MPSMF_lez02

0:00 / 1:36:33

Cosa facciamo oggi?

Oggi andremo a vedere strumenti pratici per questo mondo. (borsaitaliana.it)
L'altra volta abbiamo parlato sostanzialmente di obbligazioni. Il tasso di interesse non rischioso si fa a partire dalle obbligazioni di stato.

Le obbligazioni sono dei pagherò. (probabilmente sono quello che l'altra volta chiamavamo "investimenti").

Le obbligazioni offerte dallo stato italiano come abbiamo visto l'altra volta sono 4:

- BOT
- BTP
- CTZ
- CCT

Caso di studio: borsaitaliana.it

E' un sito offerto dallo stato italiano. (... mmhh)
MOT sta per Mercato Obbligazionario ...

DomesticMOT

Sono obbligazioni del mercato domestico. Non ci interessano.

EuroMOT

Sono titoli del mercato Europeo trattate in Italia.

> **Esempio**:
> AT0000383864 è un titolo che promette di ripagare il 15/07/2027. Possiamo vedere anche che c'è una cedola (questa ci garantisce che ogni tot riceviamo un pagamento).

Perché comprare un titolo Europeo anziché un titolo Italiano? Potremo pensare che le probabilità di default dello stato italiano sono più alte di quelle dello stato Austriaco ad esempio. In che cosa si traduce questo rischio? Si traduce nel fatto che lo stesso titolo, se fosse riferito all'Italia, verrebbe a costare meno.

BOT (Buono Ordinario del Tesoro)

Andiamo ad analizzare la schermata:

- **Codice ISIN**: è un codice identificativo del singolo BOT;

- **Descrizione**: è la tipologia di titolo;

  > **Terminologia**:
  >
  > - **Zc** significa che non da interessi (semestrali) durante la vita. Ricorda che i bot sono titoli a breve termine;
  > - **Mg23** sta per "Maggio 23"; questo bot ripaga nel maggio 23.
  >
  > **Esempio**: Io compro 1000 di questi BOT. A maggio 23 mi prendo 1000€. Dov'è il vantaggio? Il vantaggio è che li ho pagati 99.57€.
  > Andiamoci a calcolare il tasso di rendimento per il singolo titolo:
  > $R_{Mg23} = \frac{100-99.57}{99.57} = 0,00431857.$
  >
  > **Nota**: un investimento di questo tipo si può considerare certo (nonostante lo stato Italiano). Il che non significa che formalmente(moralmente) ha rischio 0, significa semplicemente che nel modello lo modelliamo con rischio 0. Non esiste alcun investimento realmente modellabile con rischio 0.
  >
  > **Nota**: bisogna fare attenzione però che ci rientriamo con le commissioni bancarie.

- **Acquisto** è la proposta monetaria di acquisto (questo campo in genere viene anche detto "**denaro**" oppure "**buy**");

- **Vendita** è a quanto viene venduto effettivamente (questo campo in genere viene anche detto "**lettera**" oppure "**sell**").

  > **Nota**: questi due terminologie sono **esattamente** quelle che sperimenti nel mercato Steam.
  >
  > **Esempio**:
  >
  > - Dal lato del compratore: se lui propone come prezzo il prezzo di vendita allora si prende subito il titolo;
  > - Dal lato del venditore: se lui vende al prezzo offerto dal compratore allora vende subito.

> **Osservazione**:
> Possiamo notare che man mano che prendiamo titoli con scadenze sempre più lontane, allora i loro prezzi scendono (anche significativamente). Perché questo fenomeno? Perché le probabilità che lo Stato Italiano fallisca in un arco temporale che aumenta è sempre più alta.
> **Esempio Arbitraggio**:
> Supponiamo di avere un BOT Gn23 con prezzo di vendita 95€ e un altro BOT St23 con stesso prezzo di vendita.
> In questo caso siamo in presenza di un arbitraggio, perché noi possiamo vendere allo scoperto 100 unità di BOT St23.
> Cosa significa **Vendita allo Scoperto**? Significa che io non ho questo titolo nel mio portafoglio, vado dal mio broker (che è tenuto a curare lui personalmente i miei acquisti sul mercato) e dirgli "prestami 100 unità di BOT St23" che io voglio vendere. Quindi io vendo un titolo che **non** ho. E' una caratteristica fondamentale dei Mercati Finanziari: vendere ciò che non si ha. Io quindi potrò incassare il denaro, ma poi sono obbligato a restituire il titolo che di fatto non avevo e che mi è stato prestato.
> Ritorniamo all'esempio: ho venduto 100 unità di BOT St23. Incasso 95€. Ora compro immediatamente 100 unità di BOT Gn23. Ora succede che a Gennaio 2023 lo stato italiano mi restituisce 100€. Io di questi 100€ ne do via 95€ per pagare il mio debito. Mi sono rimasti 5€!
> Ho generato 5€ dal nulla (ovvero senza alcun rischio? Perché diciamo "senza rischio"? Perché stiamo assumendo, come detto prima, che un BOT di questo tipo è sicuro).
>
> Questi meccanismi vengono "spenti" da calcolatori, il cui unico scopo è questo. Il fatto che gli arbitraggi vengono "spenti" equivale a dire che "vengono spenti tutti i meccanismi per fare soldi senza prendersi rischi".

CTZ

I CTZ sono come i BOT, ma con una scadenza più lunga. Quindi non danno cedola e durano almeno un anno.

BTP

Il BTP differisce dal BOT, poiché lui paga una cedola.

> **Esempio**:
> *Btp-1nv23 9%* è un BTP che ti ripaga il 1 novembre 2023, però in più ti paga una cedola semestrale di 4,5€. Come si calcola? 9% è sui 100€ annuali, quindi ogni 6 mesi ti vengono dati $9/2 = 4.5$. Quindi per ogni 100€ di acquisto ti vengono dati 9€ ogni anno, ma tu riceverai effettivamente ogni 6 mesi 4,5€.

> **Osservazione**:
> Il prezzo d'acquisto dei BTP è un po' più alto rispetto a quanto riceverai alla scadenza. Perché? Lo abbiamo già detto ed è ovvio: devi sommare ai 100€ che riceverai alla scadenza anche tutte le cedole.

CCT

Con i CCT abbiamo cedole variabili. Infatti possiamo visualizzare notazioni del genere "Eur6m+0,7%". La componente "0,7%" è una componente fissa, mentre la componente "Eur6m" è la componente variabile della nostra cedola.

Curva dei tassi

Si prendono tutti i prodotti disponibili sul mercato e per ognuno si calcola il tasso. Il grafico dell'insieme di questi tassi è detta **Curva dei tassi**.

> **Nota**:
> I modelli che utilizziamo NON fotograferanno mai la realtà, perché altrimenti dovrebbe essere molto più complessi.

LEZIONE MERCATI FINANZIARI 17/03/2023
Oggi iniziamo a vedere un po' di serie storiche, cercando di legarle anche ai mercati finanziari.
R markdown consente di passare da file per R a file html. Visto un file html "essentials of time series analysis..." caricato su Teams.
Nell'html, troviamo "Forecasting: Principles and Practice", che è un valido aiuto (un pò troppo essenziale a detta del prof) per un primo approccio.
È presente seconda e terza edizione, ma nella terza il linguaggio R è più avanzato.

min 7:22 - cosa è una serie storica?

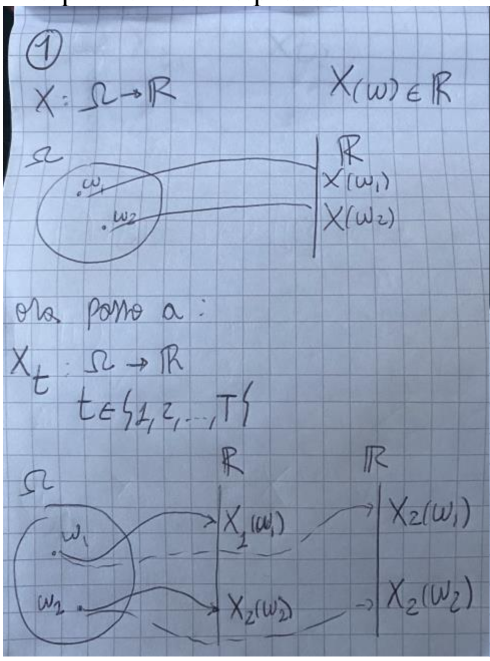
Una successione indicizzata temporalmente di vettori nello spazio reale N-dimensionale.
Perchè vettori? Perchè nella serie storica cerco di condensare un certo numero di informazioni, come ad esempio dati atmosferici.
Prendo un punto della città di Roma, misuro temperatura, pressione, umidità, e li condenso in un vettore. Faccio tali misure oggi, domani, dopodomani etc
ovvero una successione di vettori. Per pura comodità si prendono indici temporali equispaziali (ovvero ogni secondo, ogni ora, ogni 6 mesi etc... tutti uguali).
Ciò consente di analizzare le stagionalità della serie storica.
In CPS abbiamo analizzato dati provenienti da collezioni in cui il tempo era irrilevante (come prendere altezza e peso delle persone).
Nelle serie storiche l'ordine temporale è essenziale, e se ci accorgiamo che tale ordine non conta, abbiamo particolarissime serie storiche dette "white-noise", che sono mattoni fondamentali della modellazione. Una serie storica consiste nel prendere la nostra serie di dati, cercare di creare modello che in ultima analisi dipende da una successione temporale in cui la successione temporale non ha alcun ruolo. I modelli che vedremo dipenderanno da serie storica che non è dipendente dal tempo, essa sarà la base di qualunque serie storica.
Partiremo quindi da "Let (x(t))t a T = x be an N-variate real time-series (vedi file html).
min 15:48 - Grafico serie storica
Un grafico di una serie storica è una "linea" del piano tempo-spazio, dove il tempo scorre sulle ascisse, e il dato sull'ordinata, anche se parlando di vettori non è proprio correttissimo parlare di ascisse ed ordinata, ma comunque noi le scomponiamo e quindi possiamo vederrle in questo modo.

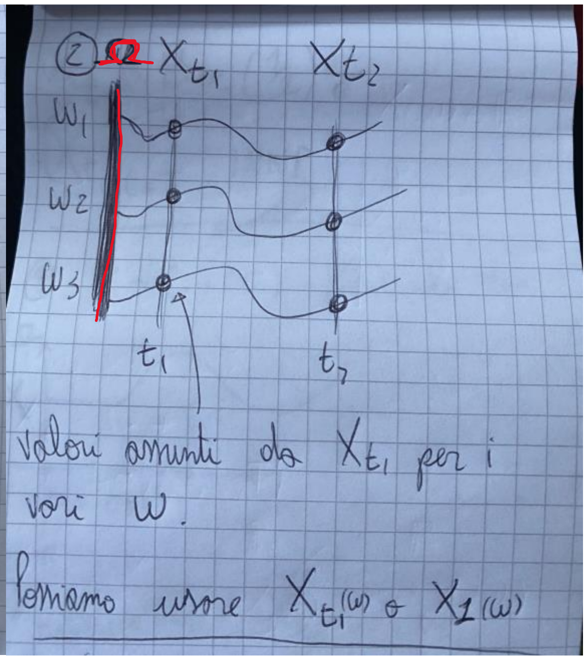
Esempio 1.1 - serie bernoulli standard
lancio moneta, registro esito (testa = 1, croce = 0) e continuo a fare questa successione di lanci.
L'indice temporale è l'ordine del lancio (possiamo pensare di lanciare ogni minuto, ogni due etc...).
Posso vederlo come serie storica. Il fatto che il tempo sia irrilevante sembra banale, ma proprio per questo tale serie è importante, ed è fondamentale per creare altre serie storiche. E' un white-noise?
NO, perchè i white noise hanno media nulla, ma a parte questo dettaglio lo sarebbe.

min 19:55 - il prof ci fa vedere lo snippet di codice di bernoulli, che inizia con "lenght <- 150".
Viene fatto anche scatter plot, e prodotti i risultati (grafici rosso verde blu). Dipendono da tre 'semi' diversi. La struttura è molto simile, ciò è un indizio che il tempo non giochi un ruolo. Non riesco, dato il grafico, a capire quale seme ho usato, a prima vista i grafici sembrano simili, anche se individualmente sono tutti diversi. Questo è un primo esempio per introdurre i processi stocastici.

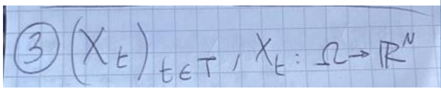
min 23:23 - vedi foglio 1
Attenzione: parto sempre da Omega e vado in R quando t = 1, parto da Omega e vado in un 'altro' R quando t = 2, ma NON PASSO da R per t = 1 all' 'altro' R quando t = 2.
SI parte SEMPRE da Omega, e si cade in un R per un certo t.
vedi foglio 2

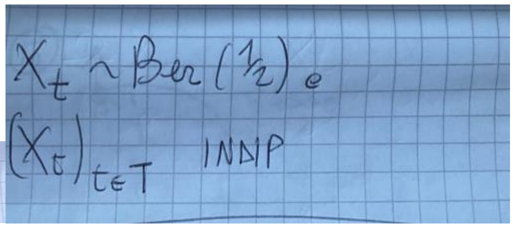
Ciò che si vedono, sono le traiettorie di un processo stocastico, le successioni di v.a. sono interpretabili come processi stocastici.





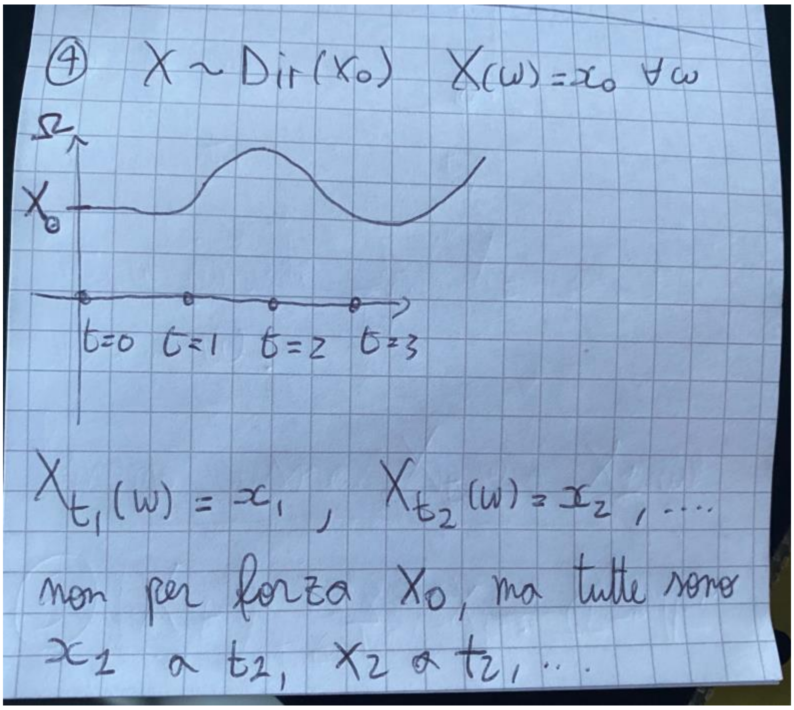
min 32:45 - ritorniamo ai grafici
Nei tre grafici ho tre traiettorie dello stesso processo stocastico del lancio della moneta. Posso scegliere quantità infinita di semi, per ciascun seme ci sarà una traiettoria. Lo spazio di probabilità è lo spazio dei semi, la scelta del punto campionario è la scelta del seme. Perchè processo stocastico è lo stesso? perchè tutte queste v.a. le vediamo come successioni di v.a. (foglio 3). Ciascuna X(t) è Ber(1/2) e la successione è indipendente.
Sarebbe un white-noise "FORTE" solo se avesse anche la media = 0. Potrei togliere l'eccesso e riportarmi a un caso con media 0.



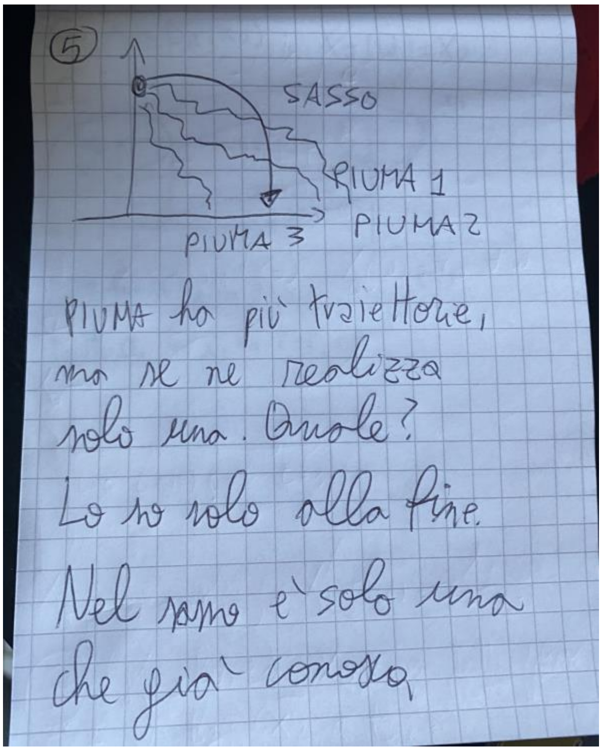


(entrambi sono foglio 3)

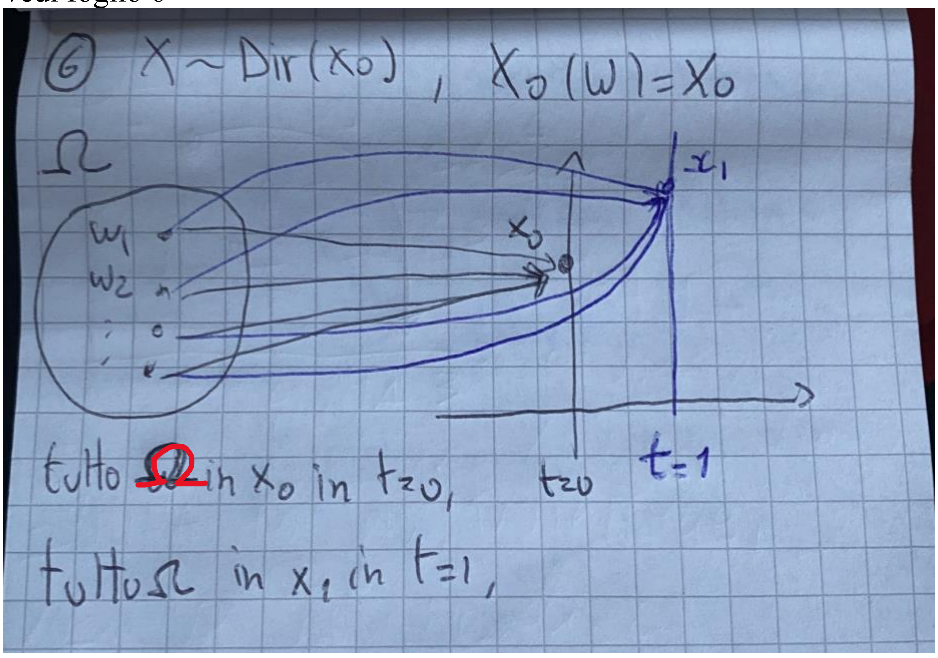
min 39:51
Abbiamo visto a CPS che esiste la Dirac che è ancora più semplice. Che caratteristiche aveva? Come rappresento processo stocastico di Dirac? foglio 4
La caratteristica fondamentale è che nel processo stocastico di Dirac ho sempre un' UNICA TRAIETTORIA, un'unica linea. la costanza è rispetto a 'w' (omega piccolo), ovviamente può cambiare rispetto a t1, t2, etc ma per tutti gli w a t1 sarà stesso valore, per tutti gli w a t2 sarà un altro valore (non per forza saranno uguali i valori assunti a t1 e t2). Nei processi stocastici non di Dirac, come visto prima, non ho una sola linea, bensì più linee. Quante linee? quanti sono gli 'w' (omega piccolo) che prendo.



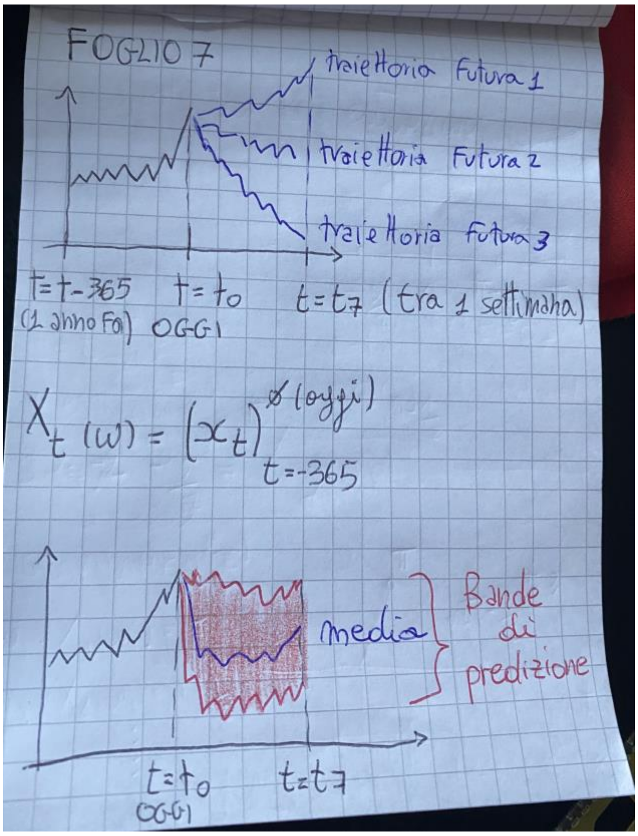
min 45:45
parallelismo con lancio di un grave, ovvero la parabola capovolta. Esso ha formula x(t) = x0 - 1/2 g*t^2.
E' ottima approssimazione, istante per istante posso verificare la posizione. E' un processo deterministico. E' un processo di Dirac!
Al variare di t cambiano, ma al variare di omega sono sempre le stesse.
Se faccio cadere un oggetto più leggero, la traiettoria cambia (la "piuma" un pò volteggia, il sasso no). Da cosa dipende? dall'attrito dell'aria. Nel sasso è trascurabile poichè ha massa concentrata in un piccolo volume, nella piuma no. foglio 5
Il processo stocastico è influenzato da effetti esterni, la cui traiettoria presa può essere analizzata solo alla fine.



min 51:54
ATTENZIONE: 0 e 1 nella bernulliana sono GLI STATI, le realizzazioni della V.A, non gli omega piccoli. Gli omega sono i 'semi' che fissiamo.
w1 = setseed(12345) allora X1(w1) = 0 or 1
fissato questo seed 12345, prenderà sempre stesso valore in X1(w1) (ad esempio 0, ma prenderà sempre 0), stesso valore in X2(w1) (se prende 1, prenderà sempre 1 per quel determinato seme). Il seme non lo cambio.
Nei grafici dell'html, il singolo grafico è una singola realizzazione di un singolo seme, che assume stati 0 e 1.
vedi foglio 6



min 1:00:00 - esempio mercati finanziari - foglio 7 - prezzo petrolio



il prezzo tra una settimana non posso prevederlo in anticipo. Se Putin lancia una bomba, o se Biden affonda metà flotta russa, ciò influenzano il prezzo del petrolio.
La traiettoria FUTURA NON ESISTE, esistono tante traiettorie future che dipendono dall'esito di eventi aleatori che NESSUNO CONOSCE.
Il futuro di una serie storica, non devo pensare a una traiettoria ben definita nel futuro. Ne posso prevedere diverse.
Se noi siamo bravi a a scrivere il modello che rappresenta la serie storica nel passato, ciò ci guida nella scelta del processo stocastico che ci guida.
Cioè se scelgo bene il processo posso prevedere media che rappresenta l'evoluzione MEDIA del processo (stima puntuale della traiettoria futura), oltre a traiettorie che con una certa confidenza ci diranno dove andrà a finire il prezzo del petrolio. (bande di predizione).
Nei mercati finanziari c'è una tendenza a "influenzare il fenomeno", che non c'è nella fisica. Nella fisica cerco di non interagire nell'esperimento, nei mercati cerco di influenzarlo per averne un ritorno personale. Guardo al futuro del petrolio per trarne un vantaggio. Ciò genera fenomeni particolari che hanno portato a tecniche per gestire questo tipo di fenomeni. Faremo analisi di tipo generali, come analisi del meteo etc... per poi introdurci nei mercati finanziari.

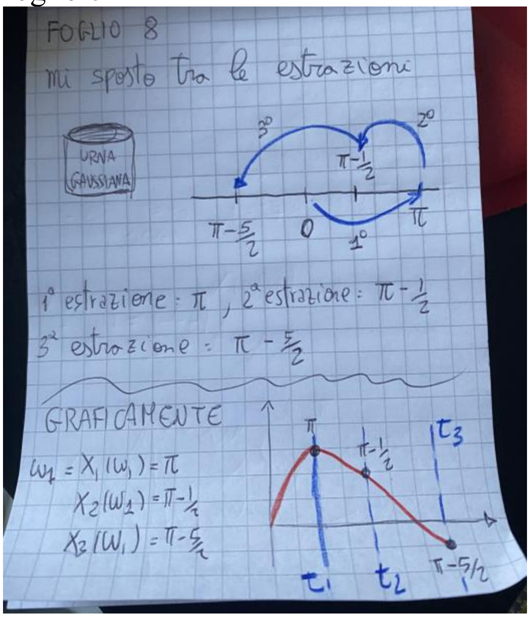
min 1:12:15 - ritorniamo alle note - fenomeno del conteggio (example 1.2)
mi metto a sommare tutti i valori ottenuti dalla serie storica. Nel caso bernoulli farò somma dei valori usciti per ogni tempo. Cioè, dato y(t) sommerò gli esiti con tempi da 0 a t. Ciò ci introduce al random walk, che nasce da un processo che non ha media nulla, e quindi ha una deriva detta anche drift, non ha trend deterministico.
In R c'è comando 'cumsum', successivamente vediamo un grafico con tre traiettorie (grafico prima di example 1.3), che evidenzia un trend/andamento molto particolare: non è deterministico, bensì stocastico. E' una deriva "casuale", perchè le v.a. che sommo non hanno media 0. E' la deriva media di questo processo.

min 1:17 - prendiamo rademacher, che hanno media 0.

in termini di conteggio le cose cambiano radicalmente, infatti avendo media nulla, iniziano a diffondersi nello spazio senza direzione precisa (traiettoria rossa cresce, verde decresce). La varianza aumenta, ma mediamente resta costante nello spazio. Questo è primo processo stocastico di una certa importanza, in quanto è un RANDOM WALK A MEDIA NULLA.

