


# Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

## Batch Means

Università degli studi di Roma Tor Vergata  
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

Copyright © Vittoria de Nitto Personè, 2021  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



1

Abbiamo visto che ci sono due tipo di analisi simulative, ovvero orizzonte finito (transiente) e orizzonte infinito (stazionaria, ipotizzando che essa ci sia).

Batch Means

- ✧ Two types of DES models: transient and steady-state
- ✧ For transient, construct interval estimates using *replication*
- ✧ For steady-state, obtain *point* estimate by simulating for a long time
- ✧ Can we obtain interval estimates for steady-state statistics?

→ use method of batch means

Prof. Vittoria de Nitto Personè

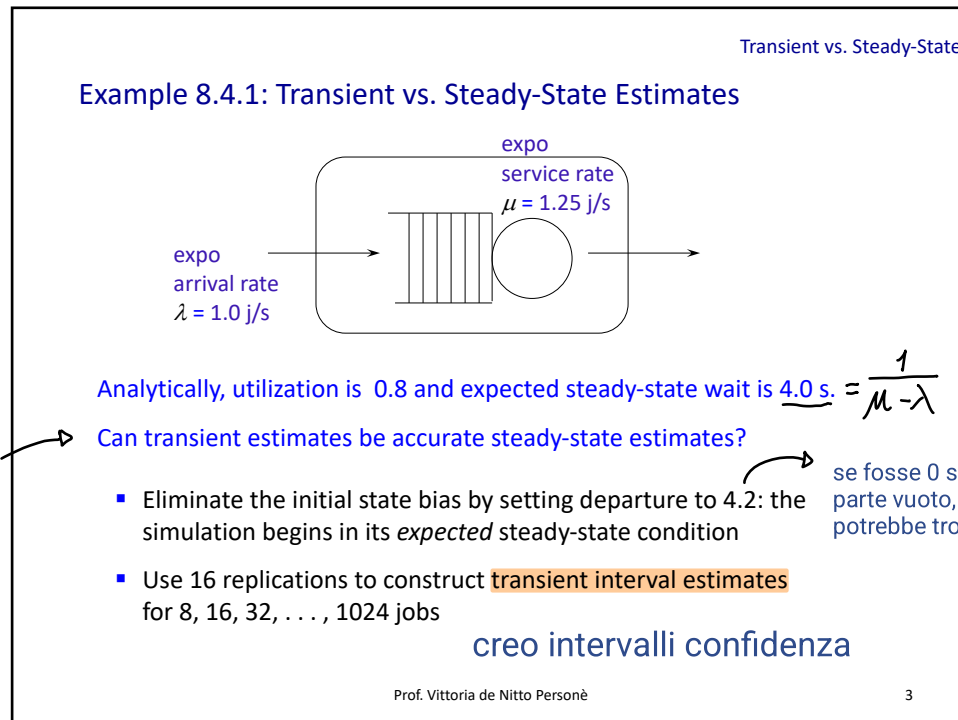
2

2

Abbiamo visto, parlando di metodi di simulazione, la stima dell'intervallo di confidenza nel caso transiente, usando delle repliche indipendenti etc...

