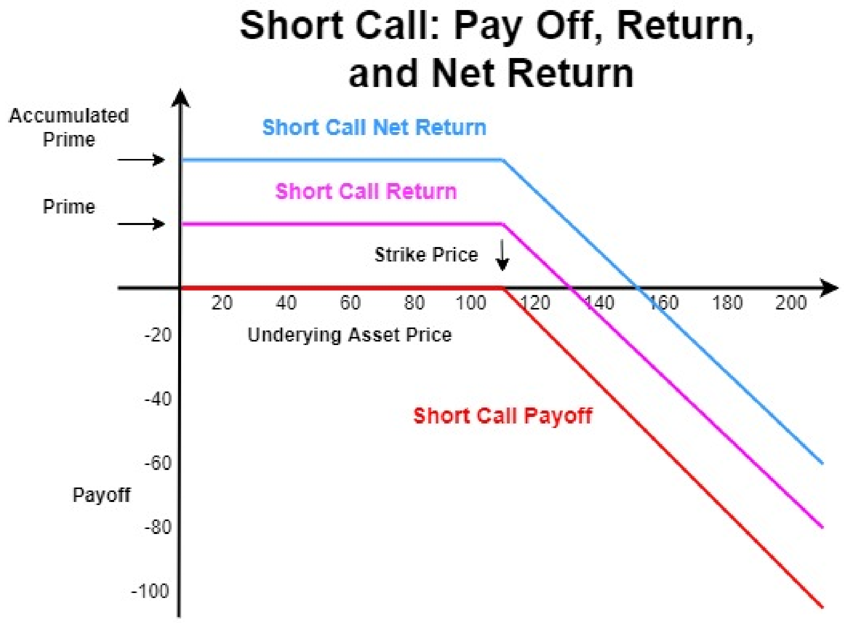

Figura 1.2: Payoff per una posizione corta su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff del venditore della call.

Simmetricamente al caso delle call, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio. Tuttavia, differentemente dalle opzioni call, l'acquisto di un'opzione put non permette guadagni superiori alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il premio e la vendita di un'opzione put non può causare perdite superiori alla differenza tra il premio e il prezzo d'esercizio.

Da notare che i payoff delle opzioni put e call europee o americane dipendono solo dal valore che il sottostante assume alla data d'esercizio e non dal suo andamento fino a tale data. Nei mercati reali, dove si opera prevalentemente in modalità telematica, l'acquisto di un contratto call [resp. put] è del tutto equivalente ad una scommessa: se il prezzo spot alla scadenza e maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio viene pagato subito il guadagno, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si perde il premio. Analogamente in caso di vendita di un contratto call [resp. put]: se il prezzo spot alla scadenza e maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio si paga subito la perdita, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si guadagna il premio. In genere i prezzi d'esercizio sono vicini alle quotazioni giornaliere dei sottostanti e ci danno quindi un'idea delle aspettative degli operatori sulle possibilità di rialzo o di ribasso degli stessi. In particolare un'opzione call o put è detta *at the money* [resp. *near the money*] quando il prezzo d'esercizio è uguale [resp. vicino] al prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *in the money* quando il prezzo d'esercizio è minore [resp. maggiore] del prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *out of the money* quando il prezzo d'esercizio è maggiore [resp. minore] del prezzo corrente del sottostante.

In base a queste caratteristiche, mentre le opzioni forniscono agli speculatori una vera e propria leva finanziaria che permette di amplificare i rendimenti di un investimento nel mercato finanziario, le stesse opzioni possono realizzare una copertura assicurativa contro il rischio di mercato.

Esempio 8 *Il* 05 *marzo* 2019 *uno speculatore vuole assumere una posizione lunga sulle azioni Amazon*

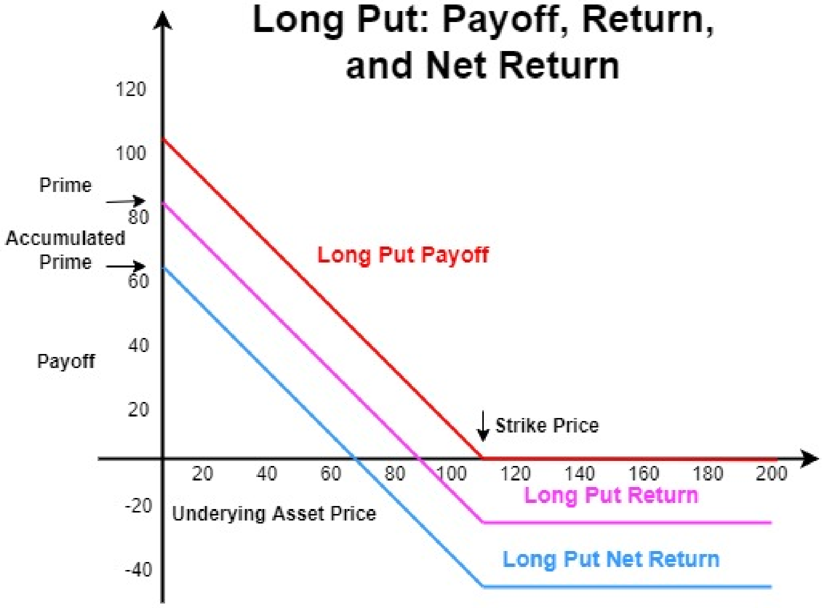

Figura 1.3: Payoff per una posizione lunga su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della put.

quotate al prezzo di \$1,696.17*, ritenendo molto probabile che il loro prezzo salga nei successivi mesi. Il* 05 *marzo* 2019 *una call europea con scadenza* 21 *giugno* 2019 *con prezzo d'esercizio di* \$1,700 *è quotata a* \$102,95*. Nell'ipotesi in cui abbia una disponibilità d'investimento pari a* \$169.617*, lo speculatore ha a disposizione due alternative: la prima consiste semplicemente nell'acquisto di* 100 *azioni; la seconda consiste nell'investimento di* \$164.000 *per l'acquisto di* 16 *contratti di* 100 *opzioni l'uno per un totale di* 1,600 *opzioni. Supponiamo che l'intuizione dello speculatore sia corretta e che le azioni Amazon si apprezzino effettivamente, ad esempio, fino a* \$1,896.17 *alla scadenza. La prima alternativa, consistente nel comprare le azioni, comporterebbe un profitto di* $100 \times \$200 = \$20,000$*. La seconda alternativa è molto più redditizia. Un'opzione call sulle Amazon, con prezzo d'esercizio di* \$1,700*, comporterebbe un ricavo di* \$196.17 *a opzione, consentendo di acquistare a* \$1,700 *l'azione che varrebbe sul mercato* \$1,896.17*. Il valore complessivo di tutte le opzioni comprate sarebbe allora pari a* $1,600 \times \$196.17 = \$313,872$*. Pertanto, sottraendo il costo originale sostenuto per l'acquisto delle opzioni, il profitto sarebbe pari a* $\$313,872 - \$164.000 = \$149.872$*. La strategia d'acquisto delle opzioni risulterebbe essere molto più redditizia della strategia consistente nell'acquisto delle azioni. Naturalmente, le opzioni comportano anche maggiori perdite potenziali. Supponiamo che il prezzo dell'azione ribassi, ad esempio sino a* \$1,496.17*, alla scadenza. La prima strategia comporterebbe una perdita di* $100 \times \$200 = \$20,000$*, mentre la strategia mediante opzioni, che scadrebbero senza essere state esercitate, causerebbe una perdita di* \$164.000*, ossia il premio originariamente pagato.*

Esempio 9 *Consideriamo un investitore che il* 05 *marzo* 2019*, scommettendo sul rialzo nei prossimi mesi delle azioni Amazon, decida di comprarne* 100 *al prezzo corrente di* \$1,696.17 *per azione. L'investitore, più prudente dello speculatore, decide di cautelarsi dal rischio che presenta il suo investimento comprando allo stesso tempo* 100 *opzioni put europee sulle azioni Amazon a scadenza* 21 *giugno* 2019 *con prezzo d'esercizio di* \$1,700*. In data il* 05 *marzo* 2019 *il premio per l'opzione put con tale prezzo d'esercizio è di* \$95.94*. Nel caso in cui le azioni Amazon dovessero effettivamente apprezzarsi sul mercato, ad esempio fino a* \$1,896.17*, l'investitore non eserciterà le opzioni ed incasserà il prezzo di mercato delle azioni realizzando così un profitto pari alla differenza tra l'incremento di valore di mercato delle azioni ed il premio pagato per l'acquisto delle opzioni per un totale di* $\$20,000 - \$9,594 = \$10,406$*. Invece, nel caso in cui il titolo dovesse deprezzarsi sul mercato, ad esempio sino a* \$1,496.17*, l'investitore*

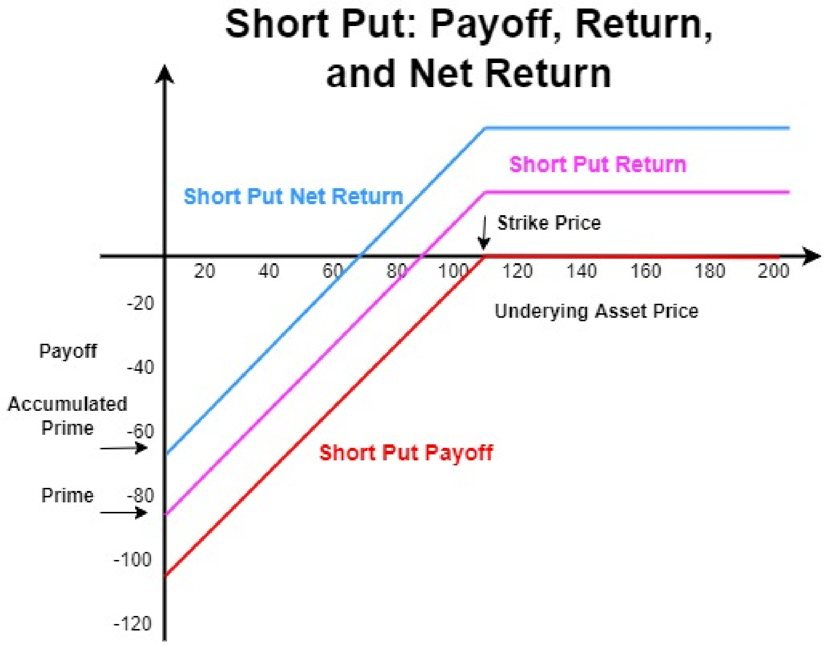

Figura 1.4: Payoff per una posizione corta su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff del venditore della put.

avrebbe modo di esercitare le sue opzioni put, limitando la sua perdita al costo del premio unitamente all'eventuale differenza tra il prezzo pagato per acquistare le azioni e lo strike delle opzioni per un totale di $\$9,594 - \$383 = \$9,166$*, invece della perdita di* $100 \times \$200 = \$20,000$ *che subirebbe se non avesse comprato le opzioni put.*

Le opzioni call e put sin qui descritte vengono chiamate *plain vanilla* e rappresentano la più semplice tipologia di contratto d'opzione, combinando tra di loro calls e puts si possono definire derivati *non standard* anche molto complicati.

Nelle prossime sezioni entreremo in maggior dettaglio nella presentazione dei contratti d'opzione nell'ambito di semplici modelli matematici di mercato finanziario.

Swaps

I *contratti swaps* sono accordi privati tra una società ed una banca, ma anche tra due società, per scambiarsi dei futuri pagamenti. L'accordo definisce le date in cui i pagamenti vengono scambiati ed il modo in cui devono essere calcolati. Di solito la loro determinazione viene effettuata in base al futuro valore di un tasso d'interesse, un tasso di cambio o qualche altra variabile di mercato.

Il più comune tipo di *swap sul tasso d'interesse (interest rate swap)* è chiamato *plain vanilla*. In questo contratto, una società si impegna a pagare ad un'altra, per un certo numero di anni ed in base a un capitale di riferimento detto *capitale nozionale (notional principal)*, un tasso d'interesse fisso predeterminato. A sua volta, la controparte si impegna a pagare un tasso d'interesse variabile sullo stesso capitale, per lo stesso numero di anni. I pagamenti a tasso variabile vengono calcolati in funzione dell'andamento nel tempo di un prefissato indice di riferimento, che per lo più è rappresentato dal *London InterBank Offer Rate (Libor)*, ovvero il tasso al quale le Banche Centrali offrono fondi ad altre banche nel mercato delle eurovalute.

Esempio 10 *Supponiamo che il* 5 *marzo* 2004 *Microsoft Europe si impegni a pagare per* 3 *anni alla Bank of England un tasso del* 5% *per cento annuo su un capitale nozionale di* £100 *milioni ed in cambio* *la Bank of England si impegni a pagare a Microsoft il Libor a* 6 *mesi sullo stesso capitale nozionale e per la stessa durata triennale. Supponiamo che i pagamenti vengano scambiati ogni* 6 *mesi e che il tasso d'interesse del* 5% *sia composto semestralmente. Il primo scambio di pagamenti ha luogo il* 5 *settembre* 2004*, sei mesi dopo la stipula del contratto. Microsoft paga alla Bank of England* £2,5 *milioni. Questi sono gli interessi su un capitale di* £100 *milioni al tasso annuo del* 5% *per cento. Di contro la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di* \$100 *milioni al Libor a* 6 *mesi osservato sei mesi prima del* 5 *settembre* 2004*, ossia esattamente il* 5 *marzo* 2004*. Supponiamo che il* 5 *marzo* 2004 *il Libor a* 6 *mesi sia pari al* 4,2%*. Quindi la Bank of England paga a Microsoft* £2,1 *milioni. Si noti che non c'è incertezza circa il primo scambio di pagamenti, dato che il pagamento variabile è determinato in base al Libor osservato nel momento in cui il contratto viene stipulato. Il secondo scambio di pagamenti ha luogo il* 5 *marzo* 2005*, un anno dopo la stipula del contratto. Microsoft paga* £2,5 *milioni alla Bank of England e la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di* £100 *milioni in base al Libor a* 6 *mesi osservato sei mesi prima del* 5 *marzo* 2004*, ossia il* 5 *settembre* 2004*. Supponiamo che il* 5 *settembre* 2004 *il Libor a* 6 *mesi sia pari al* 4,8%*, allora la Bank of England paga a Microsoft un importo pari a* £2,4 *milioni. In totale lo swap comporta sei scambi di pagamenti. I pagamenti fissi sono sempre uguali a* \$2,5 *milioni. I pagamenti variabili vengono determinati in base al Libor a* 6 *mesi, osservato sei mesi prima di ciascuna scadenza di pagamento. Ovviamente, gli swaps su tassi d'interesse sono strutturati in modo che una delle due parti remuneri l'altra solo la differenza tra i due pagamenti. Nell'esempio in questione, Microsoft paga alla Bank of England* £0,4 *milioni il* 5 *settembre* 2004 *e* £0,1 *milioni il* 5 *marzo* 2005*. Si noti che il capitale viene usato solo per determinare l'importo degli interessi, esso non viene scambiato. Questo è il motivo per cui viene chiamato capitale nozionale.*

L'esempio presentato evidenzia come lo swap possa essere considerato a tutti gli effetti lo scambio di un titolo a tasso fisso contro un titolo a tasso variabile. La posizione di Microsoft Europa è lunga su un titolo a tasso variabile ed è corta su un titolo a tasso fisso. La Bank of England è lunga su un titolo a tasso fisso ed è corta su un titolo a tasso variabile. Questa caratterizzazione dei pagamenti previsti dallo swap aiuta a spiegare perché il tasso variabile dello swap venga fissato sei mesi prima del pagamento. Gli interessi pagati sui titoli a tasso variabile sono in genere fissati all'inizio del periodo al quale si riferiscono e vengono pagati alla fine dello stesso. Gli interest rate swaps più comuni vengono pertanto costruiti nel modo illustrato dall'esempio. Chiaramente gli swaps sui tassi d'interesse sono strumenti finanziari che consentono ad uno dei due contraenti di tutelarsi dall'incertezza sulla variabilità del tasso di cambio e all'altro di speculare proprio su questa variabilità.

Capitolo 2

Single-Period Investment Models

By *single-period investment* we mean any investment characterized by a cash flow stream which occurs only at two dates: an *initial* or *present* date and a *terminal* or *future* date. The difference between the terminal and the initial date of an investment is called the *maturity* of the investment.

For simplicty, write $t = 0$ [resp. $t = T$] for the initial [resp. terminal] date of a single-period investment and write X_0 [resp. X_T] for the *initial* or *present* [resp. *terminal* or *future*] cash flow of the investment. In this case the maturity is just the terminal date of the investment. The amount of the initial cash flow, also referred to as *principal* in a single-period investment perspective, is observed at the present date. Hence, with reference to the present date, the initial cash flow is usually considered as certain and may be represented by a real number, that is a Dirac random variable, $X_0\tilde{}\,Dir\,(X_0)$, concentrated on the amount of the cash flow. On the contrary, the value of the terminal cash flow, also termed *payoff* in a single-period investment perspective, is observed at the future date. Therefore, at the present date, the terminal cash flow should be considered as uncertain and should be represented by a real random variable X_T, defined on some probability space Ω. Depending on whether the state space $X_T\,(\Omega)$ is countable or continuous, we will speak of *countable* or *continuous space state model.* However, in some cases, it may be convenient to consider also the payoff of an investment as certain. For instance, this is the case of the payoff generated by investments in deposits of several US banks or investments in the US Treasury Bills. In fact, in these cases the uncertainty in the payoff of the investment is only due to a possible default of the depositary bank or the USA. However, the Federal Deposit Insurance Corporation provides deposit insurance that guarantees the deposit of member banks for at least $\$250,000$ per depositor, per bank and the eventuality of defaul of the USA is considered to be rather unlikely.

Esempio 11 *Website cost and banners*

From now on, let us assume that the principal X_0 of the single period investment considered is actually certain and the payoff X_T at maturity T is a real random variable.

Definizione 12 *In a forward-looking perspective, we call the* return *or* interest *of the investment at maturity T the difference betweeen the payoff and the principal, that is the random variable*

$$R_T \overset{def}{=} X_T - X_0. \tag{2.1}$$

An interest may be either positive or negative. Accordingly, when $X_0 > 0$, it is called profit *or* loss.

Definizione 13 *Assume that $X_0 \neq 0$. We call the* rate of return *or* rate of interest *of the investment at maturity T the ratio betweeen the interest and the principal, that is the random variable*

$$r_T \overset{def}{=} \frac{R_T}{X_0}. \tag{2.2}$$

Note that the term *interest* [resp. *rate of interest*] rather than *return* [resp. *rate of return*] is more commonly used with reference to investment in loans such as bank deposit, bonds or even private loans.

Definizione 14 *Assume that $X_0 \neq 0$. We call the* accumulation factor *of the investment at maturity T the ratio betweeen the payoff and the principal, that is the random variable*

$$a_T \stackrel{def}{=} \frac{X_T}{X_0}. \tag{2.3}$$

Osservazione 15 *Assume that $X_0 \neq 0$. We clearly have*

$$X_T = X_0 + R_T, \qquad r_T = \frac{X_T - X_0}{X_0}, \qquad R_T = r_T X_0, \qquad X_T = a_T X_0. \tag{2.4}$$

In addition,

$$a_T = 1 + r_T. \tag{2.5}$$

Proof. To prove (2.5), observe that, combinining (2.3), (2.1), (2.2), and simplifying the term X_0, we obtain

$$a_T = \frac{X_T}{X_0} = \frac{X_0 + R_T}{X_0} = \frac{X_0 + r_T X_0}{X_0} = 1 + r_T,$$

as claimed. □

Definizione 16 *In a backward-looking perspective, we call the* discount *generated by an investment at maturity T again the difference betweeen the payoff and the principal. Despite from a mathematical point of view the discount cannot be distinguished by the interest, from an economic or financial point of view distinguishing between the discount and the interest is rather useful. Therefore, for the discount is commonly used a different notation. We also follow this practice and denote the discount at the terminal date T by S_T. As a consequence,*

$$S_T \stackrel{def}{=} X_T - X_0. \tag{2.6}$$

Definizione 17 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We call the* rate of discount *of an investment at maturity T the ratio betweeen the discount and the payoff, that is the random variable*

$$s_T \stackrel{def}{=} \frac{S_T}{X_T}. \tag{2.7}$$

Definizione 18 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We call the* discount factor *of the investment at maturity T the ratio betweeen the principal and the payoff, that is the random variable*

$$d_T \stackrel{def}{=} \frac{X_0}{X_T}. \tag{2.8}$$

Osservazione 19 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We clearly have*

$$X_0 = X_T - S_T, \qquad s_T = \frac{X_T - X_0}{X_T}, \qquad S_T = s_T X_T, \qquad X_0 = d_T X_T. \tag{2.9}$$

In addition,

$$d_T = 1 - s_T. \tag{2.10}$$

Proof. To prove (2.10), observe that

$$d_T = \frac{X_0}{X_T} = \frac{X_T - S_T}{X_T} = \frac{X_T - s_T X_T}{X_T} = 1 - s_T,$$

as claimed. □

Osservazione 20 *Assume that* $X_0 \neq 0$ *and* $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$*. We have*

$$a_T d_T = 1. \tag{2.11}$$

Equivalently,

$$(1 + r_T)(1 - s_T) = 1. \tag{2.12}$$

As a consequence

$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}. \tag{2.13}$$

Proof. To prove Equation (2.11), we just apply Equations (2.3) and (2.8). Thus,

$$a_T d_T = \frac{X_T}{X_0} \frac{X_0}{X_T} = 1.$$

Now, combining the latter with (2.10) and (2.10) we obtain Equation (2.12). In the end, Equation (2.13) clearly follows from (2.12). $\square$

$$R_T = X_T - X_0, \qquad r_T = \frac{R_T}{X_0} = \frac{X_T - X_0}{X_0}, \qquad a_T = \frac{X_T}{X_0} = 1 + r_T$$
$$S_T = X_T - X_0, \qquad s_T = \frac{S_T}{X_T} = \frac{X_T - X_0}{X_T}, \qquad d_T = \frac{X_0}{X_T} = 1 - s_T$$

$$R_T = S_T, \qquad a_T d_T = 1, \qquad (1 + r_T)(1 + s_T) = 1,$$
$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}$$

2.1 Cox-Ross-Rubinstein Toy Model (Single-Period Multiplicative Binomial Model)

Consideriamo un mercato finanziario uniperiodale dove al tempo $t = 0$ sia possibile investire in un titolo non rischioso, cui ci riferiremo come *bond* e denoteremo con la lettera B, in un titolo rischioso, cui ci riferiremo come *stock* e denoteremo con S, e in titoli derivati di sottostante lo stock, di volta in volta variamente nominati e denotati. A titolo d'esempio possiamo pensare che B ed S corrispondano rispettivamente a un'obbligazione e a un'azione e i derivati a opzioni call o put sull'azione. Assumiamo anche la possibilità di investire in portafogli composti in varie proporzioni mediante il bond, lo stock e i derivati. Al tempo $t = T$, raggiunta la maturità (*maturity*), l'investimento effettuato al tempo $t = 0$ viene liquidato, l'eventuale ricchezza prodotta viene consumata o l'eventuale debito contratto va ripagato. Assumiamo inoltre la validità di alcune ipotesi di natura finanziaria che nella realtà sono solo approssimativamente verificate, senza peraltro grave nocumento alle risultanze del modello. Nello specifico assumiamo che:

1. i tassi di rendimento relativi alle operazioni di prestito e deposito siano gli stessi;
2. gli investimenti possano essere effettuati senza alcuna limitazione quantitativa, in altri termini sia possibile operare su una qualunque frazione di bond, stock e derivati rispetto all'unità di moneta fissata;
3. i costi di transazione siano nulli;
4. le vendite allo scoperto sul bond, sullo stock e sui derivati siano totalmente libere.

Cominciando a focalizzare l'attenzione sul bond e sullo stock, denotiamo con B_0 ed S_0 [resp. B_T ed S_T] i valori di mercato delle unità di bond e di stock al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$] e denotiamo con r_f il tasso di rendimento dell'investimento sul bond alla maturità. In questo caso il valore B_T dell'investimento al tempo $t = T$ sarà semplicemente dato da

$$B_T = (1 + r_f)B_0. \tag{2.14}$$

Di contro il valore S_T prodotto dall'investimento nello stock al tempo $t = T$ è da ritenersi aleatorio, tratteremo quindi S_T quale variabile aleatoria. Come vedremo, la peculiarià del modello "giocattolo" di Cox, Ross e Rubinstein è proprio nella semplice, ma non semplicistica, modellizzazione della variabile aleatoria S_T.

Proposizione 21 *Stante la (2.14), una somma di denaro di valore M_0 al tempo $t = 0$ ha valore*

$$M_T = (1 + r_f)M_0 \tag{2.15}$$

al tempo $t = T$. Viceversa, una somma di denaro di valore M_T al tempo $t = T$ ha valore

$$M_0 = \frac{M_T}{1 + r_f} \tag{2.16}$$

al tempo $t = 0$.

Proof. *La disponibilità di denaro M_0 al tempo $t = 0$ consente l'acquisto di*

$$x = \frac{M_0}{B_0}$$

unità di bond con valore di mercato B_0. La liquidazione di questo investimento alla maturità $t = T$ produce un ammontare M_T secondo la formula

$$M_T = xB_T = \frac{M_0}{B_0}(1 + r_f)B_0 = M_0(1 + r_f).$$

Viceversa, volendo produrre un ammontare M_T al tempo $t = T$, è necessario liquidare

$$x = \frac{M_T}{B_T}$$

unità bond di valore di mercato B_T. D'altra parte l'acquisto di tali unità di bond al tempo $t = 0$ richiede l'investimento di una somma di denaro M_0 pari a

$$M_0 = xB_0 = \frac{M_T}{B_T}B_0 = \frac{M_T}{B_0(1 + r_f)}B_0 = \frac{M_T}{1 + r_f}.$$

$\square$

Da notare che in conseguenza della Proposizione 21, gli acquisti e le vendite allo scoperto del bond diventano del tutto equivalenti a depositi e scoperti su un conto bancario.

Supponiamo adesso che tutta l'incertezza circa il futuro dell'investimento in stock abbia semplicemente carattere bivalente; cioè che in relazione al take investimento si possano realizzare solamente un esito positivo o un esito negativo. In questo caso l'incertezza è rappresentabile da una variabile aleatoria bernoulliana, che denotiamo con β, definita su un opportuno spazio di probabilità Ω, suscettibile di prendere al tempo $t = T$ i due soli valori u (*up*) e d (*down*), con $u > d$, secondoché per l'investimento in stock si realizzi l'esito positivo o quello negativo. In simboli,

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & \mathbf{P}(\beta = u) \equiv p, \\ d, & \mathbf{P}(\beta = d) \equiv q, \end{cases}$$

essendo $\mathbf{P}(\beta = u)$ [risp. $\mathbf{P}(\beta = d)$] la probabilità oggettiva che si realizzi il valore u [risp. d] di β ed essendo $q = 1 - p$. Con questa modellizzazione dell'incertezza una delle scelte naturali per la rappresentazione del valore S_T dell'investimento rischioso al tempo T è data da

$$S_T \stackrel{\text{def}}{=} \beta S_0. \tag{2.17}$$

Questa scelta conduce al cosiddetto *modello uniperiodale binomiale moltiplicativo* di Cox, Ross e Rubinstein, noto anche come *CRR Toy Model*, che, come vedremo più avanti, si presta anche a un semplice e ricco sviluppo multiperiodale, persino confrontabile con il celebre modello di Black & Scholes. Come immediata conseguenza della (2.17) abbiamo

$$S_T = \begin{cases} S_T^+ \equiv uS_0, & \mathbf{P}(S_T = S^+) \equiv p, \\ S_T^- \equiv dS_0, & \mathbf{P}(S_T = S^-) \equiv q, \end{cases} .$$

Proposizione 22 *L'attesa e la varianza di S_T sono rispettivamente date da*

$$\mathbf{E}[S_T] = (up + dq)S_0, \tag{2.18}$$

e

$$\mathbf{D}^2[S_T] = (u-d)^2 pq S_0^2, \tag{2.19}$$

essendo $\mathbf{E}[\cdot]$ *e* $\mathbf{D}^2[\cdot]$ *gli operatori di* speranza *e* varianza *relativi alla distribuzione di probabilità* (p, q).
Proof. *Abbiamo infatti*

$$\mathbf{E}[S_T] = S_T^+ p + S_T^- q = uS_0 p + dS_0 q = (up + dq)S_0$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2[S_T] &= \mathbf{E}[S_T^2] - \mathbf{E}[S_T]^2 \\
&= u^2 S_0^2 p + d^2 S_0^2 q - (up + dq)^2 S_0^2 \\
&= (u^2 p(1-p) + d^2 q(1-q) - 2udpq)S_0^2 \\
&= (u^2 + d^2 - 2ud)pq S_0^2 \\
&= (u-d)^2 pq S_0^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Ricordiamo che la *rischiosità* di S_T è strettamente legata alla sua varianza. Minore la varianza, minore la rischiosità. La relazione tra rischio e varianza viene colta dalla celebre disuguaglianza di Tchebychev, valida per ogni variabile aleatoria X dotata di momento del secondo ordine $\mathbf{E}[X^2]$ finito. Per una tale variabile aleatoria, indipendentemente dalla sua distribuzione, risulta

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}^2[X]}{\varepsilon^2}, \tag{2.20}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Stante la (2.20), minore è $\mathbf{D}^2[X]$ minore è la probabilità di scostamento di X dal suo valore atteso $\mathbf{E}[X]$. In altri termini la variabile aleatoria X è meno rischiosa. Nel caso limite $\mathbf{D}^2[X] = 0$ la probabilità che X prenda valori che si scostano dal suo valore atteso per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ è nulla: la variabile aleatoria assume con certezza il suo valore atteso e non presenta alcun rischio. Si tratta di una cosiddetta variable aleatoria di Dirac concentrata in $\mathbf{E}[X]$. La conoscenza della specifica distribuzione di X conduce ovviamente a stime più precise della probabilità di un suo scostamento dal valore medio. L'importanza della disuguaglianza di Tchebychev è proprio nel non riferirsi alla specifica distribuzione di X che, in questo senso, la connota come universale.

Definizione 23 *Chiamamo* tasso di rendimento *relativo all'investimento in stock al tempo T il rapporto*

$$r_T \overset{def}{=} \frac{S_T - S_0}{S_0}. \tag{2.21}$$

Osservazione 24 *Il tasso di rendimento relativo all'investimento in stock è esso stesso una variabile aleatoria. Precisamente,*

$$r_T = \begin{cases} r_T^+ \equiv u - 1, & \mathbf{P}(r_T = r_T^+) \equiv p, \\ r_T^- \equiv d - 1, & \mathbf{P}(r_T = r_T^-) \equiv q, \end{cases}. \tag{2.22}$$

Chiaramente,

$$u > d \Leftrightarrow r_T^+ > r_T^-.$$

Definizione 25 *Chiamamo* tasso di rendimento medio *o* atteso *(*mean *or* expected rate of return*) relativo all'investimento in stock al tempo T il valor medio $\bar{r}_T$ di r_T.*

Osservazione 26 *Abbiamo*

$$\bar{r}_T \equiv \mathbf{E}\left[r_T\right] = up + dq - 1. \tag{2.23}$$

Proof. *Infatti*

$$\mathbf{E}\left[r_T\right] = r_T^+ p + r_T^- q = (u-1)\,p + (d-1)\,q = up + dq - (p+q) = up + dq - 1.$$

□

Osservazione 27 *Abbiamo*

$$S_T = (1 + r_T)\,S_0 \tag{2.24}$$

e

$$S_0 = \frac{1}{1+\bar{r}_T}\mathbf{E}[S_T]. \tag{2.25}$$

Proof. *L'Equazione (2.24) è diretta conseguenza della (2.21) e l'Equazione (2.25) si ottiene immediatamente applicando l'operatore speranza* $\mathbf{E}\left[\cdot\right]$ *alla (2.24).* □

Le Equazioni (2.24) e (2.25) andrebbero rispettivamente comparate con l'Equazione (2.14) per l'evoluzione del titolo non rischioso e con la riscrittura della stessa (2.14) in forma backward come

$$B_0 = \frac{1}{1+r_f} B_T. \tag{2.26}$$

Definizione 28 *Nell'ambito del CCR Toy Model, chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizione rischiosa *nello stock, più sinteticamente* BS-portafoglio*, una coppia* $\pi \equiv (x, y)$ *la cui componente* x *[risp.* y*] sia la quantità di bond [risp. di stock] in cui investiamo al tempo* $t = 0$*. Qualora la posizione non rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* depositiamo *[risp.* prendiamo a prestito*] l'ammontare* $|x|\,B_0$*. Qualora la posizione rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* acquistiamo *[risp.* vendiamo allo scoperto*] lo stock per un ammontare* $|y|\,S_0$*.*

Definizione 29 *Chiamiamo* valore *al tempo* $t = 0$ *[risp. al tempo* $t = T$*] del BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *l'ammontare*

$$W_0 \equiv xB_0 + yS_0, \qquad [\text{risp. } W_T \equiv xB_T + yS_T].$$

Da notare che mentre l'ammontare W_0 è un numero reale, ovvero una variabile aleatoria di Dirac concentrata in W_0, l'ammontare W_T è una variabile aleatoria bernoulliana, dal momento che S_T lo è. Infatti,

$$W_T = \begin{cases} W_T^+ \equiv (1+r_f)xB_0 + yS_T^+, & \mathbf{P}(W_T = W^+) \equiv p, \\ W_T^- \equiv (1+r_f)xB_0 + yS_T^-, & \mathbf{P}(W_T = W^-) \equiv q, \end{cases}.$$

Definizione 30 *Diciamo che un BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *è un* arbitraggio *se*

1. $W_0 = 0$*;*
2. $\mathbf{P}\left(W_T \geqslant 0\right) = 1$ *e* $\mathbf{P}\left(W_T > 0\right) > 0$.

Un BS-portafoglio é un arbitraggio se a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza un payoff non negativo e con probabilità non nulla un payoff strettamente positivo. Ciò indipendentemente dall'esito dell'investimento nella sua componente rischiosa.

Osservazione 31 *Perchè un BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *sia d'arbitraggio deve soddisfare la condizione*

$$xB_0 = -yS_0. \tag{2.27}$$

Alla luce della Osservazione 31 un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi \equiv (x, y)$ può essere costituito solo in due modi: prendendo a prestito l'ammontare $|x| B_0$ $(x < 0)$ e usandolo interamente per acquistare lo stock $(y > 0)$ oppure vendendo lo stock allo scoperto per un ammontare $|y| S_0$ $(y < 0)$ e investendo interamente questo ammontare nell'acquisto del titolo non rischioso $(x > 0)$.

Proposizione 32 *Nell'ambito del CRR Toy Model l'assenza di un BS-portafoglio d'arbitraggio comporta che necessariamente si abbia*

$$r_T^+ > r_f > r_T^-. \tag{2.28}$$

Equivalentemente,

$$u > 1 + r_f > d. \tag{2.29}$$

Proof. *Infatti, se fosse*

$$r_T^+ > r_T^- \geqslant r_f, \tag{2.30}$$

potremmo costituire un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ prendendo a prestito un ammontare $|x| B_0$ (vendendo allo scoperto $|x|$ unità di bond) e con questo ammontare acquistare $y = |x| B_0/S_0$ unità di stock. Al tempo $t = 0$ il valore di tale portafoglio sarebbe

$$W_0 = xB_0 + yS_0 = -|x| B_0 + \frac{|x| B_0}{S_0} S_0 = 0.$$

D'altra parte, con riferimento all'investimento in stock, a termine del periodo d'investimento, nel peggiore dei casi si realizzerebbe l'ammontare

$$yS_T^- = ydS_0 = \frac{|x| B_0}{S_0} dS_0 = |x| dB_0 = |x| (r_T^- + 1)B_0.$$

Pertanto, stante l'ipotesi (2.30), si potrebbe ripianare il debito, nel frattempo incrementatosi a $|x| (r_f + 1)B_0$ a causa degli interessi maturati dovuti, senza perdere alcunché. Se però a termine del periodo d'investimento si verificasse il migliore dei casi, si realizzerebbe un ammontare

$$yS_T^+ = yuS_0 = \frac{|x| B_0}{S_0} uS_0 = |x| uB_0 = |x| (r_T^+ + 1)B_0.$$

Quindi, sempre nell'ipotesi (2.30), si potrebbe ripianare il debito di $|x| (r+1)B_0$ e realizzare un guadagno pari a

$$|x| (r_T^+ + 1)B_0 - |x| (r_f + 1)B_0 = |x| (r_T^+ - r_f)B_0 > 0.$$

Avremmo quindi $W_T \geqslant 0$, con $\mathbf{P}(W_T > 0) = p > 0$. Se altresì fosse

$$r_f \geqslant r_T^+ > r_T^-, \tag{2.31}$$

allora potremmo costituire un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ vendendo allo scoperto un'ammontare $|y| S_0$ di stock (vendendo allo scoperto $|y|$ unità di stock) e con questo ammontare acquistare $x = |y| S_0/B_0$ unità di bond. Al tempo $t = 0$ il valore di tale portafoglio sarebbe

$$W_0 = xB_0 + yS_0 = |y| \frac{S_0}{B_0} B_0 - |y| S_0 = 0.$$

A termine del periodo d'investimento, ci si ritroverebbe in ogni caso con un ammontare pari a

$$x(1 + r_f)B_0 = \frac{|y| S_0}{B_0} B_0(1 + r_f) = |y| (1 + r_f)S_0,$$

dovuto al maturare degli interessi prodotti dall'investimento in bond. D'altra parte, rispetto alla vendita allo scoperto dello stock, il peggiore dei casi per l'investitore è che lo stock realizzi il valore di mercato S_T^+. In questo caso per ripianare la vendita allo scoperto sarebbe necessario un ammontare pari a

$$|y| S_T^+ = |y| uS_0 = |y| (r_T^+ + 1)S_0$$

che, stante l'ipotesi (2.31), è disponibile grazie all'investimento in bond. Se poi lo stock realizzasse il valore di mercato S_T^-, per ripianare lo scoperto sarebbe sufficiente un ammontare pari a

$$|y|\, S_T^- = |y|\, uS_0 = |y|\, (r_T^- + 1)S_0,$$

che, sempre nell'ipotesi (2.31), l'investitore avrebbe disponibile grazie all'investimento in bond e che in più gli consentirebbe un guadagno pari a

$$|y|\,(1+r)S_0 - |y|\,(r_T^- + 1)S_0 = |y|\,\left(r_f - r_T^-\right) S_0 > 0$$

Avremmo quindi $W_T \geqslant 0$, con $\mathbf{P}\,(W_T > 0) = q > 0$. In definitiva, in entrambe le ipotesi (2.30) e (2.31), sarebbe possibile costituire un un BS-portafoglio d'arbitraggio. Non resta che concludere che in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio deve valere la (2.28). □

Siano $\theta \equiv (u, v)$ e $\pi \equiv (x, y)$ BS-portafogli di valore $uB_0 + vS_0$ e $xB_0 + yS_0$ [resp. $uB_T + vS_T$ e $xB_T + yS_T$] al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$].

Proposizione 33 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, la condizione*

$$uB_T + vS_T = xB_T + yS_T \tag{2.32}$$

comporta necessariamente che

$$u = x \quad \text{e} \quad v = y. \tag{2.33}$$

In particolare,

$$uB_0 + vS_0 = xB_0 + yS_0 \tag{2.34}$$

Proof. L'Equazione (2.32) comporta che si abbia

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T. \tag{2.35}$$

L'Equazione (2.35), a sua volta, implica

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T^+ \tag{2.36}$$

e

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T^- \tag{2.37}$$

Dalle (2.36) e (2.37) si ricava

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, uS_0$$

e

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, dS_0.$$

Queste ultime combinate tra loro comportano

$$(y - v)\, uS_0 = (y - v)\, dS_0. \tag{2.38}$$

D'altra parte in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio si ha $u > d$ (cfr. Equazione (2.29)). Pertanto, dalla (2.38), otteniamo

$$y = v. \tag{2.39}$$

Stante la (2.39), l'Equazione (2.36) implica che

$$(u - x)\, B_T = (u - x)\,(1 + r)\, B_0 = 0,$$

da cui

$$x = u. \tag{2.40}$$

Le Equazioni (2.39) e (2.40) costituiscono la (2.33). □

Definizione 34 *Chiamiamo* probabilità neutrale al rischio *(*risk neutral probability*) una probabilità* $\tilde{\mathbf{P}}$ *su* Ω *avente distribuzione* $(\tilde{p},\tilde{q})$*, con*

$$\tilde{p}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S_T^+),\quad \tilde{q}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S_T^-), \tag{2.41}$$

per la quale risulti

$$S_0=\frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}[S_T], \tag{2.42}$$

essendo $\tilde{\mathbf{E}}[\cdot]$ *l'operatore speranza rispetto a* $\tilde{\mathbf{P}}$.

L'Equazione (2.42) andrebbe comparata con le Equazioni (2.25) e (2.26). Si nota allora che una probabilità neutrale al rischio consente di ottenere il prezzo del titolo rischioso al tempo $t=0$, scontando il valor medio del prezzo al tempo $t=T$ mediante lo stesso tasso di rendimento del titolo non rischioso. In altri termini, rispetto a una probabilità neutrale al rischio il titolo rischioso ha rendimento medio pari a quello del titolo non rischioso.

Proposizione 35 *Se esiste una probabilità neutrale al rischio essa è unica.*
Proof. *Spponiamo che esistano due probabilità* $\tilde{\mathbf{P}}$ *e* $\mathring{\mathbf{P}}$ *su* Ω *aventi distribuzioni* $(\tilde{p},\tilde{q})$ *e* $(\mathring{p},\mathring{q})$*, dove*

$$\tilde{p}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S_T^+),\quad \tilde{q}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S_T^-)$$

e

$$\mathring{p}\equiv\mathring{\mathbf{P}}(S_T=S_T^+),\quad \mathring{q}\equiv\mathring{\mathbf{P}}(S_T=S_T^-),$$

per entrambe le quali valga la (2.42), si dovrebbe allora avere

$$\tilde{\mathbf{E}}[S_T]=\mathring{\mathbf{E}}[S_T].$$

Ossia,

$$S_T^+\tilde{p}+S_T^-\tilde{q}=S_T^+\mathring{p}+S_T^-\mathring{q}.$$

Quest'ultima, tenuto conto delle relazioni $\tilde{q}=1-\tilde{p}$, $\mathring{q}=1-\mathring{p}$*, comporterebbe*

$$\left(S_T^+-S_T^-\right)\tilde{p}+S_T^-=\left(S_T^+-S_T^-\right)\mathring{p}+S_T^-.$$

Quindi

$$\tilde{p}=\mathring{p}.$$

Da quest'ultima segue immediatamente l'asserto. □

Proposizione 36 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *di distribuzione* $(\tilde{p},\tilde{q})$ *caratterizzata da*

$$\tilde{p}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S^+)\overset{def}{=}\frac{1+r_f-d}{u-d},\quad \tilde{q}\equiv\tilde{\mathbf{P}}(S_T=S^-)\overset{def}{=}\frac{u-(1+r_f)}{u-d}. \tag{2.43}$$

Proof. *In assenza di portafogli d'arbitraggio, la validità della (2.29) garantisce che la coppia* $(\tilde{p},\tilde{q})$ *data dalla (2.43) soddisfa le condizioni*

$$\tilde{p},\tilde{q}\geqslant 0\quad e\quad \tilde{q}=1-\tilde{p}.$$

Pertanto $(\tilde{p},\tilde{q})$ *è effettivamente una distribuzione di probabilità. Si ha inoltre*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}[S_T]&=S_T^+\tilde{p}+S_T^-\tilde{q}\\&=(u\tilde{p}+d\tilde{q})S_0\\&=\left(u\frac{(1+r_f)-d}{u-d}+d\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\right)S_0\\&=\frac{(u-d)(1+r_f)}{u-d}S_0\\&=(1+r_f)S_0,\end{aligned}$$

cioè la (2.42). □

Proposizione 37 *Se esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *di distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$, *dove* $\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^+)$ *e* $\tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^-)$, *allora non esistono di BS-portafogli d'arbitraggio.*

Proof. *Stanti le Proposizioni 36 e 35 la distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *della probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *è necessariamente data da*

$$\tilde{p} = \frac{1 + r_f - d}{u - d} \quad e \quad \tilde{q} = \frac{u - (1 + r_f)}{u - d}.$$

D'altra parte, se esistesse anche un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi \equiv (x, y)$ *dovrebbe risultare*

$$xB_0 + yS_0 = 0 \quad e \quad xB_T + yS_T \geqslant 0.$$

La prima di queste due condizioni comporterebbe

$$xB_0 = -yS_0, \tag{2.44}$$

la seconda per l'aleatorietà di S_T *si tradurrebbe nel sistema di disuguaglianze*

$$xB_T + yS_T^+ = x(1 + r_f)B_0 + yuS_0 \geqslant 0, \tag{2.45}$$

$$xB_T + yS_T^- = x(1 + r_f)B_0 + ydS_0 \geqslant 0. \tag{2.46}$$

Ma allora, sostituendo la (2.44) nelle (2.45) e (2.46), otterremmo

$$-y(1 + r)S_0 + yuS_0 \geqslant 0$$
$$-y(1 + r)S_0 + ydS_0 \geqslant 0$$

da cui

$$u \geqslant 1 + r_f \quad e \quad d \geqslant 1 + r_f$$

che impedirebbero a $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *di essere un'effettiva distribuzione di probabilità.* □

Alla luce delle Proposizioni 35-37 possiamo enunciare il seguente fondamentale risultato

Teorema 38 (Assenza d'Arbitraggio ed Esistenza di una Probabilità Neutrale al Rischio.) *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio è equivalente all'esistenza di un'unica probabilità neutrale al rischio.*

Consideriamo adesso la possibilità d'investire in derivati di sottostante lo stock. In particolare, opzioni di acquisto e vendita e portafogli variamente composti con il bond, lo stock e i suoi derivati. In un contesto monoperiodale, non c'è chiaramente differenza tra ozioni europee e americane. Più in generale, ogni derivato è di tipo europeo in quanto il modello monoperiodale in sè prevede che ogni investimento arrivi a scadenza a termine del periodo senza che ci siano possibilità intermedie d'intervento. Ricordiamo che

Definizione 39 *Si definisce* opzione europea d'acquisto *(*european call option*) [risp.* opzione europea di vendita *(*european put option*)] un contratto di compravendita a termine tra due contraenti, con il quale l'acquirente dell'opzione,* titolare *(*holder*), dietro la corresponsione di un premio (*premium*) al venditore,* garante *(*writer*), acquisisce il diritto, senza obbligo, di acquistare dal garante[resp. vendere al garante] un attivo finanziario rischioso, per una quantità determinata, a una scadenza (*exercise date *or* maturity*) e a un prezzo d'esercizio (*exercise *or* strike price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto.*

Nel caso di un'opzione europea d'acquisto, indicati con K il suo prezzo d'esercizio e con S_T il prezzo dell'attivo rischioso alla maturità T, il titolare sarà interessato ad esercitare il diritto d'acquisto solo se risulterà

$$S_T - K > 0.$$

Infatti, solo in questo caso, acquistando dal garante l'attivo al prezzo d'esercizio K e riscuotendo immediatamente sul mercato il valore S_T, egli potrà realizzare un utile. Al contrario, nel caso di un'opzione europea di vendita, il titolare sarà interessato al suo esercizio solo se si avrà

$$K - S_T > 0,$$

dal momento che stavolta potrà realizzare un utile acquistando sul mercato lo stock al prezzo S_T e rivendendolo immediatamente al garante al prezzo d'esercizio K. Pertanto, i payoff di un'opzione europea d'acquisto o di vendita sono rispettivamente

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} \equiv (S_T - K)^+ \quad \text{e} \quad P_T = \max\{K - S_T, 0\} \equiv (K - S_T)^+.$$

Considerato il differimento temporale del valore del denaro, il detentore di una opzione call [resp. put] avrà quindi un *rendimento netto (net pay off)* alla scadenza pari a

$$C_T - (1 + r_f)\, C_0 \qquad [\text{resp. } P_T - (1 + r_f)\, P_0].$$

Da notare che essendo S_T una variabile aleatoria anche i payoff C_T e P_T lo sono. Pertanto, alla scadenza gli stessi payoff dipenderanno dall'occorrenza dell'esito aleatorio $\omega \in \Omega$ che determina la realizzazione del valore $S_T(\omega)$. In particolare, nell'ambito del CRR Toy Model un'opzione europea d'acquisto sul titolo rischioso, di premio C_0, prezzo d'esercizio K e maturità T ha valore alla maturità dato da

$$C_T(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_T(\omega) - K, 0\} = \begin{cases} \max\{S_T^+ - K, 0\} \equiv C_T^+, & \mathbf{P}\{C_T = C_T^+\} = p, \\ \max\{S_T^- - K, 0\} \equiv C_T^-, & \mathbf{P}\{C_T = C_T^-\} = q. \end{cases} \tag{2.47}$$

Un'opzione europea di vendita sul titolo rischioso, di premio P_0, prezzo d'esercizio K e maturità T ha altresì valore alla maturità dato da

$$P_T(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K - S_T(\omega), 0\} = \begin{cases} \max\{K - S_T^+, 0\} \equiv P_T^+, & \mathbf{P}\{P_T = P_T^+\} = p, \\ \max\{K - S_T^-, 0\} \equiv P_T^-, & \mathbf{P}\{P_T = P_T^-\} = q. \end{cases} \tag{2.48}$$

Ricordiamo che $S_T^+ \equiv uS_0$ e $S_T^- \equiv dS_0$.