Visto velocemente grafico prima dell'esempio 1.7, sostanzialmente cambia la v.a., infatti dopo ci fa vedere un esempio con la Poisson, in cui non c'è un upper bound, potrebbe venire anche un milione (ma con probabilità piccolissima), quindi vedremo sempre valori in una certa fascia. E' come dire: probabilità che mi arrivino 1 milione di messaggi è molto piccola, ma non è 0.
Visto velocemente anche le gaussiane standard al volo. Simili alle rademacher (discretizzazione forte delle gaussiane std)

min 1:23 - funzionamento random walk gaussiano
foglio 8



il grafico dipende da w1. Se aggiungessi w2, avrei un'altra traiettoria (quindi due traiettorie che viaggiano lungo il grafico, una per w1 e una per w2). Se uso solo w1, ho una sola traiettoria, che assume punti X1(w1) = pigreco, X2(w1 = pigreco - 1/2 etc
FINE.

MPSMF_lez08

Cosa facciamo oggi?

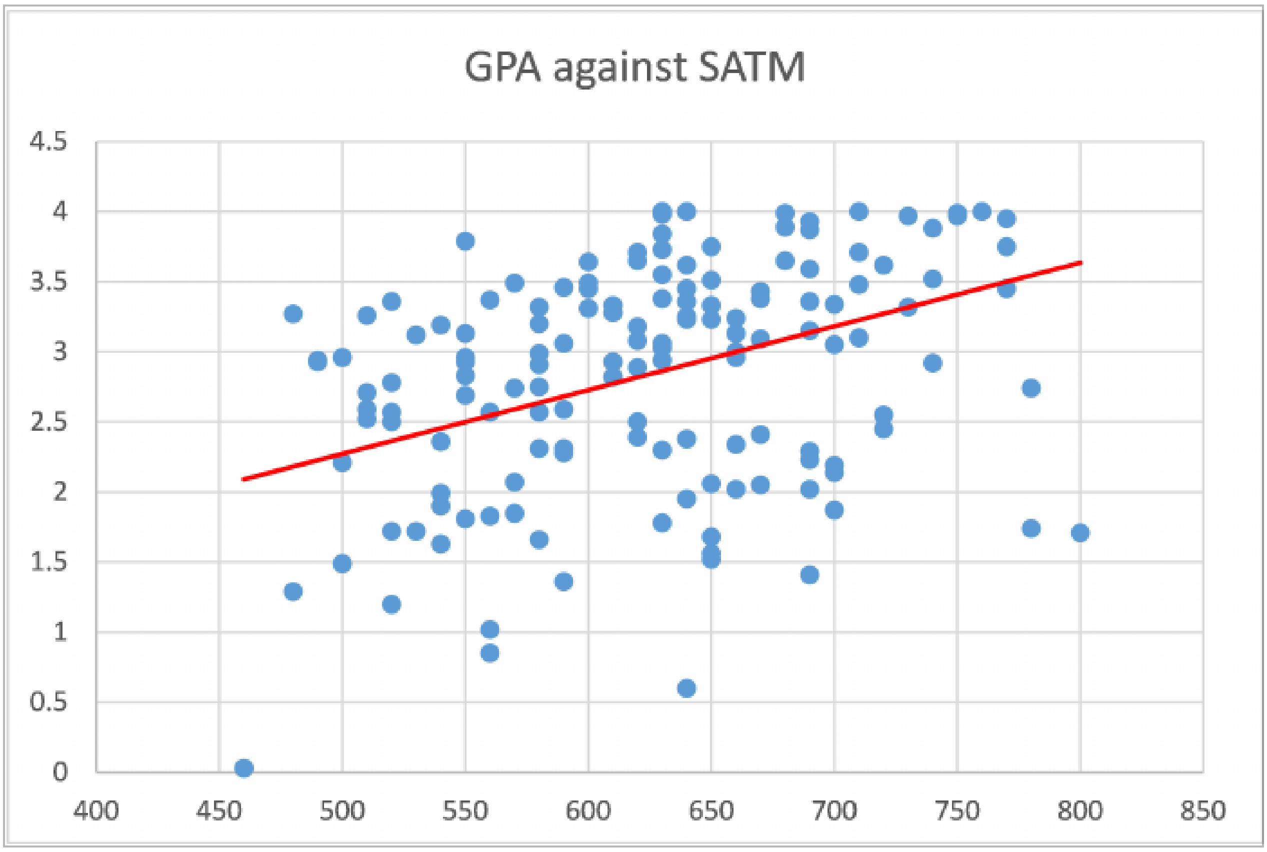
Discussione note sulla regressione lineare:

Sostanzialmente con la regressione vogliamo banalmente cercare di approssimare una v.a
La **speranza condizionata** è la funzione di regressione per eccellenza.
Nella realtà però trovare la speranza condizionata è un qualcosa di complesso, quindi noi in pratica procederemo con un *procedimento a priori*.
Ovvero noi diremo *a priori* che l'approssimatore è una retta, ad esempio, e quindi andiamo a cercare tra tutte le rette la migliore.
Nella maggior parte dei casi ci dovremo "accontentare", ma nel caso in cui le v.a. solo delle v.a. gaussiane e disgiunte allora l'approssimazione mediante una retta è anche la migliore.
Chiaramente bisogna sempre fare attenzione all'**overfitting**.

Per certe realtà che si verificano nei Mercati Finanziari ad esempio ci conviene fissare come famiglia, quella delle funzioni esponenziali.

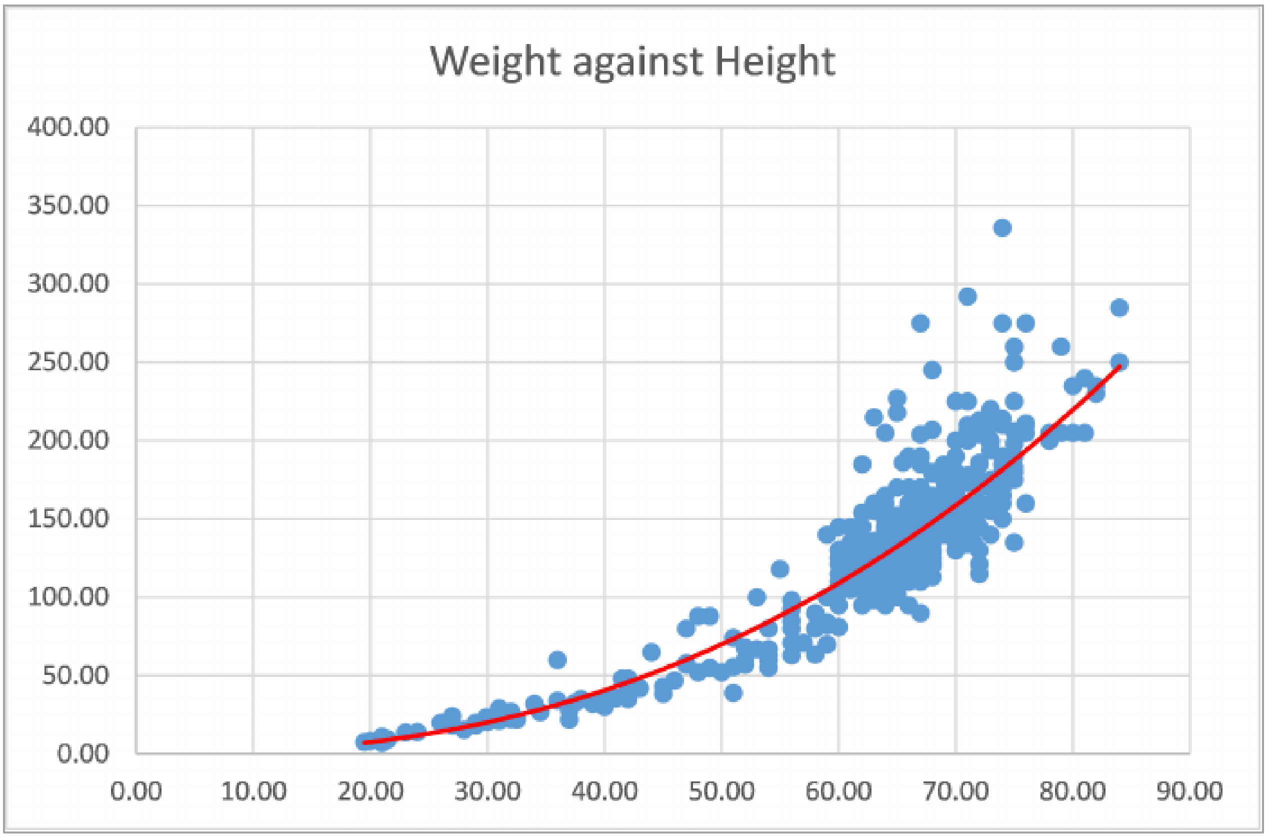
> **Esempio**: la legge di Hooke ci dice che:
>
> $$L = L_0 + KF$$
>
> Quindi ci dice qual'è il comportamento di una molla ideale.
> Possiamo quindi prendere una legge che prevede anche l'aggiunta di un rumore:
>
> $$L = L_0 + KF + U$$
>
> dove U modella il rumore.
>
> **Esempio**: due statistici si sono posti il seguente problema: "le performance di studenti universitari dato la loro valutazione in matematica alle superiori".
> Quello che si sono accorti è che la retta di regressioni di questo dataset era una retta con coefficiente angolare positivo. Quindi hanno potuto affermare che c'era una sorta di correlazione. Chiaramente non conosciamo la legge teorica, stiamo

semplicemente usando una legge empirica.

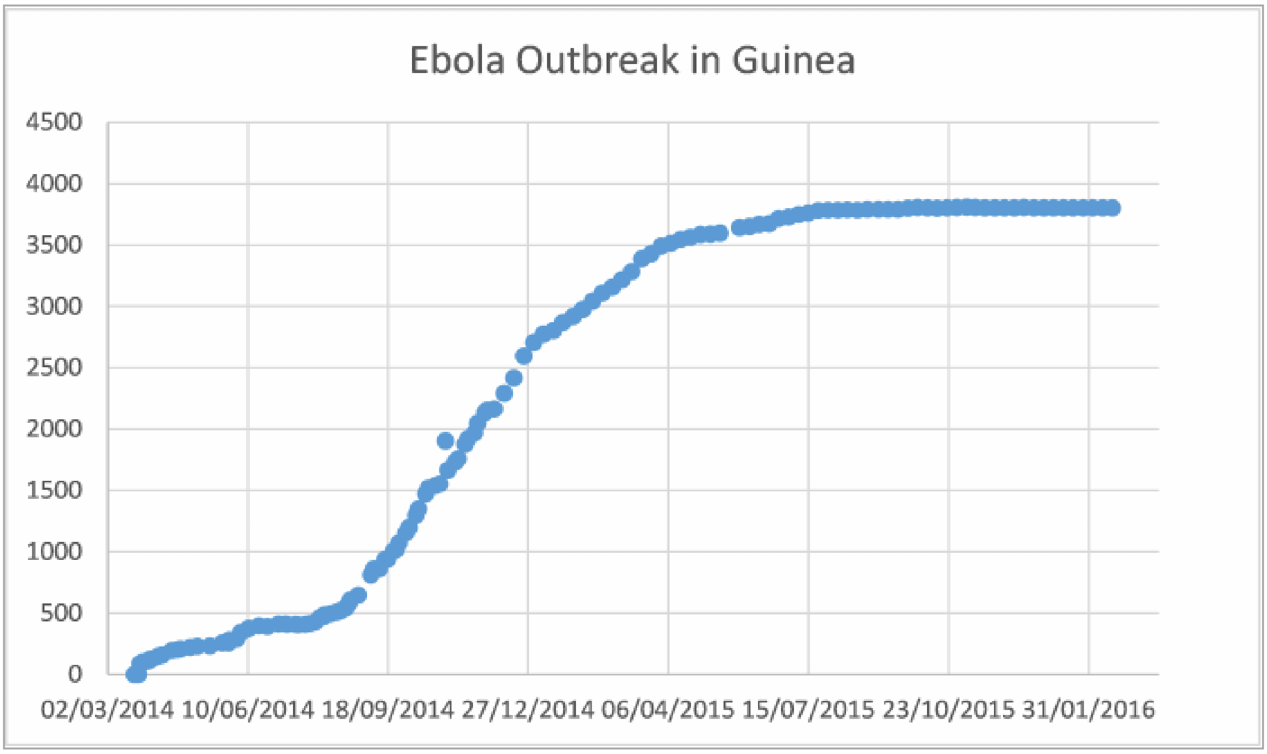


Esempio: un professore dell'Università dello Utah ha fatto il seguente esperimento: "chiedere a tutti gli studenti di portare una serie di coppie peso e altezza". Quello che ha dimostrato è che la "legge del BMI" è in prima approssimazione corretta. Quello che si nota osservando il grafico sotto (asse x altezza, asse y peso) però è che abbiamo una variabilità minima per valori di altezza bassi (a sinistra) e una variabilità via via crescente al crescere delle altezze. Questo fenomeno si chiama

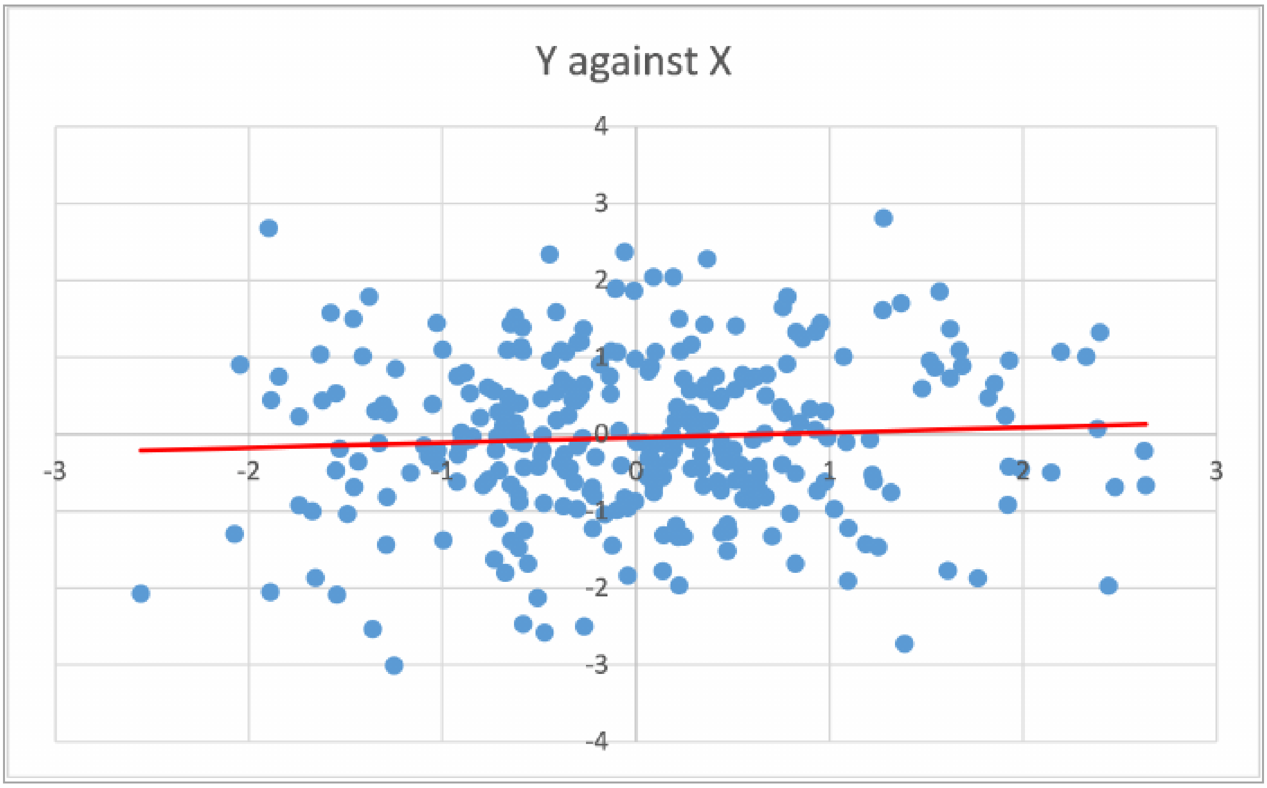
eteroschelasticità.



Esempio: una cosa interessante che ha trovato Monte riguardo la regressione logistica è un suo collegamento con l'Ebola.
Tracciando i grafici dell'epidemia produce delle sigmoidi molto evidenti:



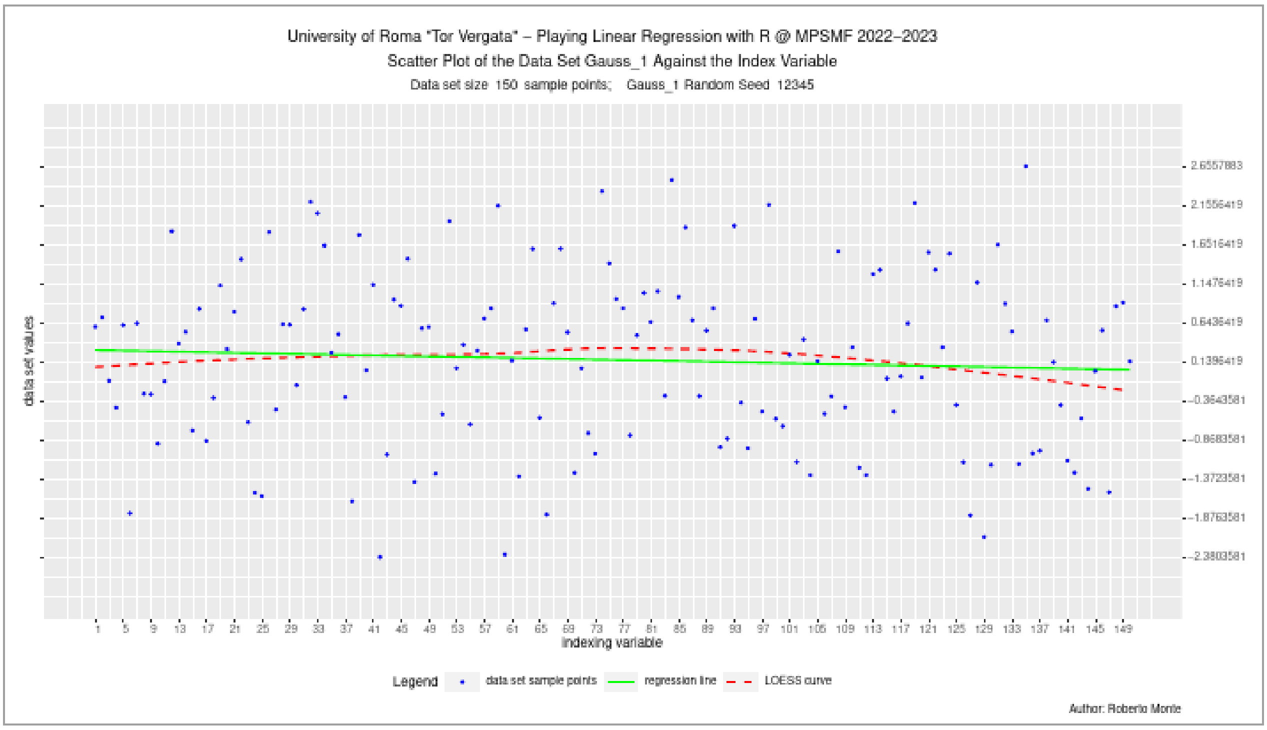
La derivata di questa curva è un qualcosa di molto simile ad una curva a campana di Gauss.
La curva dell'espansione del Covid-19, nelle sue prime fasi, è praticamente molto simile.
Sempre allegato all'esempio dell'Ebola troviamo quest'altro grafico:



Cosa ci dice questo grafico? Ci dice chiaramente che le due variabili aleatorie Y e X non hanno alcuna correlazione.

Esempio: al minuto 54:00 circa siamo andati a osservare l'esempio 3.1.
i>Questo è un esempio sulla regressione lineare.
L'esempio viene generato un dataset Gaussiano e su questo dataset andremo a generare un'approssimatore lineare.

Questo è uno dei grafici generati:



Esempio: Biscotti Gentilini. I proprietari della ditta hanno forniti questi dati a Monte. (non sembra niente di interessante).

Quando si fa un'analisi statistica in cui si cerca di evidenziare una certa correlazione statistica, formalmente quello che si sta facendo è cercare di scrivere la relazione:

$$Y = f(X;\theta) + U,\ \theta \in R^M$$

Perché la regressione non sia cattiva, si dovranno creare certe condizioni. Queste condizioni sono:

- **Stazionarietà**: per verificarla si effettuano dei **test di stazionarietà** (esempi di questi test possono essere: test di Dickey Fuller (ADF), test KPSS)).
  Il test di ADF prende come ipotesi nulla H_0 la seguente: "il processo che ha generato i dati contiene una componente di Random-Walk (detto anche: trend stocastico o Unit Root)".
  Le ipotesi alternative invece sono in genere:

  - $H_1^{(I)}$: "processo stazionario con intercetta senza trend";

  - $H_1^{(II)}$: "...";

  - $H_1^{(III)}$: "...".
    Con ADF vogliamo il rigetto dell'ipotesi nulla.

    KPSS invece ha come H_0: "il processo che ha generato i dati è stazionario". Quindi quando io ho il rigetto dell'ipotesi nulla significa che il processo non è stazionario.

    Se applicando i due test ci danno un esito contraddittorio (ovvero entrambi Rigettano o entrambi non rigettano). In questo caso non possiamo dire nulla. Nel caso in cui ADF Rigetta e KPSS non rigetta allora possiamo dire che il processo è stazionario. Il viceversa invece ci permette di stabilire che il processo non è stazionario.

- **Autocorrelazione (correlazione seriale)**: i residui non sono generati in maniera indipendente, ma la generazione dell'uno influenza la generazione di un altro. Per fare emergere questa autocorrelazione si possono usare due tecniche:
  - **Metodo grafico (autocorrelogramma)**: si va a calcolare la correlazione ...;
  - **Test** $L_{jung} - Box$: a differenza di quello di prima che è un metodo grafico, questo è un metodo computazionale.
- **Homoschedasticità**: si accerta che non si verifichino situazioni con dati fortemente variabili. I test per verificare questa proprietà è:
  - **Breish-Pagah**:
  - **White**.
- **Gaussianità**: alla fine andremo a verificare questa proprietà. Quindi andremo a vedere se i residui sono Gaussianamente distribuiti. Nelle applicazioni, nella

maggior parte dei casi reali, non abbiamo che questa relazione sia valida (quindi magari i residui sono distribuiti come una Student, come una Logistica, ...). Uno cosa può fare in questi casi? L'unico problema di questa casistica è che gli intervalli di confidenza cambiano forma; tutto qui. Anche qui ci sono varie tecniche.

MPSMF_lez11

0:00 / 1:39:54

0:00 / 1:08

Cosa facciamo oggi?

Oggi vogliamo vedere: "la differenza/relazione tra opzioni e futures".

Opzioni VS Futures

Entrambi hanno una **data di maturità**.
Quindi sono entrambi contratti che si siglano al tempo $T = 0$ e che hanno una vita fino a T.
Al tempo T noi sappiamo che l'opzione paga $C_T = (S_T - K)^+$.
Il Futures invece, al tempo T, paga: $F_T = S_T - K$.

Quindi, nel caso del Futures, se S_T supera K allora ho un guadagno altrimenti ho una perdita.
Se siglo un contratto Futures quindi al tempo T posso o guadagnare o non guadagnare, mentre l'opzione al tempo T ti permette solo di guadagnare o rimanere "in pari".

Con un'opzione io però sto comprando un diritto

Io, però, entro in un contratto **Futures** senza nessun esborso di denaro a differenza di quanto avviene con una **Opzione**.

Quanto è il prezzo che dobbiamo calcolare per un'**opzione** al tempo 0?
Lo sappiamo (!):

$$C_0 = \frac{E[C_T]}{1+r}$$

Per ogni valore di "strike" avrò un prezzo iniziale differente nell'opzione (quindi C_0 è funzione di K, per cui abbiamo $C_0(K)$).

Al tempo 0, se io entro in un contratto **futures**, io so qual'è il K che io devo sottrarre al tempo T e inoltre questo K è unico e determinato dal mercato (**legge domanda e offerta**).
Quindi il prezzo de **futures** è K.

Che relazione c'è tra i due?