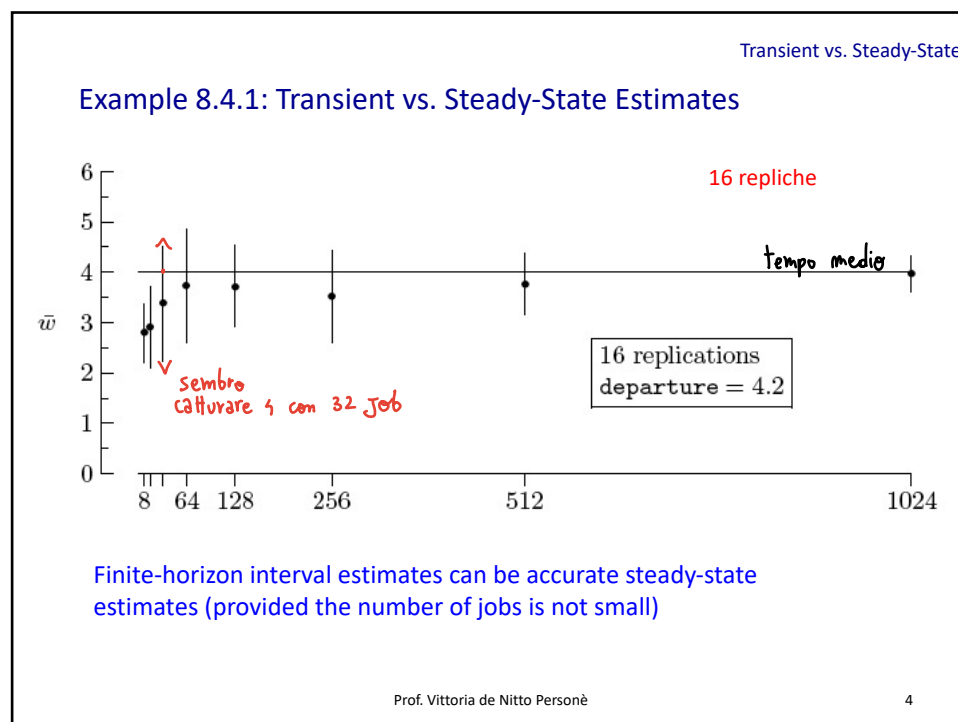
Nello stato stazionario simulo un tempo potenzialmente infinito PER QUEL SISTEMA, calcolo media campionaria finale di una statistica, ottengo un PUNTO DI STIMA, che però ci dice poco, e quindi vogliamo un vero e proprio intervallo di confidenza anche qui! Useremo metodo BATCH MEANS

stime transienti accurate per stato stazionario?

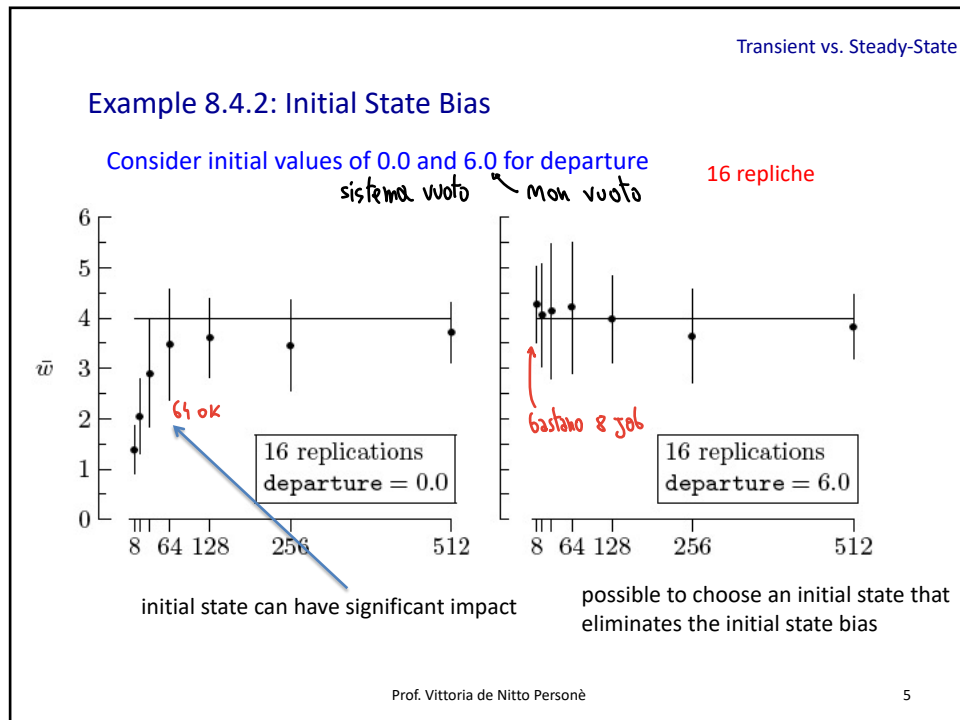


3

mi metto in condizione che il primo job che arriva sperimenta tempo risposta  $4 = 3.2 + 0.8$ , dove  $3.2 = 4.2 - 1$  (quando termina il primo job - quando arriva, infatti il primo job arriva al secondo '1', e parte al secondo '4.2', ovvero tempo attesa 3.2), mentre 0.8 è tempo di servizio (inverso di 1.25)