Proposizione 40 *In riferimento a una call C e una put P su uno stesso sottostante rischioso S, con stesso prezzo d'esercizio K e stesso tempo d'esercizio T risulta*

$$C_T - P_T = S_T - K, \tag{2.49}$$

dove C_T [resp. P_T] è il payoff della call [resp. put] al tempo T ed S_T è il prezzo dello stock a T.
Proof. *Ricordando che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\max\{x, 0\} = \frac{|x| + x}{2},$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} C_T - P_T &= \max\{S_T - K, 0\} - \max\{K - S_T, 0\} \\ &= \frac{|S_T - K| + S_T - K}{2} - \frac{|K - S_T| + K - S_T}{2} \\ &= \frac{|S_T - K| + S_T - K - |K - S_T| - (K - S_T)}{2} \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

□

Da notare che l'Equazione (2.49) dipende solo dalla struttura dei payoff delle opzioni call e put di sottostante un comune titolo rischioso con stesso prezzo d'esercizio e dalla circostanza che tali opzioni siano esercitate allo stesso tempo. Si tratta pertanto di una relazione indipendente dal particolare modello di mercato considerato e anche dalla specifica che si tratti di opzioni europee o americane.

Definizione 41 *Chiamiamo* portafoglio replicante *(*replicating portfolio*) dell'opzione call un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ tale che al tempo $t = T$ si abbia*

$$xB_T + yS_T = C_T. \tag{2.50}$$

Proposizione 42 *Esiste un unico BS-portafoglio replicante $\pi \equiv (x, y)$ dato da*

$$x = \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r)B_0(u-d)}, \quad y = \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}. \tag{2.51}$$

Proof. Sia $\pi \equiv (x, y)$ un ipotetico BS-portafoglio replicante. Dalla (2.50), deve allora aversi

$$x(1+r_f)B_0 + yuS_0 = C_T^+, \quad \text{e} \quad x(1+r_f)B_0 + ydS_0 = C_T^-.$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione (x, y) data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_T^+ & uS_0 \\ C_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)},$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & C_T^+ \\ (1+r_f)B_0 & C_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}.$$

Da qui l'asserto. □

Definizione 43 *Chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *(*no arbitrage price*) dell'opzione call il valore del BS-portafoglio replicante $\pi \equiv (x, y)$ al tempo $t = 0$.*

$$C_0 = xB_0 + yS_0. \tag{2.52}$$

Proposizione 44 *Risulta*

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}C_T^- + \frac{(1+r_f)-d}{u-d}C_T^+\right) = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_T]. \tag{2.53}$$

Proof. *Infatti, per la (2.51) e la (2.43), risulta*

$$
\begin{aligned}
C_0 &= xB_0 + yS_0 \\
&= \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)}B_0 + \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}S_0 \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{uC_T^- - dC_T^+}{u-d} + \frac{(1+r_f)(C_T^+ - C_T^-)}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{(u-(1+r_f))C_T^- + ((1+r_f)-d)C_T^+}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}C_T^- + \frac{(1+r_f)-d}{u-d}C_T^+\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\tilde{q}C_T^- + \tilde{p}C_T^+\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}[C_T].
\end{aligned}
$$

□

Il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call europea risponde alla seguente necessità: immaginiamo un operatore finanziario che al tempo $t = 0$ venda a un acquirente un'opzione call europea sul titolo rischioso con prezzo d'esercizio K e maturità al tempo $t = T$. L'agente realizza l'incasso C_0 ma si espone al rischio d'esercizio dell'opzione al tempo T per un ammontare pari a $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$, potenzialmente illimitato. Per eliminare il rischio dovuto a tale esposizione, sfruttando la sola disponibilità C_0 prodotta dalla vendita dell'opzione, l'operatore finanziario costituisce un portafoglio depositando x unità di conto nel bond e acquistando y azioni dello stock al prezzo S_0 (con l'abituale convenzione che valori negativi di x ed y significhino vendite allo scoperto). A fine del periodo di contrattazione, con la sola ricchezza generata dal proprio portafoglio, l'operatore finanziario deve essere in grado di *coprire* (*hedge*[1]) il valore dell'opzione che deve rifondere al compratore. In definitiva, si devono realizzare sia la seguente condizione di autofinanziamento del portafoglio

$$xB_0 + yS_0 = C_0 \tag{2.54}$$

sia la condizione di copertura dal rischio d'esercizio dell'opzione

$$xB_T + yS_T = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{2.55}$$

La condizione di copertura (2.55) consente quindi di determinare x ed y, mentre la condizione di autofinanziamento (2.54) permette di ricavare il prezzo C_0 che l'operatore finanziario deve richiedere per la vendita dell'opzione.

Corollary 45 *Si ha*

$$
C_0 = \begin{cases}
S_0 - \frac{1}{1+r_f}K, & \text{se } K < dS_0, \\
\frac{(1+r_f)-d}{(u-d)(1+r_f)}\left(uS_0 - K\right), & \text{se } dS_0 \leqslant K < uS_0, \\
0, & \text{se } K \geqslant uS_0.
\end{cases} \tag{2.56}
$$

Proof. *Stante l'Equazione (2.47) possiamo scrivere*

$$C_T^- = \frac{|dS_0 - K| + dS_0 - K}{2} \qquad e \qquad C_T^+ = \frac{|uS_0 - K| + uS_0 - K}{2}.$$

[1] *To hedge* means to set up a trading strategy with the goal of reducing the risk of adverse price movements in some asset. Such an asset is said to be *hedged*.

Combinando quest'ultima con la (2.53), otteniamo

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\frac{|dS_0-K|+dS_0-K}{2}+\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\frac{|uS_0-K|+uS_0-K}{2}\right)\\
&= \frac{1}{(u-d)\,(1+r_f)}\left(u\frac{|dS_0-K|+dS_0-K}{2}-d\frac{|uS_0-K|+uS_0-K}{2}\right)\\
&- \frac{1}{u-d}\left(\frac{|dS_0-K|-|uS_0-K|}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0.
\end{aligned}
$$

Quindi, nel caso $K < dS_0$ risulta

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{(u-d)\,(1+r_f)}\left(u\,(dS_0-K)-d\,(uS_0-K)\right)-\frac{1}{u-d}\left(\frac{dS_0-K-(uS_0-K)}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0\\
&= S_0-\frac{1}{1+r_f}K.
\end{aligned}
$$

Nel caso $dS_0 \leqslant K < uS_0$ si ha invece

$$
\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{1}{(u-d)\,(1+r_f)}d\,(uS_0-K)-\frac{1}{u-d}\left(\frac{(K-dS_0)-(uS_0-K)}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0\\
&= -\frac{1}{(u-d)\,(1+r_f)}d\,(uS_0-K)-\frac{1}{u-d}K+\frac{1}{2}\frac{u+d}{u-d}S_0+\frac{1}{2}S_0\\
&= \frac{(1+r_f)-d}{(u-d)\,(1+r_f)}uS_0-\frac{d+(1+r_f)}{(u-d)\,(1+r_f)}K\\
&= \frac{(1+r_f)-d}{(u-d)\,(1+r_f)}\,(uS_0-K)
\end{aligned}
$$

Infine nel caso $uS_0 \leqslant K$ otteniamo chiaramente

$$
C_0 = 0.
$$

Ciò prova completamente l'Equazione (2.56). □

Da notare che nel caso $K \geqslant uS_0$ il prezzo del S_T del titolo alla maturità T è certamente inferiore al prezzo strike K. Quindi un'opzione che sancisce il diritto a comprare un stock a un valore superiore al suo valore massimo alla maturità T non può che avere costo nullo.

Sempre nell'ambito del CRR Toy Model, cosideriamo due generici titoli rischiosi, Y e Z di valori Y_0 e Z_0 al tempo $t = 0$ e di valori Y_T e Z_T al tempo $t = T$ tali che

$$
Y_T = \begin{cases} Y_T^+, & \mathbf{P}\left(Y_T = Y_T^+\right) = p, \\ Y_T^-, & \mathbf{P}\left(Y_T = Y_T^-\right) = q, \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_T = \begin{cases} Z_T^+, & \mathbf{P}\left(Z_T = Z_T^+\right) = p, \\ Z_T^-, & \mathbf{P}\left(Z_T = Z_T^-\right) = q, \end{cases} .
$$

Definizione 46 *Chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizioni rischiose *nei titoli Y e Z, più sinteticamente* BSS-portafoglio*, una terna $\pi \equiv (x, y, z)$ la cui componente x [resp. y, resp. z] sia la quantità di bond [resp. di titolo rischioso Y, resp. di titolo rischioso Z] in cui investiamo al tempo $t = 0$. Qualora la posizione non rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* depositiamo *[risp.* prendiamo a prestito*] l'ammontare $|x|\,B_0$. Qualora la posizione sul titolo rischioso Y o Z sia positiva [risp. negativa] diciamo che* acquistiamo *[risp.* vendiamo allo scoperto*] il titolo rischioso Y o Z per un ammontare $|y|\,Y_0$ o $|z|\,Z_0$.*

Chiaramente un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ può essere pensato come un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ con componente $z = 0$.

Definizione 47 *Chiamiamo* valore *al tempo* $t = 0$ *[risp. al tempo* $t = T$*] del BSS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *l'ammontare*

$$W_0 \equiv xB_0 + yY_0 + zZ_0, \qquad \textit{[risp. } W_T \equiv xB_T + yY_T + zZ_T\textit{]}.$$

Da notare che mentre l'ammontare W_0 è un numero reale, ovvero una variabile aleatoria di Dirac concentrata in W_0, l'ammontare W_T è una variabile aleatoria dal momento che Y_T e Z_T lo sono. Infatti,

$$W_T = \begin{cases} W_T^+ \equiv (1+r)xB_0 + yY_T^+ + zZ_T^+, & \mathbf{P}(W_T = W^+) \equiv p, \\ W_T^- \equiv (1+r)xB_0 + yY_T^- + zZ_T^-, & \mathbf{P}(W_T = W^-) \equiv q. \end{cases}$$

Definizione 48 *Diciamo che un BSS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *è un* arbitraggio *se*

1. $W_0 = 0$*;*
2. $W_T \geqslant 0$ *con* $\mathbf{P}(W_T > 0) > 0$*.*

Analogamente al caso di un BS-portafoglio, un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ é un arbitraggio se a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza un payoff non negativo e con probabilità non nulla un payoff strettamente positivo. Ciò indipendentemente dall'esito dell'investimento nelle sue componenti rischiose.

Lemma 49 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, il sussistere dell'uguaglianza*

$$Y_T = Z_T \tag{2.57}$$

comporta necessariamente che

$$Y_0 = Z_0. \tag{2.58}$$

Proof. *Consideriamo un BSS portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *con posizione* x *nel titolo non rischioso e posizione* y *[resp.* z*] nel titolo* Y *[resp.* Z*] e supponiamo che si realizzi l'uguaglianza*

$$Y_T = Z_T.$$

Se al tempo $t = 0$ *risultasse*

$$Y_0 > Z_0,$$

allora vendute allo scoperto y *unita di titolo* Y*, con il ricavato* $|y| Y_0$ *si potrebbero acquistare* $z \equiv |y|$ *unità di titolo* Z *con un esborso pari a* $|y| Z_0$ *ed investire il surplus* $|y|(Y_0 - Z_0)$ *nell'acquisto di* $x \equiv |y|(Y_0 - Z_0)/B_0$ *unità di titolo non rischioso con esborso pari a* $|y|(Y_0 - Z_0)$*. Infatti, si ha chiaramente*

$$|y| Y_0 = |y|(Y_0 - Z_0) + |y| Z_0.$$

Al tempo $t = T$ *la liquidazione del BSS-portafoglio* π *in merito alla posizione* z *nel titolo* Z *produrrebbe un introito aleatorio* zZ_T *tale da garantire in ogni caso la possibilità di ripianare lo scoperto della posizione su* Y*, nel frattempo maturato a* uY_T*, e al contempo la liquidazione della posizione* x *nel titolo non rischioso garantirebbe un introito certo pari a*

$$xB_T = \frac{|u|(Y_0 - Z_0)}{B_0} B_T = \frac{|u|(Y_0 - Z_0) B_0(1+r)}{B_0} = |u|(Y_0 - Z_0)(1+r) > 0.$$

Pertanto π *risulterebbe essere un BSS-portafoglio d'arbitraggio. Un BSS-portafoglio d'arbitraggio del tutto analogo si potrebbe costituire se al tempo* $t = 0$ *fosse* $Y_0 < Z_0$*. Non rimane che concludere circa la veridicità della tesi del Lemma.* $\square$

Proposizione 50 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, sussiste necessariamente la relazione di parità put-call*

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r_f}. \tag{2.59}$$

Proof. *Si consideri un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x,y,z)$ costituito al tempo $t=0$ da un titolo rischioso Y rappresentato dall'acquisto di una call e dalla vendita di una put sullo stesso sottostante, entrambe di strike K alla maturità T e rispettivi prezzi C_0 e P_0, e si consideri un titolo Z costituito prendendo a prestito l'ammontare $K/(1+r_f)$ ed acquistando il titolo rischioso sottostante alle opzioni al prezzo S_0. Stante le Osservazioni 21 e 40 alla maturità T risulta*

$$Y_T = C_T - P_T = S_T - K = Z_T.$$

Allora, per il Lemma 49 deve necessariamente aversi

$$X_0 = Y_0,$$

che è l'Equazione (2.59) desiderata. □

Corollary 51 *Si ha*

$$P_0 = \begin{cases} 0, & se\ K < dS_0, \\ \frac{u-(1+r_f)}{(u-d)(1+r_f)}\left(K - dS_0\right), & se\ dS_0 \leqslant K < uS_0, \\ \frac{K}{1+r_f} - S_0, & se\ K \geqslant uS_0. \end{cases} \tag{2.60}$$

Proof. *Dalla (2.59) si ha chiaramente*

$$P_0 = C_0 - S_0 + \frac{K}{1+r_f}.$$

Tenuto allora conto dell'Equazione (2.56) segue immediatamente la (2.60). □

Da notare che nel caso $K < dS_0$ il prezzo del S_T del titolo alla maturità T è certamente superiore al prezzo strike K. Quindi un'opzione che sancisce il diritto a vendere un titolo a un valore inferiore al suo valore minimo alla maturità T non può che avere costo nullo.

Abbiamo visto che nell'ambito del CRR Toy Model il prezzo di un'opzione call europea può essere coperto mediante un unico portafoglio replicante. Chiaramente, in conseguenza della parità put-call anche il prezzo di un'opzione put europea può essere coperto mediante un unico portafoglio replicante. Queste osservazioni offrono lo spunto per introdurre l'importante nozione di completezza di mercato.

Definizione 52 *Nell'ambito del CRR Toy Model, chiamiamo* derivato *una qualunque variabile aleatoria reale D_T su Ω.*

Osservazione 53 *Un derivato $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$ dipende solo dal valore finale del sottostante S, cioè risulta*

$$D_T = F_D(S_T),$$

per un'opportuna funzione $F_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Più specificatamente si ha

$$D_T = \begin{cases} D_T^+ = F_D(S_T^+), & \mathbf{P}\left(D_T = D_T^+\right) = p, \\ D_T^- = F_D(S_T^-), & \mathbf{P}\left(D_T = D_T^-\right) = q. \end{cases}$$

Osservazione 54 *Il titolo non rischioso e il titolo rischioso sono essi stessi derivati.*
Proof. *Per il titolo non rischioso B possiamo scrivere*

$$B_T = F_B(S_T),$$

dove $F_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione costante data da

$$F_B(x) \stackrel{def}{=} (1 + r_f) B_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il titolo rischioso S possiamo scrivere

$$S_T = F_S(S_T),$$

dove $F_S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione identica data da

$$F_B(x) \stackrel{def}{=} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Osservazione 55 *Il titolo $B + S$ è un derivato.*
Proof. *Per il titolo $B + S$ possiamo scrivere*

$$B_T + S_T = F_{B+S}(S_T),$$

dove $F_{B+S} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione data da

$$F_{B+S}(x) \stackrel{def}{=} (1 + r_f) B_0 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Definizione 56 *Chiamiamo* portafoglio *di* copertura *o* replicante *(*hedging *or* replicating portfolio*) del derivato D un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$, le cui componenti x ed y siano tali che alla maturità T si abbia*

$$D_T = xB_T + yS_T. \tag{2.61}$$

Definizione 57 *Diciamo che un mercato è* completo *se ogni derivato è replicabile da un BS-portafoglio.*

Teorema 58 *Il CRR Toy Model è un modello di mercato completo.*
Proof. *Dobbiamo provare che nell'ambito del CRR Toy Model ogni derivato è replicabile da un BS-portafoglio. Abbiamo già provato che le opzioni call e put sono replicabili da un BS-portafoglio (cfr Proposizione 42) e questa dimostrazione può essere facilmente estesa ad ogni derivato. Infatti, sia D un derivato con prezzo alla maturità $D_T \equiv \left(D_T^+, D_T^-\right)$ con distribuzione di provabilità (p, q) e sia $\pi \equiv (x, y)$ un BS-portafoglio replicante. L'Equazione (2.61) comporta*

$$x(1 + r_f)B_0 + yuS_0 = D_T^+, \quad e \quad x(1 + r_f)B_0 + ydS_0 = D_T^-.$$

Questo sistema ammette amcora un'unica soluzione (x, y) data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_T^+ & uS_0 \\ D_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & uS_0 \\ (1 + r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uD_T^- - dD_T^+}{(1 + r_f)B_0(u - d)},$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & D_T^+ \\ (1 + r_f)B_0 & D_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & uS_0 \\ (1 + r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{D_T^+ - D_T^-}{(u - d)S_0}.$$

L'asserto è così provato. □

Osservazione 59 *Il valore del BS-portafoglio replicante del derivato D al tempo $t=0$ è dato da*

$$xB_0 + yS_0 = \frac{1}{(u-d)(1+r_f)}\left((u-(1+r_f))\,D_T^- + ((1+r_f)-d)\,D_T^+\right).$$

Il CRR Toy Model è quindi un modello di mercato completo. Sempre in questo modello la non esistenza di portafogli d'arbitraggio è equivalente alll'esistenza di una (unica) probabilità neutrale al rischio. Peraltro, la non esistenza di portafogli d'arbitraggio non è scontata, ma va garantita imponendo la condizione

$$u > 1 + r_f > d.$$

Ci si può allora legittimamente chiedere cosa comporterebbe una violazione della condizione di non arbitraggio. La risposta a questa domanda è il seguente teorema

Teorema 60 *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'esistenza di portafogli d'arbitraggio comporta la possibile negatività dei prezzi dei derivati al tempo $t=0$.*
Proof. *Se nell'ambito del CRR Toy Model ammettessimo l'esistenza di un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi^* \equiv (x^*, y^*)$ dalla condizione $W_0 = 0$ dovrebbe aversi*

$$x^* B_0 = -y^* S_0 \tag{2.62}$$

e dalla condizione $W_T \geqslant 0$

$$x^* B_T + y^* S_T \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^*(1+r_f)\,B_0 + y^* u S_0 \geqslant 0, \\ x^*(1+r_f)\,B_0 + y^* d S_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Non potendo essere $x^* = 0$, il che comporterebbe $y^* = 0$ e $W_T = 0$ con certezza, assumiamo $x^* > 0$. Combinando le (2.62) e (2.63), avremmo

$$x^*(1+r_f-u)\,B_0 \geqslant 0 \quad e \quad x^*(1+r_f-d)\,B_0 \geqslant 0,$$

quindi necessariamente

$$1 + r_f \geqslant u \quad e \quad 1 + r_f \geqslant d,$$

sempre con la convenzione $u > d$. Pertanto, volendo replicare una put sullo stock con strike K tale che $uS_0 > K > dS_0$ con un BS portafoglio $\pi \equiv (x,y)$, dalla condizione

$$P_T = xB_T + yS_T \Leftrightarrow \begin{cases} P_T^+ = x\,(1+r_f)\,B_0 + yuS_0, \\ P_T^- = x\,(1+r_f)\,B_0 + ydS_0, \end{cases}$$

avremmo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} P_T^+ & uS_0 \\ P_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uP_T^- - dP_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1+r_f)\,B_0 & P_T^+ \\ (1+r_f)\,B_0 & P_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{P_T^+ - P_T^-}{(u-d)S_0}.$$

D'altra parte, essendo $uS_0 > K > dS_0$, sarebbe

$$P_T = \frac{|K - S_T| + K - S_T}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_T^+ = 0, \\ P_T^- = K - dS_0. \end{cases}$$

Quindi

$$x = \frac{u\,(K - dS_0)}{(1 + r_f)B_0(u - d)} \quad e \quad y = \frac{-\,(K - dS_0)}{(u - d)S_0}.$$

Otterremo allora il seguente prezzo della put al tempo $t = 0$

$$P_0 = xB_0 + yS_0 = \frac{u\,(K - dS_0)\,B_0}{(1 + r_f)B_0(u - d)} - \frac{-\,(K - dS_0)\,S_0}{(u - d)S_0} = \frac{u - (1 + r_f)}{(u - d)\,(1 + r_f)}\,(K - dS_0) < 0,$$

Similmente, assumendo $x^* < 0$ *avremmo*

$$y^*\,(u - (1 + r_f))\,S_0 \geqslant 0 \quad e \quad y^*\,(d - (1 + r_f))\,S_0 \geqslant 0,$$

quindi necessariamente

$$u \geqslant 1 + r_f \quad e \quad d \geqslant 1 + r_f.$$

Allora, volendo replicare una call sullo stock con strike K *take che* $uS_0 \geqslant K \geqslant dS_0$*, con calcoli analoghi a quelli sopra presentati, otterremo il seguente prezzo della call al tempo* $t = 0$

$$C_0 = \frac{(1 + r_f) - d}{(u - d)\,(1 + r_f)}\,(uS_0 - K) < 0.$$

In definitiva, nell'ambito del CRR Toy Model, l'esistenza di portafogli d'arbitraggio comporta la possibile negatività dei prezzi dei derivati al tempo $t = 0$. $\square$

Essendo il CRR Toy Model un modello di mercato completo. Può sembrare non legittimo porsi la questione di cosa comporterebbe la non completezzza del mercato in caso assenza di portafogli d'arbitraggio. Tuttavia l'analisi di questa questione in questo contesto elementare porta a interessanti considerazioni facilmente replicabili in contesti più complessi in cui la completezza del modello di mercato non è garantita. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 61 *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'assenza di portafogli d'arbitraggio, equivalente all'esistenza e unicità di una probabilità neutrale al rischio (cfr Teorema 38), e un'ipotetica assenza di completezza comporterebbero la non unicità della probabilità neutrale al rischio.*

Proof. Ricordiamo che l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio comporta l'esistenza di una probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ su Ω di distribuzione $(\tilde{p}, \tilde{q})$ (cfr Definizione 34 e Teorema 38). Inoltre, stante l'Osservazione (53), sappiamo che per ogni ogni derivato D sono possibili solo due realizzazioni al tempo $t = T$. Più precisamente, denotato con D_T il valore del derivato D al tempo $t = T$, possiamo scrivere

$$D_T = F_D\,(S_T) \equiv \left(D_T^+, D_T^-\right)$$

essendo D_T^+ [resp. D_T^-] la realizzazione del derivato all'occorrenza della realizzazione S_T^+ [resp. S_T^-] del titolo rischioso. Quindi, l'insieme di tutti i possibili derivati si presta a essere rappresentato come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\Delta\,(\pi)$ il sottoinsieme dei derivati che possono essere replicati da BS-portafogli del tipo $\pi \equiv (x, y)$ dove x [resp. y] è la componente non rischiosa [resp. rischiosa] del portafoglio replicante. Notiamo che $\Delta\,(\pi)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, dal momento che se due derivati possono essere replicati anche la loro combinazione lineare può esserlo, e che, stante l'Osservazione (55), i derivati (B_T, B_T) e $\left(S_T^+, S_T^-\right)$ sono in $\Delta\,(\pi)$, essendo rispettivamente replicati dai portafogli $(1, 0)$ e $(0, 1)$. D'altra parte, se qualche derivato non potesse essere replicato da un opportuno BS-portafoglio si avrebbe necessariamente $\Delta\,(\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Considerato allora il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{\mathbf{P}}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\tilde{\mathbf{P}}} \overset{\text{def}}{=} u_1 v_1 \tilde{p} + u_2 v_2 \tilde{q}, \quad \forall \mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)\,, \mathbf{v} \equiv (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

sarebbe possibile determinare $\xi \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ ortogonale a $\Delta(\pi)$. In termini delle componenti di $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2)$ avremmo allora

$$\xi_1 u\tilde{p} + \xi_2 v\tilde{q} = 0,$$

per ogni $(u, v) \in \Delta(\pi)$. In particolare, poichè (B_T, B_T) e $\left(S_T^+, S_T^-\right)$ sono in $\Delta(\pi)$, si dovrebbe avere

$$\xi_1 B_T\tilde{p} + \xi_2 B_T\tilde{q} = 0,$$

da cui

$$\xi_1\tilde{p} + \xi_2\tilde{q} = 0, \tag{2.64}$$

e

$$\xi_1 S_T^+\tilde{p} + \xi_2 S_T^-\tilde{q} = 0. \tag{2.65}$$

Fissato $\lambda > 1$ definiamo

$$\mathbf{P}_{\xi,\lambda} \overset{\text{def}}{=} (p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda}) = \left(\left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p}, \left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q}\right)$$

dove

$$\|\xi\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

Chiaramente,

$$\left|\frac{\xi_k}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right| = \frac{|\xi_k|}{\lambda\|\xi\|_\infty} \leqslant \frac{1}{\lambda} < 1,$$

per $k = 1, 2$. Si ha quindi

$$p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda} > 0.$$

Inoltre, stante la (2.64),

$$p_{\xi,\lambda} + q_{\xi,\lambda} = \left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p} + \left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q} = \tilde{p} + \tilde{q} + \frac{1}{\lambda\|\xi\|_\infty}(\xi_1\tilde{p} + \xi_2\tilde{q}) = 1.$$

In definitiva, la coppia $(p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda})$ individuerebbe una distribuzione di probabilità caratterizzante una certa $\mathbf{P}_{\xi,\lambda} \neq \tilde{\mathbf{P}}$. Ma, tenendo conto della (2.65), per tale $\mathbf{P}_{\xi,\lambda}$ avremmo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+r_f}\mathbf{E}^{\mathbf{P}_{\xi,\lambda}}[S_T] &= \frac{1}{1+r_f}\left(S_T^+ p_{\xi,\lambda} + S_T^- q_{\xi,\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(S_T^+\left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p} + S_T^-\left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda\|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(S_T^+\tilde{p} + S_T^-\tilde{q} + \frac{1}{\lambda\|\xi\|_\infty}\left(\xi_1 S_T^+\tilde{p} + \xi_2 S_T^-\tilde{q}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(S_T^+\tilde{p} + S_T^-\tilde{q}\right) \\
&= S_0
\end{aligned}$$

Pertanto $\mathbf{P}_{\xi,\lambda}$ sarebbe essa stessa una probabilità neutrale al rischio. □

Alla luce di quanto osservato introduciamo la seguente definizione.

Definizione 62 *Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di portafogli d'arbitraggio, chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *di un derivato D al tempo $t = 0$ il valore D_0 del BS-portafoglio replicante al tempo $t = 0$. Preciamente*

$$D_0 \overset{def}{=} \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{u - (1+r_f)}{u-d}D_T^- + \frac{(1+r_f) - d}{u-d}D_T^+\right).$$

Chiamiamo prezzo neutrale al rischio *di un di un derivato D al tempo $t = 0$ il valore atteso del derivato al tempo $t = T$ secondo la probabilità neutrale al rischio scontato al tempo $t = 0$. Precisamente,*

$$D_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}\left[D_T\right].$$

Osservazione 63 *Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di portafogli d'arbitraggio, il prezzo di non arbitraggio e il prezzo neutrale al rischio coincidono.*

Per concludere questa sezione consideriamo anche la possibilità d'investire in futures di sottostante lo stock. A tale proposito ricordiamo che

Definizione 64 *Si definisce* future *un contratto di compravendita a termine tra due contraenti, con il quale l'acquirente del future (*buyer*), sottoscrive l'obbligo di acquistare dal venditore (*seller) *un attivo finanziario rischioso, per una quantità determinata, a una scadenza (*exercise date *or* expiration date *or* maturity*) e a un prezzo (*exercise *or* delivery price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto. Di contro il venditore assume l'obbligo di vendere all'acquirente il titolo finanziario in questione nelle modalità previste dal contratto.*

A differenza del contratto d'opzione nessuna delle parti contraenti paga un premio per entrare nel contratto. Tuttavia il contratto va onorato indipendentemente dal valore di mercato che possa assumere il sottostante alla data d'esercizio. Per cui denotato con F_0 [resp. F_T] il valore del future al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$] e con K il prezzo d'esercizio di un contratto future F di sottostante lo stock S, abbiamo

$$F_0 = 0 \quad \text{e} \quad F_T = S_T - K, \tag{2.66}$$

L'aquirente del future realizzerà un profitto [resp. una perdita] se $S_T - K > 0$ [resp. $S_T - K < 0$].

Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, sempre a differenza del contratto d'opzione, il prezzo d'esercizio K del future è univocamente determinato. Si ha infatti

Proposizione 65 (Spot-Futures Parity Theorem) *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio risulta*

$$K = \tilde{\mathbf{E}}\left[S_T\right]. \tag{2.67}$$

Equivalently

$$K = (1+r)\,S_0. \tag{2.68}$$

Proof. In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio esiste un'unica probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ tale che, considerato l'operatore speranza $\tilde{\mathbf{E}}\left[\cdot\right]$ ad essa associato, risulti

$$F_0 = \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}\left[F_T\right]$$

Dalla (2.66) otteniamo allora

$$\frac{1}{1+r_f}\left(\tilde{\mathbf{E}}\left[S_T\right] - K\right) = 0.$$

Peranto, considerata l'Equazione (2.42) segue immediatamente la (2.67).

Possiamo dare anche un'altra prova mostrando concretamente come la violazione dell'Equazione (2.68) renda possibile la costruzione di un BSS-portafoglio d'arbitraggio.

Supponiamo che al tempo $t = 0$ risulti $K > (1+r_f)\,S_0$. Allora prendendo a prestito una somma di denaro S_0 sarebbe possibile comprare un'unità di stock S al prezzo S_0 e vendere a costo $F_0 = 0$ un future sull'unità di stock al prezzo d'esercizio K. Costituiremmo così un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$

di posizione nel bond $x \equiv -S_0/B_0$ di posizione nello stock $y \equiv 1$ e di posizione nel future $z = 1$. Un tale portafoglio ha chiaramente valore

$$W_0 = xB_0 + yS_0 + zF_0 = -S_0 + S_0 + 0 = 0.$$

Al tempo $t = T$ la posizione debitoria avrà valore incrementato a $xB_T = -(1+r)\,S_0$, la posizione nello stock si porterà a valore S_T e la posizione nel future garantira l'introito $K - S_T$ derivante dall'incasso K e dalla contemporanea cessione dello stock di valore S_T. Il payoff del portafoglio sarà quindi

$$W_T = xB_T + yS_T + zF_T = -(1+r)\,S_0 + S_T + K - S_T = K - (1+r)\,S_0 > 0,$$

indipendentemente dalla realizzazione del prezzo S_T del sottostante. Avremmo pertanto costituito un portafoglio d'arbitraggio.

Con ragionamento analogo, ipotizzare che al tempo $t = 0$ risulti $K < (1+r)\,S_0$ dà modo di costituire un altro portafoglio d'arbitraggio. Infatti, potremmo vendere allo scoperto un'unità di stock S al prezzo S_0, depositare la somma realizzata nel bond B, comprando S_0/B_0 unità di Bond, e comprare a costo zero un future sullo stock al prezzo d'esercizio K. Costituiremmo così un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ di posizione nel bond $x \equiv S_0/B_0$ di posizione nello stock $y_0 \equiv -1$ e di posizione nel future $z = 1$. Anche un tale portafoglio ha valore

$$W_0 = xB_0 + yS_0 + zF_0 = S_0 - S_0 + 0 = 0.$$

Al tempo $t = T$ il valore della la posizione nel bond sarà incrementato a $xB_T = S_0\,(1+r)$, la posizione nello stock darà luogo a uno scoperto pari a $-S_T$ e la posizione nel future garantira l'introito $S_T - K$ derivante dall'acquisto del titolo di valore di mercato S_T al prezzo K. Il payoff portafoglio sarà quindi

$$W_T = xB_T + yS_T + zF_T = (1+r)\,S_0 - S_T + S_T - K = (1+r)\,S_0 - K > 0$$

indipendentemente dalla realizzazione del prezzo S_T del sottostante. Anche in questo caso avremmo costituito un portafoglio d'arbitraggio.

In definitiva l'ipotizzata assenza di portafogli d'arbitraggio conduce ad accettare la veridicità dell'Equazione (2.68). $\square$

2.1.1 Parameter Calibration

I parametri del CRR Toy model sono:

1. il tasso di rendimento non rischioso r_f del bond B;
2. le realizzazioni u e d della variabile aleatoria di Bernoulli introdotta per rappresentare l'incertezza;
3. le componenti $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ della distribuzione di probabilità neutrale al rischio $(\tilde{p}, \tilde{q})$.

Dall'Equazione (2.43) sappiamo che

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{e} \quad \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}. \tag{2.69}$$

Inoltre, denotata con σ la volatilità del tasso di rendimento r_T dello stock S, definito dall'Equazione (2.21), con gli stessi calcoli impiegati per l'Equazione (2.19), abbiamo

$$\sigma^2 = \tilde{\mathbf{D}}^2\,[r_T] = \frac{\tilde{\mathbf{D}}^2\,[S_T]}{S_0^2} = (u-d)^2\,\tilde{p}\tilde{q}. \tag{2.70}$$

Le Equazioni (2.69) e (2.70) consentono di determinare i parametri interni del modello $u, d, \tilde{p}, \tilde{q}$ una volta disponibili le stime del tasso di rendimento privo di rischio r_f e della volatilità del tasso di rendimento dello stock σ. Tuttavia va notato che abbiamo a disposizione tre equazioni per i quattro parametri. Pertanto per poterli determinare dobbiamo introdurre un'ulteriore equazione che caratterizza una delle possibili versioni del modello. L'equazione proposta da Cox, Ross e Rubinstein è

$$d = \frac{1}{u}. \tag{2.71}$$

Un'altra equazione proposta da Jarrow e Rudd è

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}. \tag{2.72}$$

Combinando le Equazioni (2.69) segue

$$\tilde{p}\tilde{q} = \frac{(1 + r_f - d)(u - (1 + r_f))}{(u - d)^2}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (2.70) otteniamo

$$\sigma^2 = (u - d)^2 \tilde{p}\tilde{q} = (1 + r_f - d)(u - (1 + r_f)) = (1 + r_f)(u + d) - (1 + r_f)^2 - du.$$

Ora, stante l'Equazione (2.71), risulta

$$\frac{(1 + r_f)^2 + 1 + \sigma^2}{1 + r_f} = \frac{u^2 + 1}{u}$$

ossia

$$u^2 - \frac{(1 + r_f)^2 + 1 + \sigma^2}{1 + r_f} u + 1 = 0. \tag{2.73}$$

Risolvendo la (2.73) otteniamo la determinazione di Cox, Ross e Rubinstein dei parametri u e d

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\frac{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2}{1 + r_f} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2}{1 + r_f}\right)^2 - 4} \\ &= \frac{1}{2(r + 1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2\right)^2 - 4(1 + r_f)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2(r + 1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right) \end{aligned} \tag{2.74}$$

e

$$\begin{aligned} d &= \frac{2(r_f + 1)}{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}} \\ &= \frac{2(r_f + 1)\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 - \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right)}{\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2\right)^2 - \left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)} \\ &= \frac{1}{2(r_f + 1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 - \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Invece, stante la (2.72), dall'Equazione (2.70) otteniamo

$$4\sigma^2 = (u - d)^2$$

ossia

$$2\sigma = u - d$$

Sostituendo quest'ultima nelle Equazioni (2.69) si ottiene allora

$$\frac{1 + r_f - d}{2\sigma} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{u - (1 + r_f)}{2\sigma} = \frac{1}{2}$$

da cui

$$d = 1 + r_f - \sigma \quad \text{e} \quad u = 1 + r_f + \sigma$$

Alla luce di quanto osservato ci rimangono da stimare il tasso di rendimento non rischioso r_f del bond B e la volatilità σ del tasso di rendimento r_T dello stock S. Per questi parametri dobbiamo ricorrere ai dati del mercato.

Per stimare la volatilità σ del tasso di rendimento r_T dello stock S, dobbiamo ricorrere ai dati storici sullo stock. Supponiamo di avere a disposizione i prezzi di chiusura giornalieri dello stock per un ampio intervallo di tempo passato, ad esempio un anno. Denotiamo con

$$S_1, S_2 \ldots, S_N, S_{N+1},$$

convenendo che

$$S_{N+1} \equiv S_0,$$

le variabili aleatorie la cui realizzazione ha dato luogo al prezzo di chiusura dello stock nell'n-simo giorno di contrattazione per $n = 1, \ldots, N + 1$, dove $N + 1$ è il numero di giorni di mercato del trascorso anno di riferimento. Scriviamo anche

$$\Delta t = 1/(N + 1),$$

per indicare la frazione dell'anno relativa a una giornata di mercato. Formalmente il tasso di rendimento dello stock a termine dell'$n+1$-simo giorno di contrattazione, inteso come variabile aleatoria, è definito come

$$r_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}, \quad \forall n = 1, \ldots, N,$$

avendo assunto che il prezzo di apertura dello stock nell'$n + 1$-simo giorno di contrattazione coincida con il prezzo di chusura dell'n-esimo giorno. Tuttavia, per varie ragioni che esporremo, si preferisce considerare il rendimento logaritmo dello stock a termine dell'$n + 1$-simo giorno di contrattazione definito come

$$\rho_n \stackrel{\text{def}}{=} \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right), \quad \forall n = 1, \ldots, N.$$

Per il momento ci limitiamo a notare che quando $S_{n+1}/S_n \approx 1$ abbiamo $S_{n+1}/S_n - 1 \approx 0$ e pertanto

$$\rho_n = \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{S_{n+1}}{S_n} - 1\right)\right) \approx \frac{S_{n+1}}{S_n} - 1 = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} = r_n.$$

Uno degli assunti portanti della teoria classica dei mercati finanziari è che i prezzi dei titoli rischiosi siano modellabili in tempo continuo mediante un moto browniano geometrico. Quindi, si assume che la dinamica del titolo rischioso sia modellata in tempo continuo dalla seguente equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \tag{2.76}$$

per $t \geqslant 0$, dove μ [resp. σ^2] è il tasso di rendimento medio [resp. la varianza] del titolo su base annua e $(w_t)_{t \geqslant 0}$ è un processo di Wiener. Questa assunzione, suffragata dalle recenti analisi dei dati di mercato solo come una approssimazione molto grossolana, comporta che i rendimenti logaritmici siano indipendenti e normalmente distribuiti con media $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ e varianza $\sigma^2 \Delta t$. Quindi, che per i rendimenti logaritmici si possa scrivere[2]

$$\rho_n \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right). \tag{2.77}$$

A sua volta l'Equazione (2.77) comporta che la variabile aleatoria S_n/S_{n-1} sia lognormalmente distribuita, ossia

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_n\right), \quad Z_n \sim N(0,1).$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. In conseguenza, per le propretà delle variabili aleatorie lognormalmente distri-

[2]Grazie al Lemma di Ito, possiamo scrivere

$$d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} \langle dS_t, dS_t \rangle,$$

dove dS_t è dato dall'equazione (2.76), e $\langle dS_t, dS_t \rangle$ è la variazione quadratica di S_t, che, sempre per la (2.76) è data da

$$\langle dS_t, dS_t \rangle = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Otteniamo allora

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dw_t,$$

che è l'equazione di un moto browniano. Dalla discretizzazione di quest'ultima segue

$$\ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\left(w_{t+\Delta t} - w_t\right),$$

ossia

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\left(w_{t+\Delta t} - w_t\right)$$

che comporta la (2.77).

buite[3], otteniamo

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = \exp\left(\mu\Delta t\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = \exp\left(2\mu\Delta t\right)\exp\left(\sigma^2\Delta t - 1\right),$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. L'ulteriore ipotesi dell'indipendenza delle variabili aleatorie $\rho_1 \equiv \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right), \ldots, \rho_n \equiv \ln\left(\frac{S_{N+1}}{S_N}\right)$ comporta

$$\rho_1 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_1, \ldots, \rho_n = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{N-1},$$

con $Z_1, \ldots, Z_{N-1}$ indipendenti. Abbiamo allora[4]

$$\bar{\rho}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_n \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \frac{\sigma^2\Delta t}{N}\right),$$

con

$$\mathbf{E}\left[\bar{\rho}_n\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[\bar{\rho}_n\right] = \frac{\sigma^2\Delta t}{N}.$$

---

[3]Se X è una variabile aleatoria log-normalmente distribuita, allora, posto $\mathbf{E}\left[\ln(X)\right] \equiv \mu$ e $\mathbf{D}^2\left[\ln(X)\right] \equiv \sigma^2$, possiamo scrivere

$$X = \exp\left(\mu + \sigma Z\right), \quad Z \sim N\left(0, 1\right).$$

In conseguenza,

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \mathbf{E}\left[e^{\mu+\sigma Z}\right] = \mathbf{E}\left[e^{\mu}e^{\sigma Z}\right] = e^{\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\left[X\right] &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2 = \mathbf{E}\left[e^{2(\mu+\sigma Z)}\right] - e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 \\ &= e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] - e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 = e^{2\mu}\left(\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] - \mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2\right).\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma z}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}e^{\sigma z - \frac{1}{2}z^2}dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z - \frac{1}{2}z^2}dz = \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}}dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}.\end{aligned}$$

Segue chiaramente che

$$\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] = e^{2\sigma^2} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 = e^{\sigma^2}$$

In definitiva,

$$\mathbf{E}\left[X\right] = e^{\mu}e^{\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\left[X\right] &= e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right) = e^{2\mu}e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).\end{aligned}$$

Applicando quanto mostrato alla variabile aleatoria

$$Y = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, +\sigma\sqrt{\Delta t}Z\right)$$

si ottengono le equazioni desiderate.

[4]Tenere presente che $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X}_N \sim N\left(\mu, \sigma^2/N\right)$.

Inoltre, posto

$$S_{\rho,N}^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\rho_n - \bar{\rho}_n\right)^2,$$

abbiamo[5]

$$\frac{(N-1)\,S_{\rho,N}^2}{\sigma^2\Delta t} \sim \chi_{N-1}^2,$$

con[6]

$$\mathbf{E}\left[S_{\rho,N}^2\right] = \sigma^2\Delta t \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[S_{\rho,N}^2\right] = \frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2.$$

Pertanto possiamo usare $\bar{\rho}_n$ come stimatore di $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{\sigma^2\Delta t}{N}$ e possiamo usare $S_{\rho,N}^2$ come stimatore di $\sigma^2\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2$.

Per quanto riguarda il tasso non rischioso r_f consideriamo i dati presenti nel sito del U.S. Department of the Treasure (see `https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billRatesYear&year=2021`). Nella sezione "Data" accediamo alla sotto-sezione "Interest Rates" (see `https://home.treasury.gov/policy-issues/financing-the-government/interest-rate-statistics`). Qui abbiamo vari insiemi di dati che forniscono informazioni sul tasso di rendimento di uno zero coupon bond B con differenti maturità. In particolare la Daily Treasury Yield Curve Rates (see `https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield`). Un'altra rilevante fonte di dati è il sito TreasuryDirect (see `https://www.treasurydirect.gov/GA-FI/FedInvest/selectSecurityPriceDate`) in cui si può trovare una raccolta dei tassi di rendimento con maturità piuttosto dettagliate sotto forma dei prezzi di varie tipologie di bond, disponibili anche in formato csv. Inoltre non si può non menzionare il sito della Federal Reserve Bank of St. Louis (see `https://fred.stlouisfed.org/`).

L'indice Standard & Poor's 500, brevemente S&P 500 (solitamente codificato come SPX), è un indice azionario che comprende le 500 compagnie a maggior capitalizzazione con azioni ordinarie publicamente scambiate al New York Stock Exchange (NYSE). Con *capitalizzazione* si intende il valore della singola azione moltiplicato per il numero di azioni presenti sul mercato, numero questo noto come *flottante*. L'SPX in quanto tale non è scambiabile sul mercato. Tuttavia esiste un fondo azionario scambiato sul NYSE Arca noto come Standard & Poor's Depositary Receipts, brevemente SPDR S&P 500 Trurst (solitamente codificato come SPY), che si pone l'obiettivo di replicare passivamente l'indice S&P 500. Il fondo SPDR S&P 500 Trurst rientra nella categoria degli exchange-traded funds (ETF) che sono fondi, a partecipazione azionaria scambiabile sul mercato, la cui politica è replicare l'andamento di taluni indici di riferimento. Nel Chicago Board Option Exchange (CBOE) (see `https://www.cboe.com`) è possibile scambiare opzioni di acquisto e vendita con sottostante SPX (see `https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/`). Nel National Association of Security Dealers Automated Quotation (NASDAQ) (see `https://www.nasdaq.com`) è possibile scambiare opzioni di acquisto e vendita con sottostante SPY (see `https://www.nasdaq.com/market-activity/funds-and-etfs/spy/option-chain`). Le opzioni su SPX sono opzioni europee e possono essere esercitate solo alla data di scadenza (see `https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/specifications/`). Le opzioni su SPY sono opzioni americane e possono essere esercitate a una qualunque data tra quella di acquisto e la scadenza. Altre differenze sono che le opzioni su SPX sono regolate in contanti dal momento che il sottostante non è scambiabile e non pagano dividendi, mentre le opzioni su SPY sono regolate in azioni dal momento che il sottostante è scambiabile e pagano potenzialmente dividendi. Come riferimento relativamente semplice per ulteriori informazioni consigliamo `https://www.thebalance.com/spx-options-vs-spy-options-2536632`.

[5]Tenere presente che $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \Rightarrow (N-1)\,S_N^2(X)/\sigma^2 \sim \chi_{N-1}^2$.

[6]Tenere presente che $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \Rightarrow \mathbf{D}^2\left[S_N^2(r)\right] = \frac{2\sigma^4}{N-1}$.

2.2 Portafogli di Titoli (Markowitz Model)

Consideriamo ancora un mercato uniperiodale in cui al tempo $t = 0$ sia possibile investire in un titolo non rischioso, denominato *obbligazione* (*bond*), e in un set finito di titoli rischiosi, denominato *portafoglio azionario* (*stock portfolio*). Al tempo $t = T$, raggiunta la maturità (*maturity*), l'investimento viene liquidato, l'eventuale ricchezza prodotta viene consumata o l'eventuale debito accumulato va ripianato. Come nella Sezione 2.1, assumiamo che gli investimenti possano essere effettuati senza limitazioni quantitative e costi di transazione, che si possa prendere a prestito e depositare denaro allo stesso tasso d'interesse e che siano possibili libere vendite allo scoperto. Per omogenità di notazione, che si rivelerà conveniente in seguito, denotiamo con $S_0(0)$ [risp. $S_0(T)$] il valore di mercato di una obbligazione al tempo $t = 0$ [risp. $t = T$] e denotiamo con $S_1(0), \ldots, S_M(0)$ [risp. $S_1(T), \ldots, S_M(T)$], con $M \geqslant 1$, i valori dei singoli titoli azionari in portafoglio al tempo $t = 0$ [risp. $t = T$]. Indichiamo con r_0 il tasso di rendimento dell'investimento non rischioso alla maturità. Chiaramente vale

$$S_0(T) = (1 + r_0) S_0(0). \tag{2.78}$$

Come nel modello binomiale, $S_1(0), \ldots, S_M(0)$ [risp. $S_1(T), \ldots, S_M(T)$], valori dei titoli azionari in portafoglio al tempo $t = 0$ [risp. $t = T$], sono da considerarsi al tempo $t = 0$ numeri reali [resp. variabili aleatorie]. Infatti, assumiano che al tempo $t = 0$ i valori $S_1(0), \ldots, S_M(0)$ siano osservabili con certezza, ma, chiaramente, i valori $S_1(T), \ldots, S_M(T)$ non sono ancora osservabili con certezza. Tuttavia, a differenza del modello binomiale non modellizziamo esplicitamente la distribuzione delle variabili aleatorie $S_1(T), \ldots, S_M(T)$, salvo assumere che abbiano momento finito di ordine 2. Nondimeno, nell'adattamento del modello a dati reali di mercato sarà conveniente assumere che le variabili aleatorie $(S_1(T) - S_1(0))/S_1(0), \ldots, (S_M(T) - S_M(0))/S_M(0)$ siano congiuntamente Gaussiane.

Consideriamo inizialmente un investitore che al tempo $t = 0$ componga il proprio portafoglio allocandovi i soli titoli rischiosi e investendo un budget $W > 0$, ma scegliendo sui singoli titoli sia allocazioni positive che negative. Le prime, note come *posizioni lunghe* (*long position*), corrispondono all'acquisto di diverse unità di titoli, cosiddetti *pacchetti azionari* (*shares of stock*). Le seconde, note come *posizioni corte (short position)*, corrispondono a vendite allo scoperto di pacchetti azionari. Inoltre, non escludiamo che l'investitore possa prendere una posizione nulla su alcuni titoli, semplicemente non inserendoli nel suo portafoglio. Un tale portafoglio è allora convenientemente rappresentato da una M-pla di numeri reali, $\pi(0) \equiv (y_1(0), \ldots, y_M(0)) \in \mathbb{R}^M$, tale che $y_m(0)$ rappresenti il pacchetto azionario m-esimo allocato in portafoglio al tempo $t = 0$, per ogni $m = 1, \ldots, M$. Chiaramente un tale portafoglio viene composto alla luce dei noti valori di mercato $S_1(0), \ldots, S_M(0)$ dei singoli titoli. Al tempo $t = T$, tuttavia, i valori dei singoli titoli saranno rappresentati dalla realizzazioni delle variabili aleatorie $S_1(T), \ldots, S_M(T)$, non note al tempo $t = 0$. Ciò determinerà un variazione aleatoria del valore del portafoglio che potrà dare luogo a un ricchezza maggiore o minore del budget inizialmente investito. Comunque sia, in questo modello monoperiodale al tempo $t = T$ l'investitore liquida l'investimento, pertanto non è prevista una riconfigurazione del portafoglio, alla luce dell'osservazione delle realizzazioni delle variabili aleatorie $S_1(T), \ldots, S_M(T)$, se non quella banale $y_1(T) = \cdots = y_M(T) = 0$. Pertanto, in un modello monoperiodale possiamo trascurare la dipendenza temporale della scelta di portafoglio e semplificare le notazioni ponendo $y_1(0) \equiv y_1, \ldots, y_M(0) \equiv y_M$ e $\pi(0) \equiv \pi$. Si tenga però presente che in un modello multiperiodale le componenti del portafoglio saranno dipendenti dal tempo e saranno da considerarsi, per un tempo $t > 0$ riferito al tempo $t = 0$, quali variabili aleatorie $y_1(t) = \cdots = y_M(t)$, in quanto le successive riconfigurazioni del portafoglio da parte dell'investitore dipenderanno dai valori aleatori $S_1(t), \ldots, S_M(t)$ che assumeranno i titoli in portafoglio.