Supponiamo che il mercato è completo, allora il **futures** è un **derivato**, per cui:

$$F_0 = \frac{\tilde{E}[F_T]]}{1 + r_f}$$

Deve valere inoltre questa relazione:

$$0 = \frac{\tilde{E}[F_T]}{1 + r_f} = \frac{\tilde{E}[S_T - K]}{1 + r_f} = \frac{\tilde{E}[S_T] - K}{1 + r_f}$$

Abbiamo scoperto che il famoso K, determinato dal mercato, è tale per cui:

$$K = \tilde{E}[S_T] = (1 + r_f)S_0$$

Quindi il prezzo che sottoscriviamo oggi per entrare nel contratto **futures** è legato al tasso di rendimento non rischioso mediante l'ultima relazione scritta.

Tutto ciò prende il nome di "**Futures-Spot Parity**".

Quindi io quando sottoscrivo un **futures** non pago niente, ma voglio sapere

I futures sono uno strumento *fortemente speculativo*: "entro a costo zero, ma posso subire delle perdite enormi (come anche dei guadagni)".

Questi si dicono "contratti regolamentati dal mercato".
Esiste un ente specifico: "casta di compensazione", che si impegna a far si che questi contratti vengano chiusi. Quando uno vuole comprare un futures apre un "conto titoli".
Se la banca ti autorizza ad operare sui futures, allora "puoi andare sul mercato" e comprare un futures.
Di fatto questo costa 0, ma la banca immediatamente ti congela dei soldi sul tuo conto per garanzia.
La banca ogni giorno, toglie o mette nel conto, la cifra $K - s_T$, in modo tale che questo contratto vada via via ad aggiornarsi.
Se $S_T > K$ la banca mette soldi nel conto, altrimenti li toglie.
Se S_T comincia a scendere vertiginosamente, la banca ti permette anche di interrompere.
Capita che quando uno subisce perdite invece di uscire dal contratto rimane "sindrome dal giocatore di Poker".
Un piccolo investitore non dovrebbe (mai) entrare nel mercato dei Futures. Diversa storia è per le Options.

Le Opzioni sono "come comprarsi un'assicurazione".

> **Nota**: Non puoi comprare una quota azionaria dello S&P 500.

> Se uno volesse lanciarsi nell'acquisto di azioni, è sconsigliato fortissimamente di lanciarsi sulla singola compagnia, ma conviene comprarsi una quota di un fondo passivo.
>
> I fondi attivi hanno come scopo quello di "battere" un certo obiettivo.
>
> I fondi passivi sono più facilmente liquidabili e si pongono come obiettivo quello di "replicare un certo insieme di azioni".
> Comprare una quota di un fondo passivo è come comprare un portafoglio efficiente di titoli sul mercato.
> Rispetto al rendimento medio del mercato è il profilo di minimo rischio.

> **Nota**:
> Esistono delle futures sulle "comodity" (ovvero su dei beni materiali).

18/04/23

PORTAFOGLI DI TITOLI - MARKOWITZ

Nel CRR il mercato è costituito da BOND e STOCK:
- il BOND ha evoluzione al tempo T: $B_T = (1+r_f) B_0$
- lo STOCK ha evoluzione al tempo T: $\begin{cases} S_T = uS_0 \\ S_T = dS_0 \end{cases}$, V.A. Binomiale

Nel portafoglio di MARKOWITZ abbiamo titoli $S_0, S_1, \dots, S_M$.
- S_0 è un BOND (qui per convenzione è S_0, non B_0) e, indicando con r_f il tasso di rendimento NON rischioso alla maturità dell'investimento, abbiamo $S_0(T) = (1+r_f) \cdot S_0(0)$
- Gli altri titoli $S_1, \dots, S_M$ sono titoli RISCHIOSI, ovvero sappiamo $S_m(0)$ ma non so $S_m(T)$, la quale è una V.A. di cui non sappiamo la distribuzione. Nell'adattamento a dati reali assumiamo finito il momento di ordine 2, e distribuzione gaussiana.

Assumiamo di avere una quantità $W>0$, partendo da tempo $\emptyset$.
Voglio trovare il modo migliore per investire, per avere un portafoglio OTTIMALE o OTTIMO ($\nexists$ di meglio).
Possiamo costruire Portafoglio di minimo rischio assoluto o portafoglio di minimo rischio per rendimento assegnato MIN 9

Inizio la costruzione, voglio un portafoglio di titoli, cioè una M-upla $\pi(0) = (Y_1(0), \dots, Y_M(0)) \in \mathbb{R}^M$, dove il singolo $Y_m(0)$ è la quantità del titolo S_M nel portafoglio, cioè il numero di azioni che ho di un certo titolo

Posso considerare anche frazioni di azioni (π, $\sqrt{2}$ azioni) o valori negativi ($-\sqrt{3}$ titoli). Cioè, in questo ultimo caso vendo allo scoperto. Introduciamo i concetti di:

POSIZIONE LUNGA: se acquisto un titolo, potenzialmente posso tenerlo per tempo indefinito ("a lungo").

POSIZIONE CORTA: vendo allo scoperto, quindi c'è di mezzo il broker che mi da il titolo, che io vendo ma del quale poi devo colmare lo scoperto nel minor tempo.

Una quantità $Y_m(0)$ può anche essere $\emptyset$, cioè non metto il titolo nel portafogli. MIN 18

P.41 def. 66

Valore del Portafoglio

Parliamo prima del valore del singolo titolo $W_m(Y_m, 0) = Y_m \cdot S_m(0)$ cioè la quantità di azioni comprate per il valore del titolo.

Al tempo T si avrà: $W_m(Y_m, T) = Y_m \cdot S_m(T)$, dove però ho variabili aleatorie.

Io ho influenza SOLO sulla quantità Y_m, non su S_m.

Però comprare tante azioni di un titolo non dovrebbe influenzare S_m? Sì, ma noi assumiamo di essere "poco significativi", e solo le notizie alterano S_m (es: nuovo giacimento di petrolio, ...)

Quindi S_m ha un valore NON dipendente dalle mie scelte, è una VARIABILE ESOGENA MIN 26:40

Quanto vale il portafoglio al tempo $\emptyset$? è un NUMERO REALE:

$$W(Y_1, \dots, Y_M, \emptyset) = \sum_{m=1}^{M} W_m(Y_m, \emptyset) = \sum_{m=1}^{M} Y_m \cdot S_m(0)$$

Al tempo T è una V.A REALE:

$$W(Y_1, \dots, Y_M, T) = \sum_{m=1}^{M} W_m(Y_m, T)$$

Ciò che ho al tempo $\emptyset$ è la mia ricchezza iniziale.

Poiché avevamo detto che $W>0$, e ora stiamo dicendo che $W(Y_1, \dots, Y_M, 0) = W$ allora NON POSSO AVERE che $\forall m$ ho $W_M(Y_m, 0) = \emptyset$. ($W>0$, non ≥ 0)

Rendimento del portafoglio - def 72 MIN 30

esso è la V.A. reale:

$$R_T(Y_1, \dots, Y_M, M) = W(Y_1, \dots, Y_M, T) - W(Y_1, \dots, Y_M, 0) =$$

$$\sum_{m=1}^{M} \left[W(Y_m, T) - W(Y_m, 0) \right] = \sum_{m=1}^{M} R(Y_m, T)$$

Rendimento al tempo T di tutti gli 'm', mentre rendimento al tempo $\emptyset$ sarebbe $\emptyset$ $\forall m$

Tale concetto è applicabile anche al pacchetto azionario m-esimo nel portafoglio.

OSSERVAZIONE:

Nel mio portafogli ho azioni ENI e STELLANTIS, che mi rendono 5€ e 3€. Perché il portafogli mi rende 8€?

C'è linearità, ma chi me la garantisce?

L'assenza di arbitraggio, altrimenti non avrei tale certezza!

Peso di un titolo nel portafoglio - def 7.4 - MIN 36

Prima avevamo la quantità ($n°$ azioni nel portafoglio), da non confondere col peso. Il peso è il rapporto tra il valore del singolo titolo rispetto la ricchezza iniziale totale, quindi tutto è riferito al tempo $t=0$.

$$\omega_m = \frac{W_m(Y_m, 0)}{W(Y_1, \dots, Y_M, 0)} = \frac{Y_m \cdot S_m(0)}{W} \quad \boxed{1} \quad \forall\, m = 1, \dots, M. \text{ con } W>0$$

Si ricava anche $$Y_m = \frac{\omega_m}{S_m(0)} \cdot W \quad \boxed{2} \quad \text{con } S_m(0)>0$$

C'è corrispondenza BIUNIVOCA tra $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$, inoltre entrambi i denomitarori di $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono >0.

Se c'è tale corrispondenza, perché interessarsi ai pesi invece che parlare solo di quantità?

Con i PESI, rispetto alle QUANTITÀ, riusciamo a risolvere con più facilità i problemi! Perché? MIN 42

Perché la somma di tutti i pesi è "1", delle quantità no.

$$\sum_{m=1}^{M} \omega_m = 1$$ Ci dice altro?

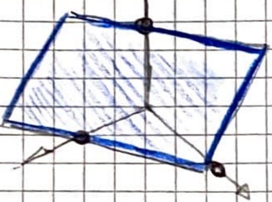
Tale "struttura" è indicativa di un IPERPIANO di $\mathbb{R}^M$.

Se ho titoli S_1, S_2 e quantità $(Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Passo ai pesi: $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ se $\omega_1 + \omega_2 = 1$, che è l'equazione di una retta.

Con 3 titoli?

$(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{R}^3$, mentre per i pesi $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, ovvero un piano passante per i versori degli assi di $\mathbb{R}^3$.



L'equazione di un iperpiano ortogonale al vettore $(V_1, \dots, V_M) \in \mathbb{R}^M$ e passante per il punto $(x_1^0, \dots, x_M^0) \in \mathbb{R}^M$ è: $\sum_{m=1}^{M} V_m (x_m - x_m^0) = 0$,

noi poi abbiamo l'equazione $\sum_{m=1}^{M} \omega_m = 1$, scrivibile anche come $\sum_{m=1}^{M} \left(\omega_m - \frac{1}{M}\right) = 0$. Ma a noi cosa serve ciò?

Insieme dei portafogli fattibili - def 77 MIN 52

$\mathbb{H} = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{m=1}^{M} \omega_m = 1 \right\}$, esso è iperpiano di $\mathbb{R}^M$ passante per i versori degli assi $(1, 0, \dots 0), \dots (0, 0, \dots, 1)$.

È anche iperpiano ortogonale al vettore $(1, \dots, 1)$ passante per $\left(\frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M}\right)$. Lo abbiamo "dimostrato" sopra!

Sto riducendo la dimensione, passo da "M" a "M-1".

Se prendo M-pla di pesi nell'iperpiano e riesco a far vedere che mi realizza portafoglio di minimo rischio, poi so le Y_m da usare partendo dai pesi. MIN 54

Torniamo al concetto di rendimento del titolo

$$R_m(T) = W_m(Y_m, T) - W_m(Y_m, 0) = Y_m \cdot (S_m(T) - S_m(0))$$

vogliamo passare al tasso di rendimento.

Il tasso di rendimento del titolo m-esimo è:

$$r_m(T) = \frac{W_m(Y_m,T) - W_m(Y_m,0)}{W_m(Y_m,0)} = \text{ se } Y_m \neq 0 \left(\begin{matrix}\text{per il}\\ \text{denominatore}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{\cancel{Y_m}\left[S_m(T) - S_m(0)\right]}{\cancel{Y_m} \cdot S_m(0)} \quad \forall m = 1, \dots, M$$

NB: per come sono state definite, le variabili $r_m(T)$ hanno momento finito di ordine 2, e assumeremo $r_1(T), \dots, r_M(T)$ congiuntamente gaussiane. Sono V.A.

Tasso interessante perché proporziona il guadagno rispetto all' investimento

Il tasso di rendimento ATTESO è: (def 81)

$$\bar{r}_m(T) = E[r_m(T)] = \frac{E[S_m(T)] - S_m(0)}{S_m(0)}$$

Il tasso di rendimento del PORTAFOGLIO al tempo $t=T$

è: $r(Y_1, \dots, Y_M, T) = \dfrac{W(Y_1, \dots, Y_M, T) - W(Y_1, \dots, Y_M, 0)}{W(Y_1, \dots, Y_M, 0)}$,

e si può dimostrare che è anche uguale alla somma pesata dei tassi di rendimento dei SINGOLI TITOLI AZIONARI:

$$r(Y_1, \dots, Y_M, T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \cdot r_m(T)$$

MIN 1:05

Vista la corrispondenza pesi - quantità, possiamo dire: $r(Y_1, \dots, Y_M, T) \equiv r(w_1, \dots, w_M, T)$. La VARIANZA chi è?

La VARIANZA del titolo m-esimo è:

$$D^2[S_m(T)] = E[S_m^2(T)] - E[S_m(T)]^2$$

, scrivibile anche come varianza del suo tasso di rendimento; $\sigma_m^2 = D^2[R_m(T)] \; \forall m$

Per il portafoglio abbiamo varianza di un vettore dei titoli, cioè andiamo a trattare una matrice così fatta:

$$Var[r(w_1, \dots, w_M, T)] = \begin{bmatrix} D^2[S_1(T)] & cov(S_1(T), S_2(T)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & D^2[S_M(T)] \end{bmatrix}$$

dove

nella formula COVARIANZA e VARIANZA del titolo, prof usa $S_m(T)$ a lezione, tasso R_m su NOTE

sulla diagonale principale abbiamo le varianze dei singoli titoli, le restanti sono covarianze.

Chiamiamo questa matrice di varianza covarianza così:

$$\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \dots & \sigma_{1,M} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \\ & \sigma_{2,M} & \dots & \sigma_M^2 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi di tipo covarianza sono: $\sigma_{l,m} = E[r_l(T) \cdot r_m(T)] - E[r_l(T)] \cdot E[r_m(T)]$

Inoltre la correlazione dei titoli azionari l-esimo ed m-esimo in base ai loro tassi è: $\rho_{l,m} = \dfrac{\sigma_{l,m}}{\sigma_l \cdot \sigma_m} \; \forall l, m$

Vogliamo calcolare: $\underbrace{\underset{1\times M}{(w_1,\dots,w_m)} \cdot \underset{M\times M}{\Sigma} \cdot \underset{M\times 1}{(w_1,\dots,w_m)^T}}_{\in \mathbb{R}}$, si scrive:

$$= \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \cdot \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{l,m=1 \\ l\neq m}}^{M} w_l \cdot w_m \cdot \sigma_{l,m}$$ (osservazione 88)

La matrice "Σ" è simmetrica, e adesso la chiamiamo "Q".

DEF 100: Q è simmetrica semidefinita positiva se:

$(w_1,\dots,w_M)\cdot Q\cdot (w_1,\dots,w_M)^T \geq 0 \quad \forall\, (w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{R}^M$.

Q è POSITIVA se $(w_1,\dots,w_M)\cdot Q\cdot (w_1,\dots,w_M)^T > 0$
$\forall\,(w_1,\dots,w_M)\in\mathbb{R}^M$ tranne $(0,0,\dots,0)$.

Arriviamo a stesse conclusioni se parliamo di AUTOVALORI, cioè semidefinita positiva se tutti autovalori ≥ 0, positiva se tutti autovalori >0.

PROP 102: Σ semidefinita positiva, Σ è definita positiva se il tasso di rendimento di NESSUN titolo è scrivibile come combinazione lineare/affine dei restanti, cioè:

$$\nexists\, m\in\{1,\dots,M\} : r_m(T) = \alpha + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq m}}^{M} \beta_l \cdot r_l(T)$$

con opportuni $\alpha, \beta_l \in \mathbb{R}$, con $l = 1,\dots M$ e $l\neq m$.

L'obiettivo è avere titoli poco correlati, scorrelati è quasi IMPOSS.

Per dimostrare la prop. 102, possiamo scrivere

$$(w_1, \dots, w_M) \cdot \Sigma \cdot (w_1, \dots, w_M)^T = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \sigma_m^2 + 2 \sum_{\substack{l,m=1 \\ l<m}}^{M} w_l w_m \sigma_{l,m}$$

$$= \dots = D^2[r(w_1, \dots, w_M, T)] \geq 0 \text{, allora}$$

Σ è semidefinita positiva. Per non avere Σ (cioè strettamente) positiva dovrei avere $Var = \emptyset$, cioè un portafogli di Dirac, cioè $\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T) = \alpha$ e scrivere $r_m(T) = \alpha + \sum_{l=1} \beta_l \cdot r_l(T)$

~ . ~ . ~ . ~

Insieme convesso e funzione convessa

Chiamiamo S il sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.
La funzione convessa più semplice è la RETTA, ma non è strettamente convessa, quella è la PARABOLA, dove la corda che unisce due punti è $\geq$ valori della funzione, cioè, nel caso m-dimensionale:

$$f\left(\alpha(x_1, \dots, x_m) + (1-\alpha)(y_1, \dots, y_m)\right) \leq \alpha \cdot f + (1-\alpha) \cdot f$$

(Per la parabola è $<$, non $\leq$)

~ . ~ . ~

Teorema per minimizzazione portafoglio

Se ho funzione $f: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ convessa, ed $\$$ è sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^M$, e il problema è trovare il MINIMO al variare di $(x_1, \dots, x_m) \in \$$ della funzione $f(x_1, \dots, x_m)$. Tale problema o non ha soluzione, o se c'è, una soluzione locale è soluzione globale.
Se strettamente convessa la soluzione esiste sempre.
(f convessa su sottoinsieme convesso) $\Rightarrow$ problema del minimo ha sempre soluzione. Come lo usiamo noi?

Se considero $(w_1, \dots, w_M) \cdot \Sigma \cdot (w_1, \dots, w_M)^T$ ha autovalori > 0 allora è strettamente convessa. Sull'iperpiano che è un convesso di $\mathbb{R}^M$ il problema ha sempre unica soluzione.

AUTOVALORI > 0 $\doteq$ titoli NON COMBINAZIONE LINEARE CON ALTRI

Se portafogli è fatto così (condizione di NON SINGOLARITÀ) allora esiste portafogli di rischio MINIMO, sotto non posso scendere. Il portafoglio di titoli diventa un titolo rischioso caratterizzato dal rischio del portafoglio di minimo rischio

MPSMF_lez13

0:00 / 1:47:28

Cosa facciamo oggi?

Dato un certo numero di titoli $S_0, S1, \ldots, S_M$ dove S_0 è un titolo non rischioso (Bond), mentre tutti gli altri sono titoli rischiosi (Stock).

$S_1(0), \ldots, S_M(0)$ sono i valori osservati.

Il portafoglio sarà:
$\pi = (y_1, \ldots, y_M) \in R^M$

(Per comodità quindi modelliamo tutto ciò con dei valori Reali, anche se avere un valore monetaria pari al numero di nepero non è abbia tutto questo senso).

I pesi dei singoli titoli saranno:
$(w_1, \ldots, w_R)$

allora:

$$W_0 = \sum_{m=1}^{M} y_m S_m(0)$$

$$W_m = y_m S_m(0)$$

con $w_M = \frac{W_M}{W}$ e $\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$

Il rendimento del titolo al tempo T:

$$\tau_m(T) = \frac{S_m(T) - S_m(0)}{S_m(0)}$$

Il rendimento del portafoglio al tempo T:

$$\tau(T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \tau_m(T)$$

Abbiamo definito quindi rischiosità la seguente matrice:

$$\Sigma(\tau(T)) = \ldots$$

Abbiamo poi visto la definizione di convesso:
Un insieme è convesso (\$ $\subseteq R^M$) se presi due punti qualsiasi, la corda che li congiunge è sempre dentro l'insieme.

A che ci serve? Se noi consideriamo la seguente funzione:

$$f(w_1, \ldots, w_M) = (w_1, \ldots, w_M)\Sigma(w_1, \ldots, w_M)^T$$

allora ci accorgiamo che questa f è sempre convessa ed è strettamente convessa $\iff$ gli autovalori di Σ sono strettamente positivi. (*Teorema di analisi convessa* (Non vedremo dimostrazione)).
Quindi nel paniere di titoli che stiamo considerando non c'è la possibilità di esprimere un titolo come combinazione lineare dell'altro.

Ci chiediamo: "Esiste il minimo di f al variare di $(w_1, \ldots, w_M) \in H$ con $H \triangleq \{(w_1, \ldots, w_M) \in R^M : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1\}$"
Dal punto di vista finanziario equivale a chiederci: "esiste il portafoglio di minimo rischio?".

Si ....

min.: 09:49
Vediamo dal punto di vista finanziario: "c'è una soglia minima di rischio che dobbiamo accettare". Se io voglio investire su un paniere di azioni che va a pescare dallo S&P500 devo accettare una soglia di rischio sotto la quale non posso andare.

> **Nota**: l'unica ipotesi che abbiamo è che f sia convessa, per il resto f può essere una funzione qualsiasi. (f è la "rischiosità del portafoglio" ("rischio del rendimento del portafoglio") ("la varianza del portafoglio")).
>
> Rischio in finanza significa varianza ($D[\tau(T)]$). Variabilità è la misura di quanto un certo valore si discosta dal valore medio. Questo discostamento non significa però che debba essere per forza negativo. Il valore potrebbe spostarsi dal valore medio in modo positivo anziché negativo.
>
> Attribuire al rischio quindi una connotazione necessariamente negativa è sbagliato!
>
> Siccome però "la paure che le cose ti vadano male" è molto più grande della "sensazione che le cose vadano bene" allora ci porta in genere ad avere negativi.

Molto spesso si sente parlare del concetto di "Volatilità". Cos'è formalmente? E' la deviazione standard ($D^2[\tau(T)]$).

Supponiamo che sul mercato abbiamo un certo numero di titoli, ciascuno dei quali:

$$r_1(T) = r_2(T) = \ldots = r_M(T)$$

Supponiamo inoltre che $r_1(T), \ldots, r_M(T)$ siano tutti indipendenti.

Allora passiamo da:

$$r_M(T) = \sum_{m=1}^{M} r_m(T) w_m$$

a questo:

$$r_1(T) \sum_{m=1}^{M} w_m = r_1(T)$$

Consideriamo ciò:

$$D^2[\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T)] = \sum_{m=1}^{M} D^2[w_m r_m(T)] = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 D^2[r_m(T)]$$

Ora facciamo l'ipotesi che abbiamo costruito questo portafoglio prendendo un peso uguale per tutti i titoli che lo compongono: $w_1 = \ldots = w_M = \frac{1}{M}$.
Allora la relazione precedente diventa:

$$\frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^{M} D^2[r_m(T)] = \frac{1}{M^2} \cdot M D^2[r_1(T)]$$

Quindi abbiamo scoperto che se prendiamo dei titoli scorrelati e ognuno con lo stesso peso allora il portafoglio ha lo stesso rendimento, ma il rischio si è abbattuto di un fattore M.
Questo significa dal punto di vista finanziario che, poiché siamo avversi al rischio, dobbiamo diversificare i nostri investimenti.

Supponiamo che io sono un investitore razionale e voglio investire 2000€ che mi avanzano. Speriamo di farci un guadagno. Come mi muovo? Non investo **mai** su unico target, ma diversifico sempre.
Investo sempre in un **ETF** (*Exchanged Traded Found*). Questi fondi replicano passivamente degli indici (ovvero panieri di titoli diversificati).
La diversificazione la garantiscono loro.
Ripeto.
Se io dovessi scegliere da investitore su come investire 2000€ non vanno mai messa su una singola azione, ma li vado a mettere su un ETF. Potresti pensare che questo paniere te lo puoi costruire a mano. NON conviene:

- Primo perché non sei capace;
- Secondo perché pagheresti molto di "tasse bancarie";
  Da piccoli investitori non abbiamo altri strumenti.

> **Nota**: le banche ti contattano quando hai delle piccole liquidità in eccesso. Spesso i fondi proposti dalle banche sono gestiti in maniera onesta, ma spesso questi fondi sono fondi attivi (ovvero si propongono di battere un Benchmark). Come garanzia mostrano che nel passato ci sono già riusciti, ma chiaramente questa non è nessuna dimostrazione.

> A differenza degli ETF, questi fondi attivi hanno dei costi più alti ed è molto più difficile uscirne.
>
> Dal punto di vista di Monte, i fondi attivi in alcuni casi fanno meglio, però il fondo passivo (il quale non si propone di fare meglio, ma solo di seguire l'indice) sono più convenienti:
>
> - immediatamente liquidabili;
> - pochi costi di gestione.

Considerata la varianza del rendimento di portafoglio:

$$D^2[r(T)] = \sum_{m=1}^{M} W_m^2 \sigma_m^2 + \sum_{l,m=1;l\neq m}^{M} W_l W_m \sigma_{l,m}$$

Con $sigma_m^2 = D^2[r_m(T)]$
e $e_{l,m} = E[(r_l(T) - \bar{r_L}(T))(r_l(T) - r_n(T)]))]$ (probabilmente c'è qualche errore qui)

L'equazione sopra proposta spesso ha un termine $\frac{1}{2}$.

Equazione del vincolo:

$$L(W_1, \ldots, W_M, \lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2(W_1, \ldots, W_M) - \lambda(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1)$$

Questa funzione si chiama **Lagrangiana** (già visto a Machine Learning).
I punti estremali di questa funzione risolve il nostro problema di ottimizzazione.

Come si trovano questi estremi? Banalmente basta porre tutte le derivate parziali uguali a 0.
Otteniamo un sistema di $M+1$ equazioni in $M+1$ incognite. E' inoltre un sistema lineare, quindi la sua risoluzione è immediata.

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial W_2} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial W_M} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Il **problema del Promoter finanziario**: "il minimo rischio per un'investimento assegnato".