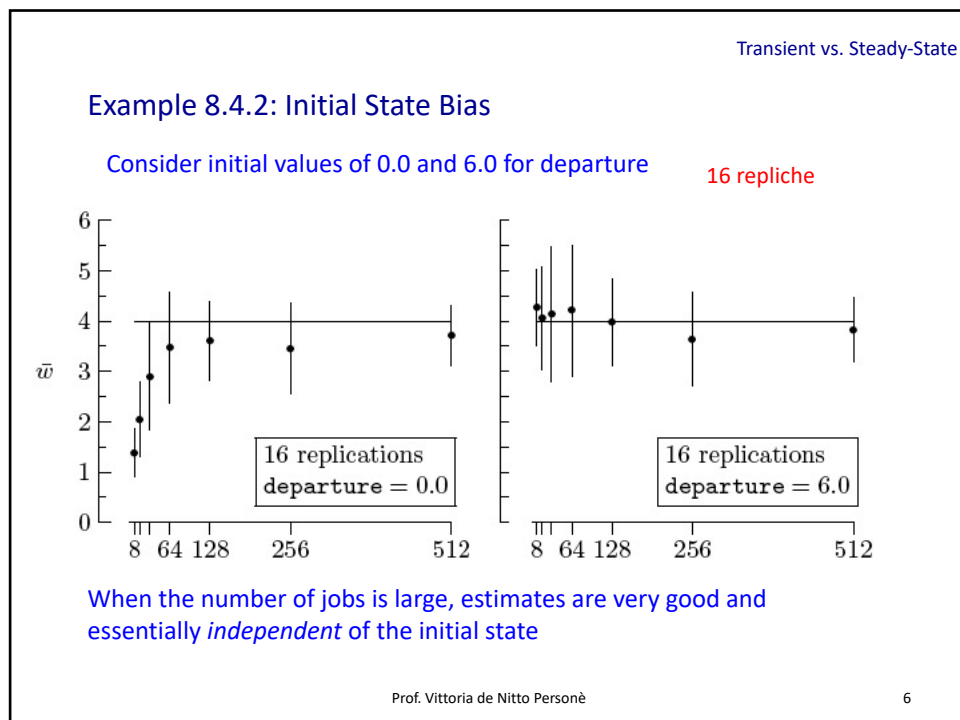


4



5

La condizione iniziale ha un impatto abbastanza importante!  
Magari scegliendo che con valori opportuni 'cancellassi' l'influenza dello stato iniziale.



6

al crescere del numero dei job le stime ovviamente migliorano!

nell'analisi stazionaria-orizzonte infinito uso metodo basato sul concetto di replica. Ogni replica dovrà essere simulazione di un tempo potenzialmente infinito.

Transient vs. Steady-State

### Interval Estimates for Steady-State

- Use replication-based transient interval estimates
- Each replication must correspond to a long simulated time period

Three issues: **3 problemi!**

- What is the initial state?
- What is the length of the simulated time?
- How many replications?