Definizione 66 *Chiamiamo* valore di mercato *(*market value*) o* prezzo (price) *del pacchetto azionario m-esimo in portafoglio al tempo $t = 0$ [risp. $t = T$] il numero [risp. la variabile aleatoria] reale*

$$W_m(y_m, 0) \overset{def}{=} y_m S_m(0) \quad \textit{[resp. } W_m(y_m, T) \overset{def}{=} y_m S_m(T) \textit{]}, \quad \forall m = 1, \ldots, M. \tag{2.79}$$

Da notare che è in effetti

$$W_m(y_m, 0) \equiv W_m(y_m, S_m(0)) \quad [\text{resp. } W_m(y_m, T) \equiv W_m(y_m, S_m(T))\,], \quad \forall m = 1, \dots, M.$$

Tuttavia, mentre $S_m(0)$ e $S_m(T)$, per $m = 1, \dots, M$, possono essere ritenute variabili esogene del modello il cui valore non dipende dalle scelte dell'investitore, nella misura in cui queste scelte non siano da sole in grado di modificare i valori di mercato dei titoli, le variabili $y_1, \dots, y_M$ sono variabili endogene, il cui valore viene proprio scelto dall'investitore secondo le indicazioni del modello. La notazione introdotta nell'Equazione (2.79) si propone di sottolineare questi aspetti.

Osservazione 67 *Si ha $y_m = 0$ se e solo se $W_m(y_m, 0) = 0$, al variare di $m = 1, \dots, M$.*

Osservazione 68 *Per ogni $m \in \{1, \dots, M\}$ tale che $W_m(y_m, 0) = 0$ si ha anche $W_m(y_m, T) = 0$.*

Definizione 69 *Chiamiamo* valore di mercato *o* prezzo *del portafoglio al tempo $t = 0$ [risp. $t = T$] il numero [risp. la variabile aleatoria] reale*

$$W(y_1, \dots, y_M, 0) \stackrel{def}{=} \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, 0) \quad [\text{resp. } W(y_1, \dots, y_M, T) \stackrel{def}{=} \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, T)]$$

Osservazione 70 *L'investimento di un budget $W > 0$ nella composizione del portafoglio comporta che*

$$W(y_1, \dots, y_M, 0) = W > 0.$$

Notare che ciò esclude che si possa avere $W_m(y_m, 0) = 0$ per ogni $m = 1, \dots, M$.

Osservazione 71 *Si ha*

$$W(y_1, \dots, y_M, t) = \sum_{m=1}^{M} y_m S_m(t),$$

per $t = 0, T$.

Definizione 72 *Chiamiamo* variazione del valore *(*value change*) o* rendimento *(*return*) del pacchetto azionario m-esimo in portafoglio nel periodo $[0, T]$ la variabile aleatoria reale*

$$W_m(y_m, T) - W_m(y_m, 0) = y_m (S_m(T) - S_m(0)), \quad \forall m = 1, \dots, M. \tag{2.80}$$

Chiamiamo variazione del valore *o* rendimento *del portafoglio nel periodo $[0, T]$ la variabile aleatoria reale*

$$W(y_1, \dots, y_M, T) - W(y_1, \dots, y_M, 0) = \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, T) - \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m, 0). \tag{2.81}$$

Osservazione 73 *Si ha*

$$W(y_1, \dots, y_M, T) - W(y_1, \dots, y_M, 0) = \sum_{m=1}^{M} y_m (S_m(T) - S_m(0)).$$

Definizione 74 *Chiamiamo* peso *(*weight*) del titolo azionario m-esimo in portafoglio al tempo $t = 0$ il numero reale*

$$w_m \stackrel{def}{=} \frac{W_m(y_m, 0)}{W(y_1, \dots, y_M, 0)}, \quad \forall m = 1, \dots, M. \tag{2.82}$$

Osservazione 75 *Chiaramente,*

$$w_m = \frac{W_m(y_m, 0)}{W} = \frac{y_m S_m(0)}{W}, \tag{2.83}$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$. *In consequenza,*

$$y_m = W \frac{w_m}{S_m(0)}, \tag{2.84}$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$.

Stanti le Equazioni (2.83) e (2.84), la nozione di peso di un titolo azionario in portafoglio consente di rappresentare un portafoglio $\pi \equiv (y_1, \ldots, y_M)$, in termini della M-pla $(w_1, \ldots, w_M)$ dei pesi dei titoli azionari in esso presenti, in modo perfettamente equivalente alla rappresentazione in termini dei pacchetti di titoli. La rappresentazione in termini di pesi si rivelerà peraltro cruciale nella formulazione del modello di Markowitz. Pertanto, d'ora in avanti, considereremo l'identificazione di un portafoglio di titoli con la M-pla dei pesi scrivendo $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$, dove w_m è il peso del titolo azionario m-esimo in portafoglio, per ogni $m = 1, \ldots, M$.

Osservazione 76 *Si ha*

$$\sum_{m=1}^{M} w_m = 1. \tag{2.85}$$

Definizione 77 *Chiamiamo* insieme dei portafogli fattibili *(*set of all feasible portfolios*) l'insieme*

$$\mathbb{H} \equiv \left\{ (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1 \right\}. \tag{2.86}$$

Proposizione 78 *L'insieme* $\mathbb{H}$ *è un iperpiano di* $\mathbb{R}^M$ *passante per i versori degli assi* $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. *Tale iperpiano si caratterizza anche come l'iperpiano ortogonale al vettore* $(1, \ldots, 1)$ *e passante per il punto* $(1/M, \ldots, 1/M)$.
Proof. *Basta ricordare che l'equazione di un iperpiano ortogonale al vettore* $(v_1, \ldots, v_M) \in \mathbb{R}^M$ *e passante per il punto* $\left(x_1^0, \ldots, x_M^0\right) \in \mathbb{R}^M$ *si scrive*

$$\sum_{m=1}^{M} v_m \left(x_m - x_m^0\right) = 0$$

e osservare che l'equazione

$$\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$$

può essere equivalentemente riscritta come

$$\sum_{m=1}^{M} \left(w_m - \frac{1}{M}\right) = 0.$$

□

Definizione 79 *Chiamiamo* tasso di rendimento *(*rate of return*) del titolo azionario* m*-esimo in portafoglio al tempo* $t = T$ *la variabile aleatoria reale*

$$r_m(T) \stackrel{def}{=} \frac{S_m(T) - S_m(0)}{S_m(0)}, \quad \forall m = 1, \ldots, M.$$

Notare che, per come definite, le variabili tasso di rendimento dei titoli azionari in portafoglio hanno momento finito di ordine 2. Inoltre, come già menzionato, nell'adattamento del modello ai dati reali assumeremo che le variabili aleatorie $r_1(T), \ldots, r_M(T)$ siano congiuntamente Gaussiane.

Osservazione 80 *Chiaramente,*

$$r_m(T) = \frac{W_m(y_m, T) - W_m(y_m, 0)}{W_m(y_m, 0)},$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$ *tale che* $W_m(y_m, 0) \neq 0$.

Definizione 81 *Chiamiamo* tasso di rendimento atteso *(*expected rate of return*) o* tasso di rendimento medio *(*mean rate of return*) del titolo azionario* m*-esimo in portafoglio al tempo* $t = T$ *il numero reale*

$$\bar{r}_m(T) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}[r_m(T)], \quad \forall m = 1, \ldots, M.$$

Osservazione 82 *Si ha*

$$\bar{r}_m(T) = \frac{\mathbf{E}[S_m(T)] - S_m(0)}{S_m(0)},$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$.

Definizione 83 *Chiamiamo* tasso di rendimento *del portafoglio al tempo* $t = T$ *la variabile aleatoria reale*

$$r(y_1, \ldots, y_M, T) \stackrel{def}{=} \frac{W(y_1, \ldots, y_M, T) - W(y_1, \ldots, y_M, 0)}{W(y_1, \ldots, y_M, 0)}. \tag{2.87}$$

Osservazione 84 *Chiaramente*

$$r(y_1, \ldots, y_M, T) = \frac{W(y_1, \ldots, y_M, T) - W}{W}.$$

Simmetricamente al caso dei pacchetti e dei pesi dei titoli azionari in portafoglio, la specifica del tempo $t = T$ nelle definizioni e notazione dei tassi di rendimento e dei tassi di rendimento atteso è anche essa ridondante, in quanto in un modello uniperiodale tale variabile non può essere definita se non in riferimento al tempo $t = T$. In questo caso la specifica è motivata per sottolineare che, per un tempo $t > 0$ riferito al tempo $t = 0$, i tassi di rendimento sono da considerarsi variabili aleatorie. Comunque, per semplificare le notazioni, questa specifica verrà eliminata a partire dalla Sottosezione 2.2.1.

Proposizione 85 *Il tasso di rendimento del portafoglio al tempo* $t = T$ *è la somma pesata dei tassi di rendimento dei singoli titoli azionari. Formalmente,*

$$r(y_1, \ldots, y_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T). \tag{2.88}$$

Proof. *Infatti, combinando la (2.81) con la (2.87), abbiamo*

$$\begin{aligned}
&r(y_1,\dots,y_M,T)\\
&= \frac{1}{W(y_1,\dots,y_M,0)}\left(\sum_{m=1}^{M} W_m(y_m,T) - \sum_{m=1}^{M} W_m(y_m,0)\right)\\
&= \frac{1}{W}\sum_{m=1}^{M}\left(W_m(y_m,T) - W_m(y_m,0)\right)\\
&= \frac{1}{W}\sum_{\substack{m=1\\ y_m\neq 0}}^{M}\left(W_m(y_m,T) - W_m(y_m,0)\right)\\
&= \frac{1}{W}\sum_{\substack{m=1\\ y_m\neq 0}}^{M} W_m(y_m,0)\left(\frac{W_m(y_m,T) - W_m(y_m,0)}{W_m(y_m,0)}\right)\\
&= \sum_{\substack{m=1\\ y_m\neq 0}}^{M} \frac{W_m(y_m,0)}{W}\left(\frac{W_m(y_m,T) - W_m(y_m,0)}{W_m(y_m,0)}\right)\\
&= \sum_{\substack{m=1\\ w_m\neq 0}}^{M} w_m r_m(T)\\
&= \sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T).
\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 86 *Stante l'Equazione (2.88) possiamo chiaramente scrivere*

$$r(y_1,\dots,y_M,T) \equiv r(w_1,\dots,w_M,T)$$

Definizione 87 *Chiamiamo* tasso di rendimento atteso *o* tasso di rendimento medio *del portafoglio al tempo $t = T$ il numero reale*

$$\bar{r}(w_1,\dots,w_M,T) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}[r(w_1,\dots,w_M,T)].$$

Definizione 88 *Chiamiamo* varianza *del titolo azionario m-esimo in portafoglio la varianza del suo tasso di rendimento*

$$\sigma_m^2 \stackrel{def}{=} \mathbf{D}^2[r_m(T)], \quad \forall m = 1,\dots,M.$$

Definizione 89 *Chiamiamo* volatilità *del titolo azionario m-esimo in portafoglio la deviazione standard del suo tasso di rendimento*

$$\sigma_m \stackrel{def}{=} \mathbf{D}[r_m(T)], \quad \forall m = 1,\dots,M.$$

Definizione 90 *Chiamiamo* covarianza *dei titoli azionari ℓ-esimo ed m-esimo in portafoglio la covarianza dei loro tassi di rendimento*

$$\sigma_{\ell,m} \stackrel{def}{=} \mathbf{E}[(r_\ell(T) - \bar{r}_\ell(T))(r_m(T) - \bar{r}_m(T))], \quad \forall \ell, m = 1,\dots,M.$$

Notare che tassi di rendimento atteso, varianze, volatilità e covarianze dei titoli in portafoglio vergono formalmente calcolati al tempo $t = 0$ come momenti delle variabili aleatorie $r_1(T),\dots,r_M(T)$. Ma in effetti, come vedremo in seguito, vengono stimati come momenti campionari dei rendimenti desunti dai valori storici dei prezzi dei titoli $S_1,\dots,S_M$, sotto opportune condizioni di ergodicità degli stessi.

Proposizione 91 *Il tasso di rendimento atteso del portafoglio è la somma pesata dei tassi di rendimento attesi dei singoli titoli azionari. Formalmente,*

$$\bar{r}(w_1, \ldots, w_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m(T). \tag{2.89}$$

Proof. *Per la linearità dell'operatore speranza,*

$$\mathbf{E}[r(w_1, \ldots, w_M, T)] = \mathbf{E}\left[\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T)\right] = \sum_{m=1}^{M} w_m \mathbf{E}[r_m(T)] = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m(T).$$

□

Proposizione 92 *Si ha*

$$\sigma_{\ell,m} = \mathbf{E}[r_\ell(T) r_m(T)] - \bar{r}_\ell(T)\bar{r}_m(T)$$

e

$$|\sigma_{\ell,m}| \leqslant \sigma_\ell \sigma_m,$$

per tutti gli $\ell, m = 1, \ldots, M$.

Proof. *Ci limitiamo ad osservare che dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo*

$$\begin{aligned} |\sigma_{\ell,m}| &= |\mathbf{E}[(r_\ell(T) - \bar{r}_\ell(T))(r_m(T) - \bar{r}_m(T))]| \\ &\leqslant \mathbf{E}[(r_\ell(T) - \bar{r}_\ell(T))^2]^{1/2} \mathbf{E}[(r_m(T) - \bar{r}_m(T))^2]^{1/2} \\ &= \sigma_\ell \sigma_m, \end{aligned}$$

per tutti gli $\ell, m = 1, \ldots, M$. □

Definizione 93 *Chiamiamo* correlazione *dei titoli azionari* ℓ*-esimo ed* m*-esimo in portafoglio le correlazioni dei loro tassi di rendimento*

$$\rho_{\ell,m} \stackrel{def}{=} \frac{\sigma_{\ell,m}}{\sigma_\ell \sigma_m}, \quad \forall \ell, m = 1, \ldots, M.$$

Osservazione 94 *Risulta*

$$|\rho_{\ell,m}| \leqslant 1,$$

per tutti gli $\ell, m = 1, \ldots, M$.

Diciamo che i titoli azionari ℓ-esimo ed m-esimo in portafoglio sono *correlati* [risp. *anticorrelati*] se $\rho_{\ell,m} > 0$ [risp. $\rho_{\ell,m} < 0$]. Nei casi limite in cui $\rho_{\ell,m} = 1$ [risp. $\rho_{\ell,m} = -1$] o $\rho_{\ell,m} = 0$ diciamo che i titoli azionari sono *perfettamente correlati* [resp. *perfettamente anticorrelati*] o *scorrelati.*

Definizione 95 *Chiamiamo* matrice di varianza-covarianza *dei titoli azionari in portafoglio la matrice quadrata di ordine* M

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,M} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,M} & \sigma_{2,M} & \ldots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 96 *La matrice* Σ *è simmetrica.*

Osservazione 97 *Si ha*

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1,M}\sigma_1\sigma_M \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2,M}\sigma_2\sigma_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,M}\sigma_1\sigma_M & \rho_{2,M}\sigma_2\sigma_M & \cdots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

Osservazione 98 *Si ha*

$$(w_1, \ldots, w_M)\, \Sigma\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \sigma_{\ell,m}, \tag{2.90}$$

per ogni $(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M$.

Osservazione 99 *In termini delle correlazioni dei titoli azionari in portafoglio, si ha anche*

$$(w_1, \ldots, w_M)\, \Sigma\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \rho_{\ell,m} \sigma_\ell \sigma_\ell, \tag{2.91}$$

per ogni $(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M$.

Definizione 100 *Diciamo che una matrice simmetrica Q di ordine M è* semidefinita positiva *se*

$$(w_1, \ldots, w_M)\, Q\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal \geqslant 0$$

per ogni $(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M$.

Diciamo che Q è definita positiva *se*

$$(w_1, \ldots, w_M)\, Q\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal > 0$$

per ogni $(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M - \{(0, \ldots, 0)\}$.

Proposizione 101 *Una matrice simmetrica Q è semidefinita [resp. definita] positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi [resp. strettamente positivi].*

Proof. *E' ben noto (cfr. teorema spettrale) che la matrice simmetrica Q ammette una base ortonormale di autovettori, sia essa $F \equiv \{f_1, \ldots . f_M\}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ gli autovalori corrispondenti agli autovettori $f_1, \ldots . f_M$. Risulta allora*

$$M_F^E(I)\, Q M_E^F(I) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_M \end{pmatrix} \equiv \Lambda,$$

dove $M_F^E(I)$ [resp. $M_E^F(I)$] è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $E \equiv \{e_1, \ldots . e_M\}$ alla base F [resp. dalla base F alla base canonica E]. Si ha inoltre

$$M_E^F(I) = M_F^E(I)^{-1} = M_E^F(I)^\intercal$$

In conseguenza,

$$\begin{aligned}(w_1, \ldots, w_M)\, Q\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal &= (w_1, \ldots, w_M)\, M_E^F(I)^\intercal \Lambda M_E^F(I)\, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal \\ &= (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_M)\, \Lambda\, (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_M)^\intercal \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^{M} \lambda_m \tilde{w}_m^2,\end{aligned}$$

dove $(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_M) \equiv (w_1, \ldots, w_M) \, M_E^F (I)^\intercal$. *È allora immediato rendersi conto che* Q *è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi. Per di più, avendosi*

$$(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_M) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow (w_1, \ldots, w_M) = (0, \ldots, 0),$$

Q *è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi.* □

Proposizione 102 *La matrice* Σ *è semidefinita positiva. Inoltre* Σ *è definita positiva purchè il tasso di rendimento di nessuno dei titoli azionari in portafoglio non sia combinazione affine dei restanti, ossia purchè non esista* $m_0 \in \{1, \ldots, M\}$ *tale che*

$$r_{m_0}(T) \stackrel{a.s.}{=} \alpha + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^{M} \beta_m r_m(T),$$

per opportuni $\alpha, \beta_m \in \mathbb{R}$, *con* $m = 1, \ldots, M$, $m \neq m_0$.
Proof. *Per la Osservazione (98) e per le proprietà dell'operatore speranza, possiamo scrivere*

$$\begin{aligned}
&(w_1, \ldots, w_M) \, \Sigma \, (w_1, \ldots, w_M)^\intercal \\
&= \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \sigma_{\ell,m} \\
&= \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \mathbf{E}\left[(r_m(T) - \mathbf{E}[r_m(T)])^2\right] + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \mathbf{E}\left[(r_\ell(T) - \mathbf{E}[r_\ell(T)])(r_m(T) - \mathbf{E}[r_m(T)])\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{m=1}^{M} w_m^2 (r_m(T) - \mathbf{E}[r_m(T)])^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m (r_\ell(T) - \mathbf{E}[r_\ell(T)])(r_m(T) - \mathbf{E}[r_m(T)])\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{m=1}^{M} w_m (r_m(T) - \mathbf{E}[r_m(T)])\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T) - \sum_{m=1}^{M} w_m \mathbf{E}[r_m(T)]\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T) - \mathbf{E}\left[\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T)\right]\right)^2\right] \\
&= \mathbf{D}^2\left[\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T)\right] \\
&= \mathbf{D}^2\left[r(w_1, \ldots, w_M, T)\right]
\end{aligned}$$

per ogni $(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M$. *Ciò comporta che la matrice* Σ *sia semidefinita positiva. Inoltre perchè* Σ *non sia definita positiva dovrebbe esistere* $(w_1^*, \ldots, w_M^*) \in \mathbb{R}^M - \{(0, \ldots, 0)\}$ *tale che*

$$\mathbf{D}^2\left[r(w_1^*, \ldots, w_M^*, T)\right] = \mathbf{D}^2\left[\sum_{m=1}^{M} w_m^* r_m(T)\right] = 0.$$

Ciò sarebbe possibile solo se la variabile aleatoria $\sum_{m=1}^{M} w_m^* r_m(T)$ *fosse una Dirac concentrata in qualche* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se così fosse, potremmo scrivere*

$$\sum_{m=1}^{M} w_m^* r_m(T) \overset{a.s.}{=} \alpha$$

ed essendo $(w_1^*, \ldots, w_M^*) \neq (0, \ldots, 0)$ *potremmo trovare* $m_0 \in \{1, \ldots, M\}$ *tale che* $w_{m_0}^* \neq 0$. *Posto allora* $\beta_m = -w_m^*/w_{m_0}^*$ *si avrebbe*

$$r_{m_0}(T) \overset{a.s.}{=} \alpha + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^{M} \beta_m r_m(T),$$

come asserito. □

Definizione 103 *Diciamo che l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è* non singolare *[resp.* singolare*] se la loro matrice di varianza-covarianza è [risp. non è] definita positiva.*

Definizione 104 *Diciamo che un sottoinsieme* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^M$ *è convesso se*

$$\alpha \left(x_1, \ldots, x_M\right) + (1 - \alpha) \left(y_1, \ldots, y_M\right) \in \mathbb{S}$$

per ogni $\left(x_1, \ldots, x_M\right), \left(y_1, \ldots, y_M\right) \in \mathbb{S}$ *ed ogni* $\alpha \in [0, 1]$.

Osservazione 105 *Ogni varietà lineare di* $\mathbb{R}^M$ *è convessa. In particolare, l'insieme dei portafogli fattibili* $\mathbb{H}$ *(cfr Definition* **??***) è un convesso di* $\mathbb{R}^M$.

Osservazione 106 *L'intersezione di un qualsiasi numero finito di sottoinsiemi convessi è convessa.*

Definizione 107 *Diciamo che una funzione* $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è* convessa *se*

$$f\left(\alpha \left(x_1, \ldots, x_M\right) + (1 - \alpha) \left(y_1, \ldots, y_M\right)\right) \leqslant \alpha f \left(x_1, \ldots, x_M\right) + (1 - \alpha) f \left(y_1, \ldots, y_M\right)$$

per ogni $\left(x_1, \ldots, x_M\right), \left(y_1, \ldots, y_M\right) \in \mathbb{R}^M$ *ed ogni* $\alpha \in [0, 1]$. *Diciamo che* $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è* strettamente convessa *se*

$$f\left(\alpha \left(x_1, \ldots, x_M\right) + (1 - \alpha) \left(y_1, \ldots, y_M\right)\right) < \alpha f \left(x_1, \ldots, x_M\right) + (1 - \alpha) f \left(y_1, \ldots, y_M\right)$$

per ogni $\left(x_1, \ldots, x_M\right), \left(y_1, \ldots, y_M\right) \in \mathbb{R}^M$ *tali che* $\left(x_1, \ldots, x_M\right) \neq \left(y_1, \ldots, y_M\right)$ *ed ogni* $\alpha \in (0, 1)$.

Teorema 108 *Sia* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^M$ *convesso e sia* $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *convessa allora o il problema di minimizzazione vincolata*

$$\min_{(x_1, \ldots, x_M) \in \mathbb{S}} \left\{ f\left(x_1, \ldots, x_M\right) \right\}$$

non ha soluzione o una soluzione locale è anche globale. Inoltre se $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è strettamente convessa allora esiste un'unica soluzione globale.*
Proof. *L'enunciato è un teorema fondamentale di analisi convessa.* □

Teorema 109 *La forma quadratica* $\sigma^2 : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$\sigma^2 \left(w_1, \ldots, w_M\right) \overset{def}{=} \left(w_1, \ldots, w_M\right) \Sigma \left(w_1, \ldots, w_M\right)^{\intercal}, \quad \forall \left(w_1, \ldots, w_M\right) \in \mathbb{R}^M \tag{2.92}$$

è convessa. Inoltre $\sigma^2 : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è strettamente convessa se e solo se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare.*
Proof. *L'enunciato è una semplice riformulazione di una ben nota proprietà delle forme quadratiche semidefinite positive e definite positive (cfr. Proposizione 102).* □

Definizione 110 *Chiamiamo* rischio *del portafoglio, e lo denotiamo con σ^2, la varianza del suo tasso di rendimento. In simboli,*

$$\sigma^2(w_1, \dots, w_M) \overset{def}{=} \mathbf{D}^2[r(w_1, \dots, w_M, T)].$$

Osservazione 111 *Si ha*

$$\sigma^2(w_1, \dots, w_M) = \sum_{\ell,m=1}^{M} w_\ell w_m \sigma_{\ell,m} = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \rho_{\ell,m} \sigma_\ell \sigma_m \tag{2.93}$$

per ogni $(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{H}$, dove $\mathbb{H}$ è l'insieme dei portafogli fattibili.
Proof. *Dalla prova della Proposizione (**??**) abbiamo che*

$$\sigma^2(w_1, \dots, w_M) = (w_1, \dots, w_M)\, \Sigma\, (w_1, \dots, w_M)^\intercal.$$

L'Equazione (2.93) è allora immediata conseguenza dell'Equazione (2.91). □

Definizione 112 *Chiamiamo* volatilità *del un portafoglio, e la denotiamo con σ, la deviazione standard del suo tasso di rendimento. In simboli*

$$\sigma(w_1, \dots, w_M) \overset{def}{=} \mathbf{D}[r(w_1, \dots, w_M, T)].$$

Osservazione 113 *Si ha*

$$\sigma = \left(\sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \rho_{\ell,m} \sigma_\ell \sigma_m \right)^{1/2}.$$

La struttura del rischio di un portafoglio suggerisce che il valore dello stesso può essere significativamente modificato mediante una scelta opportuna dei pesi dei titoli allocati in portafoglio in relazione alle loro covarianze.

Esempio 114 *Supponiamo di allocare in un portafoglio con lo stesso peso M titoli azionari aventi tutti lo stesso rendimento atteso $\bar{r}$, la stessa volatilità σ e a due a due scorrelati. Cioè tali che*

$$w_m = 1/M, \qquad \bar{r}_m(T) = \bar{r}, \qquad \sigma_m = \sigma,$$

per ogni $m = 1, \dots, M$ e

$$\rho_{\ell,m} = 0,$$

per ogni $\ell, m = 1, \dots, M$ tali che $\ell \neq m$. Abbiamo allora

$$\bar{r}(w_1, \dots, w_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m(T) = \bar{r} \sum_{m=1}^{M} w_m = \bar{r},$$

*ossia **il tasso di rendimento atteso del portafoglio è pari al tasso di rendimento atteso di ciascuno dei titoli** in portafoglio. Risulta inoltre*

$$\sigma^2(w_1, \dots, w_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \rho_{\ell,m} \sigma_\ell \sigma_m = \sum_{m=1}^{M} \frac{\sigma_m^2}{M^2} = \frac{\sigma^2}{M},$$

*ossia **il rischio** [resp. **volatilità**] **del portafoglio è ridotta del fattore** M [resp. $\sqrt{M}$] **rispetto alla varianza** [resp. **volatilità**] **di ciascuno dei titoli** in portafoglio.*

Questo elementare caso limite presenta l'idea fondamentale di diversificazione nell'allocazione dei titoli in un portafoglio: **la diversificazione può ridurre il rischio di un portafoglio mantenendo inalterato il tasso di rendimento atteso**.

2.2.1 Primo problema di configurazione di portafoglio

Il primo problema configurazione di portafoglio si occupa della determinazione dei pesi dei portafogli di minima volatilità, ossia di minimo rischio, e della determinazione dei pesi dei portafogli di minima volatilità che realizzino un tasso di rendimento atteso assegnato. Come anticipato, per alleggerire le notazioni, da questa sezione scriveremo il tasso il tasso di rendimento [resp. rendimento atteso] dell'm-esimo titolo in portafoglio nella forma

$$r_m(T) \equiv r_m \qquad [\text{resp. } \bar{r}_m(T) \equiv \bar{r}_m],$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$. In conseguenza, scriveremo il tasso di rendimento [resp. rendimento atteso] di un portafoglio $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$ nella forma

$$r(w_1, \ldots, w_M) \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m r_m \qquad [\text{resp. } \bar{r}(w_1, \ldots, w_M) \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m]. \tag{2.94}$$

Definizione 115 *Chiamiamo portafoglio di* minima volatilità *o di* minimo rischio *ogni portafoglio $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M$ soluzione del problema di ottimizzazione vincolata*

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}} \{\sigma(w_1, \ldots, w_M)\}, \tag{2.95}$$

o nell'equivalente problema, che presenta qualche vantaggio tecnico grazie alla forma della funzione obiettivo,

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}} \{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)\}, \tag{2.96}$$

essendo $\mathbb{H}$ l'insieme dei portafogli fattibili (cfr. Definizione 77).

Teorema 116 *Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare esiste un'unico portafoglio di minimo rischio.*
Proof. *Dall'Osservazione 105 sappiamo che $\mathbb{H}$ è un convesso di $\mathbb{R}^M$. D'altra parte il Teorema **??** assicura che la forma quadratica*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + \sum_{\substack{\ell,m=1 \\ \ell<m}}^{M} w_\ell w_m \rho_{\ell,m} \sigma_\ell \sigma_m$$

è strettamente convessa. Il risultato è allora un'applicazione del Teorema 108. □

Dal punto di vista tecnico la determinazione del portafoglio di minimo rischio assoluto si affronta con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si introduce cioè la funzione lagrangiana

$$L(w_1, \ldots, w_M, \lambda) = \frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M) - \lambda \left(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1 \right),$$

e si considera il problema della ricerca dei suoi punti estremali, ossia delle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial w_1} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda) &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \tfrac{\partial}{\partial w_M} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda) &= 0, \\ \tfrac{\partial}{\partial \lambda} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Questo si esplicita come

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 w_1 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq 1}}^{M} w_m \rho_{1,m}\sigma_1\sigma_m - \lambda &= 0,\\
\vdots &= \vdots\\
\sigma_M^2 w_M + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq M}}^{M} w_m \rho_{M,m}\sigma_M\sigma_m - \lambda &= 0,\\
\textstyle\sum_{m=1}^{M} w_m &= 1.
\end{aligned} \tag{2.98}
$$

e costituisce un sistema non omogeneo di $M+1$ equazioni in $M+1$ incognite. L'ipotesi di non singolarità dell'insieme dei titoli azionari in portafoglio assicura sia che il Sistema (2.98) ammetta un'unica soluzione, sia che tale soluzione sia effettivamente il minimo assoluto cercato.

A titolo d'esempio, osserviamo che nel caso di un portafoglio con due titoli azionari S_1 e S_2 la matrice dei coefficienti del Sistema (2.98) è data da

$$
A \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & -1 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

con

$$
\det(A) = \sigma_1^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.
$$

D'altra parte, la matrice di varianza-covarianza dei titoli S_1 e S_2 è data da

$$
\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
$$

e si ha

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \det(A).
$$

per cui se Σ è definita positiva otteniamo $\det(A) > 0$. Notare che

$$
\det(A) = \sum_{j,k=1}^{2} (-1)^{j+k} |\Sigma_{j,k}|,
$$

dove $\Sigma_{j,k}$ è la sottomatrice di Σ ottenuta cancellando la j-esima riga e la k-esima colonna, per $j,k = 1,2$, e $|\Sigma_{j,k}| \equiv \det(\Sigma_{j,k})$. Nel caso di un portafoglio con tre titoli azionari S_1, S_2 e S_3 la matrice dei coefficienti del Sistema (2.98) è data da

$$
A \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & -1 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & -1 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

con

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho_{1,2}^2\right) + \sigma_1^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{1,3}^2\right) + \sigma_2^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{2,3}^2\right)\\
&\quad + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\left(\sigma_1\left(\rho_{1,2}\rho_{1,3}-\rho_{2,3}\right) + \sigma_2\left(\rho_{1,2}\rho_{2,3}-\rho_{1,3}\right) + \sigma_3\left(\rho_{1,3}\rho_{2,3}-\rho_{1,2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

D'altra parte, la matrice di varianza-covarianza dei titoli S_1, S_2 e S_3 è data da

$$
\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix},
$$

i minori principali di Σ sono

$$
\begin{aligned}
|\Sigma_{1,1}| &= \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \sigma_2^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{2,3}^2\right) \\
|\Sigma_{2,2}| &= \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{1,3}^2\right), \\
|\Sigma_{3,3}| &= \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho_{1,2}^2\right),
\end{aligned}
$$

inoltre abbiamo

$$
\begin{aligned}
|\Sigma_{1,2}| &= \begin{matrix} \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{matrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\left(\rho_{1,2}-\rho_{1,3}\rho_{2,3}\right), \\
|\Sigma_{1,3}| &= \begin{matrix} \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \end{matrix} = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_3\left(\rho_{1,2}\rho_{2,3}-\rho_{1,3}\right) \\
|\Sigma_{2,3}| &= \begin{matrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \end{matrix} = \sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\left(\rho_{2,3}-\rho_{1,2}\rho_{1,3}\right)
\end{aligned}
$$

per cui possiamo ancora scrivere

$$
\det(A) = |\Sigma_{1,1}| + |\Sigma_{2,2}| + |\Sigma_{2,2}| + 2\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{3} (-1)^{j+k}\,|\Sigma_{j,k}| = \sum_{j,k=1}^{3} (-1)^{j+k}\,|\Sigma_{j,k}|,
$$

essendo sempre $\Sigma_{j,k}$ la sottomatrice di Σ ottenuta cancellando la j-esima riga e la k-esima colonna, per $j,k=1,2$, ed essendo $|\Sigma_{j,k}| \equiv \det(\Sigma_{j,k})$. Chiaramente,

$$
|\Sigma_{j,k}| = |\Sigma_{k,j}|,
$$

per ogni $j,k=1,2,3$. e il polinomio caratteristico è dato da

$$
\det(\Sigma - \lambda I) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c
$$

dove

$$
\begin{aligned}
a &= -\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) = -\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right) = -\operatorname{trace}(\Sigma), \\
b &= \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho_{1,2}^2\right) + \sigma_1^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{1,3}^2\right) + \sigma_2^2\sigma_3^2\left(1-\rho_{2,3}^2\right) = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}
$$

e

$$
c = -\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2\left(1+2\rho_{1,2}\rho_{1,3}\rho_{2,3}-\rho_{1,2}^2-\rho_{1,3}^2-\rho_{2,3}^2\right) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\det(\Sigma).
$$

...da completare...

Definizione 117 *Chiamiamo* rendimento atteso *[resp.* volatilità*] del portafoglio di minimo rischio il numero reale [risp. il numero reale positivo]*

$$
\bar{r}^* \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m^\star \bar{r}_m \qquad \textit{[resp. } \sigma^* \equiv \sigma(w_1^*,\dots,w_M^*)\textit{]},
$$

essendo $(w_1^*,\dots,w_M^*)$ *la* M*-pla di pesi caratterizzante il portafoglio di minimo rischio.*

Definizione 118 *Comunque fissato* $\bar{r}\in\mathbb{R}$*, chiamiamo* insieme dei portafogli fattibili di rendimento atteso $\bar{r}\in\mathbb{R}$ *l'insieme* $\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_{\bar{r}}$ *essendo* $\mathbb{H}$ *l'insieme dei portafogli fattibili ed essendo*

$$
\mathbb{K}_{\bar{r}} \equiv \left\{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m\bar{r}_m = \bar{r}\right\}. \tag{2.99}
$$

Proposizione 119 *L'insieme* $\mathbb{K}_{\bar{r}}$ *è un iperpiano di* $\mathbb{R}^M$. *Tale iperpiano si caratterizza come l'iperpiano ortogonale al vettore* $(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_M)$ *e passante per il punto* $(\bar{r}/M\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}/M\bar{r}_M)$. *Conseguentemente l'insieme* $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_r$ *è una varietà lineare di dimensione* $M - 2$.
Proof. *Basta osservare che l'equazione*

$$\sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m = \bar{r}$$

è equivalente all'equazione

$$\sum_{m=1}^{M} \bar{r}_m \left(w_m - \frac{\bar{r}}{M\bar{r}_m} \right) = 0.$$

□

Definizione 120 *Comunque fissato* $\bar{r} \in \mathbb{R}$, *chiamiamo portafoglio di* minima volatilità *o* minimo rischio dato il rendimento atteso $\bar{r}$ *il portafoglio* $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$ *caratterizzato dalla* M*-pla di pesi soluzione del problema di ottimizzazione vincolata*

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}} \{\sigma(w_1, \ldots, w_M)\}, \tag{2.100}$$

o dell'equivalente problema

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}} \{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)\}. \tag{2.101}$$

essendo $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}$ *l'insieme dei portafogli fattibili di assegnato tasso di rendimento atteso* $\bar{r}$ *(cfr Definizioni 77 e 118).*

Teorema 121 *Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare esiste un'unico portafoglio di minimo rischio per ogni assegnato tasso di rendimento atteso* $\bar{r}$.
Proof. *Stante la Proposizione 119 e l'Osservazione 106 il vincolo* $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}$ *è convesso. La dimostrazione dell'esistenza e unicità del portafoglio di minimo rischio dato il rendimento atteso* $\bar{r}$ *si completa allora in perfetta analogia con la dimostrazione del Theorem 116* □

Similmente al caso della determinazione del portafoglio di minimo rischio assoluto, la determinazione del portafoglio di minimo rischio e avente un dato rendimento $\bar{r}$ si affronta con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si introduce la funzione lagrangiana

$$L(w_1, \ldots, w_M, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M) - \lambda_1 \left(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m - \bar{r} \right),$$

e si considera il problema della ricerca dei suoi punti estremali, ossia delle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial w_1} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda_1, \lambda_2) &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \tfrac{\partial}{\partial w_M} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda_1, \lambda_2) &= 0, \\ \tfrac{\partial}{\partial \lambda_1} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda_1, \lambda_2) &= 0, \\ \tfrac{\partial}{\partial \lambda_2} L(w_1, \ldots, w_M, \lambda_1, \lambda_2) &= 0, \end{aligned} \tag{2.102}$$

che si esplicita come

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 w_1 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq 1}}^{M} w_m \rho_{1,m}\sigma_1\sigma_m - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_1 &= 0, \\
\vdots &= \vdots \\
\sigma_M^2 w_M + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq M}}^{M} w_m \rho_{M,m}\sigma_M\sigma_m - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_M &= 0, \\
\textstyle\sum_{m=1}^{M} w_m &= 1, \\
\textstyle\sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m &= \bar{r},
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

e costituisce un sistema lineare non omogeneo di $M + 2$ equazioni in $M + 2$ incognite per il quale valgono esattamente le stesse considerazioni relative al sistema per la determinazione del portafoglio di minimo rischio assoluto.

Anche in questo caso, a titolo d'esempio, osserviamo che nel caso di un portafoglio con due titoli azionari S_1 e S_2 la matrice dei coefficienti del Sistema (2.103) è data da

$$
A \equiv \begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & -1 & -\bar{r}_1 \\
\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & -1 & -\bar{r}_2 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
\bar{r}_1 & \bar{r}_2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

con

$$
\det(A) = \bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_2 + \bar{r}_2^2.
$$

Nel caso di un portafoglio con tre titoli azionari la matrice dei coefficienti del Sistema (2.103) è data da

$$
A \equiv \begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & -1 & -\bar{r}_1 \\
\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & -1 & -\bar{r}_2 \\
\rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & -1 & -\bar{r}_3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\det(A) = {}& \sigma_1^2 (\bar{r}_2 - r_3)^2 + \sigma_2^2 (\bar{r}_1 - r_3)^2 + \sigma_3^2 (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 \\
& - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} (\bar{r}_1 - \bar{r}_3)(\bar{r}_2 - \bar{r}_3) + 2\sigma_1\sigma_3\rho_{1,3} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)(\bar{r}_2 - \bar{r}_3) - 2\sigma_2\sigma_3\rho_{2,3} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)(\bar{r}_1 - \bar{r}_3).
\end{aligned}
$$

Considerata la funzione $\Pi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definita ponendo

$$
\Pi(w_1, \ldots, w_M) \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma(w_1, \ldots, w_M), \bar{r}(w_1, \ldots, w_M)),
$$

l'insieme $\Pi(\mathbb{H})$, immagine dell'iperpiano $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^M$ mediante Π, è un sottoinsieme di $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ che rappresenta tutte le coppie di punti $(\sigma, \bar{r})$ che costituiscono il profilo di rischio-rendimento atteso di tutti i portafogli azionari fattibili. Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare, l'esistenza di un unico portafoglio di minimo rischio, caratterizzato dal profilo di rischio-rendimento atteso $(\sigma^*, \bar{r}^*)$, assicura che l'insieme $\Pi(\mathbb{H})$ è interamente contenuto nel semipiano di $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definito come

$$
\{(\sigma, \bar{r}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \sigma \geqslant \sigma^*\}.
$$

Definizione 122 *Chiamiamo* sottoinsieme dei portafogli azionari di minimo rischio *dell'insieme dei portafogli azionari fattibili l'insieme dei portafogli* $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$ *soluzioni del Problema (2.100) al variare di* $\bar{r} \in \mathbb{R}$.

Da notare che, per come è costruito, l'insieme dei portafogli azionari di minimo rischio può contenere portafogli che abbiano un rendimento atteso minore del rendimento atteso del portafoglio di minimo rischio ma, paradossalmente, un rischio maggiore! Infatti anche per $\bar{r} < \bar{r}^*$ esiste, in generale, un'unica soluzione del Problema (2.100), che dovrà soddisfare la condizione $\sigma > \sigma^*$. Ovviamente, dal punto di vista di un investitore, questi portafogli non sono di alcun interesse. I restanti portafogli dell'insieme di minimo rischio possono avere interesse per un investitore e costituiscono la cosiddetta frontiera efficiente dell'insieme dei portafogli di minimo rischio. Precisamente

Definizione 123 *Chiamiamo* frontiera efficiente dell'insieme dei portafogli azionari di minimo rischio *l'insieme dei portafogli $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$ soluzioni del Problema (2.100) al variare di $\bar{r} \geqslant \bar{r}^*$, essendo $\bar{r}^*$ il rendimento atteso del portafoglio di minimo rischio.*

Definizione 124 *Chiamiamo* portafoglio azionario efficiente o*gni portafoglio azionario della frontiera efficiente.*

Proposizione 125 *Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare, l'insieme*

$$\Pi\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right) = \{(\sigma, \bar{r}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \sigma = \sigma(w_1, \ldots, w_M),\ \bar{r} = \bar{r}(w_1, \ldots, w_M), \quad \forall\, (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\}$$

è un convesso di $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, per ogni $\bar{r} \in \mathbb{R}$.

Proof. *Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare, la forma quadratica $\sigma^2 : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ definita dall'Equazione (**??**) è definita positiva e strettamente convessa. Pertanto, l'immagine $\sigma^2(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}})$ del convesso $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}$ di $\mathbb{R}^M$ è un convesso di $\mathbb{R}_+$. D'altra parte, un convesso di $\mathbb{R}_+$ è necessariamente un intervallo. Quindi $\sigma^2(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}) \equiv \mathbb{I}$, per un opportuno intervallo $\mathbb{I}$ di $\mathbb{R}_+$, e*

$$\sigma\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right) = \sqrt{\sigma^2(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}})} = \sqrt{\mathbb{I}}.$$

Ora la funzione radice quadrata $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione continua. Ne segue che $\sqrt{\mathbb{I}} \equiv \mathbb{J}$ è anch'esso un intervallo di $\mathbb{R}_+$ e quindi un convesso. Si ha poi chiaramente che $\mathbb{J} \times \{\bar{r}\}$ è un convesso di $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, per ogni $r \in \mathbb{R}$. In definitiva, poichè

$$\bar{r}(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}) = \bar{r},$$

l'insieme

$$\Pi\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right) = \{(\sigma, \bar{r}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \sigma \in \sigma\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right),\ \bar{r} \in \bar{r}(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}),\} = \sigma\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right) \times \{\bar{r}\}$$

è un convesso di $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. $\square$

Osservazione 126 *Se l'insieme dei titoli in portafoglio è non singolare, denotato con $(\sigma_0, \bar{r}_0)$ il profilo rischio-rendimento del portafoglio azionario di minimo rischio dato il rendimento $\bar{r}_0$ si ha*

$$\sigma \geqslant \sigma_0 \quad e \quad \bar{r} = \bar{r}_0,$$

per ogni $(\sigma, \bar{r}) \in \Pi\left(\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\right)$.

Qualora si debbano determinare diverse M-ple di pesi con cui comporre portafogli efficienti corrispondenti a diversi rendimenti attesi, piuttosto che affronare la risoluzione di diverse copie del Sistema (2.103), ciascuna delle quali corrispondente a uno dei rendimenti attesi cui siamo interessati, è possibile applicare una procedura che produce un significativo risparmio computazionale. Si considera il sistema di M equazioni in $M+2$ incognite ottenuto da (2.103) sopprimendo le ultime due equazioni. Ossia il sistema

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 w_1 + \sum_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{M} w_m\rho_{1,m}\sigma_1\sigma_m - \lambda_1 - \lambda_2\bar{r}_1 &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_M^2 w_M + \sum_{\substack{m=1\\m\neq M}}^{M} w_m\rho_{M,m}\sigma_M\sigma_m - \lambda_1 - \lambda_2\bar{r}_M &= 0, \end{aligned} \tag{2.104}$$

Quindi, scegliendo due coppie indipendenti di valori per λ_1 e λ_2 in (2.104), ad esempio ponendo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ si eliminano 2 incognite da (2.104) e si ottengono rispettivamente i sistemi di M equazioni in M incognite

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 w_1 + \sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq 1}}^{M} w_\ell\rho_{1,\ell}\sigma_1\sigma_\ell &= \bar{r}_1, \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_M^2 w_M + \sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq M}}^{M} w_\ell\rho_{M,\ell}\sigma_M\sigma_\ell &= \bar{r}_M, \end{aligned} \tag{2.105}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 w_1 + \sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq 1}}^{M} w_\ell\rho_{1,\ell}\sigma_1\sigma_\ell &= 1, \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_M^2 w_M + \sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq M}}^{M} w_\ell\rho_{M,\ell}\sigma_M\sigma_\ell &= 1. \end{aligned} \tag{2.106}$$

La risoluzione di questi due sistemi porta alla determinazione di due M-ple di pesi siano esse $(w_1^{(j)}, \dots, w_M^{(j)})$ per $j = 1, 2$, che non sono, in generale, soluzioni del Sistema (2.103), ma che possono essere trasformate in soluzioni di (2.103) con delle semplici modifiche. Infatti, considerate le M-ple $(\hat{w}_1^{(j)}, \dots, \hat{w}_M^{(j)})$ per $j = 1, 2$, definite ponendo

$$\hat{w}_m^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_m^{(j)}}{\sum_{\ell=1}^{M} w_\ell^{(j)}}, \quad m = 1, \dots, M,$$

e sostituendo tali M-ple ai pesi che figurano come incognite nel Sistema (2.103) è immediato verificare che l'equazione

$$\sum_{m=1}^{M} \hat{w}_m^{(j)} - 1 = 0$$

è soddisfatta per ogni $j = 1, 2$, mentre l'equazione

$$\sum_{m=1}^{M} \hat{w}_m^{(j)}\bar{r}_m - \bar{r} = 0$$

fornisce di fatto i rendimenti

$$\bar{r}^{(j)} \equiv \sum_{m=1}^{M} \frac{w_m^{(j)}}{\sum_{\ell=1}^{M} w_\ell^{(j)}}\bar{r}_m, \quad j = 1, 2. \tag{2.107}$$

Inoltre, i primi membri delle prime M equazioni assumono la forma

$$\begin{aligned}
&\sigma_m^2 \hat{w}_m^{(j)} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{M} \hat{w}_\ell^{(j)} \rho_{m,\ell}\sigma_m\sigma_\ell - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m \\
&= \sigma_m^2 \frac{w_m^{(j)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(j)}} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{M} \frac{w_\ell^{(j)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(j)}} \rho_{m,\ell}\sigma_m\sigma_\ell - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m \\
&= \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(j)}} \left(\sigma_m^2 w_m^{(j)} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{M} w_\ell^{(j)} \rho_{m,\ell}\sigma_m\sigma_\ell \right) - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m,
\end{aligned}$$

per ogni $j = 1, 2$ e ogni $m = 1, \ldots, M$. Pertanto, stanti le (2.105) e (2.106), otteniamo

$$\sigma_m^2 \hat{w}_m^{(1)} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{M} \hat{w}_\ell^{(1)} \rho_{m,\ell}\sigma_m\sigma_\ell - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m = \frac{\bar{r}_m}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(1)}} - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m \tag{2.108}$$

e

$$\sigma_m^2 \hat{w}_m^{(2)} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq m}}^{M} \hat{w}_\ell^{(2)} \rho_{m,\ell}\sigma_m\sigma_\ell - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(2)}} - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_m, \tag{2.109}$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$ e le (2.108), (2.109) si annullano scegliendo

$$\lambda_1^{(1)} = 0, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(1)}},$$

e

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(2)}}, \quad \lambda_2^{(2)} = 0,$$

rispettivamente. In definitiva, questa procedura conduce alla determinazione delle soluzioni

$$(\hat{w}_1^{(1)}, \ldots, \hat{w}_M^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) \equiv \left(\frac{w_1^{(1)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(1)}}, \ldots, \frac{w_M^{(1)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(1)}}, 0, \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(1)}} \right) \tag{2.110}$$

e

$$(\hat{w}_1^{(2)}, \ldots, \hat{w}_M^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) \equiv \left(\frac{w_1^{(2)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(2)}}, \ldots, \frac{w_M^{(2)}}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(2)}}, \frac{1}{\sum_{\ell=1}^M w_\ell^{(2)}}, 0 \right) \tag{2.111}$$

del Sistema (2.103) corrispondenti ai rendimenti attesi $\bar{r}^{(j)}$ dati dalla (2.107), per $j = 1, 2$. Da notare che la seconda delle soluzioni così determinate soddisfa di fatto il Sistema (2.98) e individua pertanto il portafoglio di minimo rischio assoluto. Una volta determinate le M-ple di pesi $(\hat{w}_1^{(j)}, \ldots, \hat{w}_M^{(j)})$ che individuano i portafogli efficienti di rendimenti attesi $\bar{r}^{(j)}$, per $j = 1, 2$, la costruzione della M-pla di pesi che individua il portafoglio di minimo rischio per un rendimento atteso $\bar{r}$ si effettua nel seguente modo: si determina $\alpha \in \mathbb{R}$ soluzione dell'equazione

$$\bar{r} = \alpha \bar{r}^{(1)} + (1 - \alpha) \bar{r}^{(2)}$$

ed alla luce delle precedenti considerazioni, si può facilmente provare che la M-pla $(w_1, \ldots, w_M)$ definita ponendo

$$w_m \equiv \alpha \hat{w}_m^{(1)} + (1 - \alpha) \hat{w}_m^{(2)}, \quad m = 1, \ldots, M$$

caratterizza il portafoglio di minimo rischio e rendimento atteso $\bar{r}$.