Questa: $(W_1^*, \ldots, W_M^*)$ è la soluzione del sistema lineare appena presentato (quindi questi sono i pesi che realizzano il portafoglio di minimo rischio).
Qual'è il rendimento del portafoglio di minimo rischio?

$$\tau^*(T) = \sum_{m=1}^{M} w_m^* \tau_m(T)$$

Cerchiamo di capire quindi questo problema del Promoter.
Esiste il portafoglio di minimo rischio per un determinato rendimento atteso (una media di quello che abbiamo visto).

Supponiamo che noi muore una vecchia zia e ci lascia 10.000€. Dato che non ci servono subito, possiamo investirli così tra qualche anno possiamo dare un anticipo per un mutuo per una casa.
Questi 10.000€ su che investimento devo metterli per trasformarli tra 5 anni in 50.000€.
Per cui il rendimento dovrà essere:

$$\frac{50.000 - 40.000}{5}(errato)$$

...
Insomma deve venire fuori un rendimento del 400%.

Qual'è il rischio che mi devo accollare se voglio questo rendimento?
Questa domanda è esattamente il **problema del Promoter finanziario**.

Noi prima andavamo a cercare:

$$min_{(W1,\dots,W_M)\in H}\ (\frac{1}{2}\sigma^2(W_1,\dots,W_M))$$

$$\bar{\tau}(T) = \sum_{m=1}^{M} W_m\bar{\tau}_m(T) = \Sigma$$

$$K_{\bar{\tau}} = \{(W_1,\dots,W_M) \in R^M : \sum_{m=1}^{M} W_m\bar{\tau}_m(T) = \bar{\tau}\}$$

Abbiamo due vincoli, per cui la Lagrangiana dobbiamo scriverla così:

$$L(W_1,\dots,W_M,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}\sigma^2(W_1,\dots,W_M) - \lambda_1(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1) - \lambda_2(\sum_{m=1}^{M} W_m\bar{\tau}_m(T) - \bar{\tau})$$

Sistema lineare di $M+2$ equazioni e $M+2$ incognite.
Si può dimostrare che le ipotesi di non singolarità (cioè nessun titolo può essere espresso come combinazione lineare di altri titoli) dei titoli consente di poter trovare un'unica soluzione di questo problema.
Quindi riusciamo a trovare il portafoglio di minimo rischio per un dato rendimento segnato.

Abbiamo quindi risolto due problemi di minimizzazione.

L'investitore può inoltre richiedere che il portafoglio venga formato richiedendo la condizione che "compro tutti i titoli ma nessuno lo vendo allo scoperto".
"Prendere posizioni corte" è una cosa che capita molto spesso.

In questo caso bisogna introdurre quelli che si chiamano **vincoli di non negatività**. Qui abbiamo il fatto che questo portafoglio di cui cerchiamo la soluzioni, lo andiamo ad intersecare ulteriormente con il seguente insieme:

$$R^M \triangleq \{(W_1, \ldots, W_M) \in R^M : W_m \geq 0\}$$

Si utilizza la tecnica di "Kuntager" (Scritto sicuramente male).
La dimostrazione del teorema di Kuntager è molto complessa (non la vederemo).

Se uno volesse affrontare un problema un po' diverso tipo: "qual'è il massimo rendimento che possiamo raggiungere all'interno di un portafoglio".

Questo problema diventa molto complesso dal punto di vista concettuale. Diventa un problema di massimizzazione:

$$\bar{\tau}(W_1, \ldots, W_M) = \sum_{m=1}^{M} \bar{\tau}_m(T) W_m$$

Il rischio è sempre questo: $\sigma^2(W_1, \ldots, W_m) = \frac{1}{2}(\sum_{m=1}^{M} \sigma_m^2 w_m + \ldots)$

Allora abbiamo:

$$max\{\bar{\tau}(W_1, \ldots, W_M)\}$$

con $(W_1, \ldots, W_M) \in H \cap K_{\sigma^2}$

(Siamo costretti ad affrontare il problema da un punto di vista computazionale. Questo tipo di problemi capita molto spesso, quindi problemi dove il vincolo non è lineare).

Consideriamo tutte le coppie $(\sigma^2, \bar{r}) \in R^2$
E consideriamo "portafogli fattibili".

Per ogni n-upla $(W_1, \ldots, W_M) \in H$ ....

.... esce fuori un convesso di R^2.
.... Il rischio minimo sarà "il fianco sinistro di questo convesso". (Curva frontiera efficiente). (FOTO)

(DA RIVEDERE).

(Tutte le Tau scritte in questa lezione erano in realtà delle "R" minuscole).
(NON MALE).

MPSMF_lez14

0:00 / 1:38:52

Cosa facciamo oggi?

Recap:
problema del portafoglio:

Dati $S_1, \dots, S_M$ titoli rischiosi.
Abbiamo due problemi da voler risolvere:

- Portafoglio di minimo rischio;
- Portafoglio di minimo rischio per un dato rendimento.

Il primo è un problema di ottimizzazione vincolata, per cui vogliamo risolvere il seguente problema $\min(w_1, \dots, w_M) : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1, \frac{1}{2}\sigma^2(w_1, \dots, w_M)$.

Che cosa accade se introduciamo nel nostro modello un titolo S_0 non rischioso.

Lo scenario cambia in maniera significativa.

Osserviamo prima un problema preliminare.
Dati $(w_1, \dots, w_M) \in H \triangleq \{(w_1, \dots, w_M) \in R^M : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1\}$

$$\sigma(w_1, \dots, w_M) = (\sum_{m=1}^{M} (w_1, \dots, w_M) \sum_{m=1}^{M} (w_1, \dots, w_M)^T)^{\frac{1}{2}}$$

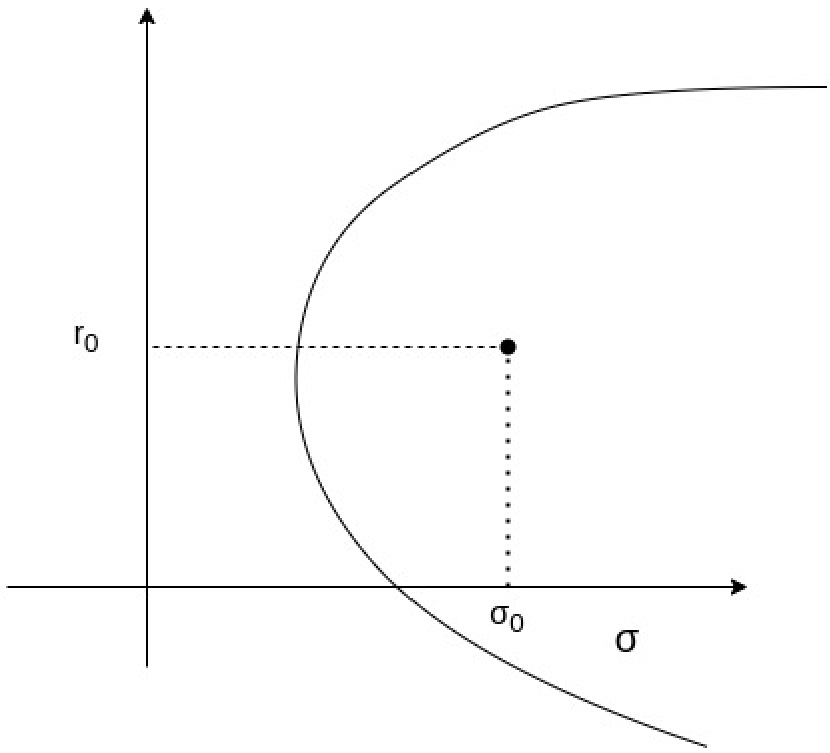
$$\Sigma(w_1, \dots, w_M) = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m$$

Analogia con quanto visto nei corsi di fisica riguardo le curve parametriche.
Ad esempio:

$$x(t) = r \cos wt$$

$$y(t) = r \sin wt$$

Possiamo quindi vedere $\sigma(w_1, \dots, w_M)$ esattamente allo stesso modo
Chiaramente in questo caso non andremo a produrre una "linea", ma una superficie in R^2.



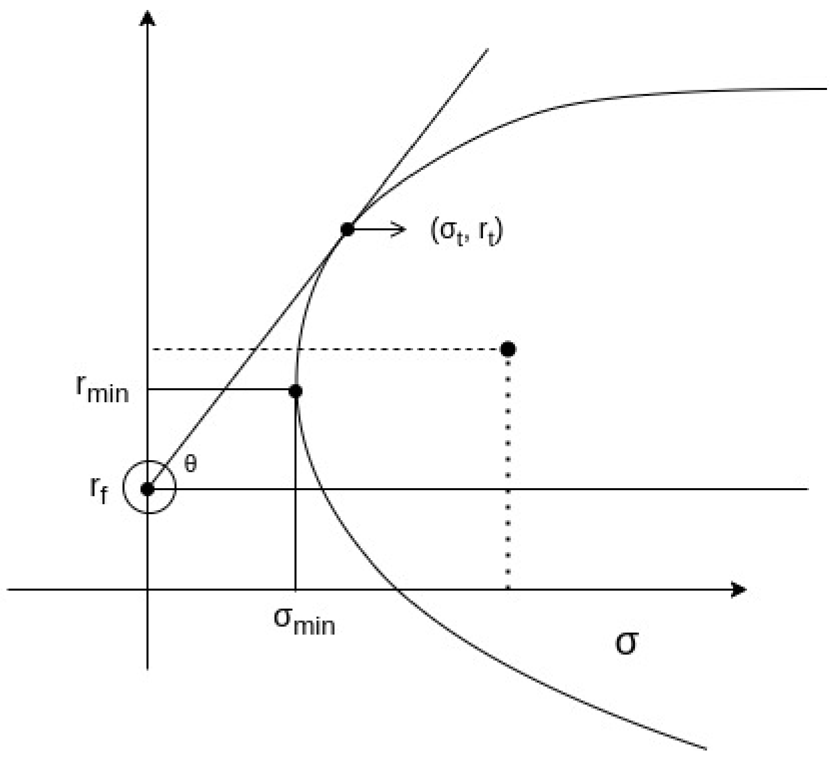
Tutta la parte interna alla superficie non ha alcun interesse dal punto di vista finanziario (peggio mi sento per la parte aventi ordinate negative).

Perché la parte interna comunque non ci interessa?
Prendiamo il portafoglio come in figura? Ci investiresti? No! Perché "basterebbe spostarsi" verso ordinate maggiori per ottenere un portafoglio migliore.

Ciò che ci rimane quindi è solamente la così detta **frontiera efficiente**.

> **Osservazione**: Il mercato, sulla base della legge "domanda e offerta" faccia i conti "meglio di chiunque".

Supponiamo di tracciare la retta tangente lungo la frontiera di efficiente:



$$\frac{\bar{r} - r_0}{\sigma} = tan(\theta)$$

$$\bar{r} = \sum_{m=1}^{M} w_m \bar{r}_m$$

$$\sigma = (\sum_{l,m=1}^{M} \sigma_{l,m} w_l w_m)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_0 = \sum_{m=1}^{M} w_m r_0$$

$$\frac{\sum_{m=1}^{M} (\bar{r}_m - r_0) w_m}{\sigma = (\sum_{l,m=1}^{M} \sigma_{l,m} w_l w_m)^{\frac{1}{2}}}$$

Il problema da considerare è quindi quello di considerare (primo teorema di Sharp):

$$\max(w_1 \ldots, w_M) \in H \cap K_{\bar{r}}$$

Secondo teorema di Sharp:

$$(V_1^*, \ldots, V_M^*) : \sum_{m=1}^{M} \sigma_{l,m} v_l = \bar{r}_m - r_0$$

e tale che: $V^* \triangleq \sum_{m=1}^{M} \theta_m^* > 0$

Cosa significa dal punto di vista finanziare quest'ultima condizione?
Significa che noi stiamo costruendo il nostro portafoglio partendo da una ricchezza iniziale positiva (da rivedere).

Le componenti $(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)}$ che determinano il portafoglio tangente sono date dalla seguente relazione:

$$w_m^{(T)} = \frac{V_M^*}{V^*}$$

(Un progetto d'esame potrebbe essere quello di portare questi risultati combinando la parte teorica con la parte applicativa. Nessuno fino ad ora ha mai portato questa roba).

Perché vogliamo costruire il portafoglio tangente? Abbiamo visto solo come fare ora.

Lo abbiamo indicato così:

$$\sigma_T(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)})$$

$$\bar{r}_T(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)})$$

Se io prendo un portafoglio $(w_1, \ldots, w_M)$, e svolgo la seguente combinazione lineare $\alpha(w_1^{(T)}, \ldots, w_M^{(T)}) + (1 - \alpha)(\frac{1}{M}, \ldots, \frac{1}{M})$ ottengo i portafoglio che mi permettono di descrivere i punti della retta (tangente).

Sulla retta c'è sempre un portafoglio migliore. (A parità di investimento ce ne è uno con rischio minore. A parità di rischio c'è un investimento migliore).
(Capital Market Line).

Un portafoglio del genere è sempre ammissibile (la somma è sempre 1).

Questa scoperta ci consente di migliorare il risultato della **frontiera efficiente**.
Tutto lo sforzo matematico sta quindi nel determinare i pesi del portafoglio tangente, tutto il resto ce lo fornisce il mercato.

Uno potrebbe dire: "ma questo problema potrebbe essere difficile da risolvere".
I matematici con il teorema di Sharp possono calcolarselo.

C'è un fatto interessante.

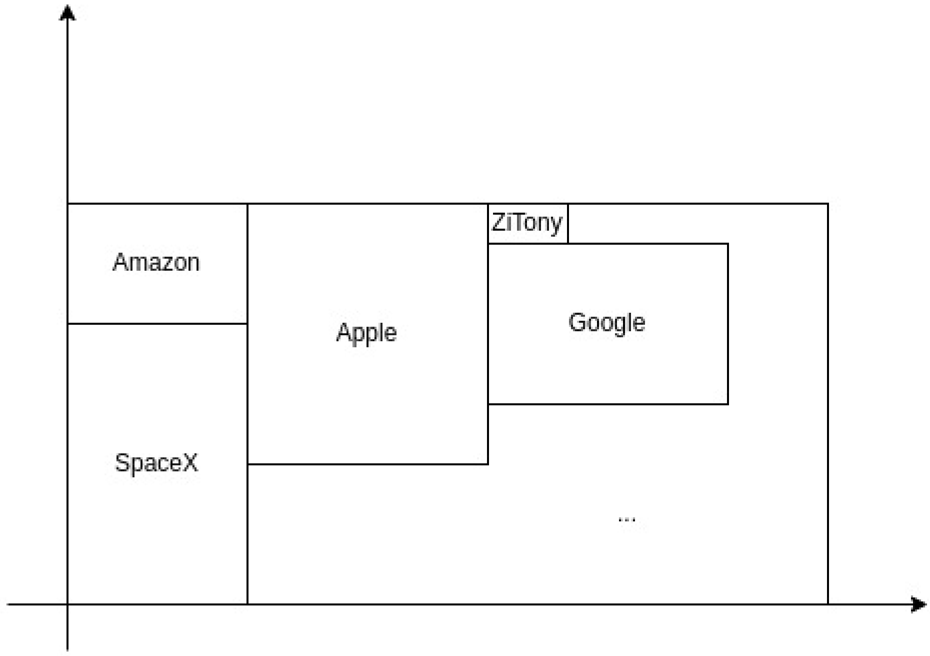
Disegniamo un rettangolo e stabiliamo che l'area di questo rettangolo è la **Capitalizzazione totale di mercato**.
Il numero di azioni di una certa azienda che sono disponibili sul mercato si chiama **flottante**. (Quindi il valore dell'azienda è diviso tanti pezzi. Una parte se li tiene l'azienda e gli altri, detti **flottanti** vengono messi sul mercato. Il loro valore è stabilito dal mercato).

Se sul mercato metto il 70% dei pezzettini, cosa impedisce a qualcun'altro di poterli comprare tutti e quindi "sovvertire" l'azienda e prendere completamente il possesso? Nessuno te lo vieta, devi solo avvisare un certo ente (questo tipo di evento si chiama "rastrellamento" (non so se è un nome ufficiale)).

Supponiamo che abbiamo diviso l'azienda (Amazon) in 1 milione di pezzettini significa che avremo sul mercato 700.000 pezzettini. Per cui se il mercato ha stabilito che ogni singolo pezzettino vale $150\$$ allora il valore di Amazon sarà di $150 * 700.000\$$ ed è il capitale.

Facciamo sta roba per tutte le aziende e otteniamo la capitalizzazione totale (cap. tot è la somma di tutte le capitalizzazioni parziali).

Questo è lo schema che ci esce fuori:



Questi oggetti li costruisce il mercato.

Alla fine non vanno determinate le coordinate del portafoglio tangente, basta vedere quanto le singole aziende sono capitalizzate nel mercato e farne il rapporto con il totale.

Il quadro appena presentato ovviamente è funzione del tempo, perché il valore delle azioni è funzione del tempo. Quindi è un quadro dinamico.

Quindi per calcolarmi le coordinate del portafoglio tangente, devo calcolarmi le singole capitalizzazioni? Nah ... ci sono dei tizi che lo fanno per voi. In particolare gli strumenti che fanno ciò sono gli ETF.

L'investitore alla fine non deve fare quasi niente. Deve solo scegliere quanta parte della sua ricchezza investire sul titolo non rischioso e quanta sul titolo rischioso.

Le banche si inventano delle strategie che loro chiamano "dinamiche". Con queste strategie tendono ad andare oltre la capital market line (retta tangente), ma sono rischiose, perché avvolte queste strategie possono anche andare sotto.

Monte consiglia che per un piccolo investitore la scelta **ETF+Bond** è il miglior modo per ottimizzare. (Roba più spinta ha senso solo per grandi investitori).

(Eh ma io voglio guadagnare di più ... e allora rischiatela e gioca alla lotteria).

MF 2 maggio 2023

Viene ripreso il grafico dell'altra volta, con la Capital Market Line. Abbiamo visto che il punto (σ_T, r_T) è individuato con Sharp a partire da $(w_1^{(T)}, ..., w_M^{(T)})$.

Abbiamo caratterizzato anche $\sigma_T = (\sum_{l,m=1}^{M} \sigma_{l,m} w_l^{(T)} w_m^{(T)})^{1/2}$ e $\bar{r}_T = \sum_{i=1}^{M} r_m w_m^{(T)}$

Se prendo un punto (σ, r) appartenente alla MCL, scrivo retta passante per due punti: $\frac{\bar{r}-r_0}{\bar{r_T}-r_0} = \frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_T-\sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_T}$

r_0 sarebbe il rendimento sull'asse delle y.

Troviamo: $\sigma(r_a) = \frac{\sigma_T}{\bar{r_T}-r_0}(r_a - r_0)$ e $\bar{r}(\sigma_a) = r_0 + \frac{\bar{r_T}-r_0}{\sigma_T}\sigma_a$

La CML ci aiuta moltissimo quindi. Se vado in banca, e apro il contocorrente, mi viene fatta la profilazione, per capire quale sia il mio livello di avversione al rischio. In base ad esso, mi propongono investimenti, con cui mi viene proposto massimo rendimento atteso secondo l'ultima formula. Devo scegliere portafoglio tale che sia una combinazione lineare di:

$(w_1, .., w_M) = \alpha(w_1^T, ..., w_M^T) + (1-\alpha)(w_1^f, ..., w_M^f)$ con $w_m^f = \frac{1}{M}$ e $\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_T}$

Considerazioni Modello di Markowitz

Vorrei analizzare i ruoli dei singoli nel portafoglio.

$\bar{r_m} - r_0 = \beta_m(\bar{r_T} - r_0)$ per ogni $m = 1, ..., M$

A sinistra ho il **tasso di rendimento atteso in eccesso del titolo m-esimo** e a destra ho **tasso di rendimento a tasso in eccesso del portafoglio tangente**

(r non medio in quanto è v.a. non media) $\beta_m = \frac{\sigma_{m,T}}{\sigma_T^2} = \frac{cov(r_m, r_T)}{D^2(r_T)}$

$\sigma_\alpha = (\alpha^2\sigma_m^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{m,T} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2)^{1/2}$

per $\alpha = 1$ ho i punti $(\bar{r_m}, \sigma_m)$

Anche se non so come disegnare la curva, deve essere tangente alla frontiera efficiente, altrimenti bucherei, e quindi potrei realizzare col mio portafoglio un comportamento migliore di quella realizzata con la CML, e ciò non è possibile. Allora σ_m deve essere tangente alla CML in $(\sigma_T, \bar{r_T})$ Devo imporre la condizione di tangenza. $\frac{d(r_\alpha)}{d(\sigma_\alpha)}_{\alpha=0} = tan(\theta) = \frac{r_m - r_T}{\frac{\sigma_{m,T}-\sigma_T^2}{\sigma_T}}$

per $\alpha = 0$ il risultato è $\bar{r_m} - r_0 = \beta_m(\bar{r_T} - r_0)$ con β_m = beta del titolo n-esimo. Questi sono tassi di rendimento atteso (numeri). Voglio trasformarla in equazione sui tassi di rendimento, devo passare a v.a. (sopra sono tutti numeri!) $\bar{r_m} - r_0 = \beta_m * (\bar{r_T} - r_0) + \epsilon_m$ con ϵ_m variabile aleatoria, che quindi mi rende il tutto una v.a. e quindi equazione sui tassi di rendimento. Devo però imporre: $E[\epsilon_m] = \bar{\epsilon}_m = 0$ ed anche $cov(\epsilon_m, r_T) = 0$ dovuto a come è composto $\beta_m = \frac{\sigma_{m,T}}{\sigma_T^2}$

Abbiamo anche che:

$\sigma_m^2 = \beta_m^2 * \sigma_T^2 + E[\epsilon_m^2]$ Ho rischio sistematico (del fatto che il titolo appartiene ad un mercato, mi prendo parte di rischio) e rischio idiosincratico (rischio sull'investimetno del singolo titolo). Il primo non lo posso eliminare, il secondo sì (mediante riduzione del rischio).

ϵ_m è l'errore che si ha passando dalle medie alle v.a., ci sarà sempre un errore che commettiamo.

Il portafoglio tangente coincide col portafoglio di mercato, nel **modello CAPM - Capital Asset Pricing Model**. Tale modello è granitico, funziona perchè tutti credono fortemente in questo modello. Ciò significa che se chiamo la capitalizzazione del titolo m-esimo $K_m = n_m S_m$, ovvero flottante (numero di azioni del titolo m-esimo sul mercato) per il prezzo della singola azione. Introduco la capitalizzazione totale del mercato $K = \sum_{m=1}^{M} K_m$, inoltre $w_m = \frac{K_m}{K}$ e $\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$. (sono medie le varie r adesso)

Nel modello **CAPM** si ha (poichè portafoglio mercato = portafoglio tangente)

$\bar{r_M} = \bar{r_T} = \sum_{m=1}^{M} r_m w_m$ e anche $\sigma_M = \sigma_T = ...$ sono come prima!

$\bar{r} - r_0 = \beta(\bar{r_m} - r_0)$

Se dentro $\bar{r}$ ci metto $r = \frac{S(T)-S(0)}{S(0)}$ (applicando la media, ovvero applicando $\bar{r} = E[r]$) trovo $S(0) = \frac{E[\bar{S}(T)]}{1+r_0+\beta(r_m-r_0)}$

Il prezzo di un titolo oggi è uguale all'attesa del prezzo futuro scontata per un fattore di rischio aggiustato. Il fattore di aggiustamento dipende da beta, mi dice quanto aggiustare. E' legata a $S(0) = \frac{E[S(T)]}{1+r_0} = \frac{\bar{S}(T)}{1+r_0}$

Cioè è forward looking, prezzo oggi definito in base al prezzo futuro. Tutto ciò che si basa sui prezzi passati non ha valore! Io investo perchè credo che domani varrà un certo valore, non perchè ieri valeva un certo valore. Scommetto sul domani. I prezzi passati ci dicono come stimare i parametri di equazioni che sperano di modellare il comportamento dei prezzi. Stimo i parametri, non il futuro. Sono sempre equazioni stocastiche (incerta). In fisica ho soluzioni deterministiche invece, qui ho dipendenza da fattori aleatori.

$\beta = \frac{cov(S(T), r_m}{\sigma_M^2 * S(0)}$

Se metto Beta nell'equazione S(0) troviamo:

$$S(0) = \frac{1}{1+r_0} * (E[S(T)] - \frac{cov(S(T),r_M}{\sigma_M^2} * (r_M - r_0))$$

S(T) è titolo rischioso generico, potrebbe anche essere portafoglio (combinazione lineare titoli rischiosi con pesi). La speranza e covarianza (fissato r_m nella covarianza) sono operatori lineari. Quindi ho combinazione lineare di titoli rischiosi, altro indice di **assenza di arbitraggio.** Devo vedere questi 'pezzi' insieme.

MPSMF_lez16

0:00 / 1:43:55

Cosa facciamo oggi?

...

Modello CRR-Multiperiodale

Questo modello è caratterizzato da un istante iniziale $t_0 = 0$ e uno finale $t_N = T$, ma ora abbiamo anche degli istanti intermedi $t1, t2, \dots, t_{N-1}$.

Quindi abbiamo la solita struttura:

$$X_0 \to X_T$$

$$\frac{X_T - X_0}{X_0} = r$$

Andiamo adesso ad introdurre dei concetti che sono del mondo della matematica finanziaria, i quali ci servono nel corso della descrizione di questo modello.

Supponiamo di avere un investimento al tempo 0 che produce un risultato al tempo T:

$$X_0 \to X_T$$

(un bond sostanzialmente).