Previous example provides insight into first two issues

Prof. Vittoria de Nitto Personè

7

7

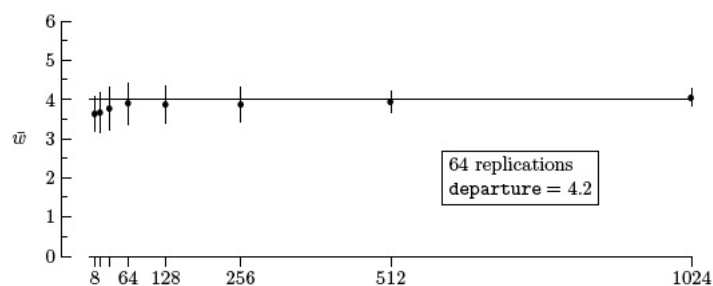
Transient vs. Steady-State

### Example 8.4.3: Increase the Number of Replications

Repeat the previous experiments using 64 replications

All other parameters remain the same

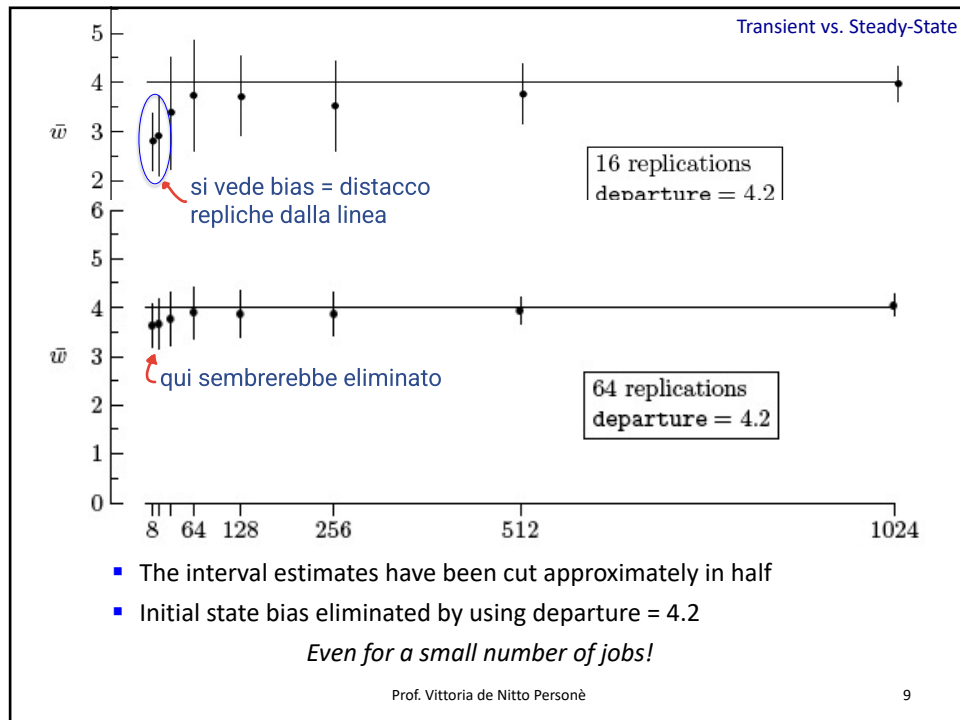
64 repliche



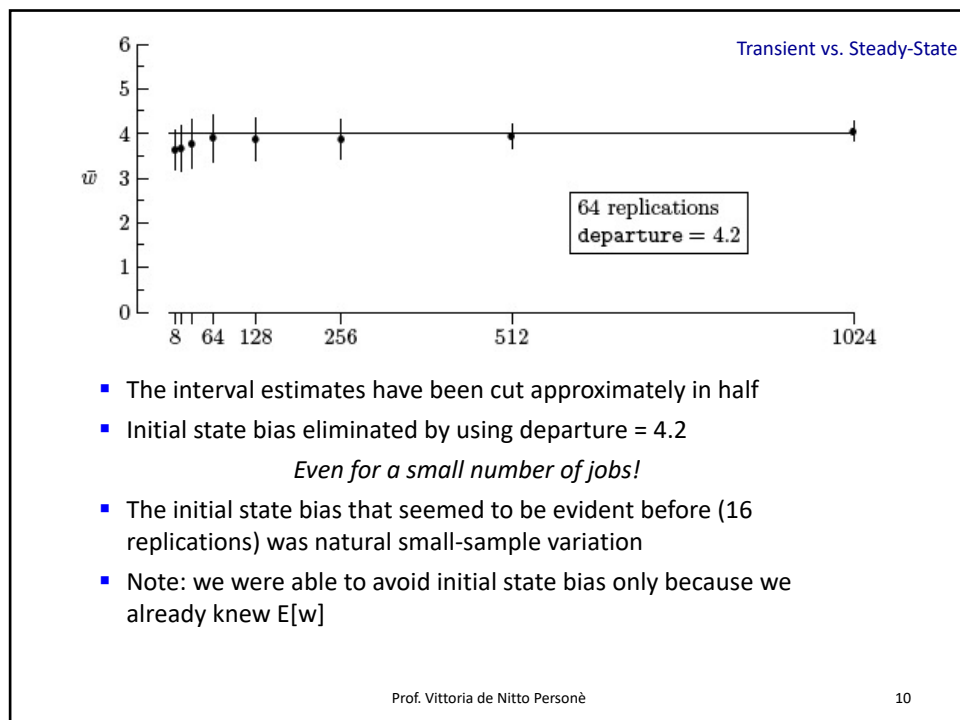
Prof. Vittoria de Nitto Personè

8

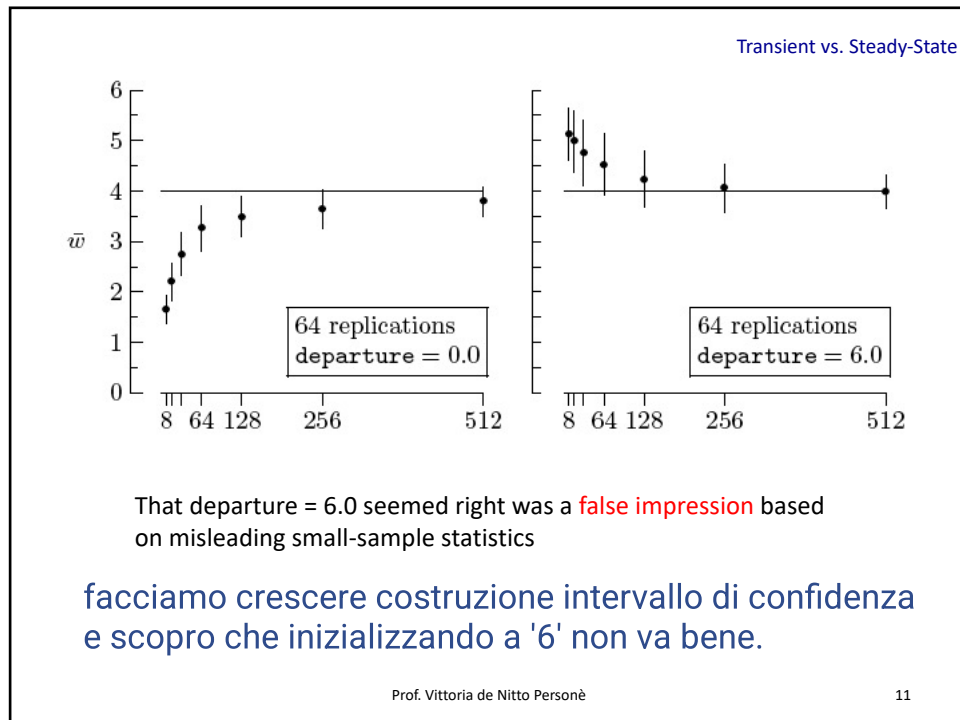
8



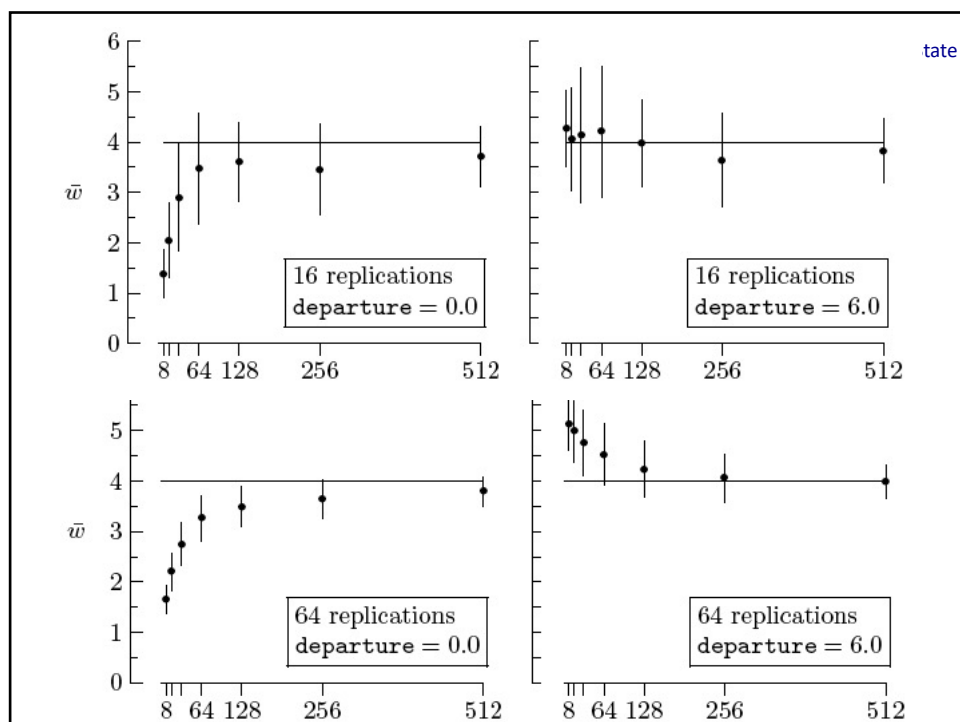
9



10



11



12

## Summary

- Want interval estimates for steady-state
- Replicated transient statistics can be used
- However, **initial bias problem**
- Need technique that avoids the initial bias problem

Prof. Vittoria de Nitto Personè

13

l'idea delle batch means è: invece di fare repliche indipendenti, faccio simulazione lunga e la vivo in batch, il bias c'è (è difficile partire da stato stabile, prima era solo un esempio, ma anche facendolo, a seconda dell'inizializzazione, il bias resta anche al crescere delle repliche!)