Ribadiamo che la procedura considerata, applicazione del "Teorema dei Due Fondi" che esporremo di seguito, è particolarmente utile nel caso in cui sia necessario determinare i portafogli efficienti corrispondenti a diversi rendimenti. In questo caso, il risparmio computazionale è veramente significativo.

Teorema dei due fondi

Consideriamo un insieme di M titoli che dividiamo in due sottoinsiemi contenenti M_1 ed M_2 titoli rispettivamente. Denotiamo con $\bar{r}_1^{(1)}, \bar{r}_2^{(1)}, \ldots, \bar{r}_{M_1}^{(1)}$ [risp. $\sigma_{1,1}^{(1)}, \sigma_{1,2}^{(1)}, \ldots, \sigma_{M^{(1)},M^{(1)}}^{(1)}$] i rendimenti attesi [risp. le covarianze] dei titoli contenuti nel primo sottoinsieme e con $\bar{r}_1^{(2)}, \bar{r}_2^{(2)}, \ldots, \bar{r}_{M_2}^{(2)}$ [risp. $\sigma_{1,1}^{(2)}, \sigma_{1,2}^{(2)}, \ldots, \sigma_{M^{(2)},M^{(2)}}^{(2)}$] i rendimenti attesi [risp. le covarianze] dei titoli contenuti nel secondo sottoinsieme.

Proposizione 127 *Supponiamo di avere individuato un portafoglio del sottoinsieme di minimo rischio dell'insieme dei portafogli ammissibili generati dai titoli dell'insieme M_j e sia tale portafoglio $\pi_j \equiv (w_1^{(j)}, \ldots, w_{M_j}^{(j)})$, per $j = 1, 2$. Allora ogni portafoglio del sottoinsieme di minimo rischio dell'insieme dei portafogli ammissibili generati dai titoli dell'insieme M è ottenibile nella forma*

$$\alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proof. *Fissato $\bar{r} \in \mathbb{R}$ consideriamo le equazioni*

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M} w_m \sigma_{1,m} - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_1 &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \sum_{m=1}^{M} w_m \sigma_{M,m} - \lambda_1 - \lambda_2 \bar{r}_M &= 0, \\ \textstyle\sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m &= \bar{r}, \\ \textstyle\sum_{m=1}^{M} w_m &= 1, \end{aligned} \tag{2.112}$$

che caratterizzano il portafoglio di minimo rischio per il rendimento $\bar{r}$ assegnato. Fissati $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \mathbb{R}$, dell'insieme dei rendimenti ammissibili per i portafogli generati dall'insieme dei titoli M_1, M_2, rispettivamente, sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bar{r} = \alpha\bar{r}_1 + (1 - \alpha)\bar{r}_2.$$

Quindi si considerino le equazioni che caratterizzano i portafogli di minimo rischio per il rendimento $\bar{r}_j$ assegnato nell'insieme dei portafogli generato dai titoli dell'insieme M_j, per $j = 1, 2$. Ossia

$$\begin{aligned} \sum_{m_j=1}^{M_j} w_{m_j}^{(j)} \sigma_{1,m_j}^{(j)} - \lambda_1^{(j)} - \lambda_2^{(j)} \bar{r}_1^{(j)} &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \sum_{m_j=1}^{M_j} w_{m_j}^{(j)} \sigma_{M_j,m_j}^{(j)} - \lambda_1^{(j)} - \lambda_2^{(j)} \bar{r}_{M_j}^{(j)} &= 0, \\ \textstyle\sum_{m_j=1}^{M_j} w_{m_j}^{(j)} \bar{r}_{m_j}^{(j)} &= \bar{r}^{(j)}, \\ \textstyle\sum_{m_j=1}^{M_j} w_{m_j}^{(j)} &= 1, \end{aligned} \tag{2.113}$$

Se $(w_1^{(j)}, \ldots, w_{M_j}^{(j)}, \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)})$ sono soluzioni di (2.113), per $j = 1, 2$ rispettivamente, allora, posto

$$\pi_j \equiv (w_1^{(j)}, \ldots, w_{M_j}^{(j)}), \quad \lambda^{(j)} \equiv (\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}), \quad j = 1, 2,$$

per la linearità delle equazioni di (2.112) non è difficile rendersi conto che $\pi \equiv \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$, $\lambda \equiv \alpha\lambda^{(1)} + (1-\alpha)\lambda^{(2)}$, *è soluzione di (2.112).* $\square$

Come conseguenza abbiamo

Teorema 128 *Dato un insieme di* M *titoli è possibile individuare due portafogli efficienti formati da titoli di sottoinsiemi* M_j *di* M, *per* $j = 1, 2$, *tali che tutti i portafogli della frontiera efficiente dell'insieme dei portafogli generati dai titoli dell'insieme* M *siano ottenibili, in termini di tasso di rendimento atteso e deviazione standard, come combinazione lineare dei due portafogli efficienti individuati.*

Esempio 129 *Sono disponibili tre titoli con tassi di rendimento attesi e varianze-covarianze dei tassi di rendimento individuati dalle seguenti matrici*

$$(\bar{r}_m)_{m=1,2,3} \equiv \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^2 \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assegnato un tasso di rendimento atteso, $\bar{r}$, *il portafoglio che realizza il tasso assegnato è caratterizzato dalla condizione*

$$\min_{\substack{w_1+w_2+w_3=1 \\ 0.4w_1+0.8w_2+0.8w_3=\bar{r}}} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1w_2 + w_2w_3\}. \tag{2.114}$$

La Lagrangiana associata al problema di minimizzazione è dunque

$$L(w_1, w_2, w_3, \lambda_1, \lambda_2) = w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_1w_2+w_2w_3-\lambda_1(w_1+w_2+w_3-1)-\lambda_2(0.4w_1+0.8w_2+0.8w_3-\bar{r}).$$

Pertanto il problema della ricerca dei punti estremali diviene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= 2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= 2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_3} &= 2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -(w_1 + w_2 + w_3 - 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= -(0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - \bar{r}) = 0. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Non è difficile provare che la soluzione di tale sistema lineare è data da

$$w_1 = 2.0 - 2.5\bar{r}, \quad w_2 = 2.5\bar{r} - 1.5, \quad w_3 = 0.5, \quad \lambda_1 = 5.5 - 7.5\bar{r}, \quad \lambda_2 = 12.5\bar{r} - 7.5.$$

I pesi w_1, w_2, w_3 *così determinati individuano il portafoglio di minimo rischio per ogni assegnato rendimento* $\bar{r}$. *Ad esempio, considerato un rendimento atteso* $\bar{r} \equiv 1$, *il portafoglio di minimo rischio che consente di conseguirlo è caratterizzato dai pesi*

$$w_1 = -0.5, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 0.5.$$

Il portafoglio di minimo rischio è altresì caratterizzato dalla condizione

$$\min_{w_1+w_2+w_3=1} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1w_2 + w_2w_3\}.$$

La Lagrangiana associata a questo problema di minimizzazione è

$$L(w_1, w_2, w_3, \mu) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1w_2 + w_2w_3 - \lambda_1(w_1 + w_2 + w_3 - 1).$$

Pertanto il problema della ricerca dei punti estremali diviene

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1 + w_2 - \lambda_1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = 2w_3 + w_2 - \lambda_1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(w_1 + w_2 + w_3 - 1) = 0.$$

La soluzione di tale sistema lineare è chiaramente

$$w_1 = 0.5, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0.5, \quad \lambda_1 = 1. \tag{2.116}$$

I pesi w_1*,* w_2*,* w_3 *così determinati individuano il portafoglio di minimo rischio assoluto. Questo portafoglio è caratterizzato dal tasso di rendimento*

$$\bar{r}_{\min} = w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 + w_2\bar{r}_2 = 0.6,$$

ed ha varianza

$$\sigma^2_{\min} = 0.5.$$

Esempio 130 *Con riferimento all'Esempio 129, consideriamo il sistema delle prime tre equazioni che caratterizzano il problema della ricerca dei punti estremali*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= 2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= 2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_3} &= 2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Posto $\lambda_1 = 1$*,* $\lambda_2 = 0$ *il Sistema (2.117) diviene*

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1 + w_2 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2 + w_1 + w_3 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = 2w_3 + w_2 - 1 = 0,$$

e ha soluzione

$$w_1^{(1)} = 0.5, \qquad w_2^{(1)} = 0, \qquad w_3^{(1)} = 0.5. \tag{2.118}$$

Posto $\lambda_1 = 0$*,* $\lambda_2 = 1$ *il Sistema (2.117) diviene*

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1 + w_2 - 0.4 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2 + w_1 + w_3 - 0.8 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = 2w_3 + w_2 - 0.8 = 0,$$

e ha soluzione

$$w_1^{(2)} = 0.1, \qquad w_2^{(2)} = 0.2, \qquad w_3^{(2)} = 0.3. \tag{2.119}$$

Mediante le (2.110), (2.111) alle soluzioni (2.118) e (2.119) così determinate corrispondono rispettivamente le soluzioni

$$\hat{w}_1^{(1)} = 1/2, \qquad \hat{w}_2^{(1)} = 0, \qquad \hat{w}_3^{(1)} = 1/2, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0$$

e

$$\hat{w}_1^{(2)} = 1/6, \qquad \hat{w}_2^{(2)} = 1/3, \qquad \hat{w}_3^{(2)} = 1/2, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1.67$$

del Sistema (2.115). Da notare che la prima di queste due coincide con la soluzione di minimo rischio assoluto (2.116) dell'insieme dei portafogli possibili. Da notare anche che i rendimenti attesi dei due portafogli $\pi \equiv \left(\hat{w}_1^{(j)}, \hat{w}_2^{(j)}, \hat{w}_3^{(j)}\right)$*, per* $j = 1, 2$*, sono dati da*

$$\bar{r}^{(1)} = \bar{r}_1\hat{w}_1^{(1)} + \bar{r}_2\hat{w}_2^{(1)} + \bar{r}_3\hat{w}_3^{(1)} = 6/10 \quad e \quad \bar{r}^{(2)} = \bar{r}_1\hat{w}_1^{(2)} + \bar{r}_2\hat{w}_2^{(2)} + \bar{r}_3\hat{w}_3^{(2)} = 11/15.$$

Volendo conseguire un rendimento atteso pari a $\bar{r} \equiv 1$*, dobbiamo risolvere l'equazione*

$$\alpha\bar{r}^{(1)} + (1-\alpha)\,\bar{r}^{(2)} = \bar{r}$$

ossia

$$6/10\alpha + 11/15\,(1-\alpha) = 1$$

da cui

$$\alpha = -2.$$

Considerati quindi i pesi

$$w_1 = \alpha\hat{w}_1^{(1)} + (1-\alpha)\,\hat{w}_1^{(2)} = -2\cdot 1/2 + (1+2)\cdot 1/6 = -0.5,$$

$$w_2 = \alpha\hat{w}_2^{(1)} + (1-\alpha)\,\hat{w}_2^{(2)} = -2\cdot 0 + (1+2)\cdot 1/3 = 1,$$

$$w_3 = \alpha\hat{w}_3^{(1)} + (1-\alpha)\,\hat{w}_3^{(2)} = -2\cdot 1/2 + (1+2)\cdot 1/2 = 0.5,$$

questi caratterizzano effettivamente il portafoglio di minimo rischio per l'assegnato rendimento atteso $\bar{r} \equiv 1$ *(cfr Esempio 129).*

L'insieme possibile, l'insieme di minima varianza, la frontiera efficiente

Consideriamo due titoli rischiosi di tasso di rendimento atteso $\bar{r}_1$ ed $\bar{r}_2$, di deviazione standard σ_1 e σ_2 e di coefficiente di correlazione $\rho_{1,2}$. L'insieme dei portafogli di dati deviazione standard σ e rendimento $\bar{r}$ è allora caratterizzato dalla condizione

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2, \\ \bar{r} &= \bar{r}_1 w_1 + \bar{r}_2 w_2, \\ 1 &= w_1 + w_2, \end{aligned} \tag{2.120}$$

per opportuni $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Ponendo $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 1 - w$ è possibile eliminare un parametro dalle equazioni (2.120) e riscriverle nella forma

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)w + \bar{r}_2, \\ \sigma^2 &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)w^2 - 2\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1)w + \sigma_2^2, \end{aligned} \tag{2.121}$$

per un opportuno $w \in \mathbb{R}$. Dalla prima, assumendo $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 \neq 0$, abbiamo

$$w = \frac{\bar{r} - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2},$$

e sostituendo quest'ultima nella seconda, otteniamo

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)\frac{(\bar{r} - \bar{r}_2)^2}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2} - 2\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1)\frac{\bar{r} - \bar{r}_2}{\bar{r}_1 - \bar{r}_2} + \sigma_2^2.$$

Eliminando il denominatore e riordinando i termini, segue allora l'equazione cartesiana

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2\sigma^2 = (\bar{r} - \bar{r}_2)^2\sigma_1^2 + (\bar{r} - \bar{r}_1)^2\sigma_2^2 - 2(\bar{r} - \bar{r}_2)(\bar{r} - \bar{r}_1)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2, \tag{2.122}$$

che è chiaramente l'equazione di una conica del piano $\sigma, \bar{r}$. La matrice dei coefficienti associata a tale conica è data da

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} a_{1,1} &\equiv (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2, \\ a_{2,2} &\equiv -(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2), \\ a_{2,3} &\equiv \bar{r}_1\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1) + \bar{r}_2\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2), \\ a_{3,3} &\equiv -(\bar{r}_1^2\sigma_2^2 + \bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\bar{r}_1\bar{r}_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2), \end{aligned}$$

e risulta

$$\det(A) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^4(1 - \rho_{1,2}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

Pertanto, sempre nell'ipotesi $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 \neq 0$ sopra considerata, la conica degenera se

$$\rho_{1,2} = \pm 1, \quad \text{o} \quad \sigma_1 = 0, \quad \text{o} \quad \sigma_2 = 0.$$

Nei casi non degeneri, risulta

$$\det(A_{3,3}) = -(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2),$$

essendo $A_{3,3}$ la sottomatrice estratta da A sopprimendone la terza riga e la terza colonna, e si può provare che in questi casi si ha sicuramente

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 > 0. \tag{2.123}$$

Infatti, dalla disuguaglianza

$$(|\sigma_1| - |\sigma_2|)^2 \geqslant 0,$$

sempre vera per qualsiasi scelta di $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, segue immediatamente

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \geqslant 2\,|\sigma_1\sigma_2|\,. \tag{2.124}$$

D'altra parte, essendo nei casi di non degenerazione

$$|\rho_{1,2}| < 1,$$

risulta chiaramente

$$2\,|\sigma_1\sigma_2| > 2\,|\rho_{1,2}|\,|\sigma_1\sigma_2| \geqslant 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2. \tag{2.125}$$

Allora la (2.123) si ottiene combinando la (2.124) con la (2.125).

In definitiva, nei casi di non degenerazione, la conica risulta necessariamente essere una iperbole passante per i punti $P_1 \equiv (\sigma_1, \bar{r}_1)$ e $P_2 \equiv (\sigma_2, \bar{r}_2)$. Tale iperbole ha assi d'equazione

$$\sigma = 0, \quad \bar{r} = \frac{\bar{r}_1\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1) + \bar{r}_2\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2},$$

centro $C \equiv (c_1, c_2)$, dove

$$c_1 = 0, \quad c_2 \equiv \frac{\bar{r}_1\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1) + \bar{r}_2\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2},$$

vertice $V \equiv (v_1, v_2)$, dove

$$v_1 \equiv \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)^2 - 2\rho_{1,2}(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1)(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2},$$
$$v_2 \equiv \frac{\bar{r}_1\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1) + \bar{r}_2\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2},$$

ed asintoti d'equazione

$$\bar{r} = \pm\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2}}\sigma + \frac{\bar{r}_1\sigma_2(\sigma_2 - \rho_{1,2}\sigma_1) + \bar{r}_2\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{1,2}\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2}.$$

In definitiva, nel caso di due titoli caratterizzati dai punti $P_1 \equiv (\sigma_1, \bar{r}_1)$ e $P_2 \equiv (\sigma_2, \bar{r}_2)$ del piano $\sigma, \bar{r}$, sotto la condizione di non degenerazione $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$, l'insieme dei portafogli possibili è costituito da un ramo d'iperbole passante per P_1 e P_2.

Esempio 131 *Consideriamo due titoli di tassi di rendimento*

$$r_1 \equiv \begin{cases} 3, & \mathbf{P}(r_1 = 3) = 1/4 \equiv p_1^+ \\ 1, & \mathbf{P}(r_1 = 1) = 3/4 \equiv p_1^- \end{cases}, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 3/2, & \mathbf{P}(r_2 = 3/2) = 1/2 \equiv p_2^+ \\ 1, & \mathbf{P}(r_2 = 1) = 1/2 \equiv p_2^- \end{cases},$$

per i quali si ha

$$\bar{r}_1 \equiv \mathbf{E}[r_1] = \frac{3}{2}, \qquad \bar{r}_2 \equiv \mathbf{E}[r_2] = \frac{5}{4},$$
$$\sigma_1^2 \equiv \mathbf{D}^2[r_1] = \frac{3}{4}, \qquad \sigma_2^2 \equiv \mathbf{D}^2[r_2] = \frac{1}{16}.$$

Notiamo che dalla ben nota relazione

$$\sigma_{1,2} \equiv Cov(r_1, r_2) = \mathbf{E}[(r_1 - \mathbf{E}[r_1])(r_2 - \mathbf{E}[r_2])] = \mathbf{E}[r_1r_2] - \mathbf{E}[r_1]\mathbf{E}[r_2]$$

per calcolare $Cov(r_1, r_2)$ è necessario e sufficiente conoscere il termine $\mathbf{E}[r_1r_2]$ ed a tale scopo occorre conoscere la distribuzione di probabilità congiunta del vettore aleatorio (r_1, r_2). Infatti, supposto che sia

$$\mathbf{P}(r_1 = 3, r_2 = 3/2) \equiv p^{++}, \qquad \mathbf{P}(r_1 = 3, r_2 = 1) \equiv p^{+-},$$
$$\mathbf{P}(r_1 = 1, r_2 = 3/2) \equiv p^{-+}, \qquad \mathbf{P}(r_1 = 1, r_2 = 1) \equiv p^{--},$$

con $p^{++}, p^{+-}, p^{-+}, p^{--} \geqslant 0$ tali che $p^{++} + p^{+-} + p^{-+} + p^{--} = 1$, abbiamo

$$r_1r_2 = \begin{cases} 9/2, & \mathbf{P}(r_1r_2 = 9/2) = \mathbf{P}(r_1 = 3, r_2 = 3/2) = p^{++} \\ 3, & \mathbf{P}(r_1r_2 = 3) = \mathbf{P}(r_1 = 3, r_2 = 1) = p^{+-} \\ 3/2, & \mathbf{P}(r_1r_2 = 3/2) = \mathbf{P}(r_1 = 1, r_2 = 3/2) = p^{-+} \\ 1, & \mathbf{P}(r_1r_2 = 1) = \mathbf{P}(r_1 = 1, r_2 = 1) = p^{--} \end{cases}$$

e di conseguenza

$$\mathbf{E}[r_1r_2] = \frac{9}{2}p^{++} + 3p^{+-} + \frac{3}{2}p^{-+} + p^{--}.$$

Adesso, tenendo conto che deve aversi

$$\begin{aligned}
p^{++}+p^{+-} &= \mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=3/2\right)+\mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=1\right)=\mathbf{P}\left(r_1=3\right)=1/4,\\
p^{-+}+p^{--} &= \mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=3/2\right)+\mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=1\right)=\mathbf{P}\left(r_1=1\right)=3/4,\\
p^{++}+p^{-+} &= \mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=3/2\right)+\mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=3/2\right)=\mathbf{P}\left(r_2=3/2\right)=1/2,\\
p^{+-}+p^{--} &= \mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=1\right)+\mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=1\right)=\mathbf{P}\left(r_2=1\right)=1/2,
\end{aligned}$$

la distribuzione di probabilità assegnata deve soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
p^{++}+p^{+-} &= 1/4,\\
p^{-+}+p^{--} &= 3/4,\\
p^{++}+p^{-+} &= 1/2,\\
p^{+-}+p^{--} &= 1/2,
\end{aligned}$$

essendo l'ulteriore

$$p^{++}+p^{+-}+p^{-+}+p^{--}=1$$

automaticamente soddisfatta (considerando, ad esempio, la somma delle prime due). Dalla prima e terza equazione, otteniamo

$$\begin{aligned}
p^{+-} &= 1/4-p^{++},\\
p^{-+} &= 1/2-p^{++}.
\end{aligned}$$

Combinando la prima di queste ultime con la seconda del sistema originario, otteniamo allora

$$p^{--}=1/4+p^{++}$$

La quarta equazione del sistema originario risulta quindi ridursi a una identità. E' allora chiaro che assegnato arbitrariamente p^{++} *nell'intervallo* $(0,1)$, *o equivalentemente uno qualsiasi tra tra* $p^{++},p^{+-},p^{-+},p^{--}$, *la distribuzione di probabilità risulta essere conseguentemente determinati. Per esempio, assegnando* $p^{++}=1/4$, *otteniamo*

$$p^{++}=\frac{1}{4},\qquad p^{+-}=0,\qquad p^{-+}=\frac{1}{4},\qquad p^{--}=\frac{1}{2}.$$

In questo caso, risulta

$$\mathbf{E}[r_1r_2]=2$$

e di conseguenza

$$\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\equiv\sigma_{1,2}=\frac{1}{8}.$$

Notare che

$$\rho_{1,2}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Notare anche che se r_1 *ed* r_2 *fossero indipendenti, avremmo*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=3/2\right)\equiv p^{++}=\mathbf{P}\left(r_1=3\right)\mathbf{P}\left(r_2=3/2\right)=\frac{1}{8},\\
\mathbf{P}\left(r_1=3,r_2=1\right)\equiv p^{+-}=\mathbf{P}\left(r_1=3\right)\mathbf{P}\left(r_2=1\right)=\frac{1}{8},\\
\mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=3/2\right)\equiv p^{-+}=\mathbf{P}\left(r_1=1\right)\mathbf{P}\left(r_2=3/2\right)=\frac{3}{8},\\
\mathbf{P}\left(r_1=1,r_2=1\right)\equiv p^{--}=\mathbf{P}\left(r_1=1\right)\mathbf{P}\left(r_2=1\right)=\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

essendo

$$p^{++} = \frac{1}{8}, \qquad p^{+-} = \frac{1}{8}, \qquad p^{-+} = \frac{3}{8}, \qquad p^{--} = \frac{3}{8},$$

un'ulteriore soluzione del sistema di equazioni sopra considerato. In questo caso, ovviamente,

$$\mathbf{E}[r_1 r_2] = \frac{15}{8}$$

ed ancora

$$\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \equiv \sigma_{1,2} = 0$$

Nel caso di titoli a rendimenti non indipendenti, consideriamo adesso la forma analitica dell'equazione rischio-rendimento associata ad un portafoglio costituito da quantità opportune di tali titoli. Ponendo $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 1 - w$ le equazioni parametriche (2.121) per un tale portafoglio si riducono a

$$\bar{r} = \frac{1}{4}w + \frac{5}{4}$$
$$\sigma^2 = \frac{9}{16}w^2 + \frac{1}{8}w + \frac{1}{16}.$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$w = 4\bar{r} - 5.$$

e sostituendo nella seconda equazione quanto ricavato dalla prima otteniamo

$$2\sigma^2 - 18\bar{r}^2 + 44\bar{r} - 27 = 0.$$

Si vede allora che l'equazione rischio-rendimento descrive un'iperbole del piano $\sigma, \bar{r}$. La matrice dei coefficienti associata è data da

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 22 \\ 0 & 22 & -27 \end{pmatrix}.$$

Gli assi sono le rette di equazione

$$\sigma = 0, \qquad \bar{r} = 11/9.$$

il suo centro è il punto

$$C \equiv (0, 11/9),$$

il vertice è il punto

$$V \equiv (\sqrt{2}/6, 11/9),$$

ed i suoi asintoti sono le rette di equazione

$$\bar{r} = \pm\frac{1}{3}\sigma + 11/9.$$

Notare che il portafoglio di rischio minimo, ha rischio pari a all'ascissa del vertice dell'iperbole, ossia $\sqrt{2}/6$. Corrispondentemente il suo rendimento è pari all'ordinata del vertice dell'iperbole, ossia $11/9$. Si consegue tale prortafoglio con la composizione $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 1 - w$ dove

$$w = 4\bar{r} - 5 = -1/9.$$

Ciò significa che va venduto allo scoperto il titolo di rendimento atteso $\bar{r}_1$ e va acquistato il titolo di rendimento $\bar{r}_2$.

Nel caso di titoli a rendimenti indipendenti, consideriamo ancora la forma analitica dell'equazione rischio-rendimento associata ad un portafoglio costituito da quantità opportune di tali titoli. Ponendo $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 1 - w$ *le equazioni parametriche (2.120) per un tale portafoglio si riducono a*

$$\bar{r} = \frac{1}{4}w + \frac{5}{4}$$
$$\sigma^2 = \frac{13}{16}w^2 - \frac{1}{8}w + \frac{1}{16}.$$

Dalla prima equazione ricaviamo ancora

$$w = 4\bar{r} - 5.$$

e sostituendo nella seconda equazione quanto ricavato dalla prima

$$\sigma^2 - 13r^2 + 33r - 21 = 0.$$

Si vede allora che l'equazione rischio-rendimento descrive un'iperbole del piano $\sigma, \bar{r}$*. La matrice dei coefficienti associata è data da*

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 33/2 \\ 0 & 33/2 & -21 \end{pmatrix}.$$

Gli assi sono le rette di equazione

$$\sigma = 0, \qquad \bar{r} = 33/26.$$

il suo centro è il punto

$$C \equiv (0, 33/26),$$

il vertice è il punto

$$V \equiv (13\sqrt{3}/26, 33/26),$$

ed i suoi asintoti sono le rette di equazione

$$\bar{r} = \pm\sqrt{13}/13\sigma + 33/26.$$

Notare che il portafoglio di rischio minimo, ha rischio pari a all'ascissa del vertice dell'iperbole, ossia $13\sqrt{3}/26$*. Corrispondentemente il suo rendimento è pari all'ordinata del vertice dell'iperbole, ossia* $33/26$*. Si consegue tale prortafoglio con la composizione* $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 1 - w$ *dove*

$$w = 4\bar{r} - 5 = 1/13.$$

Ciò significa che vanno acquistati entrambi i titoli.

Non è difficile rendersi conto che nel caso di tre titoli caratterizzati dai punti $P_1 \equiv (\sigma_1, \bar{r}_1)$, $P_2 \equiv (\sigma_2, \bar{r}_2)$ e $P_3 \equiv (\sigma_3, \bar{r}_3)$ del piano $\sigma - \bar{r}$ l'insieme dei portafogli possibili sarà una superficie del piano $\sigma, \bar{r}$. Infatti considerati i titoli a due a due, in ciascuno dei tre casi che si possono presentare, l'insieme dei portafogli possibili è individuato da un ramo d'iperbole che congiunge i due punti rappresentanti i titoli considerati. Per esempio se consideriamo P_1 e P_2 l'insieme dei portafogli possibili è individuato dal ramo d'iperbole che congiunge P_1 e P_2. D'altra parte ogni portafoglio possibile generato dai tre titoli può essere visto come un portafoglio generato da un portafoglio intermedio di due qualsiasi di questi titoli, rappresentato quindi da un punto situato sul ramo d'iperbole da essi individuata, in combinazione con il terzo titolo. Pertanto tale portafoglio possibile è rappresentato da un punto situato sul ramo d'iperbole che congiunge il punto del piano $\sigma, \bar{r}$ rappresentante il portafoglio intermedio e dal punto rappresentante il terzo titolo. Al variare del punto rappresentante il portafoglio intermedio sul ramo d'iperbole passante per punti rappresentanti i primi due titoli, le iperboli che li congiungono vengono ad individuare un'intera superficie del piano $\sigma, \bar{r}$.

Vincoli di non negatività

Qualora non sia ammessa la vendita allo scoperto dei titoli da allocare in portafoglio bisogna imporre l'ulteriore condizione

$$w_m \geqslant 0, \qquad \forall m = 1, \ldots, M.$$

e il problema della determinazione del portafoglio di minimo rischio che realizzi un tasso di rendimento atteso assegnato si traduce in termini matematici nel problema di ottimizzazione vincolata

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_{\bar{r}}\cap\mathbb{R}^M_+} \{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)\}. \tag{2.126}$$

Anche in questo caso, la convessità dell'insieme $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}} \cap \mathbb{R}^M_+$ e della funzione obiettivo $\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)$ consente di affermare che se l'insieme dei titoli in portafoglio è non singolare esiste un'unica soluzione del problema (2.126). Tuttavia, tecnicamente questo problema non può essere ridotto alla soluzione di un sistema di equazioni lineari. In effetti, si tratta di un problema di **programmazione quadratica**, dato che la funzione obiettivo è quadratica ed i vincoli sono sia uguaglianze che disuguaglianze lineari. Da notare che, essendo chiaramente $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}} \cap \mathbb{R}^M_+ \subseteq \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}$, risulta

$$\min_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_{\bar{r}}\cap\mathbb{R}^M_+} \{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)\} \geqslant \min_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_{\bar{r}}} \{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M)\}. \tag{2.127}$$

Pertanto, se $(\breve{w}_1, \ldots, \breve{w}_M) \equiv \arg\min\{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M),\ (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}}\}$ è tale che $(\breve{w}_1, \ldots, \breve{w}_M) \in \mathbb{R}^M_+$, ossia $(\breve{w}_1, \ldots, \breve{w}_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}} \cap \mathbb{R}^M_+$, allora l'esistenza e unicità della soluzione del problema (2.126) e l'Equazione (2.127) comportano che $(\breve{w}_1, \ldots, \breve{w}_M) \equiv \arg\min\{\frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \ldots, w_M),\ (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_{\bar{r}} \cap \mathbb{R}^M_+\}$.

Esempio 132 *Con riferimento all'Esempio 129, assegnato un tasso di rendimento atteso $\bar{r}$, consideriamo il problema della determinazione del portafoglio di minimo rischio che realizzi il tasso assegnato, escludendo la possibilità di vendita allo scoperto dei titoli in portafoglio. Tale portafoglio è caratterizzato dalla condizione*

$$\min_{\substack{w_1+w_2+w_3=1 \\ 0.4w_1+0.8w_2+0.8w_3=\bar{r} \\ w_m\geqslant 0, \quad m=1,2,3}} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1w_2 + w_2w_3\}, \tag{2.128}$$

e dalla discussione dell'Esempio 129 si vede che il portafoglio caratterizzato dai pesi

$$w_1 = 2.0 - 2.5\bar{r}, \quad w_2 = 2.5\bar{r} - 1.5, \quad w_3 = 0.5$$

è soluzione di anche di questo problema pur di assumere

$$0.6 \leqslant \bar{r} \leqslant 0.8. \tag{2.129}$$

Infatti, in questo caso risulta

$$w_1 \geqslant 0, \qquad w_2 \geqslant 0.$$

In particolare, il portafoglio di minimo rischio relativo a un rendimento atteso $\bar{r} = 0.7$ è caratterizzato dai pesi

$$w_1 = 0.25, \quad w_2 = 0.25, \quad w_3 = 0.5.$$

Se la condizione (2.129) non è soddisfatta, per una trattazione esaustiva del problema bisogna applicare il metodo di Karush-Kuhn-Tucker.

Supponiamo che il rendimento atteso sia $\bar{r} = 0.5$. In questo caso i pesi

$$w_1 = 0.75, \quad w_2 = -0.25, \quad w_3 = 0.5$$

che costituiscono una soluzione del Problema (2.114) non sono evidentemente una soluzione del Problema (2.128). In riferimento al Teorema (229) della Sezione Constrained Optimization dell'Appendice, per trovare una soluzione del Problema (2.128) consideriamo la Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(w_1, w_2, w_3, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 \\ - \lambda_1(w_1 + w_2 + w_3 - 1) - \lambda_2(0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - 0.5) \\ - \mu_1 w_1 - \mu_2 w_2 - \mu_3 w_3. \end{aligned}$$

Le condizioni da imporre per la ricerca degli eventuali punti di minimo sono allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= 2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 - \mu_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= 2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_3} &= 2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_3 = 0, \end{aligned}$$

per quanto riguarda le condizioni d'ottimalità,

$$\begin{aligned} g_1(w_1, w_2, w_3) &\equiv w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0, \\ g_2(w_1, w_2, w_3) &\equiv 0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - 0.5 = 0, \\ h_1(w_1, w_2, w_3) &\equiv w_1 \geqslant 0, \\ h_2(w_1, w_2, w_3) &\equiv w_2 \geqslant 0, \\ h_3(w_1, w_2, w_3) &\equiv w_3 \geqslant 0, \end{aligned}$$

per quanto riguarda i due gruppi di condizioni di fattibilità

$$\mu_1 \geqslant 0, \quad \mu_2 \geqslant 0, \quad \mu_3 \geqslant 0,$$

per quanto riguarda le condizioni di non negatività del moltiplicatori μ_k, per $k = 1, 2, 3$, e infine

$$\begin{aligned} \mu_1 h_1(w_1, w_2, w_3) &\equiv \mu_1 w_1 = 0, \\ \mu_2 h_2(w_1, w_2, w_3) &\equiv \mu_2 w_2 = 0, \\ \mu_3 h_3(w_1, w_2, w_3) &\equiv \mu_3 w_3 = 0, \end{aligned}$$

per quanto riguarda le condizioni di rilassatezza.

La risoluzione del sistema di equazioni-disequazioni che risulta dal complesso di tutte le condizioni non è particolarmente difficile anche se può risultare notevolmente lunga. Un modo sistematico di procedere può essere il seguente: in riferimento alla condizione di non negatività dei moltiplicatori μ_k, per $k = 1, 2, 3$, possono distinguersi $2^3 = 8$ casi

$$\begin{aligned} &1) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 > 0, \\ &2) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 = 0, \\ &3) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 > 0, \\ &4) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = 0, \\ &5) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 > 0, \\ &6) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 = 0, \\ &7) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 > 0, \\ &8) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = 0. \end{aligned}$$

In relazione al primo il sistema di tutte le altre condizioni diventa

$$\begin{aligned}
&2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 - \mu_1 = 0,\\
&2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_2 = 0,\\
&2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_3 = 0,\\
&w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0,\\
&0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - 0.5 = 0,\\
&w_1 = 0,\\
&w_2 = 0,\\
&w_3 = 0,
\end{aligned}$$

che chiaramente non ammette soluzioni. In relazione al secondo caso il sistema di tutte le altre condizioni diventa

$$\begin{aligned}
&2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 - \mu_1 = 0,\\
&2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_2 = 0,\\
&2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0,\\
&w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0,\\
&0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - 0.5 = 0,\\
&w_1 = 0,\\
&w_2 = 0,
\end{aligned}$$

e anche questo è chiaramente privo di soluzione. Procedendo sistematicamente in questo modo si vede che diversi casi non conducono ad alcuna soluzione. Tuttavia, in relazione al sesto caso il sistema di tutte le altre condizioni diventa

$$\begin{aligned}
&2w_1 + w_2 - \lambda_1 - 0.4\lambda_2 = 0,\\
&2w_2 + w_1 + w_3 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 - \mu_2 = 0,\\
&2w_3 + w_2 - \lambda_1 - 0.8\lambda_2 = 0,\\
&w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0,\\
&0.4w_1 + 0.8w_2 + 0.8w_3 - 0.5 = 0,\\
&w_2 = 0,
\end{aligned}$$

e questo ammette la soluzione

$$w_1 = 0.75, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0.25, \quad \lambda_1 = 2.5, \quad \lambda_2 = -2.5, \quad \mu_2 = 0.5$$

che unitamente alla condizione

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 = 0,$$

soddisfa tutte le condizioni da imporre per la ricerca dei punti di minimo.

2.2.2 Secondo problema di configurazione di portafoglio

Il secondo problema di configurazione di portafoglio si occupa della determinazione del portafoglio di massimo tasso di rendimento che realizzi un assegnato livello di rischio σ^2. In riferimento all forma quadratica $\sigma^2 : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ (cfr. Equazione (2.92)), consideriamo l'insieme di livello

$$\mathbb{K}_{\sigma^2} \equiv \left\{(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{R}^M : \sigma^2(w_1, \dots, w_M) = \sigma^2\right\},$$

al variare di $\sigma^2 > 0$. Allora, il secondo problema di configurazione di portafoglio si traduce in termini matematici nel problema di ottimizzazione vincolata

$$\max_{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_{\sigma^2}} \{\bar{r}(w_1, \dots, w_M)\}, \tag{2.130}$$

essendo $\bar{r} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ la funzione tasso di rendimento atteso (cfr Equazione (2.94)). Al proposito abbiamo

Teorema 133 *Se l'insieme dei titoli in portafoglio è non singolare, l'insieme $\mathbb{K}_{\sigma^2}$ è un compatto di $\mathbb{R}^M$ per ogni $\sigma^2 > 0$.*

In conseguenza, abbiamo

Teorema 134 *Se l'insieme dei titoli azionari in portafoglio è non singolare, allora esiste almeno un portafoglio di massimo rendimento atteso per ogni assegnato livello di rischio $\sigma^2 > 0$.*

Dal punto di vista computazionale, il problema della determinazione del portafoglio di massimo tasso di rendimento che realizzi un assegnato livello di rischio può affrontarsi con la stessa tecnica di ottimizzazione vincolata adoperate per il problema simmetrico della determinazione del portafoglio di minimo rischio che realizzi un assegnato tasso di rendimento. Nondimeno, la quadraticità del vincolo non consente di ricondursi a un sistema di condizioni del primo ordine lineari e pertanto la determinazione degli zeri delle condizioni del primo ordine può risultare tecnicamente complessa.

2.2.3 Inclusione di un titolo non rischioso

Sia il problema della minimizzazione del rischio per un tasso di rendimento atteso assegnato che il problema della massimizzazione del tasso di rendimento atteso per un rischio assegnato trovano una modellizzazione molto più efficace considerando la possibilità d'introdurre in portafoglio il titolo non rischioso, già denominato *bond*. Infatti, l'introduzione del bond consente di affrontare il problema della massimizzazione del rapporto tra il tasso di rendimento atteso e il rischio di portafoglio, conducendo alla scoperta di una relazione lineare tra le posizioni ottimali di tasso di rendimento atteso e volatilità di portafoglio. Tale relazione lineare consente sia la determinazione di un portafoglio fattibile che minimizzi il rischio per un tasso di rendimento atteso assegnato che la determinazione di un portafoglio fattibile che massimizzi il tasso di rendimento atteso per un rischio assegnato.

In riferimento alla (2.78), denotiamo più brevemente con r_0 il tasso di rendimento del bond. Consideriamo quindi un portafoglio $\pi \equiv (w_1, \ldots, w_M)$ dell'insieme dei portafogli possibili caratterizzato dal tasso di rendimento atteso $\bar{r}$ e volatilità σ. L'angolo formato dalla retta condotta dal punto $(0, r_0)$ che rappresenta il titolo non rischioso al punto $(\sigma, \bar{r})$ è allora caratterizzato da

$$\tan(\theta) = \frac{\bar{r} - r_0}{\sigma}$$

Sappiamo che

$$\bar{r} = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m, \qquad \sigma = \left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m \right)^{1/2},$$

ma allora scrivendo, come è lecito,

$$r_0 = \sum_{m=1}^{M} w_m r_0,$$

il problema di massimizzazione può essere scritto nella forma

$$\max_{(w_1,\ldots,w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_+} \tan(\theta) = \max_{(w_1,\ldots,w_M) \in \mathbb{H} \cap \mathbb{K}_+} \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m (\bar{r}_m - r_0)}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m \right)^{1/2}}, \tag{2.131}$$

dove

$$\mathbb{H} \equiv \left\{ (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1 \right\} \quad \text{e} \quad \mathbb{K}_+ \equiv \left\{ (w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m (\bar{r}_m - r_0) > 0 \right\}.$$

Tale problema è noto come *massimizzazione del rapporto di Sharpe*. Da notare che, mentre l'appartenenza del portafoglio π al convesso $\mathbb{H}$ di $\mathbb{R}^M$ rappresenta il vincolo tecnico di fattibilità, già introdotto, l'ulteriore appartenenza di π al convesso $\mathbb{K}_+$ di $\mathbb{R}^M$ rappresenta un vincolo di ragionevolezza finanziaria. Infatti l'assenza del vincolo $\mathbb{K}_+$ potrebbe portare alla determinazione di portafogli fattibili per i quali

$$\sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m \leqslant r_0$$

ossia aventi rendimento atteso

$$\bar{r} \leqslant r_0.$$

D'altra parte nessun investitore razionale considererebbe la possibilità d'investire in un portafoglio azionario rischioso il cui tasso di rendimento atteso sia non suoperiore al tasso di rendimento privo di rischio. Da notare inoltre che mediante l'Equazione (2.131) si cerca in effetti di determinare un portafoglio dell'insieme dei portafogli fattibili che massimizza il rapporto tra il suo rendimento atteso in eccesso, rispetto al rendimento del bond, e la sua volatilità. L'accorgimento tecnico di considerare il rendimento atteso in eccesso consente di affrontare più efficacemente il problema senza alterarlo. Valgono i seguenti Teoremi

Teorema 135 (maximization of Sharpe ratio I) *Il problema di massimizzazione (2.131) è equivalente al problema di massimizzazione*

$$\max_{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{H}_+\cap\mathbb{K}_1} \frac{1}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m\right)^{1/2}}. \tag{2.132}$$

dove

$$\mathbb{H}_+ \equiv \left\{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m > 0\right\} \quad e \quad \mathbb{K}_1 \equiv \left\{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m(\bar{r}_m - r_0) = 1\right\}.$$

A sua volta il problema di massimizzazione (2.132) è equivalente al problema di minimizzazione

$$\min_{(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{H}_+\cap\mathbb{K}_1} \sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m. \tag{2.133}$$

Proof. Sia $(w_1^*,\dots,w_M^*) \in \mathbb{H}\cap\mathbb{K}_+$. Allora posto

$$W^* \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m^*(\bar{r}_m - r_0)$$

la M-pla $(w_1^\circ,\dots,w_M^\circ)$ data da

$$w_m^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_m^*}{W^*}, \quad \forall m = 1,\dots,M,$$

è tale che

$$\sum_{m=1}^{M} w_m^\circ = \frac{1}{W^*}\sum_{m=1}^{M} w_m^* > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{m=1}^{M} w_m^\circ(\bar{r}_m - r_0) = 1.$$

Quindi

$$(w_1^\circ,\dots,w_M^\circ) \in \mathbb{H}_+\cap\mathbb{K}_1.$$

Inoltre,

$$\frac{1}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}w_\ell^\circ w_m^\circ\right)^{1/2}}=\frac{1}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}\frac{w_\ell^*}{W^*}\frac{w_m^*}{W^*}\right)^{1/2}}=\frac{\sum\limits_{m=1}^{M}w_m^*(\bar{r}_m-r_0)}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}w_\ell^* w_m^*\right)^{1/2}}.$$

Viceversa, sia $(w_1^\circ,\dots,w_M^\circ)\in\mathbb{H}_+\cap\mathbb{K}_1$ allora posto

$$W^\circ\equiv\sum_{m=1}^{M}w_m^\circ$$

la M-pla $(w_1^*,\dots,w_M^*)$ data da

$$w_m^*\overset{\text{def}}{=}\frac{w_m^\circ}{W^\circ},\quad \forall m=1,\dots,M,$$

è tale che

$$\sum_{m=1}^{M}w_m^*=1\quad\text{e}\quad\sum_{m=1}^{M}w_m^*(\bar{r}_m-r_0)=\frac{1}{W^\circ}\sum_{m=1}^{M}w_m^\circ(\bar{r}_m-r_0)=\frac{1}{W^\circ}>0.$$

Quindi

$$(w_1^*,\dots,w_M^*)\in\mathbb{H}\cap\mathbb{K}_+$$

Inoltre,

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{M}w_m^*(\bar{r}_m-r_0)}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}w_\ell^* w_m^*\right)^{1/2}}=\frac{\frac{1}{W^\circ}}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}\frac{w_\ell^\circ}{W^\circ}\frac{w_m^\circ}{W^\circ}\right)^{1/2}}=\frac{1}{\left(\sum\limits_{\ell,m=1}^{M}\sigma_{\ell,m}w_\ell^\circ w_m^\circ\right)^{1/2}}.$$

□

Alla luce del Teorema 135, il problema di massimizzazione (2.131) è, in ultima analisi, ricondotto al problema di minimizzazione (2.133). Quest'ultimo, nell'ipotesi che l'insieme dei titoli azionari sia non singolare, è un problema standard di minimizzazione di una funzione strettamente convessa su un convesso che ammette un'unica soluzione.

Teorema 136 (maximization of Sharpe ratio II) *Determinata una soluzione $v_1^*,\dots,v_M^*$ del sistema lineare*

$$\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m}v_\ell=\bar{r}_m-r_0,\qquad m=1,\dots,M.$$

tale che $\sum\limits_{m=1}^{M}v_m^*>0$, il portafoglio $\pi^{(T)}\equiv\left(w_1^{(T)},\dots,w_M^{(T)}\right)$ definito ponendo

$$w_m^{(T)}=\frac{v_m^*}{V^*},\qquad m=1,\dots,M,$$

dove $V^*\equiv\sum\limits_{m=1}^{M}v_m^*$, è una soluzione del problema (2.131).