Questo Bond promette un **tasso di interesse unitario** r, linearmente nel tempo.
Che significa "unitario"?
Significa che è riferito ad una "quantità temporale": quindi "ogni mese", "ogni giorno", "ogni anno".
Supponiamo che stiamo considerando un tasso di interesse mensile, che cresce linearmente nel tempo (quindi ad esempio se fai un investimento di 100€, noi prendiamo su quei 100€ l'1% mensilmente, quindi significa che il primo mese ci tocca 1€ di interesse, il secondo mese ci fornisce 1€ e così via).
Se noi investiamo una certa somma X_0 su questo Bond, qual'è il rendimento di questo investimento? $R_T = rX_0T$ dove T è la durata dell'investimento (chiaramente T deve essere della stessa unità temporale della cadenza di pagamento mensile. Se ti pagano ogni mese allora T deve essere la durata dell'investimento in termini di "numero di mesi").

> **Esempio**: Investiamo 1000€ in un Bond. Dopo 3 anni qual'è il rendimento del nostro investimento?

$$R_T = 0.01 \cdot 1000 \cdot 36$$

Se ora ci vogliamo calcolare il tasso di rendimento, noi sappiamo dalle precedenti lezioni che:

$$r_T = \frac{R_T}{X_0}$$

Quindi, banalmente sostituendo otteniamo:

$$r_T = rT$$

Noi inoltre sappiamo che:

$$X_T = a_T X_0$$

con $a_T = 1 + r_T$ che nel nostro caso diventa: $a_T = 1 + rT$.

Come trattiamo il fattore di sconto?

$$s_T = \frac{rT}{1+rT}$$

$$d_T = \frac{1}{1+rT}$$

Questo caratterizza completamente il caso di tasso di interesse lineare. Tutte le altre formule si mantengono sempre uguali a quanto visto nelle precedenti lezioni.
(Sulle note è presente una tabella riassuntiva).

Cerchiamo di giustificare la necessità di passare a questo regime leggermente diverso. Facciamo sempre il nostro investimento $X_0 \to X_T$, ma ad un certo punto intermedio voglio ritirare il capitale e reinvestirlo nuovamente con la stessa regola.

Quindi quello che abbiamo è:

$$X_0 \to X_0 rt \to X_0 rt \cdot r \cdot (T-t)$$

In termini di capitalizzazione possono scrivere che:

$$X_{t,T} = (1+rT)(1+r(T-t))X_0$$

Questo è il payoff che io ottengo dal mio investimento iniziale, quando interrompo e poi reinvesto con la stessa regola.

Ci è convenuto o no fare questa manovra?
Beh sembra di si, perché di fatto nel mezzo ho rieffettuato l'investimento con la stessa regola, ma ho messo "sul piatto" più soldi, quindi la % mensile (ad esempio) sarà più alta.
Ora dal punto di vista ingegneristico potremo chiederci se esiste un tempo t di "mezzo" che è il punto ottimale per effettuare questo giochetto? Certo; calcoliamocelo!
Andiamo a calcolarci la derivata di $a(t)$:

$$a'(t) = r^2(T - 2t)$$

Ci troviamo il punto di massimo.
Quindi di fatto esce fuori che $t = \frac{T}{2}$ è il punto ideale (quindi esattamente nel mezzo .. lol).

Il risultato della mia capitalizzazione è il seguente:

$$X_{t,T} = (1 + r\frac{T}{2})^2 X_0 \geq (1 + rT)X_0$$

Immaginiamo adesso di avere tanti tempi di investimento (e quindi non solo un punto) in cui noi possiamo effettuare il giochetto di "disinvestire e reinvestire".
Questi punti sono $t1, t2, t3, \ldots, t_{N-1}$.

Otteniamo una funzione:

$$X_{t1,t2,t3,\ldots,t_{N-1}} = (1 + rt_1)(1 + r(t_2 - t_1))(1 + r(t_3 - t_2)) \cdot \ldots \cdot (1 + r(t_N - t_{N-1}))$$

Ora andiamo direttamente ad ottimizzare questa roba.
Quanto otteniamo è che l'ottimo è raggiunto quando vai a dividere l'intervallo in N parti e considerare questi valori:

$$t_1 = \frac{T}{N}, t_2 = 2\frac{T}{N}, \ldots$$

Ora andiamoci a calcolare:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r\frac{T}{n})^n X_0$$

Andiamo a vedere nel mercato cosa succede usando questo modello.

Nel mercato ci sono dei periodi fissi t in cui vengono pagati gli interessi degli investimenti (cedola semestrale).
L'interesse composto consiste nell'avere un certo tasso di interesse:

$$r_p =$$

....

$$a_p = (1 + r_p)$$

$$a_{2p} = (1 + r_p)^2$$

$$a_{3p} = (1 + r_p)^3$$

$$a_{np} = (1 + r_p)^n$$

Questo tasso composto è importante nel nostro caso (CRR).
Noi abbiamo un periodo di investimento $[0, T]$. Questo viene diviso in tanti sotto

periodi.
In ciascuno di questi sotto-periodi, il Bond accresce di valore nella seguente maniera.

$$B_{t_1} = (1 + r_p)B_0$$
$$\dots$$
$$B_{t_N} = (1 + r_p)^N$$

Cosa c'è di simile e diverso rispetto al caso lineare?
Di simile c'è che ad un certo punto avevamo una formula simile a quella appena scritta per B_{t_N}.
Di diverso c'è che di fatto prima eravamo noi a scegliere i tempi in cui reinvestire, invece qui i tempi sono fissi.
I tempi nel modello comunque vengono scelti in modo tale che siano tutti equidistanti.

Con questo tipo di modello non è più conveniente interrompere l'investimento e reinvestire.
Arrivati, ad esempio, ad un tempo $t = T_3$ e decido di ritirare tutti i soldi e reinvestirli nella stessa maniera.
Quando ritiriamo abbiamo:

$$B_{t_3} = (1 + r_p)^3 B_0$$

Reinvestendo ottengo:

$$B_{t_5} = (1 + r_p)^3 B_0 (1 + r_p)^2 = (1 + r_p)^5 B_0$$

Non è cambiato nulla rispetto al caso in cui non facevo il "giochetto".

Dopo n periodi di investimento qual'è il mio payoff?

$$B_{t_n} = (1 + r_p)^n B_0$$

Posso chiedermi qual'è il tasso d'interesse.
Effettuiamo la seguente operazione:

$$r_{n,p} = \frac{B_{t_n} - B_0}{B_0} = (1 + r_p)^n - 1$$

$r_{n,p}$ è quindi il tasso d'investimento per n periodi.

Ovviamente possiamo anche invertire le formule e ottenere:

$$r_p = (1 + r_{n-p})^{\frac{1}{n}} - 1$$

Quando noi abbiamo un certo numero di periodi di investimento noi sappiamo da queste formule che il tasso $r(T)$, si può andare a scrivere nella seguente maniera:

$$r(T) = (1 + r_p)^T = e^{T \ln(1+r_p)}$$

Generalmente usiamo questa scrittura:

$$\rho_p \triangleq \ln(1 + r_p)$$

quindi abbiamo: $e^{T\rho_p}$ e quindi:

$$B_T = B_0 e^{\rho_p T}$$

Questo modello CRR, che è molto semplice, è tutt'ora utilizzato dagli operatori finanziari per valutare i prezzi delle azioni. E' quindi di fatto uno strumento operativo. In base a questo modello gli operatori decidono se comprare o vendere delle azioni. Cosa succede? Succede l'effetto "gatto nero": "tutti credono nel modello e quindi il modello diventa vero".

Prendiamo un intervallo $[0, T]$ e dividiamo in N sotto-periodi: $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$.
L'ampiezza dei periodi è uguale per tutti i periodi e sarà quindi pari a:

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

e quindi: $t_{n+1} - t_n = \Delta t$.
Segniamo con B il titolo non rischioso e con S il titolo rischioso.

Il Bond B cosa fa? Il Bond paga un tasso d'interesse r_p (che da adesso in poi indicheremo solo con r, perché tanto il periodo è fisso), quindi abbiamo:

$$B_{t_n} = (1 + r)^n B_0$$

$$S_n = B_n S_{n-1}$$

$B_1, \ldots, B_n$ sono V.A. Bernoulliane.

Anche in questo modello il valore del denaro è dato dal valore del Bond (se uno ha della liquidità dovrebbe, per quanto possibile, tenerla investita nel Bond).

$$M_T = (1 + r) M_0$$

$$M_n = (1 + r)^n M_0 = \frac{M_T}{(1 + r)^{N-n}}$$

$\forall n = 1, \ldots, N$

Se c'è una violazione di questa legge allora ci sono violazioni della "mancanza di arbitraggio".

Cos'è questo S_n?

$$S_n = \beta_n S n - 1 = \ldots = \beta_n \cdot \beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_1 \cdot S_0$$

Quanto appena mostrato è un **Processo Stocastico**.

Ricordandoci quanto visto in CPS, avevano un Random Simple Sample.
Il **Processo Stocastico** generalizza l'idea del RSS, quindi invece di avere una famiglia di V.A. identicamente distribuite, avremo una famiglia di V.A. che non sappiamo come sono distribuite e che sono funzione del tempo.
(Se misuriamo l'altezza di una persona a intervalli di 1 anno da quando nasce non possiamo dire che il tempo non sia determinante).
Il processo stocastico è una famiglia di V.A.: $(X_t)_{t \in \pi}$
dove ogni X_i è una V.A. definita su Ω e a valori in R^M.

Se $\pi \subset Z$ allora stiamo modellando una casistica in cui consideriamo anche fatti del passato (valori negativi).

Chi è Ω? Dal punto di vista formale, avere a che fare con un unico Ω per tutte le V.A. è una questione di semplicità. La scelta di Ω deve essere frutto di una ricerca tale per cui riusciamo a "ficcare" tutte le V.A. li dentro.

L'artificio che si usa è molto semplice.
Noi prendiamo questo $\Omega \triangleq \{(\omega_n)_{n=1}^T \omega_n = 1 \cup \omega_n = 0\}$
(E' una sorta di binomio di Newton).

Con questa costruzione io dico che la mia β_n come V.A., la posso scrivere come segue:

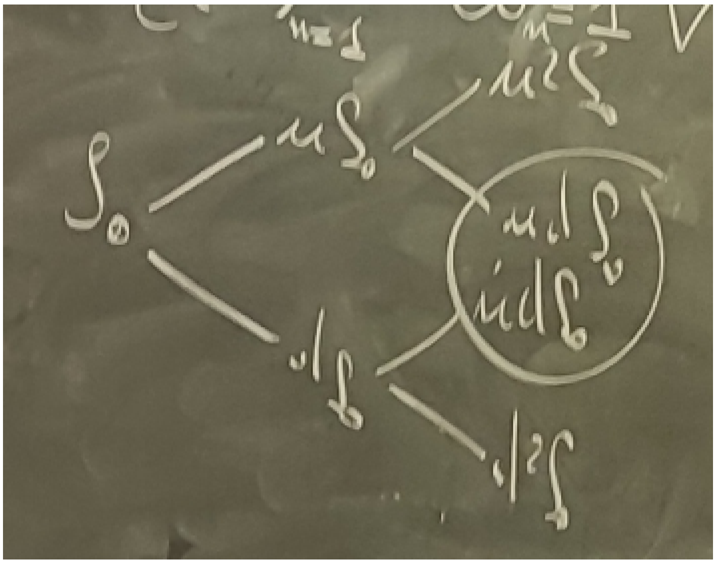
$$\beta_n(\omega) = \beta_n((\omega_m)_{m=1}^T)$$

Che è u se $\omega_n = 1$;
mentre è dd se $\omega_n = 0$.

Quando si valuta un processo stocastico io sto cercando di costruire un modello di qualcosa che è causale ma che si sviluppa nel tempo, quindi io oggi non posso considerare tutto quello che succederà.

La costruzione rappresenta questa idea "1" per "m'ha detto bene", "0" per "m'ha detto male".
Quindi dal punto di vista modellistico sta roba "1101" significa: "t'ha detto bene, t'ha detto bene, t'ha detto male, t'ha detto bene".

Il futuro è quindi un reticolo (o diagramma ad albero).
Il mio futuro è rappresentato quindi da una struttura di questo tipo (vedere foto):



Tutto questa costruzione serve quindi per trasformare un problema dinamico in un problema statico.

Fino ad ora abbiamo considerato la casistica con tempo discreto.

Cosa succede se il tempo è continuo? Non considereremo più il reticolo, ma andremo a considerare tutti i possibili accadimenti.

(Il futuro sono tutte le possibili traiettorie).
(Citazione ad Avengers EnD gAmE LOL - Prossima volta ci fa vedere un pezzo del film. Non mancare! (Ottima mimica di Dr. Strange da parte di Monte)).
(Dr. Strange quando vede tutti i futuri sta costruendo il processo stocastico. Loro vincono in un solo futuro. Convergono a quella traiettoria con un "controllo stocastic" (simulazione e controllo stocastico))).
("Quelli di Hollywood le cose le sanno fare". Cit. mio zio).
("Ste cose almeno a qualcosa servono ... servono a fare trame dei film" Cit. sempre mio zio).

(min: 1:41:00 - Discorso Economia)
(L'inflazione si sta mangiato i lavoratori. Le armi adottate al contrasto dell'evasione sono state quelle di adottare di diminuire il valore del denaro....)

(Anche ad alti livelli c'è mancanza di capacità tecnica per gestire problemi complessi)

Lezione 9 maggio 2023

Recap da p.94, dopo proposizione 147.

Abbiamo visto che $S_{tn} = S_n = \beta_1\beta_2...\beta_n S_0$, considerando anche il 'reticolo di scenari' con i possibili esiti, così chiamato perchè ci sono nodi uguali per valori/casi diversi. Successivamente abbiamo definito lo spazio (Ω, ξ, P)

$\Omega \doteq \{w \equiv (w_n)_{n=1}^N | w_n = 1 \cup w_n = 0\} = \{0,1\}^N = X_{n=1}^N\{0,1\}$, ovvero il

prodotto cartesiano delle N coppie.

La nostra famiglia di eventi E è composta da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, ovvero $E = P(\Omega)$, con P operatore insieme delle parti. Si ha che $|E| = 2^\Omega = 2^{2^\Omega}$

Per completare lo spazio di probabilità ci manca la probabilità. Se ho uno spazio di probabilità discreto e la relazione $\sum_{w \epsilon \Omega} P(w) = 1$ e $P(E) = \sum_{w \epsilon \Omega} P(w)$ allora la probabilità definita è quella naturale (casi favorevoli su tutto).

Prendo la successione $w = (w_n)_{n=1}^N$, allora $P(w) = p^k q^{n-k}$ con $k = \{n = 1, ..N : w_n = 1\}$

Se N = 4, e la sequenza è $\{0,1,0,1\}$ allora $P(\{0,1,0,1\}) = p^2q^2$, semplicemente conto gli '0' e gli '1'.

E' vero che $\sum_{w \epsilon \Omega} P(w) = 1$?

Il metodo più semplice è fissare il numero di '1', e sommare tutti i possibili numeri di '1', ovvero $\sum_{k=0}^N \sum_{w \epsilon \Omega} p^k q^{n-k}$ l'idea è riportarci alla formula del binomio di Newton che sappiamo fare 1. Si chiama **Probabilità oggettiva**, non dipende dall'osservatore, so solo che se un evento è positivo, allora il titolo si apprezza, sennò si deprezza. (In pratica fisso k=0 e conto, fisso k = 1 e conto...)

Riprendiamo qualche concetto di statistica: (Ω, ξ, P), $X : \Omega \to R^M, M \in N$

Tutte le possibili funzioni a valori in Ω sono $F(\Omega, R^M)$, quando è che X è variabile aleatoria? Dalla teoria, la condizione è che $\{X \in B\} \in \xi$ per ogni B appartenente a $B(R^M)$. Se lo spazio di probabilità è discreta, **qualunque cosa è osservabile**, e quindi qualsiasi cosa è una variabile aleatoria. Allora in F ho tutte le variabili aleatorie, quindi non devo pormi mai il problema. (Per l'esattezza un vettore aleatorio N-dimensionale). E' sempre vero che $\xi = P(\Omega)$
.

Ci siamo poi chiesti i momenti finiti delle variabili aleatorie. Esiste $\int_\Omega |X|^K dP$ per avere momento di ordine K, ma qui, essendo discreto, ci riconduciamo a:

$\sum_{w\epsilon\Omega} |X(w)|^K P(w)$ **momento di ordine k di una v.a. discreta.**

$|X(u)| = \sqrt{(\sum_{m=1}^N X_m(w)^2)}$ con $X = (X_1, .., X_M)$ perchè siamo nel caso M dimensionale, se M=1 allora torniamo al caso monodimensionale col semplice modulo. Per quanto questi oggetti siano enormi, sono sempre finiti, per ogni k il momento di ordine k è sempre finito, perchè lo spazio di probabilità è finito. La somma è finita. Devo calcolarli!

A noi interessa il momento crudo del primo ordine, cioè la media, $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_M])$ cioè la media del vettore aleatorio è data dalla media dei singoli elementi. Vettore delle medie delle componenti.

Siamo interessati anche **il momento crudo del secondo ordine** $E[XX^T]$ con $X = (X_1, .., X_M)^T$, la matrice è data da $(M \times 1) \times (1 \times M)$ (rispettivamente X ed X trasposta), ovvero la matrice di dimensione MxM, simmetrica, contenente tutte le speranze di tutti i possibili prodotti.

$$E[XX^T] = \begin{pmatrix} E[X_1^2] & E[X_1X_2] \\ E[X_1X_2] & E[X_2^2] \end{pmatrix}$$

In realtà, ci interessa il **momento centralizzato di X**, ovvero la **Varianza**, cioè momento crudo di $X - E[X]$: $Var(X) = M_2(X) = M_2'(X - E[X])$, ovvero la matrice varianze (quelle sulla diagonale principale) e covarianze delle componenti di X:

$$\begin{pmatrix} E[(X_1 - E[X_1])^2] & E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] \\ E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] & E[(X_2 - E[X_2])^2] \end{pmatrix}$$

NOTA: è come la matrice di prima, solo che nell'argomento il momento è centrato.

Vogliamo anche Skewness e Kurtosi. Se io ho variabile aleatoria X, essa ha tutti i momenti di ordine k. $M_3'(X) = (E[X_kX_lX_m])_{k,l,m=1}^M$ ovvero tutti i possibili prodotti 3 a 3, **TENSORE DI ORDINE 3.** $M_4'(X) = (E[X_jX_kX_lX_m])_{j,k,l,m=1}^M$ **TENSORE DI ORDINE 4**. Se ripensiamo a $M_2'(X)$ è un tensore di ordine 2, cioè di dimensione 2, un tensore di ordine 3 è matrice cubica nello spazio di dimensione 3, nell'ordine 4 è un cubo nello spazio di dimensione 4. Generlamente, è matrice di dimensione k.

La cosa interessante è che la 'lista' gli elementi distinti (che vengono moltiplicati) è il numero delle combinazioni con ripetizione di m elementi con classe 3: $C_{M,3}^{(2)} = \binom{M+3-1}{3} = \frac{M(M+1)(M+2)}{6}$

$$C^{(2)}_{M,4} = \binom{M+4-1}{4}$$

$$C^{(2)}_{M,2} = \binom{M+2-1}{2}$$

Concentriamoci sul caso M^4: avrò tre indici j, k, l, m: Se fisso j ho $\{1, .., M\}$ scelte, poichè prodotto commutativo posso prendere $k \geq j$, se lo prendessi più piccolo, sarebbe uguale al caso in cui inverto le due cose. Fisso $l \geq k$, fisso $m \geq l$.

Per individuare 4 elementi ho fatto funzione non decrescente: $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, ..., M\}$, ovvero le combinazioni con ripetizioni ordinate (non decrescente) di 4 elementi che si possono ripetere. Ne sono esempi (2,2,3,4) o (2,2,2,4).

Skewness e Kurtosi in funzione di una nuova V.A 'Y'

$$X \to Y$$

con $\to \doteq$ "*creo una nuova variabile aleatoria definita come a seguire*"

$Y \doteq Var(X)^{-1/2}(X - E[X])$ Se fosse una variabile aleatoria, e non un vettore, corrisponderebbe a $\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$. Y è così definita per poter *standardizzare* la variabile X, quando essa è un vettore, è matrice varianza covarianza, simmetrica, semidefinita positiva.

- Skew(X) = $M_3'(Y)$
- Kurtosi(X) = $M_4'(Y)$

La skewness di X è il momento crudo di ordine 3 della Y, la kurtosi di X è il momento di sordine 4 di Y.

Questo nostro spazio $F(\Omega, R^M) = L^2(\Omega, R^M)$ spazio di Hillbert, identificato da:

$$< X, Y >= \sum_{w \epsilon \Omega} X(w)^T Y(w) P(w), \forall X, Y \in F(\Omega, \mathbb{R}^M)$$

Torniamo al modello vero e proprio, con $\mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_M$ $\mathrm{B}_n(w) = \mathrm{B}_n((w_k)_{k=1}^N) =$ u se $w_m = 1$ oppure d se $w_m = 0$ $\mathrm{B}_n : \Omega \to R$ lo ignoro tutte le successioni tranne l'n-esima.

ESEMPIO

N = 5, considero $\mathrm{B}_3(0, 1, 1, 0, 0)$, vedo il terzo elemento, è 1, allora tutto vale 'u'. Se $\mathrm{B}_3(0, 1, 0, 0, 1)$, il terzo elemento è 0, allora vale tutto 'd'.

Quanto vale $P(\mathrm{B}_n = u)$? essa è $P(\{w \in \Omega : w_n = 1\})$, ma questa probabilità dipende da $p^k q^{n-k}$ allora questa probablità è 'p', altrimenti sarebbe 'q'. Intuitivamente abbiamo pensato a

1/2, che sarebbe vero per p = 1/2, ma abbiamo detto che è un p generico.

Si dimostra che, con questa probabilità introdotta, $\mathrm{B}_1, .., \mathrm{B}_M$ sono totalmente indipendenti, per come sono state definite (dimostrazione sulle note).

Filtrazione

$\xi = P(\Omega)$ con P insieme delle parti. La sigma algebra degli eventi, cioè ξ, posso osservarla solo alla maturità T. Io però vorrei fare previsioni, non voglio aspettare. La filtrazione è un modello di informazione che si rileva progressivamente nel tempo. Andando avanti, la nostra informazione aumenta, ma c'è altra informazione che non è stata ancora rivelata. A t=0 osservo S_0, dell'andamento futuro del prezzo non so nulla, non so quale omega tra $(w_1^*, .., w_N^*)$ si rivelerà. A t = 0 la mia sigma algebra iniziale della mia filtrazione è $F_o = \{\Omega, 0\}$, informazione banale di Dirac. Passo a t = 1, sappiamo se è uscito un caso positivo o negativo, cioè se $w_1 = 1$ o $w_1 = 0$. Riesco a vedere $\{w \in \Omega, w_1 = 1\} = E_1$ oppure $\{w \in \Omega, w_1 = 0\} = E_0$ Allora avrò $F_1 = \{\Omega, 0, E_0, E_1\}$, inoltre F_0 è contenuto in F_1, inoltre è σ-algebra.

A t = 2 saprò se $w_1 = 1$, allora $w_2 = 1$ oppure se $w_2 = 0$. Se $w_1 = 0$, allora $w_2 = 1$ oppure $w_2 = 0$

$$E_{0,0} = \{w \in \Omega : w_1 \cap w_2 = 0\}$$

$$E_{0,1} = \{w \in \Omega : w_1 = 0 \cap w_2 = 1\}$$

$$E_{1,0} = \{w \in \Omega : w_1 = 1 \cap w_2 = 0\}$$

$$E_{1,1} = \{w \in \Omega : w_1 \cap w_2 = 1\}$$

Il mio spazio σ-algebra è $\{\Omega, 0, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ ma non basta, ad esempio mancano E_0 ed E_1, visto che F_0 è incluso in F_1). Devo aggiungere anche i complementari. Prendo dunque la più piccola sigma algebra contenente questi elementi. Una filtrazione di Ω è una famiglia $(F_n)_{n=0}^M$ dove Fn è sigma algebra di eventi contenuta in ξ, F_n è contenuto in :

$$F_{n+1}, \forall n = 0, .., M-1$$

Abbiamo visto che ogni $\mathrm{B}_n : \Omega \to R$ è una ξ-variabile aleatoria, rispetto a sigma algebra generale riesco a vedere valori assunti. Posso dire di più, ovvero che è F_n variabile aleatoria. Non devo aspettare la fine del fenomeno, ma basta che arrivi al tempo n. B_n lo saprò al passo n-esimo, non mi servono quelli dopo, e quindi non mi serve l'intero spazio. F_n è la più piccola sigma algebra generata da $B_1, ..., B_n$, cioè $F_n = \sigma(\mathrm{B}_1, .., \mathrm{B}_n)$.

Cosa è un processo stocastico, a fronte delle nuove conoscenze acquisite?