Batch Means

## Method of Batch Means

- Previously, each replication was initialized with same state
- Gives initial bias problem

### *Batch means:*

- Make one long run and partition into batches
- Compute an average statistic for each batch
- Construct an interval estimate using the batch means
- **Initial state bias is eliminated**
- **State at the beginning of each batch is the state at the end of previous batch**

non c'è sovrapposizione!

Prof. Vittoria de Nitto Personè

14

Obiettivo: creazione del campione nel caso orizzonte INFINITO.  
 devo creare campione lungo 'n', faccio unico lungo run, le 'x' sono indici di riferimento,  
 e ogni 'b' definisce un batch, di ciascuno di questi definisco media campionaria.

24/05/21

in questo caso solo  
 i primi batch sono  
 influenzati da stato  
 iniziale, perchè poi lo  
 stato va avanti.  
 Quando inizia nuovo  
 batch esso continua,  
 non riparte  
 dall'inizio,  
 reinizializzo solo  
 variabili per fare  
 nuovi calcoli di  
 statistiche, cioè  
 quelle per calcolare  
 $\bar{X}_j$ . E' UN ERRORE  
 PORTARTI DIETRO  
 LE VARIABILI  
 SENZA  
 INIZIALIZZARLE.

Batch Means

### Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

Consider a sequence of samples  $x_1, x_2, \dots, x_n$

1. Select a batch size  $b > 1$
2. Group the sequence into  $k$  batches

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_b}_{\text{batch 1}}, \underbrace{x_{b+1}, x_{b+2}, \dots, x_{2b}}_{\text{batch 2}}, \underbrace{x_{2b+1}, x_{2b+2}, \dots, x_{3b}}_{\text{batch 3}}, \dots$$

and for each calculate the batch mean

$$\bar{x}_j = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \bar{x}_{(j-1)b+i} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

3. Compute  $\bar{x}$  and  $s$  of batch means  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$

i batch è come fossero delle repliche (che uso nel finito)

Prof. Vittoria de Nitto Personè

15

15

Batch Means

### Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

4. Pick a level of confidence  $1 - \alpha$  (typically  $\alpha = 0.05$ )
5. Calculate the critical value  $t^* = \text{idfStudent}(k - 1, 1 - \alpha/2)$
6. Calculate the interval endpoints  $\bar{x} \pm t^* s / \sqrt{k - 1}$ 
  - $(1 - \alpha) \times 100\%$  confident that the true *unknown* steady-state mean lies in the interval
  - Provided  $b$  is large, true even if the sample is autocorrelated

$b$  è grandezza batch,  $k$  è numero di batch. esistono linee guide per scegliere buoni parametri.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

16

16

metodo per il calcolo dell'intervallo di confidenza come sempre: scelgo livello, calcolo intervallo critico, poi endpoints etc... tutto ciò è valido se è vero che gli elementi del campione non siano autocorrelati, allora la dimensione del singolo batch non può essere troppo piccola, nè troppo grande (variabilità).



'k' è numero batch, 'b' quanto sono lunghi.

Batch Means

### Effect of Batch Parameters

Provided no points are discarded:

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Choice of  $(b, k)$  has *no* impact on the *point* estimate è lo stesso!
- Only the *width* of the *interval* estimate is affected

Prof. Vittoria de Nitto Personè

17

17

Batch Means

### Example 8.4.5: Effect of $(b, k)$

Consider the queue is initially idle, use ssq2 to generate  $n = 32768$  consecutive waits

Using batch means with different  $(b, k)$ :

$(b, k)$	$(8, 4096)$	$(64, 512)$	$(512, 64)$	$(4096, 8)$
$\bar{w}$	$3.94 \pm 0.11$	$3.94 \pm 0.25$	$3.94 \pm 0.29$	$3.94 \pm 0.48$

- Note that 3.94 is independent of  $(b, k)$
- Width of the interval estimate is not

Prof. Vittoria de Nitto Personè

18

18

Un intervallo piccolo costruito male potrebbe non prendere la media teorica.