Proof. *Cominciamo con l'osservare che, data la particolare forma della funzione da massimizzare, in questo caso non è necessario affrontare direttamente il problema di massimizzazione vincolata. Infatti, denotata con* $(w_1^*, \ldots, w_M^*)$ *una soluzione del problema di massimizzazione*

$$\max_{(w_1,\ldots,w_M)\in\mathbb{H}_+} \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m(\bar{r}_m - r_0)}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m\right)^{1/2}} \tag{2.134}$$

dove

$$\mathbb{H}_+ \equiv \left\{(w_1, \ldots, w_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} w_m > 0\right\}$$

è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^M$ *e posto*

$$W^* \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m^*$$

la M*-pla* $(\hat{w}_1, \ldots \hat{w}_M)$ *data da*

$$\hat{w}_m \equiv \frac{w_m^*}{W^*}, \quad \forall m = 1, \ldots, M, \tag{2.135}$$

è una soluzione del problema di massimizzazione (2.131). Ciò perchè, stante la posizione (2.135), risulta

$$\frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{w}_m(\bar{r}_m - r_0)}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \hat{w}_\ell \hat{w}_m\right)^{1/2}} = \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{w_m^*}{W^*}(\bar{r}_m - r_0)}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \frac{w_\ell^*}{W^*}\frac{w_m^*}{W^*}\right)^{1/2}} = \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m^*(\bar{r}_m - r_0)}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell^* w_m^*\right)^{1/2}}.$$

e chiaramente

$$\sum_{m=1}^{M} \hat{w}_m = 1.$$

Il problema di massimizzazione vincolata (2.131) si riduce allora al problema libero (2.134), le cui soluzioni producono soluzioni del problema vincolato mediante la (2.135). D'altra parte, alla luce del Teorema (135), il problema di massimizzazione vincolata (2.131) è equivalente al problema di minimizzazione (2.133), che ammette un'unica soluzione. Quindi anche il problema libero (2.134) ammetterà un'unica soluzione. Possiamo allora determinarla mediante la semplice applicazione delle condizioni del *primo ordine qualora queste ci restiuiscano un'unica soluzione. Si ha*

$$\frac{\partial \tan(\theta)}{\partial w_m} = \frac{\partial}{\partial w_m} \frac{\sum_{k=1}^{M} w_k(\bar{r}_k - r_0)}{\left(\sum_{\ell,k=1}^{M} \sigma_{\ell,k} w_\ell w_k\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{(\bar{r}_m - r_0)\left(\sum_{\ell,k=1}^{M} \sigma_{\ell,k} w_\ell w_k\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\frac{2\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m} w_\ell}{\left(\sum_{\ell,k=1}^{M} \sigma_{\ell,k} w_\ell w_k\right)^{1/2}} \sum_{k=1}^{M} w_k(\bar{r}_k - r_0)}{\sum_{\ell,k=1}^{M} \sigma_{\ell,k} w_\ell w_k}$$

$$= \frac{(\bar{r}_m - r_0)\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\frac{2\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m} w_\ell}{\left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m\right)^{1/2}} \sum_{m=1}^{M} w_m(\bar{r}_m - r_0)}{\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m},$$

ponendo

$$\bar{r} = \sum_{m=1}^{M} \bar{r}_m w_m, \qquad \sigma \equiv \left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell w_m\right)^{1/2}, \tag{2.136}$$

possiamo allora scrivere

$$\frac{\partial \tan(\theta)}{\partial w_m} = \frac{(\bar{r}_m - r_0)\sigma - \frac{\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m} w_\ell}{\sigma}(\bar{r}_\pi - r_0)}{\sigma^2} = \frac{\bar{r}_m - r_0}{\sigma} - \frac{\bar{r} - r_0}{\sigma^3}\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m} w_\ell.$$

Pertanto, dalle condizioni del primo ordine otteniamo

$$\sum_{\ell=1}^{M}\sigma_{\ell,m}\left(\frac{\bar{r} - r_0}{\sigma^2}\right) w_\ell = \bar{r}_m - r_0, \qquad m = 1, \ldots, M. \tag{2.137}$$

Da notare che stante la (2.136) le Equazioni (2.137) costituiscono di fatto un sistema non lineare nelle incognite $w_1, \ldots, w_M$*. Infatti,*

$$\frac{\bar{r} - r_0}{\sigma^2} \equiv \frac{\bar{r}\,(w_1, \ldots, w_M) - r_0}{\sigma^2\,(w_1, \ldots, w_M)}.$$

Nondimeno ponendo

$$v_m \equiv \left(\frac{\bar{r} - r_0}{\sigma^2}\right) w_m, \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{2.138}$$

ci si riconduce al sistema lineare

$$\sum_{m=1}^{M}\sigma_{\ell,m} v_m = \bar{r}_m - r_0, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Trovata una soluzione $v_1^*, \ldots, v_M^*$ *di quest'ultimo tale che* $\sum_{m=1}^{M} v_m^* > 0$ *e posto*

$$w_m^{(T)} = \frac{v_m^*}{V^*}, \qquad m = 1, \ldots, M,$$

dove $V^* \equiv \sum_{m=1}^{M} v_m^*$, *si ha*

$$w_m^{(T)} = \frac{\left(\frac{\bar{r}-r_0}{\sigma^2}\right) w_m^*}{\sum_{\ell=1}^{M} \left(\frac{\bar{r}-r_0}{\sigma^2}\right) w_\ell^*} = \frac{w_m^*}{W^*},$$

dove

$$w_m^* \equiv \frac{\sigma^2}{\bar{r} - r_0} v_m^* \quad e \quad W^* \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m^*.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \left(\frac{\bar{r}\left(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)}\right) - r_0}{\sigma^2 \left(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)}\right)} \right) w_\ell^{(T)} &= \sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m^{(T)} \bar{r}_m - \sum_{m=1}^{M} w_m^{(T)} r_0}{\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell^{(T)} w_m^{(T)}} w_\ell^{(T)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \frac{\frac{1}{W^*}\left(\sum_{m=1}^{M} w_m^* \bar{r}_m - \sum_{m=1}^{M} w_m^* r_0\right)}{\frac{1}{(W^*)^2} \sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell^* w_m^*} \frac{w_\ell^*}{W^*} \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m^* \bar{r}_m - \sum_{m=1}^{M} w_m^* r_0}{\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell^* w_m^*} w_\ell^* \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} \frac{\bar{r}\left(w_1^*, \ldots, w_M^*\right) - r_0}{\sigma^2 \left(w_1^*, \ldots, w_M^*\right)} w_\ell^* \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} \sigma_{\ell,m} v_\ell^* \\
&= \bar{r}_m - r_0,
\end{aligned}$$

per ogni $m = 1, \ldots, M$. *Ciò prova che il portafoglio* $\pi^{(T)} \equiv \left(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)}\right)$ *soddisfa le condizioni del primo ordine (2.137) ed è quindi una soluzione del problema (2.131).* □

2.3 Capital Asset Pricing Model

I pesi del portafoglio determinati nell'ambito del Teorema 136 individuano il portafoglio tangente nell'insieme dei portafogli ammissibili caratterizzato da rischio e rendimento atteso rispettivamente dati da

$$\sigma_T = \left(\sum_{\ell,m=1}^{M} \sigma_{\ell,m} w_\ell^{(T)} w_m^{(T)} \right)^{1/2}, \qquad \bar{r}_T = \sum_{m=1}^{M} r_m w_m^{(T)}.$$

Tale portafoglio ha la proprietà che la retta condotta dal punto $(0, r_0)$ al punto $(\sigma_T, \bar{r}_T)$ è tangente alla frontiera efficiente dei portafogli ammissibili e pertanto ogni portafoglio appartenente a tale retta presenta un profilo di rischio-rendimento migliore del corrispondente portafoglio della frontiera efficiente caratterizzato da pari rischio o da pari rendimento.

2.3.1 Capital Market Line

Proposizione 137 *Il tasso di rendimento atteso $\bar{r}$ e la deviazione standard σ di un qualsiasi titolo (portafoglio) della* capital market line *soddisfano l'equazione*

$$\frac{\bar{r} - r_0}{\bar{r}_T - r_0} = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_T - \sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_T},$$

dove $\sigma_0 \equiv 0$, ossia

$$\bar{r} = r_0 + \frac{\bar{r}_T - r_0}{\sigma_T}\sigma.$$

Il coefficiente angolare della capital market line

$$\tan(\hat{\theta}) \equiv \frac{\bar{r}_T - r_0}{\sigma_T}$$

è noto come prezzo del rischio.

Determinata l'equazione della Capital Market Line il problema della determinazione di un portafoglio di minimo rischio per un rendimento atteso assegnato che la determinazione del portafoglio di massimo rendimento atteso per un rischio assegnato trovano una semplice soluzione.

Infatti siano $\bar{r}_a$ e σ_a rispettivamente il rendimento atteso e il rischio assegnati. Si avrà intanto la relazione lineare

$$\bar{r}_a = r_0 + \frac{\bar{r}_T - r_0}{\sigma_T}\sigma_a = \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_T}\right) r_0 + \frac{\sigma_a}{\sigma_T}\bar{r}_T.$$

Per determinare la composizione del portafoglio su cui investire si considerano la M-pla di pesi $(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_M)$ del portafoglio tangente e la M-pla $(\breve{w}_1, \ldots, \breve{w}_M)$ definita ponendo $\breve{w}_m = \frac{1}{M}$ per ogni $m = 1, \ldots, M$. Quindi, si costituisce il portafoglio d'investimento combinando i due portafogli secondo le proporzioni

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} \quad \text{e} \quad 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_T}$$

rispettivamente.

2.3.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

La Capital Market Line pone in relazione il rendimento atteso di un portafoglio e la sua deviazione standard, ma non mostra la relazione tra il tasso di rendimento atteso di un singolo titolo ed il corrispondente rischio. Questa relazione è espressa dal Capital Asset Pricing Model.

Teorema 138 *Il tasso di rendimento atteso $\bar{r}_m$ del titolo m-esimo in portafoglio soddisfa la relazione*

$$\bar{r}_m - r_0 = \beta_m(\bar{r}_T - r_0),$$

con

$$\beta_m = \frac{\sigma_{m,T}}{\sigma_T^2} \equiv \frac{Cov\,(r_m, r_T)}{\mathbf{D}^2\,[r_T]},$$

essendo $\sigma_{m,T} \equiv Cov\,(r_m, r_T)$ *la covarianza del tasso di rendimento del titolo* m*-esimo in portafoglio con il tasso di rendimento del portafoglio tangente.*

Proof. *Fissato* $\alpha \in \mathbb{R}$ *consideriamo il portafoglio costituito da una percentuale* α *investita sul titolo* m*-esimo ed una percentuale* $1-\alpha$ *investita sul portafoglio tangente. Il tasso di rendimento atteso del portafoglio così costituito è*

$$\bar{r}_\alpha = \alpha\bar{r}_m + (1-\alpha)\bar{r}_T \tag{2.139}$$

e la deviazione standard del tasso di rendimento è

$$\sigma_\alpha = \left(\alpha^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{m,T} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2\right)^{1/2}. \tag{2.140}$$

Al variare di α *le equazioni parametriche (2.139) e (2.140) definiscono una curva nel piano* $\sigma, \bar{r}$ *che per* $\alpha = 0$ *passa per il punto* $(\sigma_T, \bar{r}_T)$ *che individua il portafoglio tangente. Questa curva non può intersecare la Capital Market Line; se lo facesse, il portafoglio corrispondente ad un punto della curva situato al di sopra della retta violerebbe la definizione stessa di Capital Market Line come confine efficiente dell'insieme dei portafogli possibili. Pertanto nel punto* $(\sigma_T, \bar{r}_T)$ *la curva di equazioni parametriche (2.139) e (2.140) deve essere tangente alla Capital Market Line. Questa tangenza è la condizione che si sfrutta per ricavare la formula. Il coefficiente angolare della tangente alla curva di equazioni parametriche (2.139) e (2.140) nel punto* $(\sigma_T, \bar{r}_T)$ *è espresso da*

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right)_{\alpha=0} &= \frac{\left(\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}}{\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}} \\ &= \frac{\bar{r}_m - \bar{r}_T}{\frac{1}{2}\frac{\left(2\alpha\sigma_m^2 + 2(1-\alpha)\sigma_{m,T} - 2\alpha\sigma_{m,T} - 2(1-\alpha)\sigma_T^2\right)_{\alpha=0}}{\left(\left(\alpha^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{m,T} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2\right)^{1/2}\right)_{\alpha=0}}} \\ &= \frac{\bar{r}_m - \bar{r}_T}{\frac{\sigma_{m,T} - \sigma_T^2}{\sigma_T}}\end{aligned}$$

e questo valore deve essere uguale al coefficiente angolare della Capital Market Line; ossia

$$\frac{\bar{r}_m - \bar{r}_T}{\frac{\sigma_{m,T} - \sigma_T^2}{\sigma_T}} = \frac{\bar{r}_T - r_0}{\sigma_T}.$$

Ne segue immediatamente che

$$\bar{r}_m - r_0 = \frac{\sigma_{m,T}}{\sigma_T^2}(\bar{r}_T - r_0),$$

come volevasi dimostrare. □

Definizione 139 *Il valore* β_m *è chiamato* beta *del titolo* m*-esimo. Il valore* $\bar{r}_m - r_0$ *è chiamato* tasso di rendimento atteso in eccesso *(*excess expected rate of return*) del titolo* m*-esimo. Il valore* $\bar{r}_T - r_0$ *è chiamato* tasso di rendimento atteso in eccesso *del portafoglio tangente.*

2.3.3 Rischio Sistematico

Abbiamo osservato che secondo il modello CAPM sussiste la relazione

$$\bar{r}_m - r_0 = \beta_m(\bar{r}_T - r_0).$$

Consideriamo allora la differenza

$$r_m - r_0 - \beta_m(r_T - r_0).$$

Questa sarà in generale una variabile aleatoria che denotiamo con ε_m. Possiamo allora scrivere

$$r_m = r_0 + \beta_m(r_T - r_0) + \varepsilon_m.$$

In conseguenza,

$$\bar{r}_m = r_0 + \beta_m(\bar{r}_T - r_0) + \bar{\varepsilon}_m,$$

pertanto il CAPM comporta che

$$\bar{\varepsilon}_m = 0.$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} Cov(r_m, r_T) &= Cov(r_0 + \beta_m(r_T - r_0) + \varepsilon_m, r_T) \\ &= Cov(r_0, r_T) + \beta_m Cov(r_T, r_T) - \beta_m Cov(r_0, r_T) + Cov(\varepsilon_m, r_T) \\ &= \beta_m \mathbf{D}^2 [r_T] + Cov(\varepsilon_m, r_T), \end{aligned}$$

ed ancora il CAPM comporta che

$$Cov(\varepsilon_m, r_T) = 0.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \mathbf{D}^2[r_0 + \beta_m(r_T - r_0) + \varepsilon_m] \\ &= \beta_m^2 \mathbf{D}^2[r_T] + \mathbf{D}^2[\varepsilon_m] \\ &= \beta_m^2 \sigma_T^2 + \mathbf{E}[\varepsilon_m^2], \end{aligned}$$

da cui si vede che σ_m^2 è la somma di due parti. La prima parte $\beta_m^2\sigma_T^2$, è chiamata *rischio sistematico*. E' il rischio associato al mercato nel suo complesso e non può essere ridotto mediante diversificazione, perchè il rischio di mercato è associato ad ogni titolo avente beta diverso da zero. La seconda parte $\mathbf{E}[\varepsilon_m^2] = \mathbf{D}^2[\varepsilon_m]$ è chiamata rischio *specifico* o *idiosincratico* che dipende dalla natura del titolo k-esimo e può essere ridotto mediante diversificazione.

2.4 CAPM e Prezzo dei Titoli del Mercato Finanziario

Secondo il CAPM il portafoglio tangente coincide con il portafoglio di mercato, ossia con il portafoglio i cui pesi sono dati dalla capitalizzazione relativa dei titoli che compongono il mercato in rapporto alla capitalizzazione dell'intero mercato. Se denotiamo con K_m la capitalizzazione del titolo m-esimo del mercato, con S_m il suo prezzo, con n_m il numero delle azioni del titolo m-esimo circolanti nel mercato, noto come *flottante* del titolo, con K la capitalizzazione dell'intero mercato e con w_m il peso del titolo m-esimo nel portafoglio di mercato, abbiamo

$$K_m = n_m S_m, \qquad K = \sum_{m=1}^{M} K_m, \qquad w_m = \frac{K_m}{K},$$

e possiamo porre

$$\bar{r}_M = \bar{r}_T, \qquad \sigma_M = \sigma_T$$

Con queste notazioni, il tasso di rendimento atteso $\bar{r}$ di un qualsiasi titolo del mercato finanziario soddisfa l'equazione

$$\bar{r} - r_0 = \beta(\bar{r}_M - r_0) \tag{2.141}$$

essendo r_0 il tasso di rendimento privo di rischio, r_M il tasso di rendimento del portafoglio di mercato di varianza σ_M^2, ed essendo $\beta \equiv \frac{cov(r,r_M)}{\sigma_M^2}$. D'altra parte, se al tempo $t = 0$ il titolo viene acquistato al prezzo $S(0)$ e successivamente al tempo $t = T$ il titolo viene rivenduto al prezzo $S(T)$ il suo tasso di rendimento è

$$r = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (2.141) otteniamo

$$\frac{\bar{S}(T) - S(0)}{S(0)} = r_0 + \beta(\bar{r}_M - r_0).$$

Risolvendo quest'ultima rispetto a $S(0)$ ne segue

$$S(0) = \frac{\bar{S}(T)}{1 + r_0 + \beta(\bar{r}_M - r_0)}. \tag{2.142}$$

La (2.142) fornisce un'interessante interpretazione del prezzo di un titolo del mercato finanziario: *Il prezzo corrente di un titolo del mercato finanziario è il valore atteso del suo prezzo futuro scontato per un tasso di interesse aggiustato per il rischio.* Chiaramente, con tasso di interesse aggiustato per il rischio è da intendersi il termine $r_0 + \beta(\bar{r}_M - r_0)$.

Importante conseguenza della (2.142) è la linearità dei prezzi correnti. Ossia che il prezzo corrente della combinazione lineare di due, o più, titoli sia uguale alla combinazione lineare dei loro prezzi correnti. Infatti, sostituendo

$$\beta = \frac{cov(\frac{S(T)-S(0)}{S(0)}, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{cov(S(T), r_M)}{\sigma_M^2 S(0)},$$

nella (2.142) abbiamo

$$S(0) = \frac{\bar{S}(T)}{1 + r_0 + \frac{cov(S(T),r_M)}{\sigma_M^2 S(0)}(\bar{r}_M - r_0)} = \frac{\bar{S}(T)\,\sigma_M^2 S(0)}{(1 + r_0)\,\sigma_M^2 S(0) + cov(S(T), r_M)(\bar{r}_M - r_0)},$$

ossia

$$(1 + r_0)\,\sigma_M^2 S(0) + cov(S(T), r_M)(\bar{r}_M - r_0) = \bar{S}(T)\,\sigma_M^2,$$

che comporta

$$S(0) = \frac{\bar{S}(T)\,\sigma_M^2 - cov(S(T), r_M)(\bar{r}_M - r_0)}{(1 + r_0)\,\sigma_M^2} = \frac{1}{1 + r_0}\left(\bar{S}(T) - \frac{cov(S(T), r_M)(\bar{r}_M - r_0)}{\sigma_M^2}\right), \tag{2.143}$$

dove il termine in parentesi è noto come *equivalente certo* di $S(T)$. La (2.143) mostra chiaramente la linearità della formula dei prezzi.

La ragione della linearità è rintracciabile nel principio dell'assenza di arbitraggio: se il prezzo corrente della combinazione lineare di due titoli non fosse uguale alla combinazione lineare dei loro prezzi correnti, si realizzerebbero possibilità di arbitraggio.

Nel contesto dei mercati perfetti la linearità dei prezzi è un principio fondamentale della teoria finanziaria.

Capitolo 3

Multi-Period Investment Model

3.1 Tasso d'Interesse Semplice

Let X_0 be an investment at the time $t = 0$ with maturity $t = T$.

Definizione 140 *We call* simple return *or* simple interest *at maturity T, denoted by R_T, the return or interest which is proportional to the principal and the maturity of the investment by a constant factor $r > 0$, which represents the return of an investment of the unit of money at maturity of the unit of time in which X_0 and T are expressed. In symbols,*

$$R_T = rX_0T. \tag{3.1}$$

Osservazione 141 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. Then, under the assumption of simple return, we have*

$$r_T = rT, \tag{3.2}$$

where r_T is the rate of return at maturity T (see Definition 13).

Definizione 142 *We call the factor r the* unit of simple rate of return.

Osservazione 143 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. Then, we clearly have*

$$a_T = 1 + rT, \qquad X_T = (1 + rT)\, X_0, \tag{3.3}$$

where a_T is the accumulation factor of the investment at maturity T (see Definition 14). In addition,

$$s_T = \frac{rT}{1 + rT}, \qquad d_T = \frac{1}{1 + rT}, \tag{3.4}$$

where s_T [resp. d_T] is the rate of discount [resp. the discount factor] of the investment at maturity T (see Definitions 17 and 18)

Proof. With regard Equation (3.4), on account of (**??**), we can write

$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T} = \frac{rT}{1 + rT}.$$

Considering (2.8) and (3.3), we then have

$$d_T = \frac{X_0}{X_T} = \frac{X_0}{(1 + rT)\, X_0} = \frac{1}{1 + rT}.$$

□

Definizione 144 *We call the* unit of simple rate of discount *the term*

$$s \stackrel{def}{=} \frac{r}{1+r}.$$

Osservazione 145 *We have*

$$s_T = \frac{sT}{1+s(T-1)}.$$

In addition,

$$S_T = \frac{sT}{1+s(T-1)}X_0 = \frac{rT}{1+rT}X_T$$

and

$$X_0 = X_T - S_T = (1-s_T)X_T = \frac{1-s}{1+s(T-1)}X_T = \frac{1}{1+rT}X_T$$

Proof. In fact,

$$s_T = \frac{r_T}{1+r_T} = \frac{rT}{1+rT} = \frac{\frac{r}{1+r}T}{\frac{1+rT}{1+r}} = \frac{\frac{r}{1+r}T}{\frac{1+r+rT-r}{1+r}} = \frac{\frac{r}{1+r}T}{\frac{1+r}{1+r} + \frac{r}{1+r}(T-1)} = \frac{sT}{1+s(T-1)}.$$

□

$$R_T = X_T - X_0, \qquad r_T = \frac{R_T}{X_0} = rT, \qquad a_T = \frac{X_T}{X_0} = 1 + r_T = 1 + rT$$
$$S_T = X_T - X_0, \qquad s_T = \frac{S_T}{X_T} = \frac{rT}{1+rT}, \qquad d_T = \frac{X_0}{X_T} = 1 - s_T = \frac{1}{1+rT}$$

$$R_T = S_T, \qquad a_T d_T = 1, \qquad (1+r_T)(1+s_T) = 1,$$

$$s_T = \frac{r_T}{1+r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1-s_T}$$

$$s = \frac{r}{1+r}, \qquad r = \frac{s}{1-s}$$

Tassi di interesse periodali r_{τ_1}, r_{τ_2}, tassi equivalenti

$$r_{\tau_2} = r_{\tau_1}\tau_{2,1},$$

dove $\tau_{2,1}$ rappresenta il periodo τ_2 espresso in termini di τ_1.

Tassi di sconto periodali d_{p_1}, d_{p_2}, tassi equivalenti

$$d_{p_2} = \frac{d_{p_1}p_2}{1+d_{p_1}(p_2-1)},$$

dove il periodo p_2 va espresso in termini di p_1.

Infatti

$$d_{p_2} = \frac{r_{p_2}}{1+r_{p_2}} = \frac{r_{p_1}p_2}{1+r_{p_1}p_2} = \frac{\frac{d_{p_1}}{1-d_{p_1}}p_2}{1+\frac{d_{p_1}}{1-d_{p_1}}p_2} = \frac{d_{p_1}p_2}{1+d_{p_1}(p_2-1)}.$$

3.1.1 Capitalizzazione degli Interessi

In un regime finanziario a tasso di interesse semplice l'operazione di capitalizzazione degli interessi maturati è vantaggiosa per l'investitore.

Il montante X_T relativo ad un capitale X_0 investito in una attività economica ad un tasso di interesse semplice r corrisposto alla maturità T è dato da

$$X_T = (1 + rT)X_0.$$

Dividendo l'intervallo di tempo $[0, T]$ nei sottointervalli $[0, t]$ e $[t, T]$, con $0 < t < T$, investendo lo stesso capitale X_0 e capitalizzando gli interessi prodotti nell'intervallo di tempo $[0, t]$ allo stesso tasso di interesse semplice r (se possibile), si ottiene stavolta un montante pari a

$$X_{t,T} = (1 + rt)(1 + r(T - t))X_0.$$

Volendo massimizzare $X_{t,T}$ non ci resta che massimizzare la funzione

$$a(t) = (1 + rt)(1 + r(T - t))$$

al variare di $t \in [0, T]$. D'altra parte si ha

$$a'(t) = r^2(T - 2t),$$

per cui

$$a'(t) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leqslant T/2.$$

Quindi $a(t)$ assume valore massimo per $t^* = T/2$ ed in corrispondenza si ha

$$X_{t^*,T} = \left(1 + r\frac{T}{2}\right)^2 X_0.$$

Notare che

$$\left(1 + r\frac{T}{2}\right)^2 > (1 + rT)$$

e ciò rende l'operazione di capitalizzazione degli interessi maturati vantaggiosa per l'investitore.

Dividendo l'intervallo di tempo $[0, T]$ nei sottointervalli $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ e $[t_2, T]$, con $0 < t_1 < t_2 < T$, investendo lo stesso capitale X_0 e capitalizzando gli interessi prodotti nei intervalli di tempo $[0, t_1]$ e $[t_1, t_2]$ allo stesso tasso di interesse semplice r, il montante diviene

$$X_{t_1,t_2,T} = (1 + rt_1)(1 + r(t_2 - t_1))(1 + r(T - t_2))X_0.$$

Tale montante assume valore massimo per $t_1^* = T/3$, $t_2^* = 2T/3$ ed in corrispondenza si ha

$$X_{t_1^*,t_2^*,T} = \left(1 + r\frac{T}{3}\right)^3 X_0.$$

Procedendo ulteriormente, e dividendo l'intervallo di tempo $[0, T]$ nei sottointervalli $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$,..., $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, con $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-2} < t_{n-1} < T$, investendo lo stesso capitale X_0 e capitalizzando gli interessi prodotti nei periodi $[0, t_1]$ e $[t_1, t_2]$ allo stesso tasso di interesse semplice r_p, il montante diviene

$$X_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},T} = (1 + rt_1)(1 + r(t_2 - t_1)) \cdots (1 + r(t_{n-2} - t_{n-1}))(1 + r(T - t_{n-1}))X_0.$$

Si può provare che tale montante assume valore massimo per $t_1 = T/2$, $t_2 = 2T/n$,..., $t_{n-2} = (n-2)T/n$, $t_{n-1} = (n - 1)T/n$, e che in corrispondenza si ha:

$$X_{t_1^*,t_2^*,\ldots,t_{n-1}^*,T} = \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^n X_0.$$

Al limite, se si potesse effettuare una capitalizzazione "continua" degli interessi prodotti, allo stesso tasso di interesse semplice r, si otterrebbe

$$X_{\infty,T} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^n X_0 = \exp(rT)X_0.$$

3.2 Tasso d'Interesse Composto

In un'attività finanziaria a tasso di interesse composto gli interessi vengono capitalizzati automaticamente.

L'unità di capitale investita in un dato periodo di riferimento p al tasso d'interesse r_p produce, in tale periodo, un interesse pari ad r. Il fattore di capitalizzazione è allora

$$a_p = 1 + r_p.$$

Assumendo che a termine del periodo di riferimento gli interessi vengano capitalizzati per un altro periodo di pari durata, mantenendo inalterato il tasso d'interesse, il fattore di capitalizzazione sarà

$$a_{2p} = (1 + r_p)^2 .$$

Procedendo in questo modo per una successione di m periodi, al termine dell'm-esimo periodo di riferimento il fattore di capitalizzazione sarà

$$a_{mp} = (1 + r_p)^m.$$

A tale fattore di capitalizzazione corrisponde un tasso r_{mp} che deve allore soddisfare la

$$a_{mp} = 1 + r_{mp} = (1 + r_p)^m,$$

da cui

$$r_{mp} = (1 + r_p)^m - 1.$$

Analogamente, il tasso di interesse relativo ad $1/n$ del periodo di riferimento iniziale, denotato con $r_{p/n}$, deve soddisfare la relazione

$$a_{p/n} = 1 + r_{p/n}.$$

Tale tasso sarà equivalente ad r, qualora gli interessi vengano capitalizzati ad ogni termine di $1/n$ del periodo di riferimento iniziale. Si avrà pertanto

$$(1 + r_{p/n})^n = 1 + r_p.$$

Notare che da quest'ultima otteniamo

$$r_p = (1 + r_{p/n})^n - 1,$$

e

$$r_{p/n} = (1 + r_p)^{1/n} - 1.$$

Il fattore di capitalizzazione relativo ad m/n -esimi del periodo di riferimento iniziale è allora dato da

$$a_{mp/n} = (1 + r_{p/n})^m = (1 + r_p)^{m/n}.$$

Tale formula porta a concludere che, in un regime di interesse composto, quando gli interessi vengono capitalizzati a fine di ogni periodo al tasso di interesse r il fattore di capitalizzazione è dato da

$$a_T = (1 + r_p)^T ,$$

essendo r il tasso di interesse periodale e $T > 0$ la durata dell'attività finanziaria in termini del periodo p.

Notare che in un'attività finanziaria a tasso di interesse composto eventuali operazioni intermedie di capitalizzazione degli interessi maturati non alterano il montante. Si ha infatti

$$(1 + r_p)^t (1 + r_p)^{T-t} = (1 + r_p)^T ,$$

per ogni $0 < t < T$.

La legge di formazione del tasso di interesse in un'attività finanziaria a tasso di interesse composto è data da:

$$r_t \stackrel{\text{def}}{=} (1 + r_p)^t - 1. \tag{3.5}$$

In regime di tasso d'interesse composto abbiamo:

Legge di formazione del montante

$$X_t = a_t X_0 = (1 + r_p)^t X_0$$

essendo

$$a_t = (1 + r_p)^t.$$

Legge di formazione del rendimento (interesse)

$$R_t = r_t X_0 = \left((1 + r_p)^t - 1\right) X_0.$$

Legge di formazione del fattore di attualizzazione (sconto)

$$d_t = \frac{1}{a_t} = (1 + r_p)^{-t} = (1 - s_p)^t, \tag{3.6}$$

essendo

$$s_p \equiv \frac{r_p}{1 + r_p} \qquad \text{e} \qquad r_p = \frac{s_p}{1 - s_p}.$$

il tasso di sconto e il tasso di rendimento, rispettivamente (see Equation ()) i

$$R_T = X_T - X_0, \qquad r_T = \frac{R_T}{X_0} = (1 + r)^T - 1, \qquad a_T = \frac{X_T}{X_0} = 1 + r_T = (1 + r)^T$$

$$S_T = X_T - X_0, \qquad s_T = \frac{S_T}{X_T} = \frac{(1 + r)^T - 1}{(1 + r)^T}, \qquad d_T = \frac{X_0}{X_T} = 1 - s_T = \frac{1}{(1 + r)^T}$$

$$R_T = S_T, \qquad a_T d_T = 1, \qquad (1 + r_T)(1 + s_T) = 1,$$

$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}$$

$$s = \frac{r}{1 + r}, \qquad r = \frac{s}{1 - s}$$

Legge di formazione del tasso di sconto

$$s_t = 1 - d_t = 1 - (1 + r_p)^{-t} = 1 - (1 - s_p)^t.$$

essendo

Legge di formazione del valore attuale

$$X_0 = d_T X_T = (1 + r_p)^{-T} X_T = (1 - d_p)^T X_T.$$

Legge di formazione dello sconto

$$S_0 = d_T X_T = \left(1 - (1 - d_p)^T\right) X_T = \left(1 - (1 + r_p)^{-T}\right) X_T.$$

Ricordiamo ancora le relazioni

$$r_p = (1 + r_{p/m})^m - 1,$$

e

$$r_{p/m} = (1 + r_p)^{1/m} - 1,$$

che consentono di esprimere lo stesso tasso di interesse rapportato a periodi di riferimento differenti.

Abbiamo poi le analoghe

$$d_p = 1 - (1 - d_{p/m})^m,$$

e

$$d_{p/m} = 1 - (1 - d_p)^{1/m}$$

che consentono di esprimere lo stesso tasso di sconto rapportato a periodi di riferimento differenti.

3.3 Confronto Tra i Principali Regimi Finanziari

Denotiamo con $a_t^{(s)}$, $a_t^{(c)}$ i fattori di capitalizzazione (*accumulation factors*) tipici dei due regimi di tasso d'interesse semplice, tasso d'interesse composto. Ricordiamo che, in relazione allo stesso tasso di interesse periodale r_p si ha

$$a_T^{(s)} = 1 + r_p T, \qquad a_T^{(c)} \equiv (1 + r_p)^T.$$

Abbiamo chiaramente

$$a_0^{(s)} = a_0^{(c)} = 1$$

e

$$a_1^{(s)} = a_1^{(c)} = 1 + r_p.$$

Si può inoltre provare che risulta

$$\begin{array}{ll} a_T^{(s)} \geqslant a_T^{(c)} & \text{if } 0 \leqslant T \leqslant 1 \\ a_t^{(c)} \geqslant a_t^{(s)} & \text{if } T \geqslant 1 \end{array}.$$

3.4 Capitalizzazione Mista

Nella pratica dei rapporti di conto corrente bancario trova usuale applicazione un regime finanziario che risulta una forma intermedia tra il regime ad interesse semplice ed il regime ad interesse composto, noto come regime della capitalizzazione mista.

Supponiamo che gli interessi vengano accreditati con una certa periodicità ad un tasso r_p ed a delle date prestabilite e che un capitale X_0 sia reso fruttifero per un tempo T (espresso in termini del periodo di calcolo degli interessi).

Si scomponga T nella forma

$$T = s + n + t$$

essendo s il tempo che decorre dal deposito del capitale sino alla data del primo accredito degli interessi, n il numero di periodi interi durante i quali il capitale rimane in deposito e t il tempo che decorre dalla data dell'ultimo accredito degli interessi alla data della riscossione del montante X_T. Tale montante viene allora calcolato secondo la formula

$$X_T = (1 + r_p s)(1 + r_p)^n (1 + r_p t) X_0.$$

Da notare che il regime dell'interesse composto puro porterebbe ad un montante

$$\tilde{X}_T = (1 + r_p)^T X_0 = (1 + r_p)^s (1 + r_p)^n (1 + r_p)^t X_0,$$

e risulterebbe

$$\tilde{X}_T \leqslant X_T,$$

dal momento che

$$(1 + r_p)^s \leqslant (1 + r_p s) \qquad \text{e} \qquad (1 + r_p)^t \leqslant (1 + r_p t),$$

essendo $s, t \leqslant 1$.

3.4.1 Tasso Nominale d'Interesse

Tasso nominale e tasso effettivo

Un capitale unitario, $X_0 = 1$, viene investito in regime di interesse composto, al tasso periodale r_p. L'interesse via via prodotto viene corrisposto all'investitore in m sottoperiodi del periodo di investimento. Per ciascuno dei sottoperiodi considerati l'investitore percepirà un interesse pari a $r_{p/m}$. Al termine del periodo di investimento l'investitore avrà percepito come interesse m rate di ammontare

$$r_{p/m} = (1 + r_p)^{1/m} - 1$$

ciascuna.

La somma di queste m rate, che denotiamo con $r_p(m)$, è detta tasso nominale periodale di interesse m-volte convertibile corrispondente ad r_p:

$$r_p(m) = mr_{p/m} = m((1 + r_p)^{1/m} - 1).$$

Che si possono invertire nella forma

$$r_{p/m} = \frac{r_p(m)}{m},$$

e

$$r_p = \left(1 + \frac{r_p(m)}{m}\right)^m - 1.$$

Proposizione 146 *Se in una attività finanziaria si investe un capitale X_0 per un certo periodo durante il quale viene corrisposto un tasso nominale periodale di interesse m-volte convertibile $r_p(m)$ e se gli interessi corrisposti a termine di ciascuno degli m sottoperiodi del periodo di investimento vengono via via investiti al tasso r_p per il periodo residuo di investimento, in un regime di interesse composto, allora investire nel capitale al tasso $r_p(m)$ oppure al tasso r_p in un regime di interesse composto produce lo stesso montante.*

Proof. *Assumendo per semplicità di notazioni il capitale X_0 unitario, l'investimento al tasso $r_p(m)$ produce a termine del primo sottoperiodo del periodo di investimento un interesse pari a*

$$r_p(m)/m = r_{p/m}.$$

Tale interesse investito al tasso r_p in un regime di interesse composto produce a termine dell'intervallo residuale del periodo di investimento un montante pari a

$$r_{p/m}(1 + r_p)^{1-1/m}.$$

Similmente, a termine del secondo sottoperiodo del periodo di investimento il capitale unitario investito produce un interesse ancora pari a

$$r_p(m)/m = r_{p/m}.$$

Tale interesse investito al tasso r_p in un regime di interesse composto produce stavolta a termine dell'intervallo residuale del periodo di investimento un montante pari a

$$r_{p/m}(1 + r_p)^{1-2/m}.$$

In generale, a termine del k-esimo degli m sottoperiodi del periodo di investimento viene sempre prodotto un interesse pari a

$$r_p(m)/m = r_{p/m}.$$

e tale interesse investito al tasso r_p in un regime di interesse composto produce a termine dell'intervallo residuale del periodo di investimento un montante pari a

$$r_{p/m}(1 + r_p)^{1-k/m},$$

per $k = 1, \dots, m$. Da notare che all'ultimo dei sottoperiodi di investimento, $k = m$, il montante prodotto coincide con l'interesse stesso. Il montante complessivamente generato risulta allora

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} r_{p/m}(1+r_p)^{1-k/m} &= r_{p/m}(1+r_p)\sum_{k=1}^{m}(1+r_p)^{-k/m} \\
&= r_{p/m}(1+r_p)\sum_{k=1}^{m}(1+r_p)^{-k/m}(1+r_p)^{-1/m}(1+r_p)^{1/m} \\
&= r_{p/m}(1+r_p)(1+r_p)^{-1/m}\sum_{k=1}^{m}(1+r_p)^{1/m-k/m} \\
&= \left((1+r_p)^{1/m}-1\right)(1+r_p)(1+r_p)^{-1/m}\sum_{k=1}^{m}\left((1+r_p)^{-1/m}\right)^{k-1} \\
&= ((1+r_p)^{1/m}-1)(1+r_p)^{-1/m}(1+r_p)\frac{1-((1+r_p)^{-1/m})^m}{1-(1+r_p)^{-1/m}} \\
&= (1-(1+r_p)^{-1/m})(1+r_p)\frac{1-(1+r_p)^{-1}}{1-(1+r_p)^{-1/m}} \\
&= r_p.
\end{aligned}$$

□

3.4.2 Tasso Istantaneo d'Interesse

Siano r_T il tasso di interesse relativo ad un periodo T e sia $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_n \equiv T$ una successione di istanti di tempo tale che $t_{k+1} - t_k = T/n$ per $k = 0, \dots, n-1$. Sia quindi $v \equiv (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un flusso di cassa relativo a tali istanti.

Il valore futuro di v con composizione periodale degli interessi su base T/n è dato da

$$FV_n(v) = \sum_{k=0}^{n} x_k(1+\frac{T}{n}r_T)^{n-k}$$

mentre con composizione continua degli interessi si ha

$$PV_\infty(v) = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{r_T(T-t_k)}.$$

Da notare che, essendo $t_k = k\frac{T}{n}$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{r_T(T-t_k)} = \sum_{k=0}^{n} e^{r_T\frac{T}{n}(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}(e^{r_T\frac{T}{n}})^{n-k} \approx \sum_{k=0}^{n}(1+\frac{T}{n}r_T)^{n-k}.$$

Pertanto

$$PV_n(v) \approx PV_\infty(v)$$

e l'approssimazione è tanto migliore quanti più $n \to \infty$.

Siano r_T il tasso di interesse relativo ad un periodo T e sia $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_n \equiv T$ una successione di istanti di tempo tale che $t_{k+1} - t_k = T/n$ per $k = 0, \dots, n-1$. Sia quindi $v \equiv (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un flusso di cassa relativo a tali istanti.

Il valore attuale di v con composizione periodale degli interessi su base T/n è dato da

$$PV_n(v) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+\frac{T}{n}r_T)^k},$$

mentre con composizione continua degli interessi si ha

$$PV_\infty(v) = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{-r_T t_k}.$$

Da notare che

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-r_T t_k} = \sum_{k=0}^{n} e^{-r_T \frac{T}{n} k} = \sum_{k=0}^{n} (e^{r_T \frac{T}{n}})^{-k} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+\frac{T}{n} r_T)^k}.$$

Pertanto

$$PV_n(v) \approx PV_\infty(v)$$

e l'approssimazione è tanto migliore quanti più $n \to \infty$.

In regime finanziario ad interesse composto a tasso periodale r_p, consideriamo il tasso nominale periodale di interesse m-volte convertibile corrispondente ad r_p

$$r_p(m) = m r_{p/m} = m((1+r_p)^{1/m} - 1).$$

Si ha

$$\lim_{m\to\infty} r_p(m) = \log(1+r_p). \tag{3.7}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} r_p(m) &= \lim_{m\to\infty} \frac{(1+r_p)^{1/m} - 1}{1/m} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+r_p)^x - 1}{x} \\
&= \log(1+r_p).
\end{aligned}$$

La quantità

$$\rho_p \equiv \log(1+r_p) \tag{3.8}$$

è nota come *tasso istantaneo periodale di interesse*, o *tasso nominale periodale infinite volte convertibile*, o *tasso periodale di interesse composto continuamente*. Da notare che la legge di formazione del fattore di capitalizzazione può essere scritta come:

$$r\,(T) = (1+r_p)^T = \exp(\log(1+i_p))T) = \exp(\rho_p T).$$

Legge di formazione del montante:

$$X_T = X_0 \exp(\rho_p T)$$

Legge di formazione del valore attuale

$$X_0 = X_T \exp(-\rho_p t)$$

Il tasso istantaneo relativo $\rho_{p/m}$ ad un m-esimo del periodo di riferimento iniziale p sarà correlato a ρ_p da:

$$\rho_{p/m} \equiv \log(1+r_{p/m}) = \log((1+r_p)^{1/m}) = \frac{1}{m}\log(1+r_p) = \frac{1}{m}\rho_p.$$

Il tasso istantaneo di interesse ρ_p produce in una frazione dt del periodo di investimento p di un capitale unitario l'interesse

$$\rho_p dt$$

assumendo che tale somma sia disponibile all'inizio dell'intervallo $[t, t + dt]$ e capitalizzandola ad interesse composto per l'intervallo residuale del periodo otteniamo il montante

$$(1 + r_p)^{1-t} \rho_p dt = \log(1 + r_p)(1 + r_p)^{1-t} dt.$$

Il contributo complessivo dovuto a tutte le frazioni dt di periodo sarà allora dato da

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(1 + i_p)(1 + i_p)^{1-t} dt &= \int_0^1 \log(1 + i_p) \exp(\log(1 + i_p)(1 - t))\, dt \\
&= \int_0^{\log(1+i_p)} \exp(u)\, du \\
&= \exp(\log(1 + i_p)) - \exp(0) \\
&= 1 + r_p - 1 \\
&= r_p.
\end{aligned}$$

Che coincide con l'interesse prodotto nel periodo al tasso periodale r_p

$$(1 + r_p)^T = \exp(\rho_p T) \qquad \rho_p = \log(1 + r_p)$$

$$(1 + r_y)^{T_y} = \exp(\rho_y T_y) \qquad \rho_y = \log(1 + r_y)$$

$$(1 + r_m)^{T_m} = \exp(\rho_m T_m) \qquad \rho_m = \log(1 + r_m)$$

$$(1 + r_m)^{12_m} = 1 + r_y$$

$$r_y = (1 + r_m)^{12_m} - 1 \simeq 1 + 12_m r_m - 1 = 12_m r_m$$

$$r_m \simeq \frac{1}{12} r_y$$

$$\rho_y = \log(1 + r_y) \simeq \log(1 + 12_m r_m)$$

$$\exp(\rho_y) = 1 + 12_m r_m \simeq (1 + r_m)^{12_m} = \exp(\rho_m 12_m)$$

$$\rho_y = \rho_m 12_m$$

$$(1 + r_m)^{T_m} = \exp(\rho_m T_m) \Rightarrow (1 + r_m)^{12_m} = \exp(\rho_m 12_m) = \exp(\rho_y 1_y) \Rightarrow \rho_y = \rho_m 12_m$$

.

3.5 Cox-Ross-Rubinstein Model (Multi-Period Multiplicative Binomial Model)

Consideriamo adesso un modello di mercato multiperiodale articolato in N periodi di contrattazione, individuati dalla successione finita di tempi $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_N \equiv T$. Per semplicità assumiamo che tutti i periodi di contrattazione abbiano la stessa durata, cioè $t_{n+1} - t_n = T/N \equiv \Delta t$, per ogni $n = 0, \ldots, N-1$. Ovviamente ciò comporta $t_n = n\Delta t$, per ogni $n = 0, \ldots, N$. Come nel caso monoperiodale, assumiamo che sia possibile investire in un titolo non rischioso, riferito come *bond* e denotato con B, in un titolo rischioso, riferito come *stock* e denotato con S, e in titoli derivati di sottostante lo stock, di volta in volta variamente denominati e denotati. Inoltre, denoteremo rispettivamente con B_n ed S_n i valori di mercato del bond e dello stock al tempo t_n. A partire dal tempo $t = t_0$ e a inizio di ogni periodo di contrattazione, un operatore finanziario osserva i valori di mercato dei titoli, il bond lo stock e i derivati sullo stock, e investe in un portafoglio costituito dai titoli stessi. A termine di ogni periodo di contrattazione i valori di mercato dei titoli vengono aggiornati, su base deterministica o aleatoria, secondochè si tratti del bond o dello stock e i suoi derivati, l'operatore finanziario ha quindi facoltà di riconfigurare il suo portafoglio. All'istante terminale $t = t_N$ questo processo s'arresta, l'operatore liquida interamente il suo portafoglio, l'eventuale a ricchezza prodotta viene consumata o l'eventuale debito contratto va ripagato. Come nel caso monoperiodale, relativamente alle operazioni di compravendita, assumiamo che:

1. i tassi di rendimento relativi alle operazioni di prestito e deposito siano gli stessi;
2. gli investimenti possano essere effettuati senza alcuna limitazione quantitativa, in altri termini sia possibile operare su una qualunque frazione di bond, stock e derivati rispetto all'unità di moneta fissata;
3. i costi di transazione siano nulli;
4. le vendite allo scoperto sul bond, sullo stock e sui derivati siano totalmente libere;
5. lo stock non distribuisca dividendi.

Assumiamo inoltre che il bond frutti al possessore un tasso d'interesse $r > 0$, costante nel periodo di contrattazione $[t_{n-1}, t_n]$, per ogni $n = 1, \ldots, N$, con interesse pagato al termine di ogni periodo. In virtù di questa ipotesi la dinamica del valore di mercato di una unità del bond $(B_n)_{n=0}^N$ segue la legge

$$B_0 > 0, \quad B_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (1+r)B_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.9}$$

L'acquirente di un bond al tempo $t = t_0$ che lo detenga fino al tempo $t = t_n$ disporrà quindi di un capitale con valore di liquidazione pari a

$$B_n = (1+r)^n B_0, \tag{3.10}$$

per ogni $n = 0, \ldots, N$. Analogamente a quanto osservato nel caso di un mercato monoperiodale avremo

Proposizione 147 *Stante la (3.10), il valore di una somma di denaro M_0 al tempo $t = 0$ ha un valore capitalizzato al tempo $t = t_n$ di*

$$M_n = (1+r)^n M_0, \tag{3.11}$$

per ogni $n = 0, \ldots, N$. Viceversa, il valore di una somma M_T di denaro al tempo $t = T$ ha un valore scontato al tempo $t = t_n$ di

$$M_n = \frac{M_T}{(1+r)^{N-n}}, \tag{3.12}$$

per ogni $n = 0, \ldots, N$.

Proof. *Come nel caso monoperiodale, la disponibilità di denaro* M_0 *al tempo* $t = 0$ *consente l'acquisto di*

$$x = \frac{M_0}{B_0}$$

unità di titolo non rischioso di valore di mercato B_0. *La liquidazione di questo investimento al tempo* $t = t_n$ *produce stavolta un ammontare* M_n *secondo la formula*

$$M_n = xB_n = \frac{M_0}{B_0}(1+r)^n B_0 = (1+r)^n M_0.$$

Viceversa, volendo produrre un montante M_T *al tempo* $t = T$ *è necessario liquidare*

$$x = \frac{M_T}{B_T}$$

unità di titolo non rischioso di valore di mercato B_T. *D'altra parte l'acquisto di tali unità di titolo non rischioso al tempo* $t = t_n$ *richiede l'investimento di una somma di denaro* M_n *pari a*

$$M_n = xB_n = \frac{M_T}{B_T} B_n = \frac{M_T}{(1+r)^{N-n} B_n} B_n = \frac{M_T}{(1+r)^{N-n}}.$$

□

Per descrivere la dinamica rischiosa $(S_n)_{n=0}^N$ del prezzo dello stock è opportuno definire uno spazio di probabilità di supporto al modello multiperiodale. A tale scopo assumiamo che al termine di ciascuno dei periodi di contrattazione si possano realizzare soltanto due accadimenti aleatori, uno positivo e uno negativo in base ai quali il valore di mercato dello stock venga aggiornato a partire dal suo valore a inizio del periodo di contrattazione. Per maggiore semplicità, assumiamo inoltre che lo stock non rilasci dividendi. Il valore $S_T \equiv S_N$ assunto dallo stock all'istante terminale $t_N \equiv T$ risulta allora frutto della particolare successione di accadimenti positivi o negativi che si realizzano a partire dall'istante iniziale $t_0 \equiv 0$. Per rappresentare una di tali successioni è naturale impiegare una successione di N termini $(\omega_n)_{n=1}^N$, ciascun ω_n dei quali sia denotato con uno tra due diversi simboli, come da standard 1 e 0, secondoché al tempo $t = t_n$ si realizzi l'accadimento positivo o quello negativo. Lo *spazio campionario* Ω diviene allora l'insieme di tutte queste possibili successioni. Precisamente

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N \mid \omega_n = 0 \ \vee \ \omega_n = 1, \quad n = 1, \ldots, N\} = \{0,1\}^N, \tag{3.13}$$

essendo $\{0,1\}^N \equiv \mathsf{X}_{n=1}^N \{0,1\}$ il prodotto cartesiano di N copie dell'insieme $\{0,1\}$, *potenza cartesiana* Nesima di $\{0,1\}$. Da notare che lo spazio Ω così definito viene ad essere costituito da 2^N *campioni*[1], tanti quante sono le possibili Nple le cui componenti hanno valore 0 o 1. Essendo Ω finito è allora conveniente scegliere come *famiglia degli eventi* $\mathcal{E}$ di Ω la σ-algebra discreta, ossia la famiglia $\mathcal{P}(\Omega)$ di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω[2]. Questa scelta consente di considerare come *eventi elementari* gli eventi costituiti da singole successioni di accadimenti e di definire una probabilità $\mathbf{P}$ su Ω a partire da una *distribuzione di probabilità oggettiva* sugli eventi elementari.

Assumendo che gli accadimenti positivi o negativi si realizzino in successione indipendentemente gli uni dagli altri e che un singolo accadimento positivo [resp. negativo] si presenti sempre con probabilità p [resp. $q \equiv 1 - p$], la distribuzione di probabilità in questione è data da

$$\mathbf{P}(\omega) \equiv \mathbf{P}((\omega_n)_{n=1}^N) \stackrel{\text{def}}{=} p^K q^{N-K}, \quad K = |\{n : \omega_n = 1\}|, \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.14}$$

[1] In simboli, $|\Omega| = 2^N$, denotando $|\Omega|$ la *cardinalità* di Ω.