Un processo stocastico su Ω è una qualunque famiglia $(X_n)_{n=0}^N$ di variabili aleatorie $X_n : \Omega \to R^M$. Il processo si dice ADATTATO ad una filtrazione F_n se, $\forall n = 0, 1, .., N$ X_n è osservabile rispetto a F_n. Le v.a. del nostro processo devono essere osservabili rispetto a tutta l'algebra, ma anche rispetto alla filtrazione assegnata, ovvero in maniera progressiva, senza aspettare fino alla fine. Un processo stocastico è *predicibile* rispetto ad una filtrazione se, $\forall n = 0, ..., N$, la v.a. è osservabile rispetto a F_{n-1}, cioè so che valore prenderà la v.a. un tempo prima. Nel modello monoperiodale osservavamo a t=0 S_0 costruendo portafoglio, con quantità X del bond e quantià Y dello stock. A t = T vedevamo S_T, e ottenevamo $xB_T + yS_T$. Adesso ho a $t = 0$ ho portafoglio $(x_1 B_0, y_1 S_0)$, a t=1 $(x_1 B_1, y_1 S_1)$ Il valore che prende è un processo adattato (lo so solo al tempo corrispondente), ma la sua configurazione è predicibile (la forma assunta è sempre la stessa, e l'ho scelta al tempo 0). Gli aggiustamenti sono progessivi nel tempo, devo mettere in piedi strategia modificabile in 'corso d'opera'.

Lezione 18 maggio 2023

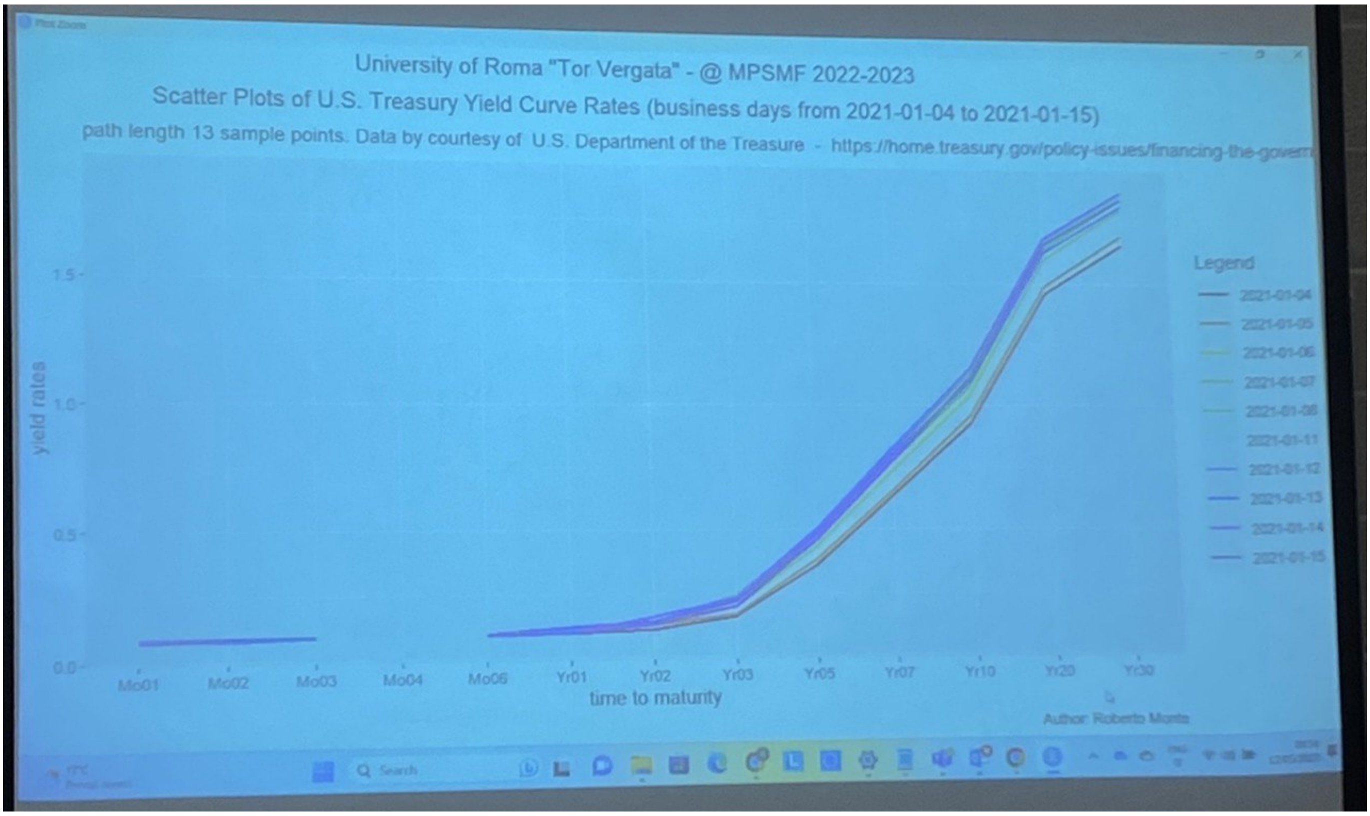
Oggi lezione più pratica, con R studio. Il file presentato mostra i dati del tesoro americano sul rendimento del Risk Free Rate. Sono dati storici. Il file verrà fornito in seguito. Viene mostrato uno scatter plot dei tassi di rendimento privi di rischio, *Treasury Yield Curve Rates*. Nel grafico, per ogni colore di "curva" è associato un giorno. Sull'asse x troviamo gli assi a x mesi privi di rischio, sull'asse y la curva dei tassi.

Cosa mi aspetterei, generalmente? Se molte persone vogliono un bond, si può elevare il prezzo del bond. Ovviamente, con domanda che cresce, ne cresce anche il prezzo, e quindi il rendimento diminuisce. Se compro un bond che ritorna *facciale* a 1 mese, 2 mesi, 4 mesi, più tardi mi danno i soldi, più il mio rendimento aumenta.

Nel grafico:

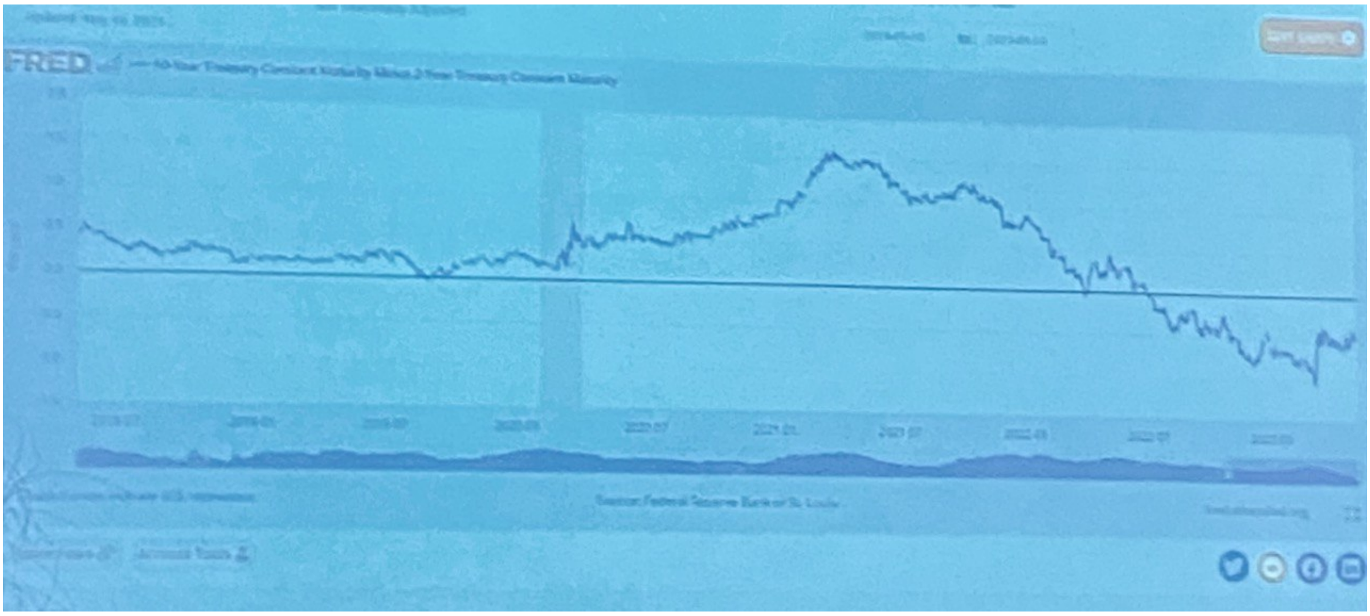
I tassi su scadenze a breve sono più alti rispetto a tassi su scadenze lunghe. In figura vediamo *inversione dei tassi*, perchè sul lungo termine vediamo come questi tassi diminuiscono. Questo perchè il mercato è incerto rispetto al futuro, e sul breve vogliono una forte remunerazione per prestare i soldi allo stato.

Vediamo un'**altra curva** dei tassi di interesse, dal 4/01/21 al 15/01/2021.



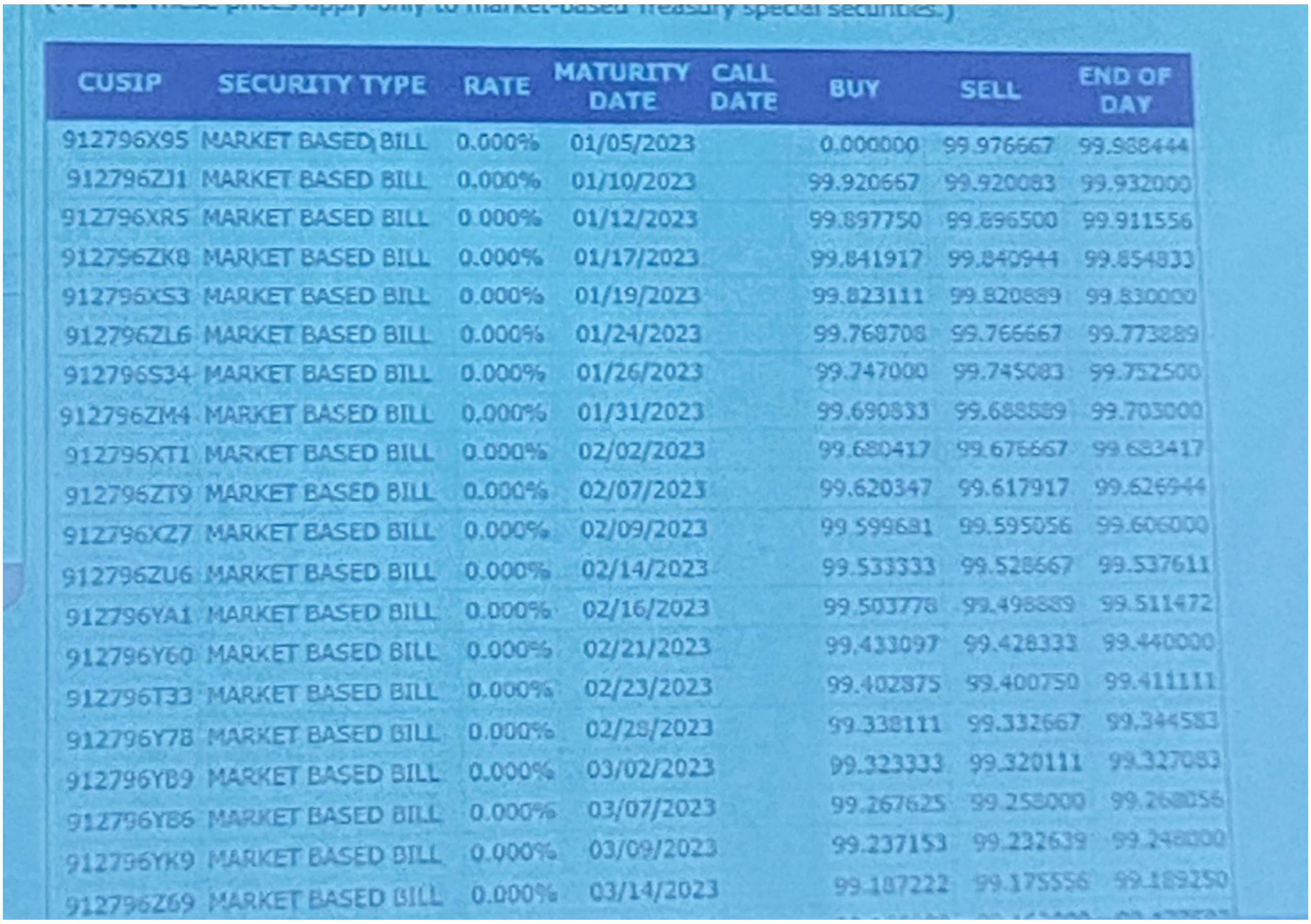
Qui è una curva naturale. I tassi a breve remunerano meno dei tassi a lunga. Questo è il comportamento naturale, non quello di prima. In figura c'è un buco, i dati mancano, posso allora lasciare il buco o interpolare.

Il prof ha raccolto dei siti di riferimento, dove ad esempio spiegano i tassi di interesse inversi, sintono di *recessione dei mercati* per alcuni. Per altri questa associazione non è vera. Sul sito *FRED* vediamo lo **SPREAD**, che fa ben vedere fenomeno dell'inversione, ovvero dove i tassi a 2 hanno superato di rendimento i tassi a 10 anni. Lo spread fa la differenza tra questi due, non è un grafico dei tassi, bensì dello spread. Un esempio è lo spread BTP-Bund, ovvero tasso interesse nostro vs tasso interesse tedesco. Se spread sale, allora noi per pagare il nostro debito, dobbiamo pagare interessi più alti, e ci indebitiamo ancora di più. Viceversa, se scende, ci indebitiamo di meno. Un investitore deve tenere conto di tali fattori. Chi investe sul debito pubblico italiano, lo fa consapevole del rischio rispetto al debito pubblico tedesco, ma con rendimento più elevato. **Rendimenti alti associati a rischio alto, rendimento basso associato a rischio basso**, è una *legge del mercato*. Tale grafico può essere utile nei progetti.



Altro sito: **Tesoro americano FedInvest**

Posso vendere e comprare titoli americani. E' un sito già visto. Specificando una data, vediamo i prezzi dei titoli in tale data. Questi titoli hanno un codice *CUSIP*, un *tipo*, se rilascia cedole (*rate*), scadenze. Il primo titolo non è stato acquistato, perchè si acquistava il 3 gennaio (lo abbiamo scelto noi nel motore di ricerca del sito) e maturava il 5 gennaio. Ovviamente il rendimento era certo, ma era anche bassissimo. Più aumenta maturità, più diminuisce il prezzo *end of day*. Scorrendo la lista, troviamo anche *Market Based Note*, che rilascia cedole, quindi mi aspetto un certo *rate*(cedola) come remunerazione, in corso di vita del titolo. Sono remunerato in corso d'opera. Il prezzo *end of day* ha un rialzo. Il tasso cedolare è la cedola in funzione del valore nominale del titolo. Su 100€ prendo 1,5% ogni tot mesi.



CUSIP	SECURITY TYPE	RATE	MATURITY DATE	CALL DATE	BUY	SELL	END OF DAY
912796X95	MARKET BASED BILL	0.000%	01/05/2023		0.000000	99.976667	99.988444
912796ZJ1	MARKET BASED BILL	0.000%	01/10/2023		99.920667	99.920083	99.932000
912796XR5	MARKET BASED BILL	0.000%	01/12/2023		99.897750	99.896500	99.911556
912796ZK8	MARKET BASED BILL	0.000%	01/17/2023		99.841917	99.840944	99.854833
912796XS3	MARKET BASED BILL	0.000%	01/19/2023		99.823111	99.820889	99.830000
912796ZL6	MARKET BASED BILL	0.000%	01/24/2023		99.768708	99.766667	99.773889
912796S34	MARKET BASED BILL	0.000%	01/26/2023		99.747000	99.745083	99.752500
912796ZM4	MARKET BASED BILL	0.000%	01/31/2023		99.690833	99.688889	99.703000
912796XT1	MARKET BASED BILL	0.000%	02/02/2023		99.680417	99.676667	99.683417
912796ZT9	MARKET BASED BILL	0.000%	02/07/2023		99.620347	99.617917	99.626944
912796XZ7	MARKET BASED BILL	0.000%	02/09/2023		99.599681	99.595056	99.606000
912796ZU6	MARKET BASED BILL	0.000%	02/14/2023		99.533333	99.528667	99.537611
912796YA1	MARKET BASED BILL	0.000%	02/16/2023		99.503778	99.498889	99.511472
912796Y60	MARKET BASED BILL	0.000%	02/21/2023		99.433097	99.428333	99.440000
912796T33	MARKET BASED BILL	0.000%	02/23/2023		99.402875	99.400750	99.411111
912796Y78	MARKET BASED BILL	0.000%	02/28/2023		99.338111	99.332667	99.344583
912796YB9	MARKET BASED BILL	0.000%	03/02/2023		99.323333	99.320111	99.327083
912796YB6	MARKET BASED BILL	0.000%	03/07/2023		99.267625	99.258000	99.268056
912796YK9	MARKET BASED BILL	0.000%	03/09/2023		99.237153	99.232639	99.248000
912796Z69	MARKET BASED BILL	0.000%	03/14/2023		99.187222	99.175556	99.189250

Esempio: Prendo un titolo che scade tra 10 anni, ogni 6 mesi paga cedola del 2%. Se titolo paga 100 a 10 anni, ogni 6 mesi ricevo 2 dollari, e alla fine dei 10 anni ricevo 100+2 dollari. Quale è il prezzo da pagare per questo titolo? Prendo il nominale 100, divido per 1+r, dove r è tasso privo di rischio oggi. Ogni 6 mesi prendo 2 dollari. Ovvero, ipotizzando che tasso privo di rischio rimanga invariato nei 10 anni: Parto dal tempo 0, voglio stimare quello che avrò tra 6 mesi, ovvero devo scontare tasso di interesse a 6 mesi, ma poichè ho tasso annuale, divido per 2. L'esponente è in funzione del mese (qui sotto è mese 1 perchè mese 1, tra 6 mesi sarà indice 6). Si tratta di **Interesse composto**. $\frac{2}{(1+r/2)^1}$ Se passo al secondo mese, ovvero è passato un anno, non uso r/2 bensì r, ad un anno e mezzo $r/2$, a due anni r e così via.

Alla fine avrò:

$$\frac{2}{(1+\frac{r}{2})^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \frac{2}{(1+\frac{r}{2})^3} + ... + \frac{100}{(1+r)^{10}}$$

In realtà il tasso lo prendo dalla *curva dei tassi*, ma questo lo definisce il mercato.

Esempio

$X_0(1+r_A) = X_T$ con r_A tasso di rendimento annuale.

$X_0(1+r_S)^2 = X_T$ con r_S tasso di rendimento semestrale.

Posso approssimare: $(1 + r_A) = (1 + r_S)^2 \approx 1 + 2r_S$ ovvero $r_S = \frac{r_A}{2}$

Ritorniamo al codice R

Dobbiamo sempre controllare il formato data, quando scarichiamo i dati, molto spesso le date sono in formato *testo*, e noi le convertiamo in *data*. E' consigliato usare *indici*, perchè senza specificarli ciò che vediamo come 1,2,3,.. non sono gli indici, bensì i *nomi delle righe*. Noi aggiungiamo anche gli indici, visivamente non cambia nulla, ma potrebbe ritornare utile. Altra colonna utile è quella dei *giorni alla maturità*, perchè sulla base del prezzo *end of day*, voglio calcolare il *rendimento*, ovvero rapportare $\frac{100-EndOfDay}{EndOfDay}$ nel ***periodo***, e per capirlo mi serve fare differenza tra Maturity date e data in cui ho prodotto questo elaborato. Devo calcolare quanti giorni mancano alla maturità rispetto al giorno in cui ho elaborato i dati. Spesso conviene inserire anche mesi ed anni alla maturità, convertendoli con la legge presente nel file. (dividendo rispettivamente i giorni per 30.4369 e 365.2425). Nel file non sono presenti titoli che rilasciano *cedola*, per una questione di semplicità. Li riconosco dal nome, e dal fatto che il campo che mostra la % di cedola è diversa da 0.

- *Maturity date* definisce la fine della durata del prestito, mi viene ritornato il prestito.
- L'*End of day* è valore del titolo alla fine della giornata. E' il valore X_0, che varia durante la giornata. Prendo quello a fine giornata. Non posso scegliere *Buy* nè *Sell*, perchè sono proposte, non so se siano state accettate.

Esempio

Prendo un titolo che mi restituisce 100 dollari il 10/01/2023. Il 3/01/2023 qualcuno ha comprato e venduto questo titolo, chi perchè pensava di fare profitto vendendo, e chi comprando. Questo titolo è oscillato di prezzo. A fine giornata ha raggiunto un certo valore. Questo ultimo valore è il valore che il mercato gli attribuisce. E' come il valore del bond a *fine giornata*, ogni giorno cambia!

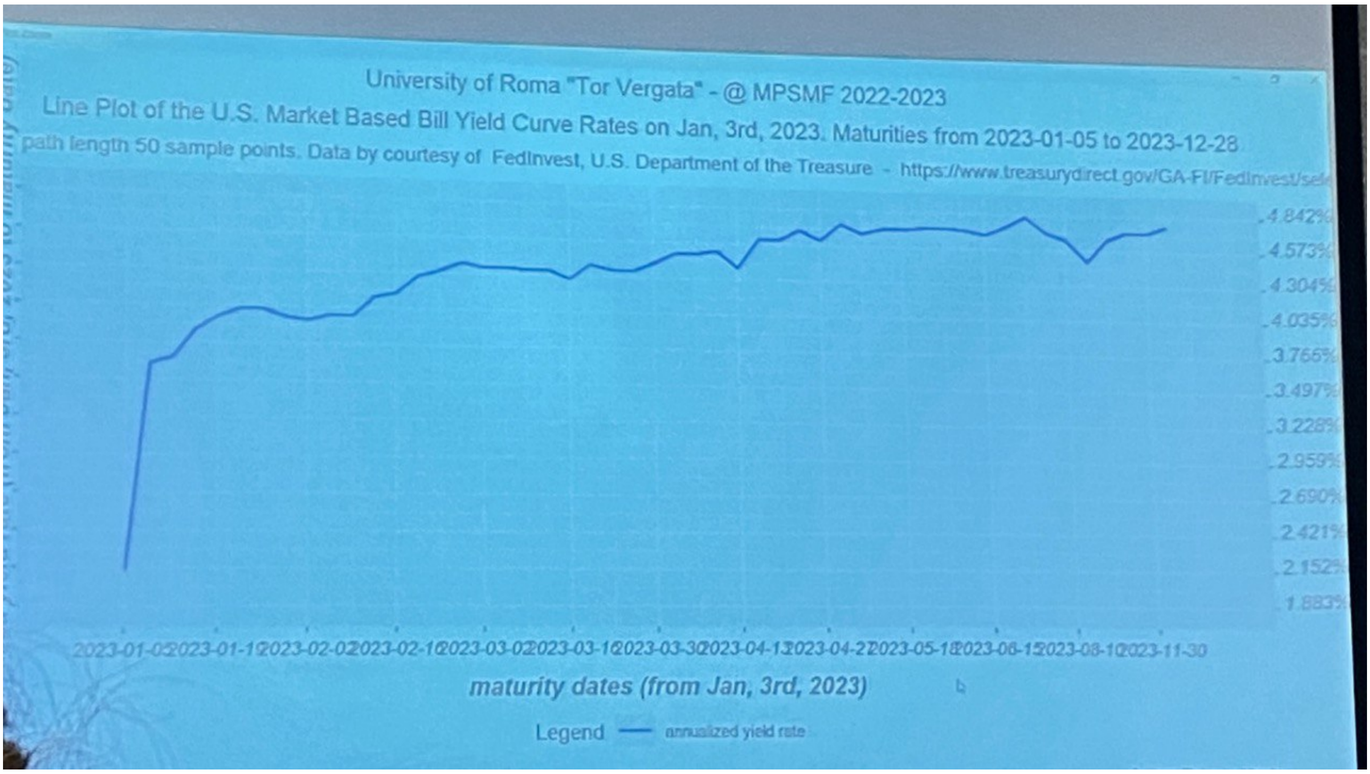
... Altre osservazioni su R

Ovviamente quando faccio comparazione, devo usare la stessa *unità* di misura (giorni o mesi o anni alla maturità). Le approssimazioni viste sopra (conversioni con quei fattori visti prima) è molto buona, fino alla 16esima cifra decimale abbiamo stessi risultati.

La FED ci fornisce *tassi annui percentuali*, non possiamo confrontarlo con *tassi dei periodi*. Se ho un *tasso di rendimento alla maturità* (normalmente molto bassi, come ad esempio 0.012%), questo è un **rendimento puro**, ovvero quanto mi rende il titolo considerata la durata dell'investimento. Per confrontarli con altri investimenti, devo trasformarli in *tassi annuali/mensili*. Lo si fa mediamente la formula: $(1 + r_A)^T = 1 + r_T$ con r_A tasso annuale ed R_T tasso del periodo. Allora $r_A = (1+r_T)^{\frac{1}{T}} - 1$ con $\frac{1}{T}$ è il periodo valutato in anni, T era 7 giorni, lo devo trasformare in anni.

Tasso sulla compravendita.

Più mi allontano dal 3/01/23 (inizio) più è in crescita. Quelli di prima erano i tassi della FED, riferiti a diverse maturità, sulla base dello storico. Qui i tassi partono tutti da stessa data. E' un grafico *forward looking*, quello della FED no. Stiamo dicendo che oggi, sul prestito con scadenza ../11/2023 rispetto alla data iniziale, avrò un tasso di circa 4.8%, ovvero dopo circa 11 mesi. Devo valutare questi 11 mesi con i dati della FED riferiti al 3 gennaio, cioè far partire i dati della FED da questo periodo, vedere il tasso dopo 11 mesi e confrontarlo.



Recap sulle Filtrazioni, 6.3

Definiamo $\Omega = \{(w_n)_{n=1}^N, w_n = 1, w_n = 0\}$ l'insieme delle successioni in cui abbiamo questi due eventi che si possono verificare. Questo è lo spazio.