## Is the Method of Batch Means Valid?

For interval estimation, the batch means must be *iid Normal*

### 1. Are the batch means *Normal*?

*As  $b$  increases, mean of  $b$  RVs tends to Normal*

### 2. Is the data actually independent?

*Autocorrelation (Section 4.4) becomes zero if  $b$  is large*

Therefore, as  $b$  increases, method of batch means becomes increasingly more valid

per rendere campione iid 'b' deve crescere, ma non posso ridurre troppo 'k', perchè sennò intervallo confidenza aumenta

Prof. Vittoria de Nitto Personè

19

19

## Guidelines for Choosing ( $b$ , $k$ )

- Note: If  $b$  is too large,  $k$  will be small giving wide interval estimates

- Number of batches  $k$ :

- Avoid small-sample variation
- $k \geq 32$ ;  $k = 64$  is recommended

- Batch size  $b$ :

se troppo grande elimino variabilità.

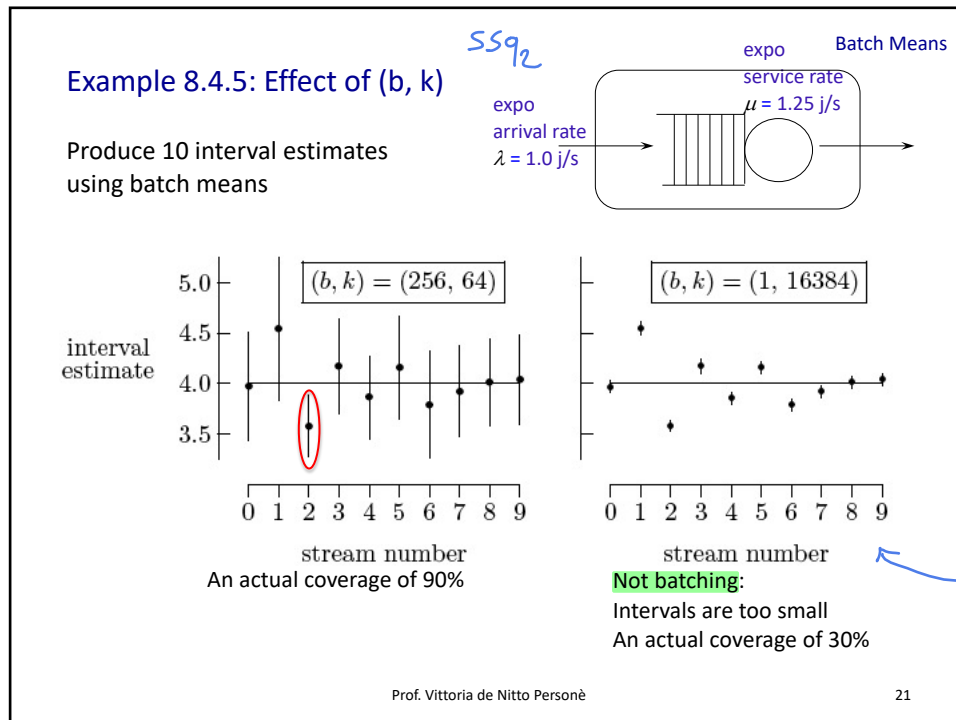
- Want to ensure (approximate) independence
- $b$  should be at least twice the autocorrelation "cut-off" lag (Section 4.4)

(See example 8.4.6)

Prof. Vittoria de Nitto Personè

20

20



21

Nel primo esempio, c'è una 'differenza' di 256 tra batch 'i' e batch 'i+1'.  
Nel secondo caso, 1 campione lungo 16384 la variabilità si annulla.

Ogni batch usa numeri diversi, non devono sovrapporsi.

Ogni batch è come fosse simulazione del sistema in un altro giorno o in altro scenario.

Lo stato iniziale del sistema non influisce l'orizzonte infinito, ma solo il finito.

Se stimo il transiente, e volessi che il sistema partisse con 23 job, OGNI replica dovrebbe partire con 23 job.

Ogni batch è come fosse una replica, che non si cura dello stato iniziale del sistema.

I generatori in entrambi i casi DEVONO ANDARE AVANTI, non li metto a caso, sennò potrei prendere un 'pezzo di ruota' già usato.