[2] Essendo Ω finito, la σ-algebra discreta $\mathcal{E} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$ è in effetti un'algebra costituita da $2^{|\Omega|} = 2^{2^N}$ eventi.

dove $\mathbf{P}(\omega)$ è l'abbreviazione standard per $\mathbf{P}(\{\omega\})$ e il simbolo $|\{n : \omega_n = 1\}|$ denota il numero degli indici n in $(\omega_n)_{n=1}^N$ per i quali $\omega_n = 1$. La probabilità oggettiva $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ generata da tale distribuzione sarà allora

$$\mathbf{P}(E) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in E} \mathbf{P}(\omega), \quad E \in \mathcal{E}. \tag{3.15}$$

In altri termini, la probabilità di ogni evento E è definita come la somma delle probabilità degli eventi elementari componenti E. Per verificare che tramite le (3.14) e (3.15) si sia effettivamente definita una probabilità è necessario e sufficiente provare che

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1. \tag{3.16}$$

Infatti,

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) = \sum_{K=0}^{N} \sum_{\omega \in \Omega : |\{n | \omega_n = 1\}| = K} p^K q^{N-K} = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K q^{N-K} = (p+q)^N = 1. \tag{3.17}$$

Un'altra conseguenza significativa della scelta $\mathcal{E} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$ è che considerata la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ su $\mathbb{R}^M$, essendo $\mathbb{R}^M$ lo spazio euclideo reale M-dimensionale, per un certo $M \in \mathbb{N}$, ogni funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ di Ω in $\mathbb{R}^M$ soddisfa chiaramente la condizione

$$\{X \in B\} \in \mathcal{E}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M), \tag{3.18}$$

essendo $\{X \in B\}$ l'abbreviazione standard per l'evento $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, contro-immagine di B mediante X, costituito dagli esiti del fenomeno aleatorio sui quali la funzione X prende valori in B. Quindi ogni funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ risulta essere una $\mathcal{E}$-variabile aleatoria reale M-variata, per di più, essendo Ω finito, ogni $\mathcal{E}$-variabile aleatoria reale M-variata su Ω ha momento finito di ordine K per ogni $K \in \mathbb{N}$. Riassumendo

Osservazione 148 *Una qualsiasi funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ di Ω in $\mathbb{R}^M$ è una $\mathcal{E}$-variabile aleatoria reale M-variata su Ω con momento finito di ordine K per ogni $K \in \mathbb{N}$.*

Per $K = 1$ tale momento è noto come *speranza* di X, definito come

$$\mathbf{E}[X] \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{E}[X_1], \ldots, \mathbf{E}[X_M])^\intercal$$

essendo, in termini di componenti, $X \equiv (X_1, \ldots, X_M)^\intercal$ ed essendo

$$\mathbf{E}[X_m] \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} X_m(\omega) \mathbf{P}(\omega), \quad \forall m = 1, \ldots, M.$$

Per $K = 2$ il momento è definito come

$$[\text{risp. } \mathbf{E}[X^\intercal X] = \begin{pmatrix} \mathbf{E}[X_1^2] & \mathbf{E}[X_1 X_2] & \cdots & \mathbf{E}[X_1 X_{M-1}] & \mathbf{E}[X_1 X_M] \\ \mathbf{E}[X_2 X_1] & \mathbf{E}[X_2^2] & \cdots & \mathbf{E}[X_2 X_{M-1}] & Cov(X_2, X_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{E}[X_{M-1} X_1] & \mathbf{E}[X_{M-1} X_2] & \cdots & \mathbf{E}[X_{M-1}^2] & \mathbf{E}[X_{M-1} X_M] \\ \mathbf{E}[X_M X_1] & \mathbf{E}[X_M X_2] & \cdots & \mathbf{E}[X_2 X_M] & \mathbf{E}[X_M^2] \end{pmatrix}].$$

essendo

$$\mathbf{E}[X_\ell X_m] \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} X_\ell(\omega) X_m(\omega) \mathbf{P}(\omega), \quad \forall \ell, m = 1, \ldots, M.$$

Tuttavia, nelle applicazioni è di più frequente uso la cosiddetta *varianza-covarianza* di X, definita come

[risp. $Var(X) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^2[X_1] & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_{M-1}) & Cov(X_1,X_M) \\ Cov(X_2,X_1) & \mathbf{D}^2[X_2] & \cdots & Cov(X_2,X_{M-1}) & Cov(X_2,X_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_{M-1},X_1) & Cov(X_{M-1},X_2) & \cdots & \mathbf{D}^2[X_{M-1}] & Cov(X_{M-1},X_M) \\ Cov(X_M,X_1) & Cov(X_M,X_2) & \cdots & Cov(X_M,X_{M-1}) & \mathbf{D}^2[X_M] \end{pmatrix}$],

essendo

$$\mathbf{D}^2[X_m] \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\omega\in\Omega}(X_m(\omega) - \mathbf{E}[X_m])^2\,\mathbf{P}(\omega), \quad \forall m = 1,\dots,M,$$

e

$$Cov(X_\ell,X_m) \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\omega\in\Omega}(X_\ell(\omega) - \mathbf{E}[X_\ell])(X_m(\omega) - \mathbf{E}[X_m])\,\mathbf{P}(\omega), \quad \forall \ell, m = 1,\dots,M.$$

Da notare che per $K = 3$ [risp. $K = 4$] il mome

Notiamo anche che, sempre essendo Ω finito, lo spazio vettoriale reale di tutte le funzioni $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ ha dimensione finita pari a $2^N M$[3]. Inoltre, essendo ogni tale funzione una $\mathcal{E}$-variabile aleatoria con momento finito di ogni ordine, in particolare di ordine 2, otteniamo che lo spazio vettoriale reale delle funzioni $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ è identificabile con lo spazio di Hilbert $L^2(\Omega;\mathbb{R}^M)$ delle $\mathcal{E}$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω che hanno momento finito di ordine 2 dotato del prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(\Omega;\mathbb{R}^M) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathbb{R}$, dato da

$$\langle X, Y\rangle \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} X^\intercal(\omega)\,Y(\omega)\,\mathbf{P}(\omega), \quad \forall X, Y \in F(\Omega;\mathbb{R}^M),$$

essendo

$$X^\intercal(\omega)\,Y(\omega) \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{m=1}^{M} X_m(\omega)\,Y_m(\omega), \quad \forall\omega\in\Omega,$$

con $X(\omega) \equiv (X_1(\omega),\dots,X_M(\omega))^\intercal$ e $Y(\omega) \equiv (Y_1(\omega),\dots,Y_M(\omega))^\intercal$, l'ordinario prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$.

Una volta introdotto lo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{E},\mathbf{P}) \equiv \Omega$, per rappresentare l'incidenza sul prezzo dello stock della realizzazione dei possibili accadimenti introduciamo anche una successione di variabili aleatorie bernoulliane $(\beta_n)_{n=1}^N$ su Ω tali che

$$\beta_n(\omega) \equiv \beta_n((\omega_k)_{k=1}^N) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & \text{se } \omega_n = 1 \\ d, & \text{se } \omega_n = 0 \end{cases}, \quad \omega\in\Omega, \quad n = 1,\dots,N, \tag{3.19}$$

essendo

$$\mathbf{P}(\beta_n = u) \equiv p, \qquad \mathbf{P}(\beta_n = d) \equiv q, \quad n = 1,\dots,N. \tag{3.20}$$

Proposizione 149 *Le variabili aleatorie $\beta_1,\dots,\beta_N$ risultano essere (totalmente) indipendenti rispetto alla probabilità oggettiva $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$.*

Proof. *Dobbiamo provare che comunque considerato un sottoinsieme di indici $\{n_1,\dots,n_K\}$ dell'insieme $\{1,\dots,N\}$, con $K \leqslant N$, si ha*

$$\mathbf{P}(\beta_{n_1} \leqslant x_1,\dots,\beta_{n_K} \leqslant x_K) = \mathbf{P}(\beta_{n_1} \leqslant x_1)\cdots\mathbf{P}(\beta_{n_K} \leqslant x_K)$$

al variare di $(x_1,\dots,x_K) \in \mathbb{R}^K$. D'altra parte, per ogni $\{n_1,\dots,n_K\}$, il vettore aleatorio $(\beta_{n_1},\dots,\beta_{n_K})$ può prendere come valori solo una delle possibili K-ple dell'insieme finito

$$\mathbb{S} \equiv \left\{(x_1,\dots,x_K) \in \mathbb{R}^K : x_k = u \vee x_k = d\right\}.$$

[3] Una base dello spazio delle funzioni

Pertanto $\beta_1, \ldots, \beta_N$ sono totalmente indipendenti rispetto alla probabilità oggettiva $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ se e solo se per ogni $\{n_1, \ldots, n_K\}$ risulta

$$\mathbf{P}(\beta_{n_1} = x_1, \ldots, \beta_{n_K} = x_K) = \mathbf{P}(\beta_{n_1} = x_1) \cdots \mathbf{P}(\beta_{n_K} = x_K), \tag{3.21}$$

per ogni $(x_1, \ldots, x_K) \in \mathbb{S}$. Fissato quindi un sottoinsieme di indici $\{n_1, \ldots, n_K\}$ dell'insieme $\{1, \ldots, N\}$ e considerato l'insieme di indici $\{m_1, \ldots, m_{N-K}\}$ tale che

$$\{m_1, \ldots, m_{N-K}\} = \{1, \ldots, N\} - \{n_1, \ldots, n_K\},$$

per ogni $(x_1, \ldots, x_K) \in \mathbb{S}$ risulta

$$\begin{aligned}
&\{\beta_{n_1} = x_1, \ldots, \beta_{n_K} = x_K\} \\
&= \Big\{\omega \in \Omega : \omega_{n_k} = 1 \text{ [resp. } 0] \Leftrightarrow x_{n_k} = u \text{ [resp. } d],\ k = 1, \ldots, K,\ \wedge\ \left(\omega_{m_1}, \ldots, \omega_{m_{N-K}}\right) \in \{0,1\}^{N-K}\Big\} \\
&= \bigcup_{H=0}^{N-K} \{\omega \in \Omega : \omega_{n_k} = 1 \text{ [resp. } 0] \Leftrightarrow x_{n_k} = u \text{ [resp. } d],\ k = 1, \ldots, K,\ \wedge\ |\{m_h : \omega_{m_h} = 1\}| = H\}.
\end{aligned}$$

Quindi, posto $J = |\{k \mid x_k = u,\ k = 1, \ldots, K\}|$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\beta_{n_1} = x_1, \ldots, \beta_{n_K} = x_K) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcup_{H=0}^{N-K} \{\omega \in \Omega : \omega_{n_k} = 1 \text{ [resp. } 0] \Leftrightarrow x_{n_k} = u \text{ [resp. } d],\ k = 1, \ldots, K,\ \wedge\ |\{m_h : \omega_{m_h} = 1\}| = H\}\right) \\
&= \sum_{H=0}^{N-K} \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \omega_{n_k} = 1 \text{ [resp. } 0] \Leftrightarrow x_{n_k} = u \text{ [resp. } d],\ k = 1, \ldots, K,\ \wedge\ |\{m_h : \omega_{m_h} = 1\}| = H\}\right) \\
&= \sum_{H=0}^{N-K} \binom{N-K}{H} p^H q^{N-K-H} p^J q^{K-J} \\
&= p^J q^{K-J} \sum_{H=0}^{N-K} \binom{N-K}{H} p^H q^{N-K-H} \\
&= p^J q^{K-J}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\mathbf{P}(\beta_{n_1} = x_1) \cdots \mathbf{P}(\beta_{n_K} = x_K) = p^J q^{K-J}.$$

Pertanto sussiste la (3.21), e ciò prova l'asserto. □

Il verificarsi progressivo degli eventi viene allora rappresentato naturalmente dalla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N \equiv \mathfrak{F}$ tale che

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \qquad \mathcal{F}_n \overset{\text{def}}{=} \sigma(\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad n = 1, \ldots, N, \tag{3.22}$$

essendo $\sigma(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ la σ-algebra generata dalle variabili aleatorie $\beta_1, \ldots, \beta_n$[4]. E' semplice rendersi conto che

$$\mathcal{F}_1 \overset{\text{def}}{=} \sigma(\beta_1) = \{\varnothing, \Omega, E_0, E_1\},$$

dove

$$E_0 \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 0\} \quad \text{e} \quad E_1 \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\}.$$

[4]La più piccola σ-algebra di eventi rispetto a cui $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sono variabili aleatorie.

Inoltre,

$$\mathcal{F}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\beta_1, \beta_2) = \sigma\left(E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\right),$$

dove

$$E_{0,0} \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 0 \wedge \omega_2 = 0\}, \quad E_{0,1} \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 0 \wedge \omega_2 = 1\},$$
$$E_{1,0} \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 0\}, \quad E_{1,1} \equiv \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 1\},$$

e $\sigma\left(E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\right)$ è la σ-algebra generata dalla famiglia di eventi $\{E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$[5]. In dettaglio,

$$\sigma\left(E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\right)$$
$$= \{\varnothing, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}, E_0, E_{0,0} \cup E_{1,0}, E_{0,0} \cup E_{1,1}, E_{0,1} \cup E_{1,0}, E_{0,1} \cup E_{1,1}, E_1, E_{1,1}^c, E_{0,1}^c, E_{1,0}^c, E_{0,0}^c, \Omega\},$$

essendo

$$E_0 = E_{0,0} \cup E_{0,1} \quad \text{e} \quad E_1 = E_{1,0} \cup E_{1,1}.$$

Infatti essendo $\{E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ una partizione finita di Ω è noto che σ-algebra generata da $\{E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ contiene tutti e soli gli eventi E rappresentabili come

$$E = \bigcup_{h \in H} E_h,$$

al variare di H tra tutti i sottoinsiemi dell'insieme di indici $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \equiv J$[6]. Ora l'insieme delle parti $\mathcal{P}(J)$ contiene $2^4 = 16$ elementi. Più specificatamente

$$\mathcal{P}(J) = \{H_n\}_{n=1}^{16},$$

dove

$$H_1 \equiv \varnothing, \quad H_2 \equiv \{(0,0)\}, \quad H_3 \equiv \{(0,1)\}, \quad H_4 \equiv \{(1,0)\}, \quad H_5 \equiv \{(1,1)\},$$
$$H_6 \equiv \{(0,0),(0,1)\}, H_7 \equiv \{(0,0),(1,0)\}, H_8 \equiv \{(0,0),(1,1)\}, H_9 \equiv \{(0,1),(1,0)\}, H_{10} \equiv \{(0,1),(1,1)\}, H_{11} \equiv \{(0,1),(1,1)\},$$
$$H_{12} \equiv \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, H_{13} \equiv \{(0,0),(1,0),(1,1)\}, H_{14} \equiv \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, H_{15} \equiv \{(0,1),(1,0),(1,1)\},$$
$$H_{16} \equiv \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

Quindi

$$\bigcup_{h \in H_1} E_h = \varnothing, \quad \bigcup_{h \in H_2} E_h = E_{0,0}, \quad \bigcup_{h \in H_3} E_h = E_{0,1}, \quad \bigcup_{h \in H_4} E_h = E_{1,0}, \quad \bigcup_{h \in H_5} E_h = E_{1,1},$$
$$\bigcup_{h \in H_6} E_h = E_0, \quad \bigcup_{h \in H_7} E_h = E_{0,0} \cup E_{1,0}, \quad \bigcup_{h \in H_8} E_h = E_{0,0} \cup E_{1,1}, \quad \bigcup_{h \in H_9} E_h = E_{0,1} \cup E_{1,0}, \quad \bigcup_{h \in H_{10}} E_h = E_{0,1} \cup E_{1,1}, \quad \bigcup_{h \in H_{11}} E_h = E_1,$$
$$\bigcup_{h \in H_{12}} E_h = E_{1,1}^c, \quad \bigcup_{h \in H_{13}} E_h = E_{0,1}^c, \quad \bigcup_{h \in H_{14}} E_h = E_{1,0}^c, \quad \bigcup_{h \in H_{15}} E_h = E_{0,0}^c, \quad \bigcup_{h \in H_{16}} E_h = \Omega.$$

Più in generale $\mathcal{F}_n$ rappresenta la famiglia di eventi osservabili alla luce della realizzazione delle variabili aleatorie $\beta_1, \ldots, \beta_n$ e stante la realizzazione di tali variabili aleatorie possiamo distinguere tra

[5] La più piccola σ-algebra di eventi contenente la famiglia $\{E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$.

[6] In generale, la σ-algebra dei sottoinsiemi di un insieme $\mathbb{X}$ generata da una partizione numerabile $\{\mathbb{P}_j\}_{j \in J}$ di $\mathbb{X}$ si caratterizza come la famiglia di tutti e soli i sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ che si ottengono come unioni dei sottoinsiemi della partizione scelti in corrispondenza ad ogni possibile sottoinsieme dell'insieme J indicizzante la partizione. In simboli,

$$\sigma\left(\{\mathbb{P}_j\}_{j \in J}\right) = \left\{\mathbb{S} \subseteq \mathbb{X} : \mathbb{S} = \bigcup_{h \in H} \mathbb{P}_h, \quad \forall H \in \mathcal{P}(J)\right\}$$

essendo $\mathcal{P}(J)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi dell'insieme di indici J.

successioni di accadimenti che differiscono solo sui primi n termini. In altri termini un evento $E \in \mathcal{F}_n$ se e solo se comunque considerato un punto campionario $\hat{\omega} \equiv (\hat{\omega}_k)_{k=1}^N \in E$ ogni altro punto campionario $\omega \equiv (\omega_k)_{k=1}^N$ tale che $\omega_k = \hat{\omega}_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$ deve essere anche esso un elemento di E indipendentemente dai valori assunti dai restanti termini $\omega_{n+1}, \dots, \omega_N$. Ad esempio se un evento $E \in \mathcal{F}_3$ contenesse il punto campionario $(1,0,0,0,0,0,\dots)$, allora dovrebbe contenere anche tutti gli altri punti campionari del tipo $(1,0,0,0,0,1,\dots)$, $(1,0,0,0,1,0,\dots)$, $(1,0,0,0,1,1,\dots)$, $(1,0,0,1,0,0,\dots)$, $(1,0,0,1,0,1,\dots)$, $(1,0,0,1,1,0,\dots)$, $(1,0,0,1,1,1,\dots)$, ecc... ottenuti da $(1,0,0,1,0,0,\dots)$ ripetendo le sue prime tre componenti e modificando le sue componenti dalla quarta in poi in tutti i modi possibili.

Definizione 150 *Chiamiamo* processo stocastico *su Ω a stati in $\mathbb{R}^M$, per $M \in \mathbb{N}$, una qualsiasi successione $(X_n)_{n=0}^N$ di $\mathcal{E}$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω.*

Definizione 151 *Diciamo che $(X_n)_{n=0}^N$, processo stocastico su Ω a stati in $\mathbb{R}^M$, è di ordine K, per $K \in \mathbb{N}$, se tutte le $\mathcal{E}$-variabili aleatorie X_n del processo hanno momento finito di ordine K.*

Ricordando che Ω finito e $\mathcal{E} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$, nel modello CRR abbiamo

Osservazione 152 *Una qualsiasi successione $(X_n)_{n=0}^N$ di funzioni $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$, al variare di $n = 0, 1, \dots, N$, è un processo stocastico su Ω a stati in $\mathbb{R}^M$ di ordine K per ogni $K \in \mathbb{N}$.*

Definizione 153 *Il processo stocastico su Ω a stati in $\mathbb{R}$ costituito dalla successione di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti $(\beta_n)_{n=1}^N$ (cfr. Equazioni 3.19 e 3.20) è noto come* processo di Bernoulli *con parametro di successo p.*

Definizione 154 *Il processo stocastico su Ω a stati in $\mathbb{R}$ costituito dalla successione di variabili aleatorie $(N_n)_{n=1}^N$ definita ponendo*

$$N_0 \overset{def}{=} 0, \quad N_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k - d}{u - d}, \quad \forall n = 1, \dots, N$$

è noto come processo di conteggio *del processo di Bernoulli.*

Osservazione 155 *La variabile aleatoria N_n ha distribuzione binomiale standard con parametro numero di tentativi n e parametro di successo p, per ogni $n = 1, \dots, N$. Quindi,*

$$N_n(\Omega) = (k)_{k=0}^n \quad e \quad \mathbf{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

per ogni $n = 1, \dots, N$ e ogni $k = 1, \dots, n$.

Sia $\mathfrak{F} \equiv (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ e sia $(X_n)_{n=0}^N$ un processo stocastico su Ω a stati in $\mathbb{R}^M$.

Definizione 156 *Diciamo che $(X_n)_{n=0}^N$ è* $\mathfrak{F}$-adattato *se X_n è una $\mathcal{F}_n$-variabile aleatoria su Ω, per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.*

Definizione 157 *Diciamo che $(X_n)_{n=0}^N$ è* $\mathfrak{F}$-predicibile *se X_n è una $\mathcal{F}_{n-1}$-variabile aleatoria su Ω, per ogni $n = 1, \dots, N$.*

Chiaramente

Osservazione 158 *Se $(X_n)_{n=1}^N$ è $\mathfrak{F}$-predicibile allora è $\mathfrak{F}$-adattato. Il viceversa non è vero.*

Supponiamo ora che la dinamica del prezzo dello stock, a partire dal prezzo iniziale $S_0 > 0$, sia rappresentata dalla successione $(S_n)_{n=0}^N$ definita ponendo

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \beta_n S_{n-1}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.23}$$

Osservazione 159 *Si ha equivalentemente*

$$S_n = \beta_n \cdots \beta_1 S_0, \tag{3.24}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *e anche*

$$S_n = \beta_n \cdots \beta_{m+1} S_m, \tag{3.25}$$

per tutti gli $m, n \in \{1, \ldots, N\}$ *tali che* $m < n$.

Osservazione 160 *Si ha anche*

$$S_n = u^{N_n} d^{n-N_n} S_0. \tag{3.26}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$.

A titolo d'esempio, osserviamo che si ha

$$S_1 = \begin{cases} uS_0, & \mathbf{P}(S_1 = uS_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = u) \equiv p, \\ dS_0, & \mathbf{P}(S_1 = dS_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = d) \equiv q, \end{cases}$$

e ancora

$$S_2 = \begin{cases} uS_1, & \mathbf{P}(S_2 = uS_1) = \mathbf{P}(\beta_2 = u) \equiv p, \\ dS_1, & \mathbf{P}(S_2 = dS_1) = \mathbf{P}(\beta_2 = d) \equiv q, \end{cases} = \begin{cases} u^2 S_0, & \mathbf{P}(S_2 = u^2 S_0) = p^2 \\ udS_0, & \mathbf{P}(S_2 = udS_0) = 2pq \\ d^2 S_0, & \mathbf{P}(S_2 = d^2 S_0) = q^2 \end{cases}.$$

Infatti, per l'indipendenza di β_1 e β_2, risulta

$$uS_1 = \begin{cases} u^2 S_0, & \mathbf{P}(S_2 = u^2 S_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = u, \beta_2 = u) = \mathbf{P}(\beta_1 = u)\mathbf{P}(\beta_2 = u) = p^2 \\ udS_0, & \mathbf{P}(S_2 = udS_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = u, \beta_2 = d) = \mathbf{P}(\beta_1 = u)\mathbf{P}(\beta_2 = d) = pq \end{cases},$$

e

$$dS_1 = \begin{cases} duS_0, & \mathbf{P}(S_2 = duS_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = d, \beta_2 = u) = \mathbf{P}(\beta_1 = d)\mathbf{P}(\beta_2 = u) = qp \\ d^2 S_0, & \mathbf{P}(S_2 = d^2 S_0) = \mathbf{P}(\beta_1 = d, \beta_2 = d) = \mathbf{P}(\beta_1 = d)\mathbf{P}(\beta_2 = d) = q^2 \end{cases}.$$

Più in generale si ha

Proposizione 161 *Il prezzo dello stock al tempo* $t = t_n$ *è dato dalla formula*

$$S_n(\Omega) = (u^k d^{n-k} S_0)_{k=0}^n, \tag{3.27}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *con*

$$\mathbf{P}(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{3.28}$$

al variare di $k = 0, \ldots, n$.

Proof. *E' sufficiente osservare che le (3.27) e (3.28) sono rispettivamente l'insieme dei valori e la relativa distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria binomiale che rappresenta il verificarsi di* k *successi in* n *prove indipendenti, essendo* p *[risp.* q*] la probabilità di successo [risp. fallimento] in una singola prova.* $\square$

Proposizione 162 *Più in generale, si ha*

$$S_n(\Omega) = \left(u^k d^{n-m-k} S_m\right)_{k=0}^{n-m},$$

per tutti gli $m, n \in \{1, \ldots, N\}$ *tali che* $m < n$, *con*

$$\mathbf{P}(S_n = u^k d^{n-m-k} S_m) = \binom{n-m}{k} p^k q^{n-m-k},$$

al variare di $k = 0, \ldots, n-m$.

A titolo d'esempio, osserviamo che

$$S_n = \begin{cases} uS_{n-1}, & \mathbf{P}(S_n = uS_{n-1}) = p, \\ dS_{n-1}, & \mathbf{P}(S_n = dS_{n-1}) = q, \end{cases},$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, e ancora

$$S_n = \begin{cases} u^2 S_{n-2}, & \mathbf{P}(S_n = u^2 S_{n-2}) = p^2, \\ udS_{n-2}, & \mathbf{P}(S_n = udS_{n-2}) = 2pq, \\ d^2 S_{n-2}, & \mathbf{P}(S_n = d^2 S_{n-2}) = q^2, \end{cases},$$

per ogni $n = 2, \ldots, N$.

Proposizione 163 *L'attesa e la varianza di* S_n *sono rispettivamente date da*

$$\mathbf{E}[S_n] = (up + dq)^n S_0, \quad n = 0, \ldots, N.$$

e

$$\mathbf{D}^2[S_n] = ((u^2 p + d^2 q)^n - (up + dq)^{2n}) S_0^2, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Proof. *A norma di definizione, risulta*

$$\mathbf{E}[S_n] = \sum_{k=0}^{n} u^k d^{n-k} S_0 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = S_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (up)^k (dq)^{n-k} = (up + dq)^n S_0.$$

Si ha poi

$$S_n^2(\Omega) = (u^{2k} d^{2(n-k)} S_0^2)_{k=0}^n, \quad n = 1, \ldots, N,$$

con

$$\mathbf{P}(S_n = u^{2k} d^{2(n-k)} S_0^2) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots n.$$

Quindi,

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right] = \sum_{k=0}^{n} u^{2k} d^{2(n-k)} S_0^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = S_0^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u^2 p)^k (d^2 q)^{n-k} = (u^2 p + d^2 q)^n S_0^2.$$

Pertanto,

$$\mathbf{D}^2[S_n] = \mathbf{E}\left[S_n^2\right] - \mathbf{E}[S_n]^2 = ((u^2 p + d^2 q)^n - (up + dq)^{2n}) S_0^2.$$

□

Come immediata conseguenza della Proposizione 163 otteniamo

Corollary 164 *Risulta*

$$\mathbf{E}[S_n] = (up + dq)\mathbf{E}[S_{n-1}],$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$.

Proposizione 165 *La successione* $(S_n)_{n=0}^N$ *è un processo stocastico* $\mathfrak{F}$*-adattato.*
Proof. *Chiaramente* S_0*, interpretabile come una variabile aleatoria di Dirac centrata in* S_0*, è una* $\mathcal{F}_0$*-variabile aleatoria su* Ω*. Inoltre, stanti la (3.22) e la (3.24),* S_n *è una* $\mathcal{F}_n$*-variabile aleatoria su* Ω*, per ogni* $n = 1, \ldots, N$. □

In un contesto multiperiodale, vanno introdotti i sottospazi $L^2(\Omega_{\mathcal{F}_n}; \mathbb{R}^M)$ dello spazio di Hilbert $L^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$ costituiti da tutte le $\mathcal{F}_n$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω che hanno momento finito di ordine 2, al variare di $n = 0, 1, \ldots, N$. Da notare che in riferimento allo spazio di probabilità Ω considerato la condizione di momento di ordine 2 finito non è caratterizzante (cfr. Remark 148) è invece caratterizzante l'essere $\mathcal{F}_n$-variabili aleatoria, per un qualche $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, ossia godere della proprietà

$$\{X \in B\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M), \tag{3.29}$$

essendo la σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}^M$. Quindi, mentre $L^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$ è di fatto lo spazio di tutte le funzioni $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$, lo spazio $L^2(\Omega_{\mathcal{F}_n}; \mathbb{R}^M)$ è di fatto lo spazio di tutte le funzioni $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ che soddisfano (3.29). In più, i sottospazi vettoriali di tutte le $\mathcal{F}_n$-variabili aleatorie, al variare di $n = 0, 1, \ldots, N$, denotati $L^2(\Omega_{\mathcal{F}_n}; \mathbb{R}^M)$, sono sottospazi dello spazio di Hilbert $L^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Sempre in un conesto multiperiodale assume particolare importanza il ruolo dell'operatore $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_n] : L^2(\Omega; \mathbb{R}^M) \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}_n}; \mathbb{R}^M)$, per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$, noto come speranza condizionata rispetto a $\mathbf{P}$ data l'informazione $\mathcal{F}_n$ disponibile al tempo $t = t_n$ e indicato anche più brevemente con il simbolo $\mathbf{E}_n[\cdot]$, che trasforma $\mathcal{E}$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω in $\mathcal{F}_n$-variabili aleatorie, caratterizzate come la migliore approssimazione delle prime nel senso dei minimi quadrati. Formalmente

$$\mathbf{E}_n[X] \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min\left\{\mathbf{E}\left[(Y - X)^2\right] : Y \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}_n}; \mathbb{R}^M)\right\}, \quad \forall X \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^M).$$

Notare che

$$\mathbf{E}_0[X] = \mathbf{E}[X],$$

per ogni $X \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$.

Più in generale dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P}) \equiv \Omega$, data una sigma algebra $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ e considerato lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{|\mathcal{F}}) \equiv \Omega_{\mathcal{F}}$, dove $\mathbf{P}_{|\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ è la restrizione ad $\mathcal{F}$ della probabilità $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ data da

$$\mathbf{P}_{|\mathcal{F}}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(F), \quad \forall F \in \mathcal{F},$$

l'operatore $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathcal{F}]$, speranza condizionata rispetto a $\mathbf{P}$ data l'informazione $\mathcal{F}$, trasforma lo spazio di Hilbert $L^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$ delle $\mathcal{E}$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω aventi momento finito di ordine 2 nel suo sottospazio $L^2(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^M)$ delle $\mathcal{F}$-variabili aleatorie reali M-variate su Ω aventi momento finito di ordine 2. Tale operatore è definito ponendo

$$\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min\left\{\mathbf{E}\left[(Y - X)^2\right] : \ Y \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^M)\right\}, \quad \forall X \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^M).$$

L'idea è che mediante l'operatore $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathcal{F}] : L^2(\Omega; \mathbb{R}^M) \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^M)$ determiniamo la migliore approssimazione, nel senso dei minimi quadrati, di una $\mathcal{E}$-variabile aleatoria X di cui non possiamo osservare le realizzazioni, stante una riduzione dell'informazione da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{F}$, mediante una $\mathcal{F}$-variabile aleatoria $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}]$ di cui possiamo osservare le realizzazioni alla luce dell'informazione ridotta.

Proposizione 166 *In generale, l'operatore speranza condizionata gode delle seguenti proprietà:*

1. $\int_F \mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] d\mathbf{P}_{|\mathcal{F}} = \int_F X d\mathbf{P}$, *per ogni* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ *ed ogni* $F \in \mathcal{F}$, *in particolare* $\mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}]\right] = \mathbf{E}\left[X\right]$ *per ogni* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$;
2. $\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y \mid \mathcal{F}] = \alpha \mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] + \beta \mathbf{E}[Y \mid \mathcal{F}]$, *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e ogni* $X, Y \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$;
3. *se* $X \in L^2\left(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^M\right)$, *allora* $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$;
4. *se* $X \in L^2\left(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^M\right)$ *e* $Y \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$, *allora* $\mathbf{E}\left[XY^\intercal \mid \mathcal{F}\right] = X\mathbf{E}\left[Y^\intercal \mid \mathcal{F}\right]$, *analogamente se* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ *e* $Y \in L^2\left(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^N\right)$ *allora* $\mathbf{E}\left[XY^\intercal \mid \mathcal{F}\right] = \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] Y^\intercal$[7];
5. *se* X *è indipendente da* $\mathcal{F}$, *allora* $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbf{E}[X]$;
6. *se* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *allora* $\mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}\right] = \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$;
7. $\mathbf{E}\left[\phi\left(X\right) \mid \mathcal{F}\right] \geqslant \phi\left(\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right)$, *per ogni* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ *ed ogni funzione convessa* $\phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *such that* $\phi \circ X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}\right)$, *in particolare,* $\mathbf{E}\left[|X| \mid \mathcal{F}\right] \geqslant \left|\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right|$, *per ogni* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}\right)$ *e* $\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] \geqslant 0$, *per ogni* $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}\right)$ *tale che* $X \geqslant 0$.

Corollary 167 *Risulta*

$$\mathbf{D}^2\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2.$$

per ogni $X \in L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$. *In conseguenza,*

$$\mathbf{D}^2\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] \leqslant \mathbf{D}^2\left[X\right].$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right]\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] - \mathbf{E}\left[X\right]\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]^2 - 2\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right] + \mathbf{E}\left[X\right]^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]^2\right] - \mathbf{E}\left[2\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right] + \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X\right]^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]^2\right] - 2\mathbf{E}\left[X\right]^2 - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X\right]^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 168 *Si ha*

$$Cov\left(X - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right], Y\right) = 0, \tag{3.30}$$

per ogni $Y \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^N)$. *In particolare,*

$$Cov\left(X - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right], \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right) = 0. \tag{3.31}$$

Proof. *Considerando le 1 e 4 della Proposizione 166, possiamo scrivere*

$$\begin{aligned}
Cov\left(X - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right], Y\right) &= \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right)Y^\intercal\right] - \mathbf{E}\left[X - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right]\mathbf{E}\left[Y^\intercal\right] \\
&= \mathbf{E}\left[XY^\intercal - \mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]Y^\intercal\right] - \left(\mathbf{E}\left[X\right] - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \mid \mathcal{F}\right]\right]\right)\mathbf{E}\left[Y^\intercal\right] \\
&= \mathbf{E}\left[XY^\intercal\right] - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[XY^\intercal \mid \mathcal{F}\right]\right] - \left(\mathbf{E}\left[X\right] - \mathbf{E}\left[X\right]\right)\mathbf{E}\left[Y^\intercal\right] \\
&= \mathbf{E}\left[XY^\intercal\right] - \mathbf{E}\left[XY^\intercal\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[7] Notare che nelle ipotesi considerate si ha $XY^\intercal \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^{M\times N})$ ma, in generale $XY^\intercal \notin L^2(\Omega; \mathbb{R}^{M\times N})$. Allora, in termini della nostra definizione dell'operatore speranza condizionata, ai fini del risultato presentato sembrebbe necessario aggiungere l'ipotesi $XY^\intercal \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{M\times N})$. Tuttavia, è possibile provare che l'operatore speranza condizionata può essere esteso a $L^1(\Omega; \mathbb{R}^{M\times N})$ in modo tale il risultato presentato continui a essere valido senza l'ipotesi aggiuntiva.

$\square$

Teorema 169 (speranza condizionata come proiettore ortogonale) *L'operatore speranza condizionata* $\mathbf{E}\left[\cdot \mid X\right] : L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^M\right) \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}};\mathbb{R}^M)$ *è una proiezione ortogonale di* $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^M\right)$ *su* $L^2(\Omega_{\mathcal{F}};\mathbb{R}^M)$.

Tornando a riferirci allo spazio di probabilita $(\Omega,\mathcal{E},\mathbf{P}) \equiv \Omega$ del modello CRR e a un processo stocastico $(X_n)_{n=0}^N$ su Ω e a stati in $\mathbb{R}^M$ (cfr Definizione 150), introduciamo le seguenti definizioni, in forma leggermente semplificata rispetto alla loro forma più generale, in virtù dell'Osservazione **??**.

Definizione 170 *Diciamo che* $(X_n)_{n=0}^N$ *è una* $(\mathfrak{F},\mathbf{P})$*-martingala se* $(X_n)_{n=0}^N$ *è* $\mathfrak{F}$*-adattato e risulta*

$$\mathbf{E}_{n-1}[X_n] = X_{n-1},$$

per ogni $n = 1,\ldots,N$.

Definizione 171 *Diciamo* $(X_n)_{n=0}^N$ *è un* $(\mathfrak{F},\mathbf{P})$*-processo di Markov se* $(X_n)_{n=0}^N$ *è* $\mathfrak{F}$*-adattato e risulta*

$$\mathbf{E}_m[f\left(X_n\right)] = \mathbf{E}[f\left(X_n\right) \mid \sigma\left(X_m\right)], \tag{3.32}$$

per ogni funzione boreliana (limitata) $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *e ogni* $m,n \in \{0,1,\ldots,N\}$ *tali che* $m < n$.

Notiamo che in termini dell'operatore probabilità condizionata $\mathbf{P}\left(\cdot \mid \mathcal{F}\right) : \mathcal{E} \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}};\mathbb{R}^M)$, in cui $\mathcal{F}$ è una qualsiasi sotto-σ-algebra della σ-algebra degli eventi $\mathcal{E}$ la proprietà di Markov trova un'equivalente e attraente espressione mediante l'equazione

$$\mathbf{P}\left(X_n \in B \mid \mathfrak{F}_n\right) = \mathbf{P}\left(X_n \in B \mid \sigma\left(X_m\right)\right) \tag{3.33}$$

per ogni $m,n \in \{0,1,\ldots,N\}$ tali che $m < n$.

Proposizione 172 *Risulta*

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_0,S_1,\ldots,S_n\right), \tag{3.34}$$

per ogni $n = 0,1,\ldots,N$*, essendo* $\sigma\left(S_0,S_1,\ldots,S_n\right)$ *la* σ*-algebra generata dalle variabili aleatorie* $S_0,S_1,\ldots,S_n$.

Proof. *Osserviamo preliminarmente che*

$$\sigma\left(S_0,S_1,\ldots,S_n\right) = \sigma\left(S_1,\ldots,S_n\right),$$

dal momento che S_0 *è interpretabile come una variabile aleatoria di Dirac, inoltre per come definite* $S_1,\ldots,S_n$ *queste sono* $\mathcal{F}_n$*-variabili aleatorie quindi*

$$\sigma\left(S_k\right) \subseteq \mathcal{F}_n,$$

per ogni $k = 1,\ldots,n$. *Ciò implica che*

$$\sigma\left(S_1,\ldots,S_n\right) = \bigvee_{k=1}^{n} \sigma\left(S_k\right) \subseteq \mathcal{F}_n. \tag{3.35}$$

Per provare l'inclusione inversa, osserviamo che....

Quindi, a titolo d'esempio, ci limitiamo a mostrare che

$$\mathcal{F}_2 = \sigma\left(S_1,S_2\right). \tag{3.36}$$

Come abbiamo già visto, una partizione di Ω *in eventi di* $\mathcal{F}_2$ *è data da* $\{E_{0,0},E_{0,1},E_{1,0},E_{1,1}\}$ *e abbiamo*

$$\mathcal{F}_2 = \left\{\varnothing, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}, E_0, E_{0,0}\cup E_{1,0}, E_{0,0}\cup E_{1,1}, E_{0,1}\cup E_{1,0}, E_{0,1}\cup E_{1,1}, E_1, E_{1,1}^c, E_{0,1}^c, E_{1,0}^c, E_{0,0}^c, \Omega\right\}.$$

D'altra parte una partizione di Ω in eventi di $\sigma(S_1)$ è data da $\{E_0, E_1\}$ e una partizione di Ω in eventi di $\sigma(S_2)$ è data da

$$\{E_{0,0}, E_{1,1}, E_{0,1} \cup E_{1,0}\}.$$

Infatti, alla luce dei valori che può prendere S_2 possiamo discriminare tra l'essersi realizzato uno degli eventi $E_{0,0}$ o $E_{1,1}$ o $E_{0,1} \cup E_{1,0}$ ma non possiamo discriminare quale tra $E_{0,1}$ o $E_{1,0}$ si sia realizzato. Comunque, sia gli eventi $E_{0,0}$ e $E_{1,1}$che gli eventi

$$(E_{0,1} \cup E_{1,0}) \cap E_0 = E_{0,1} \quad e \quad (E_{0,1} \cup E_{1,0}) \cap E_1 = E_{1,0}$$

appartengono alla σ-algebra

$$\sigma(S_1) \vee \sigma(S_2) = \sigma(S_1, S_2)$$

In definitiva, la stessa partizione di Ω che genera $\mathcal{F}_2$ è contenuta in $\sigma(S_1, S_2)$. Ne segue che

$$\mathcal{F}_2 \subseteq \sigma(S_1, S_2)$$

Per quanto preliminarmente osservato (vedi (3.35)), si ha poi

$$\sigma(S_1, S_2) \subseteq \mathcal{F}_2$$

e la (3.36) è completamente provata. □

Corollary 173 *Per ogni $X : \Omega \to \mathbb{R}^M$ risulta*

$$\mathbf{E}_n[X] = \mathbf{E}[X \mid S_0, S_1, \ldots, S_n],$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$, dove $\mathbf{E}[X \mid S_0, S_1, \ldots, S_n] \equiv \mathbf{E}[X \mid \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)]$.

Proposizione 174 *Risulta*

$$\mathbf{E}_{n-1}[S_n] = (up + dq)\, S_{n-1}, \tag{3.37}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. Più in generale

$$\mathbf{E}_m[S_n] = (up + dq)^{n-m}\, S_m, \tag{3.38}$$

per tutti gli $m, n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ tali che $m < n$.

Proof. Infatti,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{n-1}[S_n] &= \mathbf{E}[\beta_n S_{n-1} \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}] \\ &= S_{n-1}\mathbf{E}[\beta_n \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}] \\ &= S_{n-1}\mathbf{E}[\beta_n] = (up + dq)\, S_{n-1},\end{aligned}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_m[S_n] &= \mathbf{E}[\beta_n \cdots \beta_{m+1} S_m \mid S_0, S_1, \ldots, S_m] = S_m \mathbf{E}[\beta_n \cdots \beta_{m+1} \mid S_0, S_1, \ldots, S_m] \\ &= S_m \mathbf{E}[\beta_n \cdots \beta_{m+1}] = S_m \mathbf{E}[\beta_n] \cdots \mathbf{E}[\beta_{m+1}] = (up + dq)^{n-m}\, S_m,\end{aligned}$$

per tutti gli $m, n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ tali che $m < n$. □

Anche nel caso multiperiodale il tasso di rendimento r_n relativo all'investimento nel titolo rischioso al tempo $t = t_n$ e il tasso di rendimento $r_{m,n}$ relativo all'investimento nel titolo rischioso nell'intervallo di tempo $[t_m, t_n]$ sono variabili aleatorie. Precisamente stante la defınzione

$$r_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n - S_0}{S_0}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

e

$$r_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n - S_m}{S_m}, \quad m, n = 1, \ldots, N,\ m < n,$$

abbiamo la seguente

Proposizione 175 *Risulta*

$$r_n(\Omega) = (u^k d^{n-k} - 1)_{k=0}^{n},$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *con*

$$\mathbf{P}(r_n = u^k d^{n-k} - 1) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

al variare di $k = 0, \ldots, n$. *Inoltre,*

$$r_{m,n} = \left(u^k d^{n-m-k} - 1\right)_{k=0}^{n-m},$$

per ogni $m, n = 1, \ldots, N$, $m < n$, *con*

$$\mathbf{P}(r_{m,n} = u^k d^{n-k} - 1) = \binom{n-m}{k} p^k q^{n-m-k},$$

al variare di $k = 0, \ldots, n-m$. *In particolare,*

$$r_{n,n-1} = \begin{cases} u-1, & \mathbf{P}(r_{n,n-1} = u-1) = p, \\ d-1, & \mathbf{P}(r_{n,n-1} = u-1) = q. \end{cases}$$

Proposizione 176 *Risulta*

$$\mathbf{E}_{n-1}[r_n] = (up + dq)(r_{n-1} + 1) - 1,$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$.
Proof. *Infatti,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{n-1}[r_n] &= \mathbf{E}\left[\frac{S_n - S_0}{S_0} \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{S_n}{S_0} - 1 \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\right] \\
&= \frac{\mathbf{E}\left[S_n \mid S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\right]}{S_0} - 1 = \frac{(up + qd)\, S_{n-1}}{S_0} - 1 \\
&= (up + dq)\left(\frac{S_{n-1}}{S_0} - 1\right) + up + dq - 1 \\
&= (up + dq)\, r_{n-1} + up + dq - 1 \\
&= (up + dq)(r_{n-1} + 1) - 1.
\end{aligned}$$

□

Definizione 177 *Analogamente alla denominazione introdotta nel caso uni-periodale, chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizione rischiosa *nello stock, più sinteticamente* BS-portafoglio, *un processo stocastico* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$, *le cui componenti* $(X_n)_{n=0}^N$ *e* $(Y_n)_{n=0}^N$ *siano successioni di variabili aleatorie reali su* Ω *i cui termini* X_n *ed* Y_n *rappresentino rispettivamente le quantità di bond e di stock in possesso di un operatore finanziario al tempo* t_n, *al variare di* $n = 0, 1, \ldots, N$.

Da notare che sovente ci si riferisce a un portafoglio come a una *strategia di trading* per sottolineare la sua evoluzione temporale in quanto processo stocastico.

Definizione 178 *Chiamiamo* valore *del BS-portafoglio* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *il processo stocastico* $(W_n(\Pi))_{n=0}^N$ *definito ponendo*

$$W_n(\Pi) \stackrel{def}{=} X_n B_n + Y_n S_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.39}$$

In seguito, indicheremo più brevemente con W_n il valore di un BS-portafoglio Π al tempo $t = t_n$, per $n = 0, 1, \ldots, N$, a meno che un esplicito riferimento a Π non sia necessario.

E' importante notare che l'operatore finanziario che al tempo $t = t_0 \equiv 0$ disponendo di un portafoglio di valore non aleatorio

$$W_0 \stackrel{\text{def}}{=} X_0 B_0 + Y_0 S_0$$

osservati i valori B_0 del bond ed S_0 dello stock riconfigura prima del tempo $t = t_1$ il suo portafoglio scegliendo le posizione X_1 e Y_1 da prendere in relazione al bond e allo stock. Pertanto X_1 ed Y_1 sono da considerarsi quali variabili aleatorie di Dirac concentrate in opportuni numeri reali, in definitiva numeri reali, esattamente come nel caso uniperiodale. D'altra parte, mentre è ovvio che a un tempo $t = t_n$, per un certo $n < N$, un operatore finanziario conosca con certezza la storia della composizione del suo portafoglio fino al tempo t_n stesso, non è affatto ragionevole che l'operatore finanziario sia certo della composizione del suo portafoglio anche in tempi successivi a t_n. Invece è ancora ragionevole ipotizzare che l'operatore finanziario in tempi successivi a t_n configurerà il suo portafoglio in risposta alle realizzazioni del prezzo dello stock, che dipendono a loro volta dagli accadimenti aleatori che influenzano il mercato. In altri termini, al tempo $t = t_n$ le sottosuccessioni $(X_k)_{k=0}^{n}$ e $(Y_k)_{k=0}^{n}$ sono interpretabili come successioni di numeri reali ma le sottosuccessioni $(X_k)_{k=n+1}^{N}$ e $(Y_k)_{k=n+1}^{N}$ rimangono comunque successioni di variabili aleatorie. In riferimento all'istante iniziale è pertanto conveniente assumere che le successioni complete $(X_n)_{n=0}^{N}$ e $(Y_n)_{n=0}^{N}$ siano costituite da variabili aleatorie.

Definizione 179 *Qualora stante l'occorrenza di un esito $\omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^{N}$ dello spazio campionario Ω, il termine $X_n(\omega)$ sia positivo [risp. negativo], per un certo $n = 1, \ldots, N$, diremo che immediatamente trascorso il tempo t_{n-1} e in dipendenza dell'esito ω* abbiamo depositato *[risp.* preso a prestito*] l'ammontare $X_n(\omega)B_{n-1}$. Qualora il termine $Y_n(\omega)$ sia positivo [risp. negativo], per un certo $n = 1, \ldots, N$, diremo che immediatamente trascorso il tempo t_{n-1} e in dipendenza dell'esito ω* abbiamo acquistato *[risp.* venduto allo scoperto*] lo stock per un ammontare $Y_n(\omega)S_{n-1}(\omega)$.*

Ricordiamo che acquistare un bond, o equivalentemente effettuare un deposito su un conto bancario, [risp. acquistare uno stock] viene gergalmente riferito come aprire una *posizione lunga* sul bond [risp. sullo stock]. Di contro, vendere allo scoperto un bond, o equivalentemente ricevere un prestito sul conto bancario, [risp. vendere allo scoperto uno stock] viene gergalmente riferito come aprire una *posizione corta* sul bond [risp. sullo stock]. Ciò perchè mentre nulla urge alla chiusura di una posizione lunga, una posizione corta va chiusa al più presto possibile pena la corresponsione degli interessi sulla posizione, che maturano per tutto il tempo in cui la si tiene aperta.

La composizione di un portafoglio si effettua nel modo seguente: osservati i prezzi di mercato B_0 del bond ed S_0 dello stock, nell'intervallo di tempo (t_0, t_1), ossia dopo il tempo $t = t_0 \equiv 0$ e prima di $t = t_1$, un operatore finanziario costituisce un primo portafoglio che contiene X_1 unità di bond e Y_1 unità di stock. Anche con un investimento iniziale $W_0 = 0$, caratterizato da $X_0 = Y_0 = 0$, la costituzione di un portafoglio è possibile o prendendo a prestito un certo ammontare di bond e usando interamente questo ammontare per acquistare lo stock, oppure vendendo allo scoperto lo stock per un certo ammontare e usando interamente il ricavato per acquistare il bond. Il valore di un tale portafoglio sarà comunque formulabile come

$$X_1 B_0 + Y_1 S_0.$$

Al tempo $t = t_1$, per effetto della variazione del prezzo di mercato dei titoli non rischioso e rischioso, il portafoglio assume il valore

$$W_1 \equiv X_1 B_1 + Y_1 S_1.$$

Quindi, osservati i nuovi prezzi di mercato B_1 del bond ed S_1 dello stock, nell'intervallo di tempo (t_1, t_2), ossia dopo il tempo $t = t_1$ e prima di $t = t_2$, l'operatore finanziario riconfigura il proprio portafoglio allocandovi X_2 unità di bond e Y_2 unità di stock, conseguendo un valore pari a

$$X_2 B_1 + Y_2 S_1$$

Al tempo $t = t_2$, per effetto della variazione del prezzo di mercato del bond e dello stock, il portafoglio assume il valore

$$W_2 \equiv X_2 B_2 + Y_2 S_2$$

e così via. Questo processo continua fino al tempo $t = t_{N-1}$ dopo il quale, osservati i prezzi di mercato B_{N-1} del bond ed S_{N-1} dello stock, l'operatore finanziario effettua l'ultima riconfigurazione del proprio portafoglio allocandovi X_N unità di bond e Y_N unità di stock, consequendo un valore pari a

$$X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1}$$

Al tempo $t = t_N \equiv T$, per effetto della variazione del prezzo di mercato del bond e dello stock, il portafoglio assume il valore finale

$$W_N \equiv X_N B_N + Y_N S_N$$

ed il processo s'arresta. Se grazie ad accadimenti favorevoli si realizza la circostanza $W_N \geqslant 0$ la ricchezza così prodotta viene consumata, ma se, a causa di accadimenti sfavorevoli, si realizza $W_N < 0$ l'operatore finanziario si ritrova ad avere un indebitamento che deve ripianare con fondi propri.