$\xi = \mathcal{P}(\Omega)$ insieme delle parti.

La probabilità di un evento elementare è $P(w) = p^k q^{N-k}$ con $k = \{n \in \{1, ..., N\} : w_n = 1\}$ Definiamo la probabilità di un qualunque evento come estensione degli eventi elementari appartenenti all'evento: $P(E) = \sum_{w \in E} P(w)$

Su questo spazio noi trattiamo un fenomeno stocastico, osserviamo normalmente alla terminazione del fenomeno. Noi però vogliamo predirre il futuro, quindi prima del completamento. Ad esempio:

$0, 1, ..., n_0, n_0 + 1, ...$ Noi ad n_o dobbiamo fare delle scelte conoscendo il passato, non il futuro. Qui entra in gioco la filtrazione. Ricordiamo che $F_n \subset F_{n+1}$, ovvero l'informazione non viene mai persa. Supponiamo di avere un evento $E \in F_n$ con un certo n fissato. Cioè eventi della filtrazione in questione. Di questi eventi posso vedere in maniera precisa gli accadimenti prima dell'n fissato, dopo non lo so! Ho un punto (cioè una successione) in E, cioè $(w_n)_{n=1}^N = w \in E$

Di questo punto considero le prime n componenti con certi valori specifici. Tutti gli altri punti aventi stesse prime n componenti, ed il resto come mi pare, **devono stare in E**.

Supponiamo $n = 3$ e $N = 7$, cioè $w \in E \in F_3$ Osserviamo i seguenti $w \in E : w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 1$ Allora, dato tale evento che sta nella filtrazione, tutte le altre sequenze di w aventi le prime 3 componenti come quelle osservate, appartengono alla filtrazione. Quindi $(1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 1), ...$

Se $E \in F_1$, allora $w \in E$ può essere $w_1 = 1$ oppure $w_1 = 0$. Se prendiamo il caso $w_1 = 1$, e tale punto $\in E$, allora E contiene tutti gli altri punti aventi w_1: Allora $E = \{(1, 0, 0, ...), (1, 0, 1, ...), ...\} = E_1$, cioè la prima coordinata è 1, le altre tutti i modi possibili. Se ci fosse w_0, allora la prima coordinata sarebbe 0, le altre combinate in tutti i modi possibili.

La mia filtrazione $F1 = \{0, \Omega, E_1, E_0\}$ Le prime due componenti ci devono essere perchè trattiamo una σ - algebra.

mentre $F_2 = \{0, \Omega, E_0, E_1, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ cioè tutte le combinazioni "è andata bene/è andata male". Devono esserci anche unioni,complementari etc, perchè è una sigma algebra. $E_{0,0} \subset E_0$, $E_0 = E_{0,0} \cup E_{0,1} \in F_2$ Tutte le unioni possibili degli eventi di questa partizione sono nella filtrazione, la quale deve essere chiusa rispetto a tutte le unioni numerabili. Noi addirittura lavoriamo in un caso chiuso.

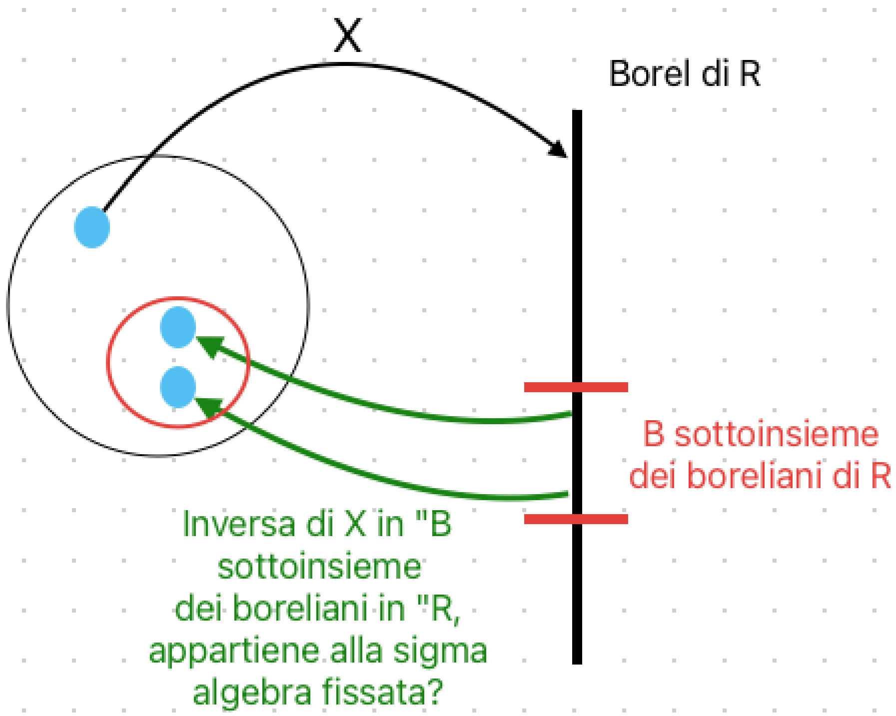
Supponiamo di poter distinguere le componenti fino alla n-esima, ovvero: $F_n = \{E_{0,0,0,..0_n}, E_{0,0,0,...,1_n}\}$, ovvero è una partizione di Ω. Devo fare tutte le unioni possibili.

Voglio uno strumento che rappresenti il flusso delle informazioni.

Processo stocastico

Formalmente, si prende uno spazio di probabilità (Ω, ξ, P), una successione $(X_n)_{n=0}^N$ con $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$, con ogni X_n che è una $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria su sigma algebra di Borel. Come lo capisco?

Prendo l'evento (cioè la controimmagine) $\{X_n \in B\} \in \xi, \forall B \in \beta(\mathbb{R}^M)$. Cioè prendo un B, sottoinsieme Borelliano di $\mathbb{R}^M$, vedo la controimmagine $E \subset \Omega$, che è un sottoinsieme di Ω. Se tale evento appartiene alla sigma algebra fissata, cioè $E \in \xi$, allora è un processo stocastico. (Da CPS: Suppogo di avere l'informazione $\Omega = \{1, ..., 6\}$, la $\sigma-$ algebra $\xi \doteq \{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}$, ovvero ξ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che raggruppa gli esiti in "pari" e "dispari". Se in B prendo '5', non posso associarla ad ξ, perchè in ξ non è presente l'evento "E' uscito esattamente 5").



Se l'informazione è tutta l'informazione possibile, cioè $\xi = P(\Omega)$, allora ogni successione di variabile aleatoria è un processo stocastico.

Siccome Ω è finito, non solo parliamo di processo stocastico, bensì è un processo stocastico di ordine k, $\forall k \in N$, cioè abbiamo ogni ordine, anche se a noi interessano i primi quattro. Se la matrice varianza-covarianza è invertibile, allora possiamo anche ricavare Skewness e Kurtosi.

La filtrazione rappresenta il **flusso temporale degli eventi**. Particolarizziamo allora la definizione di processo stocastico. Riprendo lo spazio di probabilità, ci metto la filtrazione $(F_n)_{n=0}^N$. Allora la successione $(X_n)_{n=0}^N$ è un **processo stocastico adattato** a $(F_n)_{n=0}^N$ se $\forall n$, X_n è una $F_n - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Prendo Boreliano, faccio controimmagine su X_n, essa è un evento E che deve stare in F_n (nella sigma algebra è scontata). Al tempo n posso osservare le realizzazioni della variabile aleatoria X_n.

Esempio in cui ciò non si verifica

Prendo $N = 7, n_1 = 3, n_2 = 5$. Prendo la variabile aleatoria $B_1(w) \doteq w_{n_1}$, cioè se $w = (1,0,1,0,1,0,1)$ allora $B_{n_1}(w) = B_3(w) = 1$, e se $w = (1,0,0,1,0,1,0)$ allora $B_{n_1}(w) = 0$. Semplicemente prendo come valore di tutto w il valore della componente in posizione n_1.

Se $0,1 \notin B(\mathbb{R})$ allora la controimmagine è l'insieme vuoto. Se $0,1 \in B(\mathbb{R})$ allora la controimmagine è tutto Ω. Se $B_1 \doteq \{0 \notin B_1, 1 \in B_1\} \doteq \{w \in \Omega : w_3 = 1\} \in F_3$, se posso distinguere le prime tre componenti, allora sicuramente posso distinguere solamente la terza. Questo vuol dire che in F_3 ci sono nelle prime due coordinate tutte le combinazioni possibili, nella terza devo avere '1'. Cioè vi appartengono: $E_{0,0,1} \in F_3, E_{1,0,1} \in F_3, E_{0,1,1} \in F_3, E_{1,1,1} \in F_3$; ma F_3 è σ-algebra, quindi anche l'unione vi appartiene, ma l'unione è ciò che abbiamo scritto sopra.

Processo predicibile nel tempo discreto, def 157

$(X_n)_{n=0}^N$ è **predicibile** rispetto a $(F_n)_{n=0}^N$ se $\forall n = 1, ..., N$ la variabile aleatoria X_n è $F_{n-1} - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Cioè posso osservare le realizzazione della variabile aleatoria "un tempo prima", è legato al discorso della "scelta". La composizione del portafoglio è un gruppo di variabili *predicibile*, lo stock invece è *adattato*. Noi scegliamo il portafoglio prima di osservare il valore dello stock, sono in anticipo su cosa accadrà, quindi è predicibile, ciò che faccio è alla luce della informazione vecchia. Faccio scelta iniziale alla luce di ciò che potrebbe accadere alla fine. Lo scopo è "cucire bene" tale modello sulla realtà, stimandone bene i parametri. Cerco di fare investimento sulla base di oggi, e poi vedo che succede domani. La ricchezza di domani dipende da ciò che si è realizzato domani. Riconfiguro il portafoglio e il processo va avanti. Guardo all'oggi per vedere cosa succederà domani (o un tempo futuro qualunque).

> Un processo stocastico predicibile è un tipo di processo stocastico in cui è possibile fare previsioni o predizioni sulla sua futura evoluzione con una certa precisione o affidabilità. In altre parole, un processo stocastico predicibile è un processo che presenta una certa regolarità o struttura nel modo in cui si evolve nel tempo, il che consente di fare previsioni ragionevoli sul suo comportamento futuro. I processi stocastici predicibili contengono ancora un certo grado di casualità o incertezza, poiché sono influenzati da fattori aleatori o imprevedibili.

Processo di Bernoulli, def 153 p.101

Consideriamo successioni di variabili aleatorie così definite: $(\beta_n)_{n=1}^N$ dove $\beta_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\beta_n(w) = \beta_n((w_k)_{k=1}^N)$

Essa guarda la componente n-esima, se essa è 1, cioè $w_n = 1$, allora vale "u", se vale '0' allora assume "d", con $u > d$, e probabilità q e p.

Prende il nome di **processo di Bernoulli.** E' un processo stocastico a valori reali $(F_n)_{n=1}^N-$ adattato, con $F_n = \sigma(\beta_1, ..., \beta_n)$, la più piccola $\sigma-$algebra tale che le β_i sono osservabili. Rappresenta il rumore di mercato, ciò che accade per caso.

Processo di conteggio del processo di Bernoulli, def 154

Consideriamo la successione di variabile aleatorie $(\mathbb{N}_n)_{n=1}^N$ dove $\mathbb{N}_n : \Omega \to \mathbb{R}$ dove, $N_0 \doteq 0$ e $N_n \doteq \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k - d}{u-d}$

cioè conta quanti 1 si sono realizzati fino al tempo N, infatti β_k assume valori "u" o "d", e la sommatoria può quindi addizionare valori 1 o 0. Sto sommando variabili aleatorie di Bernoulli standardizzate, allora N_n è una *variabile aleatoria binomiale*.

Sia β_n sia $(\mathbb{N}_n)_{n=1}^N$ sono $(F_n)_{n=0}^N-$ adattati. Comodi per descrivere il fenomeno.

Processo dei prezzi dello stock

Sfrutta il processo di Bernoulli. Consideriamo $(S_n)_{n=0}^N$ dove $S_0 \in \mathbb{R}$ (è una variabile di Dirac/numero che scegliamo noi.) $S_n \doteq \beta_n S_{n-1}, \forall n = 1, ..., N$

$S_1 = \beta_1 S_0$ assume uS_0 oppure dS_0, $S_2 = \beta_2 S_1 = \beta_2 \beta_1 S_0$ assume $u^2 S_0$ oppure $d^2 S_0$ oppure $udS_0 = duS_0$

Questo è il processo dei prezzi del titolo rischioso, è un processo *adattato*.

Ci chiediamo $P(N_n = k)$ cioè conto le volte che compare "1" nelle prime n componenti, allora può prendere valori $N(\Omega) = 0, 1, ..., n$.

La somma di Bernoulli è una v.a. binomiale, allora $P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

E' dimostrabile che $S_n = u^{N_m} d^{n-N_m} S_0$, ($u^{N_m} \doteq$ ho avuto N_m volte esito u) allora $P(S_n) = P(N_m = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Infatti abbiamo S_n che è l'insieme di valori assunti da una binomiale. Processo dei prezzi ha stessa probabilità del processo di conteggio.

Media del processo dei prezzi stock, prop 163:

Devo calcolare: $E[S_n] = \sum_{k=0}^{n} u^k d^{n-k} S_0 * \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = S_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (up)^k (dq)^{n-k} = S_0(up+dq)^n$

> Nella sommatoria, moltiplichiamo il peso per la probabilità nel primo step, raggruppiamo nel secondo, e risolviamo il ninomio di Newton nella conclusione.

Lo scopo del modello è fare delle **previsioni ottimali**, ma che vuol dire? Ogni variabile aleatoria ammette momento di qualunque ordine, perchè lo spazio è finito, l'integrale diventano somme, somme di cose finite sono sempre finite. Tutte le variabili aleatorie che possiamo considerare, cioè $X : \Omega \to \mathbb{R}^M \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, cioè spazio di Hilbert. Si può provare che questo spazio è di dimensione finita, anche se in realtà per noi è uno spazio euclideo. La sua particolarità è poterci mettere un prodotto scalare, ovvero: $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, con prodotto scalare:

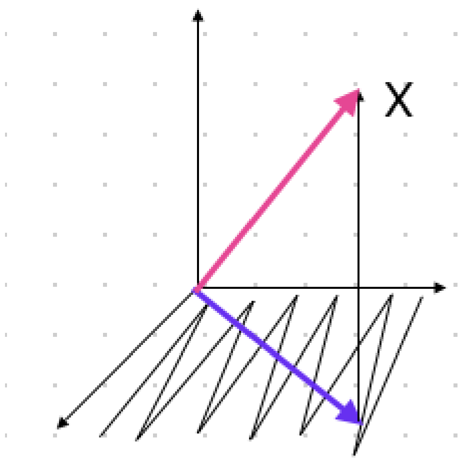
$$< X, Y >= X^T Y \doteq \sum_{m=1}^{M} \sum_{w\in\Omega} X_m(w) Y_m(w) P(w)$$

perchè $X = (X_1, ..., X_M)^T$ e $Y = (Y_1, ..., Y_M)^T$

Immaginiamo di avere $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, con X che è $F_N - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Ovvero posso osservarla solo alla fine, come una **call europea**, che conosco solo quando si realizza S_n perchè $C_N \doteq max\{S_n - K, 0\}$. Quale è la migliore stima di questa variabile aleatoria al passo $n < N$?

La migliore stima è la **Speranza condizionata** rispetto all'informazione "n", l'ultima che ho! Cioè cerco $E[X|F_n]$. Se considero il sottospazio di Hilbert $L^2(\Omega_n, \mathbb{R})$ con $\Omega_n = (\Omega, F_n, P)$, allora la speranza condizionata diventa la **proiezione ortogonale di X su questo sottospazio**.

Grafico: la distanza dal centro alla proiezione di X, l'oggetto ha distanza minima possibile. Distanza minima $||X - Y||^2 =< X - Y, X - Y >= E[(X - Y)^T (X - Y)]$ perchè trattiamo vettori, se caso reale è al quadrato. (M=1).



Presa $(X_t)_{t\in R_T}$, e una serie storica fino a 't', voglio predirre il suo futuro. Come faccio? Costruisco processo stocastico di cui la serie storica può essere vista come una traiettoria. La difficoltà è nell'overfitting, ok per il passato, meno per il futuro. Deve carpire le proprietà nell'insieme, non punto per punto. La predizione sarà $E[X_{t+h}|F_t]$, una banda di predizione (non una traiettoria precisa, è come dire "ho possibili futuri".) Per quanto riguarda la distanza dei minimi quadrati, questo è il meglio che posso fare.

Lezione 19 maggio 2023

Nella storia dei mercati, l'*inversione della curva dei tassi* è sempre stato un segnale di **pericolo**: c'è forte incertezza sull'economia. Con *inversione della curva dei tassi* si intende una curva dei tassi che ha forte incertezze sul breve termine anziché sul lungo termine. Gli investitori trovano trovano rischioso prestare soldi a breve scadenza perchè non riescono a valutare bene le prospettive. I tassi a lungo termine si sono già consolidati sui prezzi passati. I tassi a breve sono più *dinamici*. Se investo in bond di durata 10 anni i soldi sono li e vi rimangono. Se investo in un bond mensile, rientro della mia liquidità, che devo reinvestire, e devo chiedere un tasso più alto. Si muove più velocemente.

Fino a qualche giorno fa era scontata la *recessione dell'economia*. Abbiamo quindi un'inversione della curva dei tassi, però c'è anche una forte resilienza dell'economia. Quindi questo particolare fenomeno non è dovuto a problemi di recessione, ma è dovuto al fatto che le banche centrali per diminuire l'inflazione hanno alzato i tassi. Perché le banche centrali alzano i tassi in presenza di inflazione? Scopo della banca centrale è cercare di contenere l'inflazione.

Esempio 1

Ho 10 mila euro, ne investo 5mila in btp decennale con tasso del 3%. Tra 10 anni riprenderò questi 5mila euro, più le cedole durante il periodo. Gli altri 5mila li ho investiti in un bot a 6 mesi, con tasso di interesse 0,5%. Tra 6 mesi avrò 5mila euro sul conto, che vorrei però reinvestire. Io però ho un pò paura della situazione economica, e non voglio solamente lo 0,5%, vorrei di più, almeno l'1%. Questo porta ad una salita del tasso a breve. E il btp? O lo vendo, ma ci perdo perchè chi compra il btp decennale non lo vuole l'interesse del 3%, ma del 3.5%, quindi lo devo scontare. Oppure lo tengo, sperando che le cose vadano meglio. Quindi sono più *frenato* nello scegliere cosa fare.

Esempio Inflazione alta

Se oggi prendo un prestito, devo pagare interessi alti, ma andando avanti il valore di questi interessi diminuisce (1000$ di domani valgono meno di 1000$ di oggi **SE** nell'economia c'è stata una crescita anche per i salari, sennò il tasso rimane pesante. Altrimenti peggiora. Gli alti tassi servono per frenare l'economia, e quindi la gente non può comprare più e i prezzi si abbassano. Non è un *crollo positivo, bensì un crollo negativo*.

La teoria economica sostiene che in regime ideale l'inflazione dovrebbe stare intorno a 2%, perché una tale inflazione non è tale da scoraggiare gli investimenti economici, ma è tale da favorire le dinamiche di prestiti a lungo termine (mutui ...).

Perché non auspicare ad un'inflazione più bassa del 2%? Perché a quel punto la gente tenderebbe a *dilazionare* l'acquisto. Un minimo di inflazione tende a stimolare l'economia. Con inflazione bassa, una macchina dal valore di 15k € oggi avrà lo stesso valore anche tra un anno. Io ho la macchina vecchia, la faccio durare un altro pò, evito di spendere. Con inflazione più elevata, oggi la macchina costa 15k €, tra un anno 17k €, meglio prenderla oggi!

La banca centrale Europea di fatto, a differenza della FED, è un sistema *più decentralizzato* E' l'insieme delle banche europee.

Visione del sito Web: "TreasuryDirect"$\rightarrow$"FedInvest".

Gli script usati dal prof sono molto utili per stilare il codice del progetto.

Se vuoi calcolare il tasso di mercato per quanto di riguarda un Bond, devi fare il seguente ragionamento: Oggi il Bond ha un prezzo di mercato B_0 e paga una cedola ogni 6 mesi (supponiamo una cedola del 3%). Alla fine del primo semestre percepirò 3. Questo 3 lo devo dividere per $1+r_s$, cioè tasso di interesse semestrale, cioè uno *sconto*. Cioè se io presto oggi 100€ con un certo interesse, allora è come se stessi prestando 100€ a cui sottraggo tale interesse. Quindi ho $\frac{3}{1+r_s}$.

Alla fine del secondo semestre percepirò 3. Ora lo devo dividere per $(1+r_s)^2$. Per cui ho $\frac{3}{(1+r_s)^2}$.

La seguente somma mi fornisce il valore finale del Bond: $\frac{3}{(1+r_s)} + \frac{3}{(1+r_s)^2} + \frac{3}{(1+r_s)^3} + ... + \frac{3}{(1+r_s)^{20}}$

Andiamo a vedere delle previsioni dei prezzi dei mercato degli stock. Riprendiamo il concetto di *futures*. Alla scadenza vale S_t, io sto scommettendo sul valore che assumerà. Ricordiamo che noi entriamo nel contratto a costo 0, e dobbiamo riscattarlo alla fine, in ogni caso. In realtà, in un mercato completo, essendoci la misura di probabilità neutrale al rischio, comporta che: $F_0 = \frac{\tilde{E}[S_T]}{1+r_T} - K \doteq 0$ con r_T tasso di interesse da oggi alla scadenza del titolo. K lo pago oggi, non devo scontarlo! Esplicitando l'equazione sul tasso di interesse, otteniamo:

$$r_T = \frac{\tilde{E}[S_T]}{K} - 1$$

Perché il Futures predice così bene? Perché vale la legge della **domanda e dell'offerta**. Esso anticipa sempre il valore del titolo. Se dovessi costruire un predittore dei prezzi, dovrebbe essere migliore di quello che regola i futures.

Nei grafici visti, si va dal 2012 al 2022, il tasso privo di rischio stimato con delle scadenze. Il tasso privo di rischio è salito per poi scendere in prossimità delle scadenze, tendendo a 0 quando la scadenza è prossima. In un contesto *normale* questa curva dovrebbe essere completamente decrescente. Poichè ha una salita, è indice dell'effetto di *inversione dei tassi*.

Lezione 23 maggio 2023

Recap, da p.106 prop.170

Abbiamo introdotto la *speranza condizionata* $E[\cdot|\mathcal{F}] : L^2(\Omega, \mathbb{R}^M) \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$

dove a sinistra abbiamo delle $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie, e a destra un sottoinsieme $F - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie, infatti $F \subseteq \xi$.

Tale operatore lo abbiamo visto anche a CPS, per questo mostriamo solo qualche proprietà, come:

- $\int_F E[X|\mathcal{F}]dP = \int_F XdP \; \forall F \in \mathcal{F}$, da cui in particolare si ha:

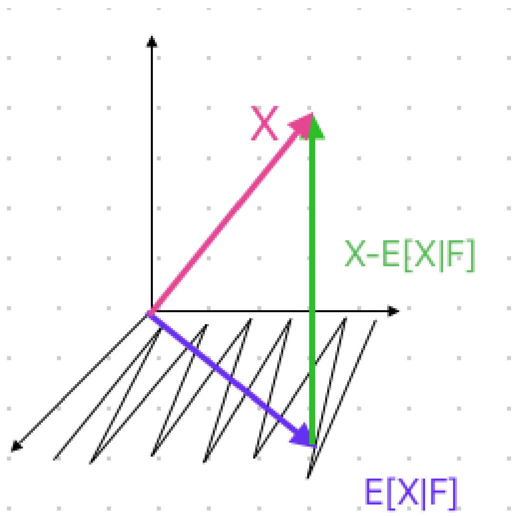
  $E[E[X|\mathcal{F}]] = E[X]$ mettendo $F = \Omega$
- Se $X \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M) \to E[X|\mathcal{F}] = X$ perchè X è già osservabile in funzione di $\mathcal{F}$, in quanto vi appartiene.
- Se $X \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$ e $Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, solo X è osservabile rispetto informazione $\mathcal{F}$. Allora X esce fuori. $E[XY^T|\mathcal{F}] = XE[Y^T|\mathcal{F}]$
- Se X è indipendente da $\mathcal{F}$, l'osservazione di X è indipendente da \mathcal{F}, quindi l'osservazione di $\mathcal{F}$ non dà "vantaggi", allora: $E[X|\mathcal{F}] = E[X]$
- tower property: $E[\ E[X|\mathcal{F}] \mid G] = E[\ E[X|G] \mid \mathcal{F}] = E[X|G] \ se \ G \subseteq \mathcal{F}$
- Se $\phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ convessa, $\phi \circ X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ $E[\phi(X)|\mathcal{F}] \geq \phi(E[X|\mathcal{F}])$. Caso di interesse è se $\phi(X) \doteq |X|$.

Vediamo due conseguenze di questa proprietà:

- $E[X|\mathcal{F}] = E[E[X|\mathcal{F}]^2] - E[X]^2$
- Se $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ allora $Var(E[X|\mathcal{F}]) \leq D^2[X]$. Cioè ho uno stimatore ($E[X|\mathcal{F}]$) di qualcosa (X). La variabilità di uno stimatore è sempre più piccola della variabilità dell'oggetto che stimo. Se devo stimare un oggetto complesso, e non ho tutte le informazioni a lui associate, ha senso pensare che la stima che farò sarà meno "precisa" rispetto al comportamento vero che può assumere l'oggetto stimato.