È naturale ipotizzare che nell'intervallo di tempo (t_{n-1}, t_n) l'operatore finanziario scelga le componenti X_n e Y_n del proprio portafoglio in funzione dei valori che si attende possano realizzarsi per il prezzo B_n del bond e il prezzo S_n dello stock al tempo $t = t_n$, osservati i valori di B_{n-1} e di S_{n-1} realizzatisi al tempo $t = t_{n-1}$. Ciò per ogni $n = 1, \ldots, N$. D'altra parte l'evoluzione del bond è deterministica e quindi la realizzazione di B_n è sempre prevedibile con certezza inoltre, stante la (3.37) della Proposizione 174, il miglior predittore del prezzo S_n è $(up + dq)\, S_{n-1}$. In definitiva, la riconfigurazione del portafoglio, ossia la scelta di X_n e Y_n dipenderà solo dal valore di S_{n-1}. In altri termini, è naturale ipotizzare che si abbia

$$X_n = f_n\left(S_{n-1}\right) \qquad \text{e} \qquad Y_n = g_n\left(S_{n-1}\right),$$

per opportune funzioni reali f_n e g_n al variare di $n = 1, \ldots, N$. In conseguenza di queste considerazioni abbiamo

Osservazione 180 *Un BS-portafoglio* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N$ *è un processo predicibile e il suo valore* $(W_n(\Pi))_{n=0}^N$ *è un processo adattato.*

Definizione 181 *Diciamo che un BS-portafoglio* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *è* autofinanziante *se*

$$W_n = X_{n+1} B_n + Y_{n+1} S_n, \tag{3.40}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Un portafoglio autofinanziante è un portafoglio la cui composizione cambia nel tempo, senza però che vi sia immissione di fondi esterni o prelievo di parte della ricchezza eventualmente prodotta in tempi antecedenti all'istante terminale $t = t_N$. Costituito il portafoglio (X_1, Y_1) nell'intervallo di tempo (t_0, t_1), a partire da un investimento iniziale possibilmente nullo, ossia in modo che

$$X_1 B_0 + Y_1 S_0 = W_0,$$

al tempo t_1 l'operatore finanziaro osserva che il portafoglio prende il valore

$$W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1.$$

Quindi l'operatore usa interamente ed esclusivamente W_1 per riconfigurare il proprio portafoglio. Ossia sceglie X_2 ed Y_2 in modo tale che

$$X_2 B_1 + Y_2 S_1 = W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1.$$

Questo processo di riconfigurazione del portafoglio, senza immissione di fondi esterni o prelievo di parte della ricchezza prodotta, continua fino al tempo $t = t_{N-1}$, e nell'intervallo di tempo (t_{N-1}, t_N) si scelgono X_N e Y_N in modo da soddisfare la relazione

$$X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1} = W_{N-1} = X_{N-1} B_{N-1} + Y_{N-1} S_{N-1}.$$

Definizione 182 *Diciamo che un BS-portafoglio autofinanziante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *è un* arbitraggio *quando risulta*

$$W_0 = 0, \quad W_N \geqslant 0 \quad e \quad \mathbf{P}(W_N > 0) > 0. \tag{3.41}$$

Anche nel caso multiperiodale, un arbitraggio è un portafoglio che a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza, cioè indipendentementemente dagli esiti di mercato che si possano verificare, che non si subiscano perdite, con probabilità di guadagno strettamente positiva.

Proposizione 183 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggo risulta*

$$r^+_{n-1,n} > r > r^-_{n-1,n} \tag{3.42}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *dove*

$$r^+_{n-1,n} \equiv u - 1 \quad e \quad r^-_{n-1,n} = d - 1.$$

Equivalentemente

$$u > 1 + r > d. \tag{3.43}$$

Proof. *Infatti, se fosse*

$$u > d \geqslant 1 + r, \tag{3.44}$$

allora, osservati sul mercato il prezzo B_0 *del bond ed* S_0 *dello stock, un operatore finanziario potrebbe prendere a prestito un'ammontare* xB_0, *con* $x < 0$ *arbitrario, e con questo ammontare acquistare* $y = -xB_0/S_0$ *unità di titolo rischioso. Al tempo* t_1 *relativamente all'acquisto del titolo rischioso, nel peggiore dei casi si realizzerebbe l'ammontare*

$$yS_1^- = ydS_0 = -\frac{xB_0}{S_0} dS_0 = -xdB_0.$$

Per cui, nell'ipotesi (3.44), disponendo di questo ammontare l'operatore finanziario potrebbe ripianare il debito, nel frattempo incrementato a $xB_0(r+1)$ *a causa degli interessi dovuti, senza perdere alcunchè, dal momento che in questo caso il valore del portafoglio dell'operatore finanziario sarebbe*

$$W_1^- = xB_1 + yS_1^- = xB_0(r+1) - xdB_0 = -x(d - (1+r))B_0 \geqslant 0.$$

Se però a termine del periodo d'investimento si verificasse il migliore dei casi, l'operatore finanziario realizzerebbe un ammontare

$$yS_1^+ = yuS_0 = -\frac{xB_0}{S_0} uS_0 = -xuB_0.$$

Quindi, sempre nell'ipotesi (3.44), con questo ammontare l'operatore finanziario potrebbe ripianare il debito e realizzare un guadagno, dal momento che

$$W_1^+ = xB_1 + yS_1^+ = xB_0(r+1) - xuB_0 = -x(u - (1+r))B_0 > 0.$$

In definitiva avremmo

$$W_1 \geqslant 0 \qquad e \qquad \mathbf{P}(W_1 > 0) = p > 0.$$

Se altresì fosse

$$1 + r \geqslant u > d, \tag{3.45}$$

allora un operatore finanziario potrebbe vendere allo scoperto un'ammontare yS_0, con $y < 0$ arbitrario, del titolo rischioso e con questo ammontare acquistare $x = -yS_0/B_0$ unità di titolo non rischioso. A termine del periodo d'investimento, l'operatore finanziario si ritroverebbe in ogni caso con un ammontare pari a

$$x(1+r)B_0 = -\frac{yS_0}{B_0}(1+r)B_0 = -y(1+r)S_0,$$

dovuto al maturare degli interessi prodotti dal bond. D'altra parte, rispetto alla vendita allo scoperto del titolo rischioso, il peggiore dei casi per l'operatore finanziario è che il titolo rischioso realizzi il valore di mercato S_1^+. In questo caso per ripianare lo scoperto gli sarebbe necessario un'ammontare pari a

$$yS_1^+ = yuS_0,$$

che, stante l'ipotesi (3.45), si sarebbe comunque reso disponibile grazie all'investimento nel titolo non rischioso. Il valore del portafoglio dell'operatore finanziario sarebbe infatti

$$W_1^- = xB_1 + yS_1^+ = x(1+r)B_0 + yS_1^+ = -y(1+r)S_0 + yuS_0 = -y\,(1+r-u) \geqslant 0.$$

Se poi il titolo rischioso realizzasse il valore di mercato S_1^-, per ripianare lo scoperto sarebbe sufficiente un'ammontare pari a

$$yS_1^- = ydS_0,$$

che, sempre nell'ipotesi (3.45), l'operatore finanziario avrebbe ampiamente disponibile. In questo caso il valore del portafoglio dell'operatore finanziario sarebbe

$$W_1^- = xB_1 + yS_1^- = x(1+r)B_0 + yS_1^+ = -y(1+r)S_0 + ydS_0 = -y\,(1+r-d) > 0$$

Per cui, anche nell'ipotesi (3.45) avremmo

$$W_1 \geqslant 0 \qquad e \qquad \mathbf{P}(W_1 > 0) = q > 0.$$

Concludendo, sia nell'ipotesi (3.44) che nell'ipotesi (3.45), l'operatore finanziario si ritroverebbe al tempo $t = t_1$ un portafoglio di valore non negativo e avente probabilità positiva di prendere un valore strettamente positivo. Non gli resterebbe altro da fare che investire interamente tale valore W_1 nel bond fino al tempo $t = t_{N-1}$ per ottenere un valore finale caratterizzato dalla (3.41). Ciò comporta che in assenza d'arbitraggi deve valere la (3.43). □

Definizione 184 *Chiamiamo* probabilità neutrale al rischio *(*risk neutral probability*) una probabilità $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ tale che*

1. *le variabili aleatorie bernoulliane $\beta_1, \ldots, \beta_N$ siano (totalmente) indipendenti con*
$$\tilde{\mathbf{P}}(\beta_n = u) \equiv \tilde{p} > 0, \quad \tilde{\mathbf{P}}(\beta_n = d) \equiv \tilde{q}, \tag{3.46}$$
per ogni $n = 1, \ldots, N$, dove $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$.
2. *risulti*
$$S_{n-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n], \tag{3.47}$$
per ogni $n = 1, \ldots, N$.

Osservazione 185 *Se $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ è una probabilità neutrale al rischio, allora risulta*

$$S_m = \frac{1}{(1+r)^{n-m}}\tilde{\mathbf{E}}_m[S_n], \tag{3.48}$$

per ogni $m, n = 0, 1, \ldots, N$ tali che $m < n$. In particolare,

$$S_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\tilde{\mathbf{E}}_0[S_N]. \tag{3.49}$$

Proof. Applicando la (**??**), per le proprietà dell'operatore speranza condizionata, abbiamo

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_m[S_{m+1}] = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_m\left[\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{m+1}[S_{m+2}]\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}\tilde{\mathbf{E}}_m\left[\tilde{\mathbf{E}}_{m+1}[S_{m+2}]\right] = \frac{1}{(1+r)^2}\tilde{\mathbf{E}}_m[S_{m+2}]. \end{aligned}$$

Procedendo in questo modo otteniamo la (3.48). □

Proposizione 186 *Se esiste una probabilità neutrale al rischio, essa unica.*
Proof. *Infatti, se esistessero due probabilità* $\tilde{\mathbf{P}}$ *e* $\mathring{\mathbf{P}}$ *su* Ω, *con* $\tilde{\mathbf{P}}$ *caratterizzata dalla (**??**) e* $\mathring{\mathbf{P}}$ *dall'analoga*

$$\mathring{\mathbf{P}}(\beta_n = u) \equiv \mathring{p} > 0, \quad \mathring{\mathbf{P}}(\beta_n = d) \equiv \mathring{q}, \tag{3.50}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *dove* $\mathring{q} = 1 - \mathring{p}$, *per entrambe delle quali valesse la (**??**), si dovrebbe avere*

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n] = \mathring{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n].$$

D'altra parte, per (3.23) dovrebbe aversi

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n S_{n-1}] = \mathring{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n S_{n-1}].$$

Per le proprietà della speranza condizionata, avremmo allora

$$S_{n-1}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n] = S_{n-1}\tilde{\mathbf{E}}[\beta_n] = S_{n-1}\mathring{\mathbf{E}}[\beta_n] = S_{n-1}\mathring{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n].$$

Eliminando S_{n-1} *otterremmo*

$$\tilde{\mathbf{E}}[\beta_n] = \mathring{\mathbf{E}}[\beta_n],$$

ossia

$$u\tilde{p}u + d\tilde{q} = u\mathring{p} + d\mathring{q}.$$

Da quest'ultima, considerato che $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$, $\mathring{q} = 1 - \mathring{p}$, *chiaramente risulterebbe*

$$\tilde{p} = \mathring{p}.$$

□

Proposizione 187 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ *caratterizzata dalla*

$$\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(\beta_n = u) \stackrel{def}{=} \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(\beta_n = d) \stackrel{def}{=} \frac{u-(1+r)}{u-d}, \tag{3.51}$$

èer ogni $n = 1, \ldots, N$, *rispetto a cui le variabili aleatorie bernoulliane* $\beta_1, \ldots, \beta_N$ *sono (totalmente) indipendenti.*
Proof. *In assenza d'arbitraggi, la coppia di numeri reali* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *data dalla (3.51) costituisce un'effettiva distribuzione di probabilità. Possiamo allora costruire una probabilità su* Ω *ponendo*

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{\mathbf{P}}((\omega_n)_{n=1}^N) \stackrel{def}{=} \tilde{p}^K \tilde{q}^{N-K}, \quad K = |\{n \mid \omega_n = 1\}|, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

e seguendo gli stessi passi effettuati per la costruzione della probabilità $\mathbf{P} : \mathcal{E} - \mathbb{R}_+$ *(cfr. (**??**)-(**??**)). Ottenuta la probabilità* $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} - \mathbb{R}_+$ *sulla* σ*-algebra di eventi* $\mathcal{E} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$, *si può poi provare l'indipendenza delle variabili aleatorie* $\beta_1, \ldots, \beta_N$ *mediante la stessa dimostrazione della Proposizione **??**. Per* *le proprietà dell'operatore speranza condizionata $\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\cdot]$ rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$, si ha inoltre*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n] &= \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n S_{n-1}] \\
&= \frac{S_{n-1}}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\beta_n] \\
&= \frac{S_{n-1}}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[\beta_n] \\
&= \frac{S_{n-1}}{1+r}(u\tilde{p}+d\tilde{q}) \\
&= \frac{S_{n-1}}{1+r}\left(u\frac{r+1-d}{u-d}+d\frac{u-(r+1)}{u-d}\right) \\
&= \frac{S_{n-1}}{1+r}(r+1) \\
&= S_{n-1},
\end{aligned}$$

come desiderato. $\square$

Proposizione 188 *Se esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$, caratterizzata da (3.51), allora il mercato è privo di BS-portafogli d'arbitraggio.*

Proof. *Supponiamo che la probabilità $\tilde{\mathbf{P}}$ caratterizzata dalla (3.51) sia neutrale al rischio. Deve allora valere la (3.47). D'altra parte essendo,*

$$\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n] = \frac{1}{1+r}(u\tilde{p}+d\tilde{q})S_{n-1},$$

come risulta dalla dimostrazione della Proposizione **??**, *l'Equazione (3.47) necessariamente comporta*

$$u\tilde{p}+d\tilde{q} = 1+r.$$

Da quest'ultima,

$$\tilde{p} = \frac{r+1-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-(r+1)}{u-d}.$$

In definitiva, se esiste una misura di probabilità neutrale al rischio questa necessariamente soddisfa l'Equazione (3.51). Supponiamo adesso che esista anche un BS-portafoglio d'arbitraggio $\Pi \equiv ((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N)$ deve aversi

$$X_1B_0 + Y_1S_0 = 0 \quad e \quad X_NB_N + Y_NS_N \geqslant 0$$

Ha quindi senso considerare

$$\hat{n} = \min\{n \in \{1,2,\ldots,N\} \mid X_nB_n + Y_nS_n \geqslant 0\}.$$

Non può essere $\hat{n} = 1$. Infatti, se così fosse, le condizioni

$$X_1B_0 + Y_1S_0 = 0 \quad e \quad X_1B_1 + Y_1S_1 \geqslant 0$$

implicherebbero

$$X_1B_0 = -Y_1S_0, \quad X_1(1+r)B_0 + Y_1uS_0 \geqslant 0 \quad e \quad X_1(1+r)B_0 + Y_1dS_0 \geqslant 0.$$

Pertanto

$$(u-(1+r))Y_1S_0 \geqslant 0 \quad e \quad (d-(1+r))Y_1S_0 \geqslant 0$$

da cui

$$u \geqslant 1+r \quad e \quad d \geqslant 1+r.$$

Queste ultime impedirebbero che $\tilde{\mathbf{P}}$ caratterizzata da $(\tilde{p}, \tilde{q})$ possa essere un'effettiva probabilità. Sia allora $\hat{n} > 1$. Da una parte, la condizione di autofinanziamento

$$X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}-1} = X_{\hat{n}-1} B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}-1} S_{\hat{n}-1} \tag{3.52}$$

esclude che si abbia

$$X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}-1} \geqslant 0.$$

Pertanto dovremo avere

$$X_{\check{n}} B_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1} \leqslant 0. \tag{3.53}$$

oppure

$$X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} S^{-}_{\hat{n}-1} < 0 \quad e \quad X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} S^{+}_{\check{n}-1} > 0 \tag{3.54}$$

D'altra parte poichè

$$B_{\hat{n}} = (1+r) B_{\hat{n}-1} \quad e \quad S_{\hat{n}} = \begin{cases} u S_{\hat{n}-1} & \tilde{\mathbf{P}}(S_{\hat{n}} = u S_{\hat{n}-1}) \equiv \tilde{p} \\ d S_{\hat{n}-1} & \tilde{\mathbf{P}}(S_{\hat{n}} = d S_{\hat{n}-1}) \equiv \tilde{q} \end{cases},$$

dovrà aversi

$$X_{\hat{n}} B_{\hat{n}} + Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}} = \begin{cases} X_{\hat{n}}(1+r) B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} u S_{\hat{n}-1} \geqslant 0, & \tilde{\mathbf{P}}(S_{\hat{n}} = u S_{\hat{n}-1}) \equiv \tilde{p}, \\ X_{\hat{n}}(1+r) B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} d S_{\hat{n}-1} \geqslant 0, & \tilde{\mathbf{P}}(S_{\hat{n}} = d S_{\hat{n}-1}) \equiv \tilde{q}. \end{cases} \tag{3.55}$$

Ma allora, confrontando l'Equazione (3.55) con la (3.53) oppure con la (3.54) otterremmo ancora violazioni della condizione

$$u \geqslant 1 + r \geqslant d, \tag{3.56}$$

che consente a $\tilde{\mathbf{P}}$ di essere un'effettiva probabilità.

Infatti, valendo la (3.53) e la (3.55) non può chiaramente essere $Y_{\hat{n}} = 0$. D'altra parte, se fosse $Y_{\check{n}} < 0$ si otterrebbe

$$X_{\check{n}} B_{\check{n}-1} \leqslant -Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1}.$$

Quindi

$$0 \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} u S_{\check{n}-1} \leqslant -(1+r) Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} u S_{\check{n}-1} = (u - (1+r))\, Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1}$$

e

$$0 \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} d S_{\check{n}-1} \leqslant -(1+r) Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} d S_{\check{n}-1} = (d - (1+r))\, Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1}.$$

Da queste seguirebbe

$$u \leqslant 1 + r \quad e \quad d \leqslant 1 + r,$$

ossia una violazione della (3.56). Similarmente, se fosse $Y_{\check{n}} > 0$ si otterrebbe

$$Y_{\check{n}} S_{\check{n}-1} \leqslant -X_{\check{n}} B_{\check{n}-1}.$$

Quindi

$$0 \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} u S_{\check{n}-1} \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} - X_{\check{n}} u B_{\check{n}-1} = (1 + r - u)\, X_{\check{n}} B_{\check{n}-1}$$

e

$$0 \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} + Y_{\check{n}} d S_{\check{n}-1} \leqslant X_{\check{n}}(1+r) B_{\check{n}-1} + X_{\check{n}} d B_{\check{n}-1} = (1 + r - d)\, X_{\check{n}} B_{\check{n}-1}.$$

Seguirebbe allora

$$u \geqslant 1 + r \quad e \quad d \geqslant 1 + r,$$

ossia ancora una violazione della (3.56). Allo stesso modo, valendo la (3.54) e la (3.55) non può chiaramente essere $Y_{\hat{n}} = 0$. *Se poi fosse* $Y_{\hat{n}} < 0$ *si otterrebbe*

$$X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1} < -Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}-1}^{-}$$

e quindi

$$0 \leqslant X_{\hat{n}}(1+r)B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} u S_{\hat{n}-1}^{-} < -Y_{\hat{n}}(1+r) S_{\hat{n}-1}^{-} + Y_{\hat{n}} u S_{\hat{n}-1}^{-} = (u - (1+r)) Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}-1}^{-}.$$

Ne seguirebbe

$$u < 1 + r,$$

che viola la (3.56). Se fosse $Y_{\hat{n}} > 0$ *si otterrebbe*

$$Y_{\hat{n}} S_{\hat{n}-1}^{-} < -X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1}$$

e quindi

$$0 \leqslant X_{\hat{n}}(1+r)B_{\hat{n}-1} + Y_{\hat{n}} d S_{\hat{n}-1}^{-} < X_{\hat{n}}(1+r)B_{\hat{n}-1} - X_{\hat{n}} d B_{\hat{n}-1} = (1 + r - d) X_{\hat{n}} B_{\hat{n}-1}.$$

Seguirebbe quindi

$$d > 1 + 1,$$

con la violazione della (3.56). □

Alla luce delle Proposizioni 187 e 188 anche per un mercato multiperiodale possiamo enunciare il seguente fondamentale risultato

Teorema 189 *Nel modello CRR multiperiodale l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio è equivalente all'esistenza di un'unica probabilità neutrale al rischio.*

Siano $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{+}$ la misura neutrale al rischio e sia $\tilde{\mathbf{E}}_n[\cdot]$ l'operatore speranza condizionata rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$ data l'informazione $\mathfrak{F}_n$ disponibile al tempo $t = t_n$.

Proposizione 190 *La successione dei* valori di mercato scontati $(\tilde{S}_n)_{n=0}^{N}$ *dello stock, data da*

$$\tilde{S}_n \stackrel{def}{=} \frac{S_n}{B_n}, \quad n = 0, \ldots, N,$$

è una $\left(\mathfrak{F}, \tilde{\mathbf{P}}\right)$*-martingala.*
Proof. *Risulta infatti,*

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[\tilde{S}_n] = \tilde{\mathbf{E}}_{n-1}\left[\frac{S_n}{B_n}\right] = \frac{1}{B_n}\tilde{\mathbf{E}}_{n-1}[S_n] = \frac{(1+r)S_{n-1}}{B_n} = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \tilde{S}_{n-1}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. □

Proposizione 191 *Per ogni funzione boreliana (limitata)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si ha*

$$\tilde{\mathbf{E}}[f(S_n) \mid S_1, \ldots, S_{n-1}] = f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q}, \tag{3.57}$$

e

$$\tilde{\mathbf{E}}[f(S_n) \mid S_{n-1}] = f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q} \tag{3.58}$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. *Quindi, la successione dei valori* $(S_n)_{n=0}^{N}$ *dello stock è un* $(\mathfrak{F}, \mathbf{P})$*-processo di Markov.*

Proof. *Ricordato che*

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_1, \ldots, S_n\right),$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$, *osserviamo preliminarmente che* $f(uS_{n-1})\tilde{p}+f(dS_{n-1})\tilde{q}$ *è una* $\sigma\left(S_{n-1}\right)$*-variabile aleatoria reale su* Ω. *In particolare, una* $\mathcal{F}_{n-1}$*-variabile aleatoria. Ora, stante la definizione di speranza condizionata e grazie all'indipendenza di* β_n *da* $\mathcal{F}_{n-1}$, *per ogni* $n = 1, \ldots, N$, *possiamo scrivere*

$$\begin{aligned}
\int_F \tilde{\mathbf{E}}\left[f(S_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] d\tilde{\mathbf{P}} &= \int_F f(S_n) d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \int_F f(\beta_n S_{n-1}) d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \int_{F\cap\{\beta_n=u\}} f(\beta_n S_{n-1}) d\tilde{\mathbf{P}} + \int_{F\cap\{\beta_n=d\}} f(\beta_n S_{n-1}) d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \int_{F\cap\{\beta_n=u\}} f(uS_{n-1}) d\tilde{\mathbf{P}} + \int_{F\cap\{\beta_n=d\}} f(dS_{n-1}) d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \int_\Omega f(uS_{n-1}) 1_{F\cap\{\beta_n=u\}} d\tilde{\mathbf{P}} + \int_\Omega f(dS_{n-1}) 1_{F\cap\{\beta_n=d\}} d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_{F\cap\{\beta_n=u\}}\right] + \tilde{\mathbf{E}}\left[f(dS_{n-1}) 1_{F\cap\{\beta_n=d\}}\right] \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_F 1_{\{\beta_n=u\}}\right] + \tilde{\mathbf{E}}\left[f(dS_{n-1}) 1_F 1_{\{\beta_n=d\}}\right] \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{\mathbf{E}}\left[1_{\{\beta_n=u\}}\right] + \tilde{\mathbf{E}}\left[f(dS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{\mathbf{E}}\left[1_{\{\beta_n=d\}}\right] \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{\mathbf{P}}\left(\beta_n = u\right) + \tilde{\mathbf{E}}\left[f(dS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{\mathbf{P}}\left(\beta_n = d\right) \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{p} + \tilde{\mathbf{E}}\left[f(dS_{n-1}) 1_F\right] \tilde{q} \\
&= \tilde{\mathbf{E}}\left[f(uS_{n-1}) 1_F \tilde{p} + f(dS_{n-1}) 1_F \tilde{q}\right] \\
&= \int_\Omega \left(f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q}\right) 1_F d\tilde{\mathbf{P}} \\
&= \int_F \left(f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q}\right) d\tilde{\mathbf{P}},
\end{aligned}$$

per ogni $F \in \mathcal{F}_{n-1}$. *In definitiva, per ogni* $n = 1, \ldots, N$, *vale la*

$$\int_F \tilde{\mathbf{E}}\left[f(S_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] d\tilde{\mathbf{P}} = \int_F \left(f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q}\right) d\tilde{\mathbf{P}},$$

per ogni $F \in \mathcal{F}_{n-1}$. *Sempre stante la definizione di speranza condizionata, ciò comporta la (3.57).Con lo stesso procedimento si prova poi che, per ogni* $n = 1, \ldots, N$, *vale la*

$$\int_G \tilde{\mathbf{E}}\left[f(S_n) \mid S_{n-1}\right] d\tilde{\mathbf{P}} = \int_G \left(f(uS_{n-1})\tilde{p} + f(dS_{n-1})\tilde{q}\right) d\tilde{\mathbf{P}},$$

per ogni $G \in \sigma\left(S_{n-1}\right)$. *Dalla definitione di speranza condizionata segue allora la (3.58).* □

3.5.1 European Options

Consideriamo adesso un'opzione europea d'acquisto (*call*) sul titolo rischioso di maturità T, prezzo d'esercizio K e valore di mercato $(C_n)_{n=0}^N$, di cui C_0 sia il *premio*. Anche nel caso di un mercato multiperiodale il valore dell'opzione alla maturità è dato da

$$C_N \equiv C_T \overset{\text{def}}{=} \max\{S_T - K, 0\} \equiv \max\{S_N - K, 0\}.$$

D'altra parte S_N è data dalla (3.27). Pertanto posto

$$n_K \equiv \min\left\{n \in \{0,\dots,N\} \mid u^n d^{N-n} S_0 \geqslant K\right\},$$

ovvero

$$n_K \equiv \left\lceil \frac{\log(K) - (\log(S_0) + N\log(d))}{\log(u) - \log(d)} \right\rceil,$$

dove $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ceiling, risulta

$$C_N = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0,\dots,n_K - 1, \\ u^n d^{N-n} S_0 - K, & \text{se } n = n_K,\dots,N, \end{cases} \tag{3.59}$$

con

$$\mathbf{P}(C_N = 0) = \sum_{n=0}^{n_K-1} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = 1 - \sum_{n=n_K}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n},$$

$$\mathbf{P}(C_N = u^n d^{N-n} S_0 - K) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}, \quad \text{se } n = n_K,\dots,N.$$

ovvero, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, con

$$\tilde{\mathbf{P}}(C_N = 0) = \sum_{n=0}^{n_K-1} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n} = 1 - \sum_{n=n_K}^{N} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n},$$

$$\mathbf{P}(C_N = u^n d^{N-n} S_0 - K) = \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}, \quad \text{se } n = n_K,\dots,N.$$

Definizione 192 *Chiamiamo* portafoglio replicante *o* strategia di copertura *(*hedging strategy*) dell'opzione call un BS-portafoglio autofinanziante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *tale che all'istante terminale* $t_N = T$ *si abbia*

$$W_T(\Pi) = X_T B_T + Y_T S_T = C_T. \tag{3.60}$$

Definizione 193 *Chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizioni rischiose *nei titoli* U *e* V*, più sinteticamente* BSS-portafoglio*, una processo stocastico* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ *le cui componenti* $(X_n)_{n=0}^N$ *[resp.* $(Y_n)_{n=0}^N$*, resp.* $(Z_n)_{n=0}^N$*] siano processi stocastici reali rappresentanti la quantità di bond [resp. titolo rischioso* U*, resp. titolo rischioso* V*] in cui investiamo al tempo* $t = t_n$*.*

Chiaramente un BS-portafoglio $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N\right)$ può essere pensato come un BSS-portafoglio $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ con componente $(Z_n)_{n=0}^N$ tale che $Z_{n=0}$, per ogni $n = 0,1,\dots,N$.

Definizione 194 *Chiamiamo* valore *del BSS-portafoglio* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ *il processo stocastico* $(W_n(\Pi))_{n=0}^N$ *definito ponendo*

$$W_n(\Pi) \overset{def}{=} X_n B_n + Y_n U_n + Z_n V_n, \quad \forall n = 0,1,\dots,N. \tag{3.61}$$

Come per il caso di un BS-portafoglio, indicheremo più brevemente con W_n il valore di un BSS-portafoglio Π al tempo $t = t_n$, per $n = 0, 1, \ldots, N$, a meno che un esplicito riferimento a Π non sia necessario.

Osservazione 195 *Un BSS-portafoglio è un processo predicibile e il suo valore è un processo adattato.*

Definizione 196 *Diciamo che un BSS-portafoglio* $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ è autofinanziante *se risulta*

$$W_n = X_{n+1}B_n + Y_{n+1}U_n + Z_{n+1}V_n, \tag{3.62}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Definizione 197 *Diciamo che un BSS-portafoglio* $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ *è un BSS-portafoglio d'*arbitraggio *se risulta*

$$W_0 = 0, \quad W_N \geqslant 0 \quad e \quad \mathbf{P}(W_N > 0) > 0. \tag{3.63}$$

Analogamente al caso di un BS-portafoglio, un BSS-portafoglio $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ é un portafoglio d'arbitraggio se a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza un payoff non negativo e con probabilità non nulla un payoff strettamente positivo. Ciò indipendentemente dall'esito dell'investimento nelle sue componenti rischiose.

Lemma 198 *Siano U e V due titoli del mercato multiperiodale di valori $(U_n)_{n=0}^N$ ed $(V_n)_{n=0}^N$. In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il sussistere dell'uguaglianza*

$$U_N = V_N$$

comporta necessariamente che

$$U_n = V_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Proof. *Se per un certo $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ risultasse*

$$U_n > V_n,$$

allora vendute allo scoperto Y_n unità di titolo U, con il ricavato Y_nU_n si potrebbero acquistare $Z_n \equiv Y_n$ unità di titolo V con un esborso pari a $Z_nV_n = Y_nV_n$ ed investire il surpuls

$$Y_nU_n - Y_nV_n = X_n(U_n - V_n) > 0$$

nell'acquisto di $X_n \equiv X_n(U_n - V_n)/B_n$ unità di titolo non rischioso. In tempi successivi ad n la composizione del portafoglio verrebbe lasciata inalterata. Al tempo $t = T$, ovvero $n = N$, la liquidazione della posizione sul titolo V produrrebbe un introito aleatorio $Z_NV_N = Z_nV_N$ tale da assicurare la possibilità di ripianare lo scoperto della posizione su U, nel frattempo maturato a $Y_NU_N = Y_nU_N$, e al contempo la liquidazione della posizione sul titolo non rischioso garantirebbe un introito certo pari a

$$X_nB_N = \frac{X_n(U_n - V_n)}{B_n}B_n(1+r)^{N-n} = X_n(U_n - V_n)(1+r)^{N-n} > 0.$$

Si sarebbe quindi realizzato un arbitraggio. Un arbitraggio del tutto analogo si potrebbe realizzare se per un certo $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ fosse

$$U_n < V_n.$$

La tesi del Lemma è così provata. $\square$

Corollary 199 *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, se* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *è un BS-portafoglio replicante dell'opzione call risulta*

$$X_n B_n + Y_n S_n = C_n,$$

per ogni $n = 0, 1 \ldots, N$.

E' poi possibile dimostrare che in assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il portafoglio replicante risulta essere unico.

Teorema 200 *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, esiste un unico BS-portafoglio replicante dell'opzione call,* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$*, dato da*

$$X_n = \frac{uC_n^- - dC_n^+}{(u-d)B_n}, \quad Y_n = \frac{C_n^+ - C_n^-}{(u-d)S_{n-1}}, \tag{3.64}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$*, essendo* C_n^-, C_n^+ *le possibili realizzazioni della call al tempo* $t = t_n$ *dato il valore* S_{n-1} *del sottostante al tempo* $t = t_{n-1}$*. Inoltre*

$$W_n = C_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \tilde{\mathbf{E}}_n[C_N], \tag{3.65}$$

per ogni $n = 0, 1 \ldots, N$.
Proof. *Se* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *è un portafoglio replicante dell'opzione call deve aversi*

$$X_N B_N + Y_N S_N = \max\{S_N - K, 0\}. \tag{3.66}$$

D'altra parte, in riferimento al tempo $t = t_{N-1}$,

$$S_N = \beta_N S_{N-1} = \begin{cases} uS_{N-1}, & \mathbf{P}(S_N = uS_{N-1}) \equiv \tilde{p} \\ dS_{N-1}, & \mathbf{P}(S_N = dS_{N-1}) \equiv \tilde{q} \end{cases},$$

per cui la (3.66) da luogo alle condizioni

$$\begin{aligned} X_N B_N + Y_N u S_{N-1} &= \max\{uS_{N-1} - K, 0\} \equiv C_N^+, \\ X_N B_N + Y_N d S_{N-1} &= \max\{dS_{N-1} - K, 0\} \equiv C_N^-. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Essendo C_N^+ *e* C_N^- *le possibili realizzazioni della call al tempo* $t = t_N$ *dato il valore* S_{N-1} *del sottostante al tempo* $t = t_{N-1}$*. Il sistema (3.67) ammette un'unica soluzione* (X_N, Y_N) *data da*

$$X_N = \frac{\begin{vmatrix} C_N^+ & uS_{N-1} \\ C_N^- & dS_{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_N & uS_{N-1} \\ B_N & dS_{N-1} \end{vmatrix}} = \frac{uC_N^- - dC_N^+}{(u-d)B_N}, \tag{3.68}$$

e

$$Y_N = \frac{\begin{vmatrix} B_N & C_N^+ \\ B_N & C_N^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_N & uS_{N-1} \\ B_N & dS_{N-1} \end{vmatrix}} = \frac{C_N^+ - C_N^-}{(u-d)S_{N-1}}. \tag{3.69}$$

Da notare che le condizioni (3.68) e (3.69) consentono di esprimere deterministicamente le componenti X_N *ed* Y_N *del portafoglio replicante, noto che sia il valore* S_{N-1} *dello stock al tempo* $t = t_{N-1}$*. In altri temnini, al tempo* $t = t_{N-1}$*, osservata la realizzazione del valore* S_{N-1} *del titolo rischioso, ed essendo certo il valore* B_N *del bond, possiamo costruire un portafoglio che replichi il valore dell'opzione call alla maturità, qualunque possa essere il valore futuro* S_N *del titolo rischioso. D'altra parte, se* *valutate al tempo iniziale $t = t_0$ le componenti X_N ed Y_N sono variabili aleatorie in quanto funzioni (deterministiche) della variabile aleatoria S_{N-1}. Da notare inoltre che X_N ed Y_N non dipendono dalla probabilità $\tilde{p}$ di crescita del sottostante.*

Determinati X_N ed Y_N, la condizione di autofinanziamento

$$W_{N-1} = X_{N-1}B_{N-1} + Y_{N-1}S_{N-1} = X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1},$$

consente allora di calcolare il valore del portafoglio replicante al tempo $t = t_{N-1}$. Precisamente,

$$\begin{aligned}
W_{N-1} &\equiv X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1} \\
&= \frac{uC_N^- - dC_N^+}{(u-d)B_N} B_{N-1} + \frac{C_N^+ - C_N^-}{(u-d)S_{N-1}} S_{N-1} \\
&= \frac{uC_N^- - dC_N^+}{(u-d)(1+r)} + \frac{C_N^+ - C_N^-}{u-d} \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{uC_N^- - dC_N^+}{u-d} + (1+r)\frac{C_N^+ - C_N^-}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(C_N^+\frac{(1+r)-d}{u-d} + C_N^-\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(C_N^+\tilde{p} + C_N^-\tilde{q}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\max\{uS_{N-1} - K, 0\}\tilde{p} + \max\{dS_{N-1} - K, 0\}\tilde{q}\right).
\end{aligned}$$

Grazie alle (3.57) e (3.58), risulta allora

$$W_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid S_{N-1}] = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathcal{F}_{N-1}].$$

Il ragionamento precedente può essere ripetuto per calcolare X_{N-1} e Y_{N-1}. Infatti, sempre grazie al Corollario 199, da una parte deve aversi

$$W_{N-1} = C_{N-1}. \tag{3.70}$$

D'altra parte, in dipendenza dal valore che potrebbe assumere S_{N-2}, il primo membro della (3.70) può assumere soltanto i valori

$$X_{N-1}B_{N-1} + Y_{N-1}uS_{N-2} \quad e \quad X_{N-1}B_{N-1} + Y_{N-1}dS_{N-2}.$$

Pertanto, l'Equazione (3.70) comporta che la call al tempo $t = t_{N-1}$ possa assume soltanto i due valori

$$C_{N-1}^+ = X_{N-1}B_{N-1} + Y_{N-1}uS_{N-2} \quad e \quad C_{N-1}^- = X_{N-1}B_{N-1} + Y_{N-1}dS_{N-2}.$$

Con un calcolo del tutto simile a quello effettuato per determinare X_N ed Y_N, possiamo determinare allora

$$X_{N-1} = \frac{uC_{N-1}^- - dC_{N-1}^+}{(u-d)B_{N-1}} \quad e \quad Y_{N-1} = \frac{C_{N-1}^+ - C_{N-1}^-}{(u-d)S_{N-2}}.$$

Quindi, sempre per la condizione di autofinanziamento,

$$W_{N-2} = X_{N-2}B_{N-2} + Y_{N-2}S_{N-2} = X_{N-1}B_{N-2} + Y_{N-1}S_{N-2},$$

il valore del portafoglio replicante al tempo $t = t_{N-2}$ è dato da

$$\begin{aligned}
W_{N-2} &= X_{N-1}B_{N-2} + Y_{N-1}S_{N-2} \\
&= \frac{uC^-_{N-1} - dC^+_{N-1}}{(u-d)B_{N-1}}B_{N-2} + \frac{C^+_{N-1} - C^-_{N-1}}{(u-d)S_{N-2}}S_{N-2} \\
&= \frac{uC^-_{N-1} - dC^+_{N-1}}{(u-d)(1+r)} + \frac{C^+_{N-1} - C^-_{N-1}}{u-d} \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{uC^-_{N-1} - dC^+_{N-1}}{u-d} + (1+r)\frac{C^+_{N-1} - C^-_{N-1}}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(C^+_{N-1}\frac{(1+r)-d}{u-d} + C^-_{N-1}\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(C^+_{N-1}\tilde{p} + C^-_{N-1}\tilde{q}\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi, ancora per la proprietà di Markov (cfr. (3.57) e (3.58)) e le proprietà dell'operatore speranza condizionata,

$$\begin{aligned}
W_{N-2} &= \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_{N-1} \mid S_{N-2}] \\
&= \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid S_{N-1}] \mid S_{N-2}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\tilde{\mathbf{E}}[\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid S_{N-1}] \mid S_{N-2}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\tilde{\mathbf{E}}[\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathfrak{F}_{N-1}] \mid \mathfrak{F}_{N-2}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathfrak{F}_{N-2}].
\end{aligned}$$

Non è difficile rendersi conto che iterando il ragionamento si ottiene

$$X_{N-n} = \frac{uC^-_{N-n} - dC^+_{N-n}}{(u-d)B_{N-n}} \quad e \quad X_{N-n} = \frac{C^+_{N-n} - C^-_{N-n}}{(u-d)S_{N-n-1}}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

e

$$W_{N-n} = C_{N-n} = \frac{1}{(1+r)^n}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathcal{F}_{N-n}], \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Infine, otteniamo

$$W_0 = C_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathcal{F}_0]$$

La validità delle (3.64) e (3.65) segue immediatamente scambiando $N-n$ con n. □

Corollary 201 *Si ha*

$$C_n \geqslant 0 \tag{3.71}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$.
Proof. *La (3.71) è immediata conseguenza dell'Equazione 3.65, stanti la positività di C_N e la positività dell'operatore speranza condizionata $\tilde{\mathbf{E}}_n[\cdot]$.* □

Definizione 202 *Chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *(*no arbitrage price*) al tempo $t = t_n$ dell'opzione call il valore del BS-portafoglio replicante $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ al tempo $t = t_n$*

$$C_n = X_nB_n + Y_nS_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.72}$$

Proposizione 203 *Risulta*

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=n_K}^{N} \left(u^n d^{N-n} S_0 - K\right) \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}, \tag{3.73}$$

dove

$$n_K \equiv \min\{n \in \{0, \ldots, N\} \mid u^n d^{N-n} S_0 \geqslant K\}, \tag{3.74}$$

ovvero

$$n_K \equiv \left\lceil \frac{\log(K) - (\log(S_0) + N \log(d))}{\log(u) - \log(d)} \right\rceil, \tag{3.75}$$

dove $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è la funzione ceiling, e*

$$\tilde{p} = \frac{r+1-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-(r+1)}{u-d}.$$

Proof. *Dalla (3.65) considerata nel caso* $n = 0$ *e dalla (3.59) segue*

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(1+r)^N} \tilde{\mathbf{E}}[C_N \mid \mathfrak{F}_0] \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \tilde{\mathbf{E}}[C_N] \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=n_K}^{N} \left(u^n d^{N-n} S_0 - K\right) \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}. \end{aligned}$$

□

Corollary 204 *Si ha*

$$C_n \geqslant \left(S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}\right)^+, \tag{3.76}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$.

Proof. *Stanti le proprietà dell'operatore speranza condizionata, dalla (3.65), otteniamo*

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \tilde{\mathbf{E}}_n[C_N] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \tilde{\mathbf{E}}_n[\max\{S_N - K, 0\}] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \tilde{\mathbf{E}}_n[\frac{1}{2}(|S_N - K| + S_N - K)] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{E}}_n[|S_N - K|] + \tilde{\mathbf{E}}_n[S_N - K]\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{E}}_n[|S_n \beta_{n+1} \cdots \beta_N - K|] + \tilde{\mathbf{E}}_n[S_n \beta_{n+1} \cdots \beta_N - K]\right) \\ &\geqslant \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left|\tilde{\mathbf{E}}_n[S_n \beta_{n+1} \cdots \beta_N - K]\right| + \tilde{\mathbf{E}}_n[S_n \beta_{n+1} \cdots \beta_N - K]\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left|S_n \tilde{\mathbf{E}}_n[\beta_{n+1} \cdots \beta_N] - K\right| + S_n \tilde{\mathbf{E}}_n[\beta_{n+1} \cdots \beta_N] - K\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left|S_n \tilde{\mathbf{E}}[\beta_{n+1} \cdots \beta_N] - K\right| + S_n \tilde{\mathbf{E}}[\beta_{n+1} \cdots \beta_N] - K\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left|S_n \tilde{\mathbf{E}}[\beta_{n+1}] \cdots \tilde{\mathbf{E}}[\beta_N] - K\right| + S_n \tilde{\mathbf{E}}[\beta_{n+1}] \cdots \tilde{\mathbf{E}}[\beta_N] - K\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left|S_n (u\tilde{p} + d\tilde{q})^{N-n} - K\right| + S_n (u\tilde{p} + d\tilde{q})^{N-n} - K\right) \end{aligned} \tag{3.77}$$

D'altra parte vale la

$$u\tilde{p} + d\tilde{q} = 1 + r, \tag{3.78}$$

e combinandola con la (3.77) otteniamo

$$\begin{aligned}
C_n &\geqslant \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \frac{1}{2} \left(\left| S_n(1+r)^{N-n} - K \right| + S_n(1+r)^{N-n} - K \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left| S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} \right| + S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} \right) \\
&= \max \left\{ S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}, 0 \right\}.
\end{aligned}$$

come desiderato. □

Il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call europea è definito nel caso di un mercato multiperiodale binomiale sulla base di considerazioni analoghe a quelle effettuate nel caso di mercato monoperiodale. Immaginiamo che un operatore finanziario ad inizio dei periodi di contrattazione venda un'opzione call europea sul titolo rischioso con prezzo d'esercizio K e maturità T. L'agente realizza l'incasso C_0 ma si espone al rischio d'esercizio dell'opzione alla maturità da parte dell'acquirente per un ammontare pari a $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$. Per eliminare il rischio dovuto a tale esposizione, sfruttando la sola disponibilità C_0 generata dalla vendita dell'opzione, l'operatore finanziario costituisce un portafoglio acquistando X_1 unità del titolo non rischioso al prezzo B_0 e acquistando Y_1 azioni del titolo rischioso al prezzo S_0 (valori negativi di X_1 e Y_1 significano rispettivamente un prestito sul titolo non rischioso e la vendita allo scoperto del titolo rischioso). Questo portafoglio deve essere tale da replicare il valore atteso (aleatorio) C_1 della call al tempo $t = t_1$ dato S_0. A fine periodo, il valore S_1 dello stock si realizza ed il portafoglio costituito immediatamente dopo il tempo $t = 0$ prende il nuovo valore $X_1 B_1 + Y_1 S_1 \equiv V_1$. Con tale ricchezza l'operatore finanziario riconfigura il portafoglio in modo da replicare il valore atteso C_2 della call al tempo $t = t_2$, dato il prezzo S_1 dello stock. L'iterazione di questo processo mette l'operatore finanziario in grado di replicare il valore della call alla maturità T quale che sia il valore S_T assunto dallo stock.

Supponiamo adesso che nel mercato sia trattata anche un'opzione *put* europea sul titolo rischioso, sempre con prezzo d'esercizio K alla maturità T, la cui successione dei valori di mercato denotiamo con $(P_n)_{n=0}^{N}$, essendo

$$P_N \equiv P_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K - S_T, 0\} \equiv \max\{K - S_N, 0\}.$$

D'altra parte S_N è sempre data dalla (3.27). Pertanto posto

$$\check{n}_K \equiv \max \left\{ n \in \{0, \ldots, N\} \mid K \geqslant u^n d^{N-n} S_0 \right\},$$

ovvero

$$\check{n}_K \equiv \left\lfloor \frac{\log(K) - (\log(S_0) + N \log(d))}{\log(u) - \log(d)} \right\rfloor,$$

dove $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione floor, risulta

$$P_N = \begin{cases} K - u^n d^{N-n} S_0, & \text{se } n = 0, \ldots, \check{n}_K, \\ 0, & \text{se } n = \check{n}_K + 1, \ldots, N, \end{cases},$$

con

$$\mathbf{P}(P_N = K - u^n d^{N-n} S_0) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}, \quad \text{se } n = 0, \ldots, \check{n}_K,$$

$$\mathbf{P}(P_N = 0) = \sum_{n=\check{n}_K+1}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\check{n}_K} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}.$$

ovvero, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, con

$$\tilde{\mathbf{P}}(P_N = K - u^n d^{N-n} S_0) = \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}, \quad \text{se } n = 0, \dots, \check{n}_K,$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(P_N = 0) = \sum_{n=\check{n}_K+1}^{N} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\check{n}_K} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n},$$

Come nel caso delle opzioni call abbiamo

$$P_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \tilde{\mathbf{E}}_n[P_N] \tag{3.79}$$

e

$$P_n \geqslant 0 \tag{3.80}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.

Proposizione 205 *Si ha chiaramente*

$$C_T - P_T = S_T - K. \tag{3.81}$$

Proof. La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione 2.49 relativa al modello CRR monoperiodale. □

Proposizione 206 *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, sussiste necessariamente la relazione di parità put-call*

$$C_n - P_n = S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}, \tag{3.82}$$

per ogni $n = 0, \dots, N$.

Proof. *Si consideri un titolo X costituito al tempo $t = 0$ acquistando una call e vendendo una put sullo stesso sottostante, entrambe di strike K alla maturità T e rispettivi prezzi C_0 e P_0, e si consideri un titolo Y costituito prendendo a prestito l'ammontare $K/(1+r)^N$ ed acquistando il titolo rischioso sottostante le opzioni al prezzo S_0. Stante l'Equazione 3.81 alla maturità T risulta*

$$X_T = C_T - P_T = S_T - K = Y_T.$$

Allora, per il Lemma 198 deve necessariamente aversi

$$X_n = Y_n,$$

per ogni $n = 0, \dots, N-1$, e da questa, tenendo ancora conto della e Proposizione 147, segue la (3.82).
□

L'introduzione dell'opzione put e l'aver stabilito la relazione di parità put-call (3.82) in modo indipendente dalla struttura binomiale moltiplicativa del modello CRR consente di stabilire anche l'Equazione (3.76) in modo indipendente dalla struttura binomiale moltiplicativa del modello CRR, purchè si possa provare l'esistenza di una probabilità neutrale al rischio per la quale valgano la (3.65) e (3.79). Infatti, grazie alla (3.82) e alla (3.80) possiamo scrivere

$$C_n = S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} + P_n \geqslant S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}},$$

per ogni $n = 0, \dots, N-1$. Ma allora, tenuto conto della (3.71) segue immediatamente la (3.76). Similarmente abbiamo

$$P_n = \frac{K}{(1+r)^{N-n}} - S_n + C_n \geqslant \frac{K}{(1+r)^{N-n}} - S_n,$$

per ogni $n = 0, \dots, N-1$.

La circostanza che in assenza di arbitraggi nel modello di mercato multiperiodale binomiale un'opzione call europea, e quindi anche un'opzione put, sia replicabile è un caso particolare della più generale proprietà di *completezza* di un tale mercato.

Definizione 207 *Diciamo che un mercato è* completo *se ogni derivato è replicabile.*

Si può provare che

Proposizione 208 *Nel modello CRR multiperiodale la proprietà di completezza comporta l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio.*
Proof. *Per rendersi conto della validità dell'asserto è sufficente osservare che dalla dimostrazione del Teorema 200 si evince come la proprietà di completezza di mercato dia modo di costruire una probabilità neutrale al rischio. In virtù dell'esistenza di una tale probabilità la Proposizione 187 assicura allora la non esistenza di BS-portafogli d'arbitraggio.* □

Il Teorema 200 e la Proposizione 208 posono essere riassunti nel fondamentale risultato

Teorema 209 *Nel modello CRR multiperiodale l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio è equivalente alla completezza di mercato.*

In definitiva, nel modello CRR multiperiodale l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, l'esistenza di un'unica probabilità neutrale al rischio e la replicabilità di ogni derivato sono proprietà equivalenti.

3.5.2 American Options

Consideriamo ancora il modello di mercato multiperiodale binomiale CRR articolato in N periodi di contrattazione, individuati dalla successione finita di tempi $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_N \equiv T$, in cui sia possibile investire in un bond B di tasso di rendimento non rischioso $r > 0$ e in uno stock S, che non distribuisce dividendi, di tasso di rendimento rischioso $r_S \equiv (u-1, d-1)$, per opportuni $u, d > 0$, tali che $u > 1 + r > d$. Siano quindi $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P}) \equiv \Omega$ ed $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N \equiv \mathfrak{F}$ rispettivamente lo spazio di probabilità neutrale al rischio e la filtrazione introdotti nella Sezione 3.5. Ricordiamo che la probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ è caratterizzata dalla distribuzione

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \left(\frac{1+r-d}{u-d}, \frac{u-(1+r)}{u-d} \right),$$

tale che

$$\tilde{\mathbf{P}}\left(r_S = u-1\right) = \tilde{p} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{P}}\left(r_S = d-1\right) = \tilde{q}.$$

Continuiamo a supporre che nel mercato sia possibile investire in opzioni europee d'acquisto e vendita, rispettivamente C e P, di sottostante S, con maturità T, prezzo d'esercizio K e rispettivo valore di mercato $(C_n)_{n=0}^N$ e $(P_n)_{n=0}^N$. Supponiamo infine che sia possibile investire anche in opzioni americane d'acquisto e vendita, rispettivamente AC e AP, sempre di sottostante S, con la stessa maturità T e lo stesso prezzo d'esercizio K delle opzioni europee, di rispettivo valore di mercato $(AC_n)_{n=0}^N$ e $(AP_n)_{n=0}^N$. Ricordiamo che, a differenza di un'opzione call [risp. put] europea, un'opzione call [risp. put] americana può essere esercitata una sola volta a un tempo t_n, per un qualsiasi $n = 0, 1, \dots, N$, sempre allo stesso prezzo d'esercizio K. Quindi, il payoff di un'opzione americana dipendendo dal valore S_n dello stock, dipende in ultima analisi dal tempo t_n in cui viene esercitata. Pertanto, a priori, potrebbe non ammettere una rappresentazione univoca come nel caso dell'analoga opzione europea. Ciò ovviamente rende più complesso il problema della determinazione del suo prezzo iniziale AC_0 [risp. AP_0] al tempo $t = 0$, ponendosi inoltre il problema della determinazione del tempo ottimale d'esercizio t_{n^*}, per un opportuno $n^* \in \{0, 1, \dots, N\}$ da determinarsi.

Definizione 210 *Il payoff di un'opzione americana d'acquisto [risp. vendita] con maturità T e prezzo d'esercizio K esercitata al tempo $t_n \leqslant T$ è dato da*

$$\max\{S_n - K, 0\} \equiv (S_n - K)^+ \quad [\text{risp. } \max\{K - S_n, 0\} \overset{def}{=} (K - S_n)^+], \quad \forall n = 0, 1, \dots, N.$$

Inoltre, se esercitata a un tempo $t = t_{n_0} \leqslant T$, per un certo $n_0 \in \{0, 1, \dots, N\}$, il payoff diventa nullo per ogni $t_n \leqslant T$ tale che $n \in \{n_0 + 1, \dots, N\}$.

Osservazione 211 *Il valore di mercato di un'opzione americana d'acquisto [risp. vendita] con maturità T e prezzo d'esercizio K al tempo $t_n \leqslant T$ (non esercitata a un tempo $t < t_n$) soddisfa la disuguaglianza*

$$AC_n \geqslant C_n \quad e \quad AP_n \geqslant P_n \tag{3.83}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$. In particolare,

$$AC_N = C_N = (S_N - K)^+ \quad e \quad AP_N = P_N = (K - S_N)^+ . \tag{3.84}$$

Ciò è immediata conseguenza della circostanza che un'opzione americana comporta, a priori, il diritto aggiuntivo della scelta del tempo d'esercizio rispetto alla corrispondente opzione europea con la stessa maturity T e lo stesso strike price K. Con un ragionamento più puntuale, essendo la validità dell'Equazione (3.84) evidente, supponiamo che per un qualche tempo $t = t_{n_0}$, con $n_0 \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, e all'occorrenza di un qualche $\omega_0 \in \Omega$, si verifichi

$$C_{n_0}(\omega_0) > AC_{n_0}(\omega_0)$$

allora potremmo vendere allo scoperto la call europea al prezzo $C_{n_0}(\omega_0)$ comprando con il ricavato una call americana al prezzo $AC_{n_0}(\omega_0)$ e investendo la differenza $C_{n_0}(\omega_0) - AC_{n_0}(\omega_0) > 0$ nell'acquisto del bond B. Quindi, lasciando il portafoglio così costituito inalterato sino al tempo $t = t_N \equiv T$, stante la (3.84), il payoff della call americana alla maturità consentirebbe di coprire lo scoperto sulla call europea e l'investimento sul bond garantirebbe un payoff positivo. Avremmo infatti

$$C_N(\omega_0) = AC_N(\omega_0) \qquad \text{e} \qquad (C_{n_0}(\omega_0) - AC_{n_0}(\omega_0))(1+r)^{N-n_0} > 0.$$

Un ragionamento del tutto analogo può applicarsi nel caso di una put americana.

Proposizione 212 *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il valore di mercato di un'opzione americana d'acquisto con maturità T e prezzo d'esercizio K al tempo $t_n \leqslant T$ (non esercitata a un tempo $t < t_n$) soddisfa la disuguaglianza*

$$AC_n \geqslant \left(S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}\right)^+, \tag{3.85}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$. Sempre in assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il valore di mercato di un'opzione americana di vendita con maturità T e prezzo d'esercizio K al tempo $t_n \leqslant T$ (non esercitata a un tempo $t < t_n$) soddisfa la disuguaglianza

$$AP_n \geqslant (K - S_n)^+ , \tag{3.86}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.

Proof. *L' Equazione (3.85) è immediata conseguenza delle Equazioni (3.76) e (3.83). Per quanto riguarda l'Equazione (3.86), osserviamo che in conseguenza delle Equazioni (3.80) e (3.83) si ha chiaramente*

$$AP_n \geqslant 0, \tag{3.87}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$. *Inoltre se risultasse*

$$AP_{n_0}(\omega_0) < K - S_{n_0}(\omega_0)$$

per un qualche $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *e all'occorrenza di un qualche* $\omega_0 \in \Omega$, *prendendo a prestito la cifra* K *sarebbe possibile comprare lo stock* S *al prezzo* $S_{n_0}(\omega_0)$, *la put* AP *al prezzo* $AP_{n_0}(\omega_0)$ *e investire nel bond la differenza* $K - (S_{n_0}(\omega_0) - AP_{n_0}(\omega_0))$. *Quindi esercitando immediatamente la put potremmo vendere lo stock in nostro possesso al prezzo* K *e ripianare immediatamente il debito contratto prima della decorrenza degli interessi. Rimarrebbe un saldo complesssivo delle operazioni pari a*

$$K - (S_{n_0}(\omega_0) - AP_{n_0}(\omega_0)) > 0$$

che al tempo $t = t_N$ *produrrebbe un capitale*

$$K - (S_{n_0}(\omega_0) - AP_{n_0}(\omega_0))(1+r)^{N-n_0}.$$

Avremmo pertanto costruito un BSS-portafoglio d'arbitraggio. In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio deve allora aversi

$$AP_n \geqslant K - S_n, \tag{3.88}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$. *Combinando le Equazioni (3.87) e (3.88) segue immediatamente la desiderata (3.86).* □

Proposizione 213 *L'esercizio anticipato di una call americana non è mai ottimale.*
Proof. *Consideriamo un call americana e supponiamo che il tempo ottimale d'esercizio sia* $t = t_{n_0}$ *per un qualche* $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *e all'occorrenza di un qualche* $\omega_0 \in \Omega$. *Allora, stante l'Equazione (3.76), abbiamo*

$$C_{n_0}(\omega_0) \geqslant \left(S_{n_0}(\omega_0) - \frac{K}{(1+r)^{N-n_0}} \right)^+.$$

D'altra parte, se la call americana fosse esercitata avremmo

$$AC_{n_0}(\omega_0) = (S_{n_0}(\omega_0) - K)^+.$$

Quindi risulterebbe

$$C_{n_0}(\omega_0) > AC_{n_0}(\omega_0)$$

il che contraddice la (3.83). □

Proposizione 214 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, il prezzo di una call americana* AC *ad ogni tempo uguaglia il prezzo di una call europea* C *con la stessa maturità* T *e lo stesso prezzo d'esercizio* K. *In simboli,*

$$AC_n = C_n, \tag{3.89}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$.
Proof. *Poichè l'esercizio anticipato di una call americana non è mai ottimale essa va esercitata alla maturità* $T \equiv t_N$, *tempo in cui diventa di fatto una call europea e si ha pertanto*

$$AC_N = C_N.$$

Ma allora la non esistenza di BSS portafogli d'arbitraggio e la permanenza in vita della call americana per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$ *comporta la possibilità di applicare il Lemma 198 e ottenere la (3.89).*

Una dimostrazione alternativa è la seguente.

Dall'Osservazione 211 sappiamo che

$$AC_n \geqslant C_n$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N-1$ *e che*

$$AC_N = C_N.$$

Supponiamo quindi che si verifichi

$$AC_{n_0}(\omega_0) > C_{n_0}(\omega_0)$$

per un qualche $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *e all'occorrenza di un qualche* $\omega_0 \in \Omega$*, allora potremmo vendere la call americana allo scoperto al prezzo* $AC_{n_0}(\omega_0)$ *comprando col ricavato una call europea di prezzo* $C_{n_0}(\omega_0)$ *e investendo la differenza* $AC_{n_0}(\omega_0) - C_{n_0}(\omega_0)$ *nel bond. Se l'acquirente della call americana non la dovesse esercitare prima della maturità, al tempo* $t = t_N$ *l'esercizio della call europea ci consentirebbe di fronteggiare un eventuale esercizio della call americana a saldo zero e per di più dall'investimento sul bond avremmo ricavato payoff positivo. Infatti*

$$C_N(\omega_0) = AC_N(\omega_0) \quad e \quad (AC_{n_0}(\omega_0) - C_{n_0}(\omega_0))(1+r)^{N-n_0} > 0,$$

Se invece l'acquirente della call la esercitasse a un tempo $t = t_n$ *con* $n < N$*, ci troveremmo a dovergli corrispondere la cifra* $S_n(\omega_0) - K$*. D'altra parte stante l'Equazione (3.76), la call europea in nostro possesso avrebbe un valore di mercato* $C_n(\omega_0) \geqslant S_n(\omega_0) - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}$*. Quindi potremmo venderla sul mercato con un saldo tra le due call pari a*

$$-(S_n(\omega_0) - K) + C_n(\omega_0) \geqslant -(S_n(\omega_0) - K) + S_n(\omega_0) - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} = K - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} \geqslant 0.$$

Inoltre, per la posizione aperta su bond, avremmo a disposizione il payoff positivo

$$(AC_{n_0}(\omega_0) - C_{n_0}(\omega_0))(1+r)^{n-n_0}.$$

In definitiva, avremmo realizzato un arbitraggio. □

Un'ulteriore semplice considerazione finanziaria: essendo l'esercizio anticipato dell'opzione call americana sempre inappropriato, il diritto all'esercizio anticipato deve valere zero. Quindi la call americana deve avere lo stesso valore di una call europea in ogni tempo antecedente la maturità.

Notare che l'eventuale esercizio anticipato al tempo $t = t_{n*}$ dell'opzione call americana per un qualche $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ e all'occorrenza di un qualche $\omega_0 \in \Omega$ produrrebbe un payoff

$$S_{n_0}(\omega_0) - K < S_n(\omega_0) - \frac{K}{(1+r)^{N-n^*}} \leqslant C_{n_0}(\omega_0) \leqslant AC_{n_0}(\omega_0)$$

inferiore al suo valore di mercato. Quindi piuttosto che l'esercizio anticipato converrebbe la sua vendita sul mercato.

In merito alle put americane il discorso è alquanto più complesso e l'esercizio anticipato può risultare conveniente. Per rendersi conto di ciò, ragionando in termini finanziari, ma esternamente al modello CRR, immaginiamo di avere una put americana con maturità T su uno stock il cui prezzo subisca una caduta fino al valore $S_{t_0}(\omega_0) = 0$, a un certo tempo $t_0 < T$ e in una qualche circostanza ω_0. In questo caso, l'esercizio dell'opzione put al tempo $t = t_0$ restituirebbe esattamente il massimo payoff possibile $(K - S_{t_0}(\omega_0))^+ = K^+ = K$. Pertanto, se l'opzione non venisse esercitata immediatamente si perderebbe quanto meno una parte del capitale $K(1+r)^{N-n_0}$ generato alla maturità dall'incasso del prezzo d'esercizio K al tempo $t = t_0$. Ciò indipendentemente dall'evoluzione futura del prezzo dello stock.

Per la determinazione del tempo d'esercizio e del prezzo di una put americana occorre introdurre la nozione di tempo d'arresto. Tuttavia con alcune semplici considerazioni basate sull'assenza di portafogli d'arbitraggio è possibile provare che

Proposizione 215 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, il prezzo di una put americana AP al tempo $t = t_0 \equiv 0$ soddisfa*

$$K \geqslant AP_0 \geqslant (K - S_0)^+ . \tag{3.90}$$

Proof. *Se fosse*

$$(K - S_0)^+ > AP_0,$$

sarebbe possibile acquistare la put americana al prezzo AP_0 ed esercitarla istantaneamente realizzando un payoff

$$(K - S_0)^+ - AP_0 > 0.$$

Se altresì fosse

$$AP_0 > K,$$

sarebbe possibile vendere allo scoperto la put al prezzo AP_0 e investire il ricavato sul bond ottenendo ad ogni tempo $t = t_n$ un payoff $AP_0 (1 + r)^n$ sicuramente superore al valore massimo K del possibile payoff derivante dal possibile esercizio della put ad ogni tempo $t = t_n$. Infatti, l'eventuale esercizio della put a un qualsiasi tempo $t = t_n$, con $n \in \{1, \ldots, N\}$, e per un qualsiasi esito $\omega \in \Omega$, comporterebbe un esborso di entità K a fronte dell'acquisizione del titolo di prezzo $S_n (\omega)$ e darebbe quindi luogo al payoff complessivo

$$AP_0 (1 + r)^n - K + S_n (\omega) > 0,$$

mentre se la put non venisse esercitata otterremmo un payoff finale di

$$AP_0 (1 + r)^N > 0.$$

□

Proposizione 216 *Nel caso di opzioni americane la relazione di call-put parity diventa*

$$AC_0 - S_0 + K \geqslant AP_0 \geqslant AC_0 + \frac{K}{(1 + r)^N} - S_0. \tag{3.91}$$

Proof. *Dall'Equazione (3.82), abbiamo chiaramente*

$$P_0 = C_0 + \frac{K}{(1 + r)^N} - S_0.$$

Allora, considerando le Equazioni (3.83) e (3.89), otteniamo

$$AP_0 \geqslant AC_0 + \frac{K}{(1 + r)^N} - S_0.$$

Per provare la prima parte dell'Equazione (3.91), supponiamo che si abbia

$$AP_0 + S_0 > AC_0 + K \tag{3.92}$$

allora vendendo allo scoperto sia la put americana di prezzo d'esercizio K e maturità T che il titolo rischioso disporremmo di una somma tale da poter comprare la call americana di prezzo d'esercizio K e maturità T e investire nel bond la somma K. In caso d'esercizio anticipato della put a un tempo $t = t_{n_0}$, con $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N - 1\}$, e per un certo $\omega_0 \in \Omega$ dovremmo pagare all'acquirente della put il prezzo K ottenendone in cambio il titolo rischioso di valore $S_{n_0} (\omega_0)$. D'altra parte, ricaveremmo la somma K dall'investimento nel bond che al tempo $t = t_{n_0}$ frutterebbe un pay-off pari a $K (1 + r)^{n_0}$ e useremmo il titolo rischioso ottenuto in cambio di K per coprire il nostro scoperto sul titolo rischioso. Ci ritroveremmo pertanto con un pay-off complessivo pari a

$$AC_{n_0} (\omega_0) + K ((1 + r)^{n_0} - 1) \geqslant 0.$$

Da notare che se $n_0 > 0$ il pay-off sarebbe strettamente positivo. Se invece la put non venisse esercitata anticipatamente, considerata l'Equazione (3.84), alla maturità $t = t_N \equiv T$ ci ritroveremmo con un pay-off complessivo pari a

$$\begin{aligned}
&AC_N - AP_N - S_N + K(1+r)^N \\
&= (S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ - S_N + K(1+r)^N \\
&= \begin{cases} S_N - K - S_N + K(1+r)^N = K\left((1+r)^N - 1\right) > 0, & \text{se } S_N \geqslant K, \\ -(K - S_N) - S_N + K(1+r)^N = K\left((1+r)^N - 1\right) > 0, & \text{se } S_N < K. \end{cases}
\end{aligned}$$

In definitiva, valendo la (3.92), potremmo costituire un BSS-portafoglio d'arbitraggio. L'assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio impone allora che si abbia

$$AC_0 + K \geqslant AP_0 + S_0.$$

La (3.91) è quindi completamente provata. □

Definizione 217 *Chiamiamo* tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\mathfrak{F}$, *più brevemente* $\mathfrak{F}$-tempo d'arresto, *una variabile aleatoria reale $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nu(\Omega) \subseteq \{0, 1, \ldots, N\} \quad e \quad \{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leqslant n\} \equiv \{\nu \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Osservazione 218 *Comunque data una variabile aleatoria reale $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ risulta*

$$\{\nu \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\} \Leftrightarrow \{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Il senso di questa definizione è che l'evento in cui il tempo d'arresto prende un valore pari non maggiore di n dev'essere osservabile alla luce dell'informazione in $\mathcal{F}_n$ ossia non possiamo scoprire che la variabile aleatoria tempo d'arresto avrebbe dovuto prendere un valore non maggiore di n solo dopo che il tempo n sia trascorso. Quindi, un tempo d'arresto vuole rappresentare un modo di poter associare ad ogni esisto del fenomeno aleatorio un valore n tra $0, 1, \ldots, N$ osservabile alla luce dell'informazione $\mathcal{F}_n$ disponibile sino ad n senza dover attendere l'informazione futura.

Esempio 219 *Consideriamo le variabili aleatorie $\nu_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\nu_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definite ponendo*

$$\nu_1(\omega) \stackrel{def}{=} \omega_1 + 1, \quad \forall \omega \in \Omega, \ \omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N$$

e

$$\nu_2(\omega) \stackrel{def}{=} \omega_2 + 1, \quad \forall \omega \in \Omega, \ \omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N$$

si puo facilmente verificare che ν_1 è un tempo d'arresto, ma ν_2 non lo è. Infatti, per fissare le idee, considerimo $N = 3$, allora

$$\Omega \equiv \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Abbiamo quindi

$$\nu_1((0,0,0)) = \nu_1((0,0,1)) = \nu_1((0,1,0)) = \nu_1((0,1,1)) = 1,$$

e

$$\nu_1((1,0,0)) = \nu_1((1,0,1)) = \nu_1((1,1,0)) = \nu_1((1,1,1)) = 2.$$

Pertanto,

$$\{\nu_1 \leqslant 0\} = \varnothing, \quad \{\nu_1 \leqslant 1\} = E_0, \quad \{\nu_1 \leqslant 2\} = \Omega \quad \{\nu_1 \leqslant 3\} = \Omega,$$

essendo $E_0 \equiv \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$. *Tenuto conto che* $E_0 \in \mathcal{F}_1$, *risulta allora*

$$\{\nu_1 \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0,1,2,3\}.$$

Abbiamo poi

$$\nu_2((0,0,0)) = \nu_2((0,0,1)) = \nu_2((1,0,0)) = \nu_2((1,0,1)) = 1$$

e

$$\nu_2((0,1,0)) = \nu_2((0,1,1)) = \nu_2((1,1,0)) = \nu_2((1,1,1)) = 2.$$

Pertanto,

$$\{\nu_2 \leqslant 0\} = \varnothing, \quad \{\nu_2 \leqslant 1\} = E_{0,0} \cup E_{1,0}, \quad \{\nu_2 \leqslant 2\} = \Omega \quad \{\nu_3 \leqslant 3\} = \Omega,$$

essendo $E_{0,0} \equiv \{(0,0,0),(0,0,1)\}$ *e* $E_{1,0} \equiv \{(1,0,0),(1,0,1)\}$. *Tenuto conto che* $E_{0,0} \cup E_{1,0} \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$, *risulta*

$$\{\nu_2 \leqslant 1\} \notin \mathcal{F}_1.$$

Come si voleva mostrare.

Abbiamo

Teorema 220 *Il processo dei prezzi* $(AP_n)_{n=0}^N$ *di un'opzione put americana soddisfa l'equazione*

$$AP_n = \max_{\nu \in \mathcal{N}(n,N)} \tilde{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{\nu-n}}(K-S_\nu)^+ \mid \mathcal{F}_n\right], \tag{3.93}$$

per ogni $n = 0,1,\ldots,N$, *essendo* $\mathcal{N}(n,N) \equiv \mathcal{N}(t_n,T)$ *l'insieme degli* $\mathfrak{F}$*-tempi d'arresto che soddisfano la condizione* $n \leqslant \nu \leqslant N$, *o equivalentemente* $t_n \leqslant \nu \leqslant T$, *per ogni* $n = 0,1,\ldots,N$. *Inoltre, il tempo d'arresto* $\nu_n^* \in \mathcal{N}(n,N)$ *per il quale vale l'Equazione (3.93), noto come* tempo d'arresto ottimale*, è dato da*

$$\nu_n^*(\omega) = \min\left\{u \geqslant n : AP_u(\omega) = (K - S_u(\omega))^+\right\}.$$

Teorema 221 *Il processo dei prezzi* $(AP_n)_{n=0}^N$ *di un'opzione put americana può anche ottenersi con l'induzione retroattiva definita da*

$$AP_N = (K - S_N)^+ = P_N \tag{3.94}$$

e

$$AP_n = \max\left\{K - S_n, \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_n[AP_{n+1}]\right\} = \max\left\{K - S_n, \frac{1}{1+r}\left(AP_{n+1}^+\tilde{p} + AP_{n+1}^-\tilde{q}\right)\right\} \tag{3.95}$$

per ogni $n = N-1,\ldots,1,0$. *A sua volta, il tempo d'arresto ottimale nell'insieme* $\mathcal{N}(n,N)$ *può anche ottenersi con l'induzione retroattiva definita da*

$$\nu_N^*(\omega) = N \tag{3.96}$$

per ogni $\omega \in \Omega$ *e*

$$\nu_n^*(\omega) = n 1_{\{AP_n = (K-S_n)^+\}}(\omega) + \nu_{n+1}^*(\omega) 1_{\{AP_n > (K-S_n)^+\}}(\omega) \tag{3.97}$$

per ogni $n = N-1,\ldots,1,0$ *ed ogni* $\omega \in \Omega$.

Da notare che stante l'Equazione (3.86), gli eventi $\left\{AP_n = (K-S_n)^+\right\}$ e $\left\{AP_n > (K-S_n)^+\right\}$ costituiscono una partizione di Ω.

Osservazione 222 *Si ha*

$$\nu_0^*(\omega)=0\Leftrightarrow K-S_0\geqslant\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1]\quad e\quad \nu_0^*(\omega)=\nu_1^*(\omega)\Leftrightarrow\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1]>(K-S_0)^+.$$

Proof. *Per la (3.95) e per la positività dell'operatore speranza, abbiamo*

$$AP_0=\max\left\{K-S_0,\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1]\right\}\geqslant(K-S_0)^+.$$

Pertanto

$$AP_0=(K-S_0)^+\Leftrightarrow K-S_0\geqslant\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1]$$

e

$$AP_0>(K-S_0)^+\Leftrightarrow K-S_0<\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1]=AP_0.$$

In definitiva

$$\left\{AP_0=(K-S_0)^+\right\}=\begin{cases}\Omega\Leftrightarrow K-S_0\geqslant\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1],\\ \varnothing\Leftrightarrow K-S_0<\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_0[AP_1].\end{cases}$$

□

Esempio 223 *In relazione all'esempio presentato nello script, abbiamo*

$$AP_5(\omega)=\max\{K-S_5(\omega),0\}=\begin{cases}22.622, & se\ S_5(\omega)=77.378,\\ 6.332, & se\ S_5(\omega)=93.688,\\ 0, & altrimenti,\end{cases}$$

e

$$\nu_5^*(\omega)=5.$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned}AP_4(\omega)&=\max\left\{K-S_4(\omega),\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[AP_5\mid S_4=S_4(\omega)]\right\}\\&=\max\left\{K-S_4(\omega),\frac{1}{1+r}\left(AP_5^+\tilde{p}+AP_5^-\tilde{q}\right)\right\}\\&=\begin{cases}18.549, & se\ S_4(\omega)=81.451,\\ 3.015, & se\ S_4(\omega)=98.598,\\ 0, & altrimenti,\end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\nu_4^*(\omega)=\begin{cases}5, & if\ \sum_{k=1}^4\omega_k=1,\\ 4, & altrimenti,\end{cases}$$

dove

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^4\omega_k=1\right\}=\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1),(0,0,1,0,0),(0,0,1,0,1),(0,1,0,0,0),(0,1,0,0,1),(1,0,0,0,0$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}AP_3(\omega)&=\max\left\{K-S_3(\omega),\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[AP_4\mid S_3=S_3(\omega)]\right\}\\&=\max\left\{K-S_3(\omega),\frac{1}{1+r}\left(AP_4^+\tilde{p}+AP_4^-\tilde{q}\right)\right\}\\&=\begin{cases}14.263, & se\ S_3(\omega)=85.737,\\ 1.436, & se\ S_3(\omega)=103.787,\\ 0, & altrimenti,\end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\nu_3^*(\omega) = \begin{cases} \nu_4^*(\omega), & se\ \sum_{k=1}^{3}\omega_k = 1, \\ 3, & altrimenti, \end{cases} = \begin{cases} 5, & se\ \sum_{k=1}^{3}\omega_k = 1 \wedge \omega_4 = 0, \\ 4, & se\ \sum_{k=1}^{3}\omega_k = 1 \wedge \omega_4 = 1, \\ 3, & altrimenti, \end{cases}$$

dove

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 1\right\} = \{(0,0,1,0,0), (0,0,1,0,1), (0,1,0,0,0), (0,1,0,0,1), (1,0,0,0,0), (1,0,0,0,1),$$
$$(0,0,1,1,0), (0,0,1,1,1), (0,1,0,1,0), (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,0), (1,0,0,1,1)\}$$

e

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 1\right\}^c = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 0\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 2\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 3\right\},$$

con

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 0\right\} = \{(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,0,1,1)\},$$

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 2\right\} = \{(0,1,1,0,0), (0,1,1,0,1), (0,1,1,1,0), (0,1,1,1,1),$$
$$(1,0,1,0,0), (1,0,1,0,1), (1,0,1,1,0), (1,0,1,1,1),$$
$$(1,1,0,0,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,0,1,1)\},$$

e

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{3} \omega_k = 3\right\} = \{(1,1,1,0,0), (1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}.$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} AP_2(\omega) &= \max\left\{K - S_2(\omega), \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}\left[AP_3 \mid S_2 = S_2(\omega)\right]\right\} \\ &= \max\left\{K - S_2(\omega), \frac{1}{1+r}\left(AP_3^+\tilde{p} + AP_3^-\tilde{q}\right)\right\} \\ &= \begin{cases} 9.75, & se\ S_2(\omega) = 90.25, \\ 0.684, & se\ S_2(\omega) = 109.25, \\ 0, & altrimenti, \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\nu_2^*(\omega) = \begin{cases} \nu_3^*(\omega), & se\ \sum_{k=1}^{2}\omega_k = 1, \\ 2, & altrimenti, \end{cases} = \begin{cases} 5, & se\ \sum_{k=1}^{2}\omega_k = 1 \wedge \omega_3 = 0 \wedge \omega_4 = 0, \\ 4, & se\ \sum_{k=1}^{3}\omega_k = 1 \wedge \omega_3 = 0 \wedge \omega_4 = 1, \\ 3, & se\ \sum_{k=1}^{3}\omega_k = 1 \wedge \omega_3 = 1, \\ 2, & altrimenti, \end{cases},$$

dove

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{2} \omega_k = 1\right\} = \{(0,1,0,0,0), (0,1,0,0,1), (0,1,0,1,0), (0,1,0,1,1),$$
$$(0,1,1,0,0), (0,1,1,0,1), (0,1,1,1,0), (0,1,1,1,1),$$
$$(1,0,0,0,0), (1,0,0,0,1), (1,0,0,1,0), (1,0,0,1,1),$$
$$(1,0,1,0,0), (1,0,1,0,1), (1,0,1,1,0), (1,0,1,1,1)\}$$

e

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{2}\omega_k=1\right\}^c=\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{2}\omega_k=0\right\}\cup\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{2}\omega_k=2\right\},$$

con

$$\begin{aligned}\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{2}\omega_k=0\right\}&=\{(0,0,0,0,0),(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1),\\&\quad(0,0,1,0,0),(0,0,1,0,1),(0,0,1,1,0),(0,0,1,1,1)\},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{2}\omega_k=2\right\}&=\{(1,1,0,0,0),(1,1,0,0,1),(1,1,0,1,0),(1,1,0,1,1),\\&\quad(1,1,1,0,0),(1,1,1,0,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}.\end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned}AP_1(\omega)&=\max\left\{K-S_1(\omega),\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}\left[AP_2\mid S_1=S_1(\omega)\right]\right\}\\&=\max\left\{K-S_1(\omega),\frac{1}{1+r}\left(AP_2^+\tilde{p}+AP_2^-\tilde{q}\right)\right\}\\&=\begin{cases}5, & se\ S_1(\omega)=95,\\0.326, & se\ S_1(\omega)=115,\end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\nu_2^*(\omega)=\begin{cases}\nu_2^*(\omega), & se\ \sum_{k=1}^{1}\omega_k=1,\\1, & altrimenti,\end{cases}=\begin{cases}5, & se\ \omega_1=1\wedge\omega_2=0\wedge\omega_3=0\wedge\omega_4=0,\\4, & se\ \omega_1=1\wedge\omega_2=0\wedge\omega_3=0\wedge\omega_4=1,\\3, & se\ \omega_1=1\wedge\omega_2=0\wedge\omega_3=1,\\2, & se\ \omega_1=1\wedge\omega_2=1,\\1, & altrimenti,\end{cases}$$

essendo chiaramente

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{1}\omega_k=1\right\}=\{\omega\in\Omega:\omega_1=1\}\quad e\quad\left\{\omega\in\Omega:\sum_{k=1}^{1}\omega_k=1\right\}^c=\{\omega\in\Omega:\omega_1=0\}.$$

3.5.3 Calibrazione

Nonostante la sua semplicità, il modello di Cox Ross Rubinstein si presta piuttosto bene a simulare mercati finanziari reali, consentendo la valutazione teorica del prezzo di opzioni europee, nonchè di altri derivati più sofisticati, abbastanza prossima ai prezzi reali di mercato. Questa prossimità è peraltro accentuata dalla circostanza che vi è un notevole numero di agenti che si ritrovano a fare uso di implementazioni computazionali di questo modello, proprio per stimare gli ipotetici i prezzi corretti *(fair prices)* di mercato. Ciò porta ad una sorta di autorealizzazione delle aspettative che finisce paradossalmente con lo spingere il prezzo reale verso il prezzo teorico. Ovviamente, per potere concretamente adoperare il modello bisogna preliminarmente *calibrarlo*, ossia specificare i valori opportuni per u, d e la probabilità $\tilde{p}$ che consentano di ottenere risultati del modello in sufficiente accordo con i dati reali. A tale scopo, cominciamo con l'osservare che avendo il modello natura moltiplicativa, il prezzo dello stock non è mai negativo e pertanto è possibile rifarsi al logaritmo del prezzo come variabile fondamentale. In effetti, l'uso del logaritmo conduce ad ottenere relazioni semplici per la selezione dei parametri. Ricordiamo di avere ipotizzato che tutti i periodi di contrattazione abbiano la stessa durata, ossia $t_{n+1}-t_n=T/N\equiv\Delta t$, per ogni $n=0,\ldots N-1$, e quindi $t_n=n\Delta t$, per ogni $n=0,\ldots N$.

Sia r [risp. ρ] il tasso di interesse non rischioso [il tasso d'interesse non rischioso continuamente composto] relativo all'intervallo di tempo Δt [risp. $[0,T]$]. La relazione tra r e ρ è data da

$$1+r=\exp\left(\rho\Delta t\right).$$

Infatti, considerato il tasso d'interesse r_T relativo al periodo $[0,T]$, si ha

$$(1+r)^N=1+r_T=\exp\left(\rho T\right),$$

da cui

$$N\ln\left(1+r\right)=\rho T.$$

Quest'ultima comporta

$$\ln\left(1+r\right)=\rho\frac{T}{N}=\rho\Delta t$$

e la relazione desiderata segue immediatamente. Notare che risulta

$$\frac{B_n}{B_{n-1}}=\exp\left(\rho\Delta t\right),$$

per ogni $n=1,\ldots,N$.

Assumiamo che

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)\tilde{}\mathcal{N}\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\sigma^2\Delta t\right),\quad\forall n=1,\ldots,N.$$

Cio significa che la variabile aleatoria S_n/S_{n-1} è lognormalmente distribuita ossia

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_n\right),\quad Z_n\tilde{}\mathcal{N}\left(0,1\right).$$

per ogni $n=1,\ldots,N$. In conseguenza[8],

$$\begin{array}{l}\mathbf{E}\left[\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]=\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)=\exp\left(\mu\delta\right)\\ \mathbf{D}^2\left[\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]=\exp\left(\sigma^2\Delta t-1\right)\exp\left(2\mu\delta\right)\end{array},\quad\forall n=1,\ldots,N.$$

[8]If X is a log-normally distributed random variable, then, setting $\mathbf{E}\left[\ln\left(X\right)\right]\equiv\mu$ e $\mathbf{D}^2\left[\ln\left(X\right)\right]\equiv\sigma^2$, we can write

$$X=\exp\left(\mu+\sigma Z\right),\quad Z\tilde{}\mathcal{N}\left(0,1\right).$$

As a consequence,

$$\mathbf{E}\left[X\right]=\mathbf{E}\left[e^{\mu+\sigma Z}\right]=\mathbf{E}\left[e^{\mu}e^{\sigma Z}\right]=e^{\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\left[X\right]&=\mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}\left[X\right]^2=\mathbf{E}\left[e^{2(\mu+\sigma Z)}\right]-e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2\\&=e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right]-e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2=e^{2\mu}\left(\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right]-\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2\right).\end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\sigma z}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}e^{\sigma z-\frac{1}{2}z^2}dz\\&=\frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2+\sigma z-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}}dz\\&=\frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=e^{\frac{1}{2}\sigma^2}.\end{aligned}$$

It clearly follows

$$\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right]=e^{2\sigma^2}\quad\text{and}\quad\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2=e^{\sigma^2}$$

In the end,

$$\mathbf{E}\left[X\right]=e^{\mu}e^{\frac{1}{2}\sigma^2}=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Se assumiamo inoltre che le variabili aleatorie $\ln\left(\frac{S_N}{S_{N-1}}\right), \ldots, \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ siano indipendenti, possiamo scrivere

$$\frac{S_1}{S_0} = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_1\right), \ldots, \frac{S_N}{S_{N-1}} = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_N\right),$$

con $Z_0, \ldots, Z_N$ indipendenti. Pertanto

$$\begin{aligned}\frac{S_N}{S_0} = \frac{S_1}{S_0}\frac{S_2}{S_1}\cdots\frac{S_{N-1}}{S_{N-2}}\frac{S_N}{S_{N-1}} &= \exp\left(N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{n=1}^{N} Z_n\right)\\ &= \exp\left(N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sqrt{N\Delta t}\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} Z_n\right)\right)\\ &= \exp\left(N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sqrt{N\Delta t}\sigma Z\right)\\ &= \exp\left(T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sqrt{T}\sigma Z\right).\end{aligned}$$

Otteniamo allora che

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_N}{S_0}\right] = \exp\left(T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}T\sigma^2\right) = \exp\left(\mu T\right)$$

e

$$\mathbf{D}^2\left[\frac{S_N}{S_0}\right] = \exp\left(2T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + T\sigma^2\right)\left(\exp\left(T\sigma^2 - 1\right)\right) = \exp\left(2T\mu\right)\left(\exp\left(T\sigma^2 - 1\right)\right)$$

Inoltre

$$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sqrt{T}\sigma Z.$$

Quindi

$$\mathbf{E}\left[\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right] = T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right] = T\sigma^2$$

Per di più posto

$$X_n \equiv \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right), \quad \forall n = 1, \ldots, N,$$

e

$$\bar{X}_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n, \qquad S_N^2\left(X\right) \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{m=1}^{N}\left(X_m - \bar{X}_n\right)^2,$$

abbiamo[9]

$$\bar{X}_n\tilde{\ }\mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \frac{\sigma^2\Delta t}{N}\right),$$

per cui

$$\mathbf{E}\left[\bar{X}_n\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \quad \mathbf{D}^2\left[\bar{X}_n\right] = \frac{\sigma^2\Delta t}{N}.$$

---

and

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\left[X\right] &= e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right) = e^{2\mu}e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)\\ &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).\end{aligned}$$

[9] $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X}_N \sim N\left(\mu, \sigma^2/N\right)$

Inoltre, abbiamo[10]

$$\frac{(N-1)\,S_N^2(X)}{\sigma^2\Delta t} \sim \chi^2_{N-1},$$

per cui

$$\mathbf{E}\left[S_N^2(X)\right] = \sigma^2\Delta t, \quad \mathbf{D}^2\left[S_N^2(X)\right] = \frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2.$$

Per quanto precedentemente osservato, possiamo usare $\bar{X}_n$ come stimatore di $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{\sigma^2\Delta t}{N}$ e possiamo usare $S_N^2(X)$ come stimatore di $\sigma^2\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2$.

Peraltro, nel modello abbiamo

$$S_N = \beta_N \cdots \beta_1 S_0$$

Quindi,

$$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = \ln\left(\beta_N \cdots \beta_1\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\beta_n\right)$$

Risulta allora

$$\mathbf{E}\left[\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\beta_n\right)\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}\left[\ln\left(\beta_n\right)\right] = N\mathbf{E}\left[\ln\left(\beta_1\right)\right] = N\left(p\ln(u) + q\ln(d)\right).$$

Quindi

$$T\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) = N\left(p\ln(u) + q\ln(d)\right)$$

ovvero

$$\Delta t\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) = p\ln(u) + q\ln(d).$$

Inoltre

$$\mathbf{D}^2\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \mathbf{D}^2\left[\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\beta_n\right)\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}^2\left[\ln\left(\beta_n\right)\right] = N\mathbf{D}^2\left[\ln\left(\beta_1\right)\right],$$

essendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2\left[\ln\left(\beta_1\right)\right] &= \mathbf{E}\left[\ln\left(\beta_1\right)^2\right] - \mathbf{E}\left[\ln\left(\beta_1\right)\right]^2 \\
&= p\ln(u)^2 + q\ln(d)^2 - \left(p\ln(u) + q\ln(d)\right)^2 \\
&= p\ln(u)^2 + q\ln(d)^2 - p^2\ln(u)^2 - q\ln(d)^2 - 2pq\ln(u)\ln(d) \\
&= p\left(1-p\right)\ln(u)^2 + q\left(1-q\right)\ln(d)^2 - 2pq\ln(u)\ln(d) \\
&= pq\ln(u)^2 + qp\ln(d)^2 - 2pq\ln(u)\ln(d) \\
&= pq\left(\ln(u) - \ln(d)\right)^2 \\
&= pq\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2.
\end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$T\sigma^2 = Npq\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2$$

da cui

$$\Delta t\sigma^2 = pq\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2.$$

[10] $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow (N-1)\,S_N^2(X)/\sigma^2 \sim \chi^2_{N-1}$

In definitiva, abbiamo costruito il sistema di equazioni

$$p\ln(u)+q\ln(d)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\qquad pq\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2=\sigma^2\Delta t. \tag{3.98}$$

Posto

$$m\equiv\mu-\frac{1}{2}\sigma^2, \tag{3.99}$$

seguendo la scelta di Cox, Ross, Rubinstein

$$d\equiv 1/u, \tag{3.100}$$

e ricordando che $q\equiv 1-p$, dalle (3.98) otteniamo

$$(2p-1)\ln(u)=m\Delta t,\qquad 4p(1-p)\ln^2(u)=\sigma^2\Delta t. \tag{3.101}$$

Sommando ad ambo i membri della seconda delle (3.101) i quadrati di ambo i membri della prima, segue

$$(2p-1)^2\ln^2(u)+4p(1-p)\ln^2(u)=m^2\Delta t^2+\sigma^2\Delta t, \tag{3.102}$$

ossia

$$\ln^2(u)=m^2\Delta t^2+\sigma^2\Delta t. \tag{3.103}$$

Ciò comporta

$$\ln(u)=\sqrt{m^2\Delta t^2+\sigma^2\Delta t}=\sigma\sqrt{\Delta t+\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\Delta t^2}$$

da cui

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t+\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\Delta t^2}}\approx 1+\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Per la (3.100), ne segue

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t+\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\Delta t^2}}\approx 1-\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Dalla (3.101), otteniamo poi

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{m\Delta t+\ln(u)}{\ln(u)}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m\Delta t}{\ln(u)}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t+\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\Delta t^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{\sigma}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2\Delta t}}\right)$$

Infine, scegliendo l'ampiezza Δt dei sottoperiodi in cui si è diviso il periodo di contrattazione $[0,T]$ molto piccola rispetto a T, ovvero scegliendo il numero N dei sottoperiodi molto grande, i parametri del reticolo binomiale possono essere scelti come segue

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) \tag{3.104}$$

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{3.105}$$

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{3.106}$$

Con questa scelta il modello binomiale viene calibrato in modo da dare luogo ad una corrispondenza abbastanza buona tra prezzi i prezzi dei derivati teoricamente stimati ed i prezzi reali di mercato.

Parte I

Appendix

Capitolo 4

Constrained Optimization

Let $\mathbb{D}$ an open subset of $\mathbb{R}^N$, let $f \in C^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$, let $g_k \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ for $k = 1,\dots,K$, let $\mathbb{G} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid g_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1,\dots,K\}$, and let $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{G}$.

Definizione 224 *We say that f has a* local minimum *[resp.* maximum*] point at $\hat{\mathbf{x}}$* under the constraint $\mathbb{G}$, *if there exists $r > 0$, such that*

$$f(\mathbf{x}) \geqslant f(\hat{\mathbf{x}}) \quad [res.\ f(\mathbf{x}) \leqslant f(\hat{\mathbf{x}})], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{G} \cap \mathbb{B}(\hat{\mathbf{x}};r).$$

Teorema 225 *Assume the function f has a critical point at $\hat{\mathbf{x}}$ under the constraint $\mathbb{G}$ and $rank(J_{\hat{\mathbf{x}}}(g_1,\dots,g_K)) = K \leqslant N-1$. Then, introducing the Lagrangian function $L : \mathbb{D} \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ given by*

$$L(\mathbf{x},\lambda) \overset{def}{=} f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k g_k(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x},\lambda) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}^K$$

there exists a unique $\hat{\lambda} \equiv (\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_K) \in \mathbb{R}^K$ such that L has a critical point at $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\lambda})$.

Let $\mathbb{D}$ an open subset of $\mathbb{R}^2$, let $f \in C^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$, let $h \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, let $\mathbb{H} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid h(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$, and let $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$.

Teorema 226 *Assume the function f has a maximum point at $\hat{\mathbf{x}}$ under the constraint $\mathbb{H}$, that is*

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \max_{h(\mathbf{x}) \leqslant 0} \{f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{D}\},$$

and $rank(J_{\hat{\mathbf{x}}}(h)) = 1$. Then, introducing the Lagrangian function $L : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by

$$L(\mathbf{x},\lambda) \overset{def}{=} f(\mathbf{x}) - \mu h(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x},\mu) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$$

there exists $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ such that the following conditions are fulfilled

optimality $\partial_{x_n} L(\hat{\mathbf{x}},\hat{\lambda}) = 0$, *for $n = 1,2$;*

slackness $\hat{\mu} h(\hat{\mathbf{x}}) = 0$;

multiplier feasibility $\hat{\lambda} \geqslant 0$;

constrain feasibility $g(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant 0$.

Let $\mathbb{D}$ an open subset of $\mathbb{R}^N$, let $f \in C^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$, let $g_j, h_k \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, for $j = 1,\dots,J$, $k = 1,\dots,K$, let $\mathbb{G} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1,\dots,J\}$, $\mathbb{H} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid h_k(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad k = 1,\dots,K\}$, and let $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{G} \cap \mathbb{H}$.

Teorema 227 *Assume the function f has a maximum point at $\hat{\mathbf{x}}$ under the constraint $\mathbb{G} \cap \mathbb{H}$, that is*

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \max_{\substack{g_1(\mathbf{x})=0,\dots,g_J(\mathbf{x})=0 \\ h_1(\mathbf{x})\leqslant 0,\dots,h_K(\mathbf{x})\leqslant 0}} \{f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{D}\},$$

and

$$rank \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(\hat{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} g_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} g_J(\hat{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} g_J(\hat{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_1} h_1(\hat{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} h_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} h_K(\hat{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} h_K(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = J + K_b,$$

where K_b is the number of binding inequality constraints. Then, introducing the Lagrangian function $L : \mathbb{D} \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, given by

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \mu_k h_k(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \lambda, \mu) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K,$$

there exist $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K$, $\hat{\lambda} \equiv (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_J)$, $\hat{\mu} \equiv (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K)$, such that the following conditions are fulfilled:

optimality $\partial_{x_n} L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0$, *for* $n = 1, \dots, N$;

I feasibility $g_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, *for* $j = 1, \dots, J$;

II feasibility $h_k(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant 0$, *for* $k = 1, \dots, K$;

non negativity $\hat{\mu}_k \geqslant 0$, *for* $k = 1, \dots, K$;

slackness $\hat{\mu}_k h_k(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, *for* $k = 1, \dots, K$.

Osservazione 228 *The optimality condition 227 can be reformulated in a vector form as*

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{J} \hat{\lambda}_j \nabla g_j(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^{K} \hat{\mu}_k \nabla h_k(\hat{\mathbf{x}}),$$

which highlights the circumstance that the gradient of the objective function f computed at a candidate maximum point has to be a linear combination of the gradients of the constraining functions.

In economic and financial applications, it is customary to present the inequality constraints in a minimization problem in the form

$$h_1(\mathbf{x}) \geqslant 0, \dots, h_K(\mathbf{x}) \geqslant 0,$$

instead of

$$h_1(\mathbf{x}) \leqslant 0, \dots, h_K(\mathbf{x}) \leqslant 0,$$

That is

$$\mathbb{H} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid h_k(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, K\}.$$

In light of this, the analogue of Theorem 227 for a minimization problem takes the following formulation.

Teorema 229 *Assume the function f has a minimum point at $\check{\mathbf{x}}$ under the constraint $\mathbb{G} \cap \mathbb{H}$, that is*

$$f(\check{\mathbf{x}}) = \min_{\substack{g_1(\mathbf{x})=0,\ldots,g_J(\mathbf{x})=0 \\ h_1(\mathbf{x})\geqslant 0,\ldots,h_K(\mathbf{x})\geqslant 0}} \{f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{D}\},$$

and

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(\check{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} g_1(\check{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} g_J(\check{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} g_J(\check{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_1} h_1(\check{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} h_1(\check{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} h_K(\check{\mathbf{x}}) & \cdots & \partial_{x_N} h_K(\check{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = J + K_b,$$

where K_b is the number of binding inequality constraints. Then, introducing the Lagrangian function $L : \mathbb{D} \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, given by

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \mu_k h_k(\mathbf{x}), \quad \forall (\mathbf{x}, \lambda, \mu) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K,$$

there exist $(\check{\lambda}, \check{\mu}) \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K$, $\check{\lambda} \equiv (\check{\lambda}_1, \ldots, \check{\lambda}_J)$, $\check{\mu} \equiv (\check{\mu}_1, \ldots, \check{\mu}_K)$, such that the following conditions are fulfilled:

optimality $\partial_{x_n} L(\check{\mathbf{x}}, \check{\lambda}, \check{\mu}) = 0$, *for* $n = 1, \ldots, N$;

I feasibility $g_j(\check{\mathbf{x}}) = 0$, *for* $j = 1, \ldots, J$;

II feasibility $h_k(\check{\mathbf{x}}) \geqslant 0$, *for* $k = 1, \ldots, K$;

non negativity $\check{\mu}_k \geqslant 0$, *for* $k = 1, \ldots, K$;

slackness $\check{\mu}_k h_k(\check{\mathbf{x}}) = 0$, *for* $k = 1, \ldots, K$.