Proposizione 172:

$X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$ e $Y \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$ allora $Cov(X - E[X|\mathcal{F}], Y) = 0$, cioè l'approssimazione di X sullo spazio. Sono tutti *vettori*. Se la covarianza è 0, stiamo dicendo che la differenza è *ortogonale* allo spazio. **Le speranze condizionate sono *proiezioni ortogonali*.**



Def 174 - Serie di Martingala

Riconsieriamo lo spazio di probabilità **C.R.R.** (Ω, ξ, P).

Prendiamo $(X_n)_{n=0}^{N}$ con X_n che sono $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie.

La successione è di **Martingala** se:

$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}\ \forall\ n = 1, ..., N$ Cioè il predittore migliore del dato di domani, è fornito dal dato di oggi. Notiamo che ha media costante.

Nel caso delle previsioni del tempo, se oggi c'è il sole, è probabile che ci sia anche domani. Non è detto che ci azzecco, però dovrei trovare un predittore migliore. E' un *benchmark* per la costruzione di altri predittori. Se non faccio meglio di questo, allora il predittore che abbiamo trovato non è migliore del **predittore Martingala**. Nello spazio C.R.R. abbiamo tutti i momenti, quindi non esistono altre condizioni da rispettare.

Processo di Markov - def. 175

Abbiamo due condizioni:

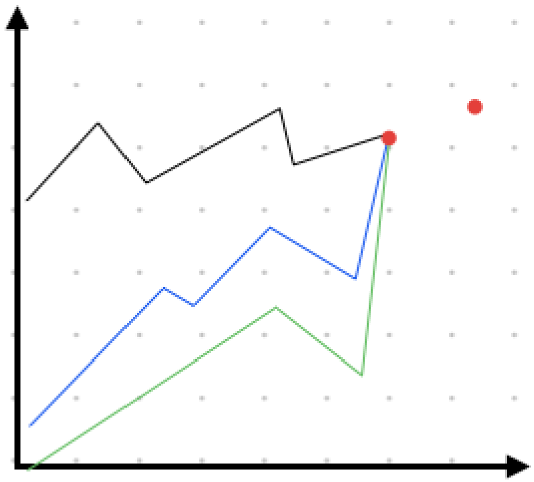
- $(X_n)_{n=0}^{N}$ è $\mathcal{F}_n - adattato$. Vuol dire che la successione è osservabile.
- $E[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = E[f(X_n)|\sigma(X_{n-1})]$ ovvero la storia del processo non gioca nessun ruolo nelle predizioni future, ciò che mi basta è "il punto precedente". Infatti Markov è *memoryless*, mentre $\sigma(X_{n-1})$ è l'ultima informazione data dal processo, cioè la sigma algebra generata solamente dalla variabile aleatoria X_{n-1}. $\mathcal{F}_{n-1}$ è invece generata da

tutte le $n-1$ successioni, cioè tutta la traiettoria fino a X_{n-1}. Noi stiamo dicendo che non ci serve tutta la traiettoria, ma solo l'ultimo valore assunto dalla traiettoria.

Una formulazione equivalente ma più intuitiva è:

$$P(X_n \in B|\mathcal{F}_{n-1}) = P(X_n \in B|\sigma(X_{n-1}))$$

In pratica, voglio arrivare al punto B, ho percorso la strada fino ad un certo punto, quale è la probabilità che, da dove sono arrivato, riesco ad arrivare a B? (componente a sinistra dell'equazione). A destra abbiamo invece la probabilità di arrivare in B sapendo solo l'ultimo punto in cui siamo arrivati. **La storia (traiettoria) non ha importanza.**



Proposizioni 176,177,178

Sia $\mathcal{F}_n \doteq \sigma(\beta_1, ..., \beta_n)$ l'informazione che ho osservando le realizzazioni del rumore.
Se avessi i prezzi $S_n = \beta_n S_{n-1}$ allora posso dire (ma non lo dimostriamo)
$\sigma(S_0, ..., S_n) = \mathcal{F}_n \quad \forall n = 1, ...N$ ed $S_0 \in \mathbb{R}_+$, cioè *osservare i rumori è come osservare i prezzi.*

La conseguenza è molto importante, infatti:
$E[X|\mathcal{F}_n] = E[X|\sigma(S_0, S_1, ..., S_n)] = E[X|S_0, S_1, ..., S_n]$

$E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = (up + dq)S_{n-1}$ perchè:
$E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[\beta_n S_{n-1}|S_0, S_1, ..., S_{n-1}] = S_{n-1}E[\beta_n|S_0, ..., S_{n-1}] = S_{n-1}E[\beta_n] = S_{n-1}(up + dq)$

Se volessi stimare il valore di S_n, vuol dire che sto stimando una traiettoria di prezzo che ho osservato, che mi ha portato a $n-1$, da cui ripartire per arrivare ad n. La stima migliore è la media del rumore per lo stato corrente. In pratica il modo migliore per proseguire è attraverso la media.

Non è una **Martingala**, perchè dovremmo avere solo S_m e non:
$E[S_n|\mathcal{F}_m] = E[\beta_n \cdots \beta_{m+1} S_m | S_0, S_1, ..., S_m] = S_m E[\beta_n \cdots \beta_{m+1} | S_0, ..., S_m] = S_m E[\beta_n \cdots \beta_{m+1}] = S_n (up + dq)^{n-m}$caso generale con $m, n \in \{0, ..., N\} : n > m$

Rendimento

$r_n \doteq \frac{S_n - S_0}{S_0} \ \forall n = 1, ..., N$

$r_{m,n} \doteq \frac{S_n - S_m}{S_m} \ \ \forall \ n, m \quad : m = 1, ..., N \ n > m$

$r_n(w) = u^k d^{\ n-k} - 1 \quad \forall n = 1, ..., N \ e \ k = 1, ..., n$

$P(r_n = u^k d^{;n-k} - 1) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Parte finanziaria - BS PORTAFOGLIO - def 181-183

$\pi = (\pi_n)_{n=1}^N = ((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N)$ è un BS portafoglio, la prima quantità indica l'investimento in *bond*, la seconda l'investimento in *stock*. Poniamoci al tempo 0, e osserviamo il bond B_0 e lo stock S_0. Compriamo una certa quantità X_1 di Bond e Y_1 di stock. Il nostro portafoglio prende valore $X_1 B_0 + Y_1 S_0 = W_0$ al tempo t=0, perchè X_1, Y_1 le scegliamo al tempo 0, sono delle "false variabili aleatorie", in quanto sono la scelta dell'investimento, sono $\mathcal{F}_0 - \beta(\mathbb{R})$ variabili aleatorie. Al tempo t=1 abbiamo $W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1$, posso riconfigurare il portafoglio. Modifichiamo le quantità, costituendo un nuovo portafoglio $X_2 B_1 + Y_2 S_1$, cioè prima ho osservato e poi aggiustato. Questi oggetti sono sempre $\mathcal{F}_{n-1} - \beta(\mathbb{R})$ variabili aleatorie, quindi il processo è *predicibile*. Perchè allora non diciamo che sono deterministiche, visto che lo facciamo passo passo? Perchè il primo portafoglio è costituito al tempo 0, sto costruendo la strategia, ed X_1 e Y_1 sono deterministiche, però andando avanti io dovrò considerare scelte diverse a seconda dei valori futuri. (esempio: litigo co a piskella, devo preventivare ogni sua possibile risposta, devo avere un *ventaglio* di scuse. Non so cosa accade nel futuro, ma devo essere pronto). Noi scegliamo di volta in volta osservando lo stock, ma la **pianificazione** fatta al tempo 0 non è deterministica, quello che faremo dipenderà dalla vera realizzazione dello stock. Se lo stock va su due volte, allora prendo un certo X_1, se va su e giù farò altro, li *pianifico* nel reticolo, non è che li so. Se li vedo nel reticolo, sono tutti determistici. Ma al tempo 0 sono probabilistici. È naturale ipotizzare che nei vari intervalli l'operatore finanziario scelga le componenti X_n e Y_n del proprio portafoglio in funzione dei valori che si attende possano realizzarsi per *bond* e *stock*. L'evoluzione del bond è *deterministica*, quindi B_n è sempre prevedibile. Il miglior predittore del prezzo dello stock S_n è $(up + dq)S_{n-1}$. Possiamo quindi dire che la riconfigurazione del portafoglio (leggasi come la scelta delle quantità X_n e Y_n) dipende **solo** da S_{n-1}, cioè saranno in sua funzione.

Portaglio autofinanziante - def 185

E' un portafoglio che, nelle riconfigurazioni, non richiede inserimento o prelievo di ricchezza.
Parto da ricchezza iniziale $W_0 = 0$ e creo portafoglio $X_1 B_0 + Y_1 S_0 = 0$, ho due alternative:

- Prendere a prestito l'ammontare del bond (quindi vado "in negativo", perchè lo chiedo in prestito), ed usarlo interamente per acquistare lo stock (qui vado "in positivo", perchè acquisto quantità).

- Vendere allo scoperto sullo stock (vado in "negativo" sulla quantità di stock posseduti) e depositare sul bond. (acquisto quantità "positive" di titolo non rischioso).

Osservo il valore $W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1$, riconfiguro $X_2 B_1 + Y_2 S_1 = W_1$

Cioè la riconfigurazione deve avere stesso valore del valore osservato, ma non vuol dire che $W_0 = W_1 = ...$
La condizione di *autofinanziamento* è:
$X_n B_n + Y_n S_n = X_{n+1} B_n + Y_{n+1} S_n \quad \forall n = 1, ..., N-1$
Un portafoglio autofinanziante è sia adattato che predicibile.

BS Portafoglio autofinanziante d'arbitraggio - 186

Le condizioni che dobbiamo avere per trovarci in *arbitraggio* è:

- $W_0 = 0,\ P(W_N \geq 0) = 1$, $P(W_N > 0) > 0$

Anche nel caso multiperiodale, un arbitraggio è un portafoglio che a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con *certezza*, cioè indipendentementemente dagli esiti di mercato che si possano verificare, che *non si subiscano perdite*, con probabilità di guadagno **strettamente positiva**. Qui assumo che il portafoglio possa cambiare, mentre nel monoperiodale dovevo rispettare queste cose al tempo 0. La condizione non deve valere neanche ai tempi intermedi, non solo a quello finale. La condizione non deve valere mai, altrimenti ho arbitraggio.

Lezione 30/05/23

Recap

- *Legge di trasformazione dello stock*: $S_n = \beta_n S_{n-1}\ \forall n = 1, ..., N$ che porta con sè alcune conseguenze, come.
  - Prop 178:
    $E_m[S_n] = E[S_n|\mathcal{F}_m] = (up + dq)^{n-m} S_m \ \ \forall n, m = 1, ..., N \ \ : m < n$

    Iterandola, abbiamo:
    $S_n = \beta_n \cdot ... \cdot \beta_{m+1} S_m$, infatti:
    $E_m[\beta_n \cdot ... \cdot \beta_{m+1} S_m] = E_m[\beta_n \cdot ... \cdot \beta_{m+1}] S_m = E[\beta_n] \cdot ... \cdot E[\beta_{m+1}] S_m$
    Siamo passati dalla speranza condizionata al prodotto delle speranze perchè le varie β_i sono indipendenti dalla sigma-algebra $\mathcal{F}_m$
  - Possiamo introdurre il *tasso di rendimento*.
    Nel **monoperiodale** era $r_T \doteq \frac{S_T - S_0}{S_0}$.
    Nel **multiperiodale** abbiamo:

    $r_n = \frac{S_n - S_0}{S_0}$ per un singolo periodo $t = t_n$, e

    $r_{m,n} = \frac{S_n - S_m}{S_m}$ nel periodo $[t_m, t_n]$ dove $m < n$
  - Dalla proposizione 179:
    $r_n = \frac{S_n - S_0}{S_0} = (u^k d^{n-k} - 1)_{k=0}^{n}$ con

    $P(r_n = u^k d^{n-k} - 1) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
  - Abbiamo poi visto il **BS-Portafoglio** (def 182):

    $\pi = ((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N)$ con le quantità di bond e stock acquisiti al tempo n. (NB: sulle slide le successioni partono da 0, ma il prof ha detto di volerle scrivere così.)

    La ricchezza del portafoglio parte da $n = 0$, cioè $(W_n)_{n=0}^N$, ad esempio $W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1$, e allora $W_n = X_n B_n + Y_n S_n$, ma come ci arrivo? Osservo i tempi B_0, S_0, scelgo le quantità X_1, Y_1 e compongo $W_0 = X_1 B_0 + Y_1 S_0$. A noi interessa particolarmente $W_0 = 0$, ovvero prendiamo a prestito il bond (+) e compriamo lo stock(-), o viceversa. L'idea è che con ricchezza nulla, per comprare qualcosa devo vendere altro. Il portafoglio W_0 viene creato tra il tempo 0 e il tempo 1, ovvero $[t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{N}]$, in questo lasso di tempo non ho cambiamenti di bond e stock. Il portafoglio è *autofinanziante*.
  - Da questo portafoglio deriviamo due osservazioni:

        - Tale processo è "$\aleph - adattato$" (la F è "gotica", non pare una F.)
          $W_n - \aleph_n - \beta(\mathbb{R})$ variabile aleatoria.
        - $\pi = ((X_n)_{n=1}, (Y_n)_{n=1})$ è un processo $\aleph - predicibile,$ e
          $(X_n, Y_n) - \aleph_{n-1} - \beta(\mathbb{R}^2)$ variabile aleatoria. (NB: A me sembrava che il prof usasse $\mathcal{F}_n$ e $\mathcal{F}_{n-1}$, senza la lettera gotica, per entrambe le definizioni. BOH)
    - Ai fini della scelta di X_n, Y_n ci interessa solo lo stock, perchè il bond è noto. Quindi sia X_n sia Y_n sono in funzione di S_{n-1}.
    - Da CPS, vale che $E[Y|X] = E[Y|\sigma(X)] = f(X)$ dove f è una opportuna funzione boreliana. Il miglior predittore di Y dato X è sempre dato da una funzione di X. Se fossero indipendenti? $f(X) = E[Y]$ che però è una costante. Se $Y = g(X)$? si porta fuori dalla speranza condizionata, allora $g(X) = f(X)$. I casi che più ci interessano sono tutti tranne questi due casi *estremi*. Un esempio è se X, Y sono congiuntamente gaussiane, dove esiste una formula che ci dice:
      $E[Y|X] \doteq \alpha + \beta \cdot X = f(X)$

BS-Portafoglio d'arbitraggio

Se parto da ricchezza iniziale nulla e ho portafoglio autofinanziante, ho arbitraggio se
$W_0 = 0 \to P(W_n \geq 0) = 1$ e $P(W_n > 0) > 0$

Nel multiperiodale (def 187) **non avere arbitraggio** coincide col dire:
$r^+_{n-1,n} > r_{norisk} > r^-_{n-1,n}$, ovvero
$u - 1 > r_{norisk} > d - 1$ da cui $u > 1 + r > d$,
stessa condizione vista nel monoperiodale. Supponiamo di violare questa condizione, allora al tempo t=1 posso realizzare portafoglio che *sicuramente* mi dà guadagno. Nel monoperiodale *finisce qui*, nel **multiperiodale** questo guadagno lo metto *tutto sul bond*, e quindi mi rimane fino alla fine.

Probabilità neutrale al rischio, def 188

E' una probabilità $\tilde{P} : \xi \to R_+$ tale che:

- $\beta_1, ..., \beta_n$ siano **totalmente*** indipendenti* rispetto a $\tilde{P}$. Se prendo un sottoinsieme e calcolo $\tilde{P}(\beta_{j_1}, ..., \beta_{j_n}) = \tilde{P}(\beta_{j_1}) \cdot ... \cdot \tilde{P}(\beta_{j_n})$ per ogni sottoinsieme.
- $S_{n-1} = \frac{\tilde{E}_{n-1}[S_n]}{1+r}$ da cui deduciamo che:
    - $S_m = \frac{\tilde{E}_m[S_n]}{(1+r)^{n-m}}$

- $S_0 = \frac{\tilde{E}[S_N]}{(1+r)^N}$

Dalla [Prop 190]:

Come nel caso monoperiodale, se esiste una probabilità neutrale al rischio, essa è *unica*. Dipende dal fatto che lavoriamo con un modello *binomiale*. Ho modellato l'incertezza come una bernoulliana. Se la modellassi diversamente (es: trinomiale: "va bene", "va male", "non cambia nulla") non è detto che ciò valga ancora! (Può essere idea di un progetto!)

Inoltre, in assenza di portafogli BS d'arbitraggio, esiste un'unica probabilità neutrale al rischio.

Se $u > 1 + r > d$, si ha $\frac{1+r-d}{u-d} > 0$ e $\frac{u-(1+r)}{u-d} > 0$, allora la loro somma $\frac{1+r-d}{n-d} + \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1$, allora stiamo definendo una probabilità così fatta:

$\tilde{P}(\beta_n = u) \doteq \frac{1+r-d}{n-d} \doteq \tilde{p}$

$\tilde{P}(\beta_n = d) \doteq \frac{u-(1+r)}{u-d} \doteq \tilde{q}$

Perchè sappiamo che va bene? Perchè lo abbiamo fatto per p, q quindi che problemi dovrei avere se li chiamo $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$? Si ha infatti:

$\tilde{E}_{n-1}[S_n] = S_{n-1}(1 + r)$, ma $S_n = \beta_n S_{n-1}$, allora:

$\tilde{E}_{n-1}[\beta_n S_{n-1}] = \tilde{E}_{n-1}[\beta_n]S_{n-1} = \tilde{E}[\beta_n]S_{n-1} =$

$= (u\tilde{p} + d\tilde{q})S_{n-1} = (u \cdot \frac{1+r-d}{n-d} + d \cdot \frac{u-(1+r)}{u-d})S_{n-1}$

$= (r + 1)S_{n-1} = (r + 1) \cdot \frac{\tilde{E}_{n-1}[S_n]}{1+r}$ = $\tilde{E}_{n-1}[S_n]$
Il processo dei prezzi scontati è una *Martingala*, e il processo dei prezzi è un *processo di Markov*.

Abbiamo detto che se esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio (se non ci sono portafogli bs d'arbitraggio). Anche il viceversa è vero! Come nel monoperiodale.

Se riprendiamo il discorso delle Call & Put, avevamo $C_T - P_T = S_T - K$. Se ipotizziamo che il mercato sia descrivibile tramite binomiale?

La legge sopra vale sempre deterministica, ma deve succedere che $C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r_T}$, dipendente dal fatto che sul mercato non ci siano arbitraggi. Si vede che la legge della domanda e dell'offerta segue in maniera forte questa legge derivata dall'ipotesi in cui il modello binomiale catturi l'essenza dei mercati reali, in assenza di arbitraggio.

Opzioni europee p.120

Contratti che ci danno diritto di acquisire o vendere lo stock ad un prezzo fissato detto *Strike* in un tempo T (detto anche N).

$C_N = C_T = max\{S_T - K, 0\}$ e $P_N = P_T = max\{K - S_T, 0\}$

Chi sono C_0 e P_0? Nel monoperiodale erano $P_0 = \frac{\bar{E}[P_T]}{1+r}$ e $C_0 = \frac{\bar{E}[C_T]}{1+r}$, ma adesso *devo valutarle in tutto l'arco temporale della loro vita*.

$S_T = u^j d^{N-j} S_0 \; \forall j = 0, 1, ..., N$

Se volessi valutare il $max\{S_T - k, 0\}$?

Si può dimostrare che, definito $n_K = min\{n \in N : u^n d^{N-n} S_0 \geq K\}$ allora ho un sistema in cui: $C_N = 0 \quad \forall n = 0, 1, ..., n_k - 1$, oppure $C_N = u^k d^{N-k} S_0 - K \quad \forall n = n_K, ..., N$

Se k cresce, è più facile che la call valga 0. E' dimostrabile che $n_k = [\frac{ln(K) - (ln(S_0) + N \cdot ln(d)}{ln(u) - ln(d)}]$ di cui prendo la parte superiore.

Portafoglio autofinanziante di copertura

E' di tipo $\pi = ((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N)$ in cui $C_T = X_T B_T + Y_T S_T$ (uguale per la Put). Supponiamo di vendere una call allo strike "K", se alla scadenza il titolo supera "K", la call vale $S_T - K$, che è una retta di 45 gradi. Potenzialmente avrei perdite illimitate. L'idea è: vendo la call ad un certo prezzo (quale? da capire!) e con tale ricavo metto su un portafoglio, investendo nel bond e nello stock, in modo tale che al tempo finale sono in grado di ripagare il costo della call.

Se andassero sotto k? è tutto guadagno!

Non osservare questo principio ha portato alla crisi sui mutui del 2007/2009. Il mercato andava forte, le banche credevano di poter dare credito a chiunque. Questi crediti, che poi sono diventanti importanti, sono stati usati per creare dei derivati (li hanno "ammassati") per poi venderli. Il problema? I titoli erano stati valutati male, e quasi tutti sono andati in default. E' stato un difetto di valutazione.

Lezione 23 - 06/06/23

> Il prof ha caricato la versione 16.1 delle note, da quello che ha detto, per non perdere troppo tempo, farà riferimento a formule e pagine del libro quando spiega.

Da CPS: Quando abbiamo (Ω, ξ, P) e una informazione ridotta/ $\sigma - algebra\ \mathcal{F} \subseteq \xi$ $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M) \to E[X|\mathcal{F}] \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$

Se $\mathcal{F} = \sigma((F_n)_{n \in N})$ allora $E[X|\mathcal{F}] = \sum_{n \in N} E[X|F_n] \cdot 1_{F_n}$

Se $\mathcal{F} = \sigma(X_1, ..., X_N)$ ed esiste $f : \mathbb{R}^M \to R$ boreliana, allora $E[X|\mathcal{F}] = E[X|X_1, ..., X_N] = f(X_1, ..., X_N)$

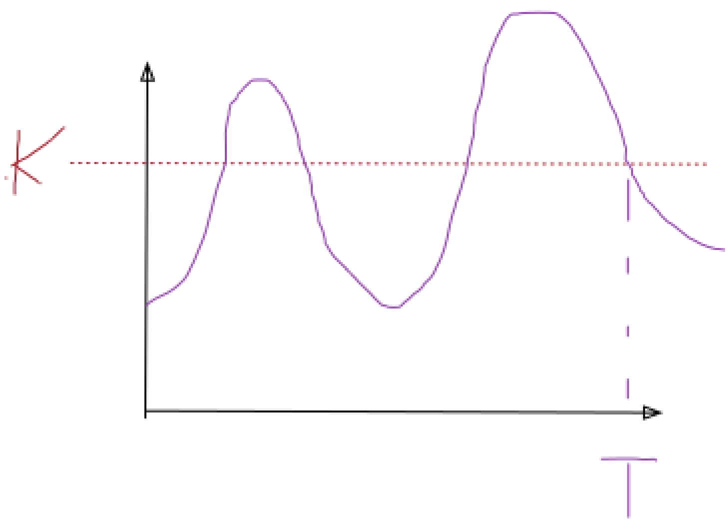
Questi due teoremi sono molto utili. Ricordiamo che $S_n = \beta_n S_{n-1}$ con $\beta_n = u$ con probabilità p oppyre d con probabilità q

Derivato

E' un titolo in cui il payoff al tempo T dipende dagli stati di S. Ne è un esempio il future, opzioni call e put; è una scomessa su una performance di un altro tipo, ovvero dipende da come vanno le cose per il titolo *sottostante*.

Un derivato di questo tipo mi permette di esercitare/riscuotere la scommessa al tempo T, non posso riscuoterlo ad un tempo precedente. (ES: se AS Roma deve fare 60 punti entro fine campionato, devo aspettare la fine del campionato anche se ho già superato i 60 punti). Questi sono detti derivati *europei*. Esistono anche *derivati americani* in cui posso riscuotere ad un tempo $t \leq T$

Esempio: Compro uno strike S con opzione americata al tempo K. Titolo sale, potrei subito esercitare l'opzione per comprare il titolo. Posso anche aspettare, con il rischio che il titolo si abbassi. Al tempo T però devo per forza fare la mia scelta.



Possiamo ulteriormente classificare i derivati in $path - independent$ e $path - dependent$, ovvero dipendenti o meno dalla traiettoria. Ne è un esempio del primo tipo il derivato americano, perchè mi interessa solo il valore al tempo K, quindi hanno un comportamento markoviano, essendo indipendenti dal passato. Un esempio di path-dependent può sfruttare la media dei valori per stabilirne un prezzo. Entrambi sono *titoli europei* comunque.

Questo discorso è importante perchè, se prendo derivato di tipo europeo, il *payoff* è:

- Nel caso *path-indipendent*, $F_D(S_N)$, ovvero funzione dello stato finale.
- Nel caso *path-dipendent* è una funzione di tutto il processo, cioè $F_D(S_1, ..., S_N)$.

Se volessi sapere il valore del derivato al tempo 0? cioè $F_0(0)$ quanto lo devo pagare?

- $F_D(0) = \frac{E[F_D(S_N)] \mid \mathcal{F}_0]}{(1+r)^N} = \frac{E[F_D(S_N)]}{(1+r)^N}$ nel caso *path-indipendent*. ($\mathcal{F}_0$ è la $\sigma - algebra$ banale, che quindi ometto).
- $F_D(0) = \frac{E[F_D(S1,..,S_N)]}{(1+r)^N}$ nel caso *path-dependent*.

Dal libro

Abbiamo visto cosa sia il derivato, vediamo le definizioni 199 e 200.

Definizione 199 *Chiamiamo* derivato europeo di sottostante S *un titolo* D *il cui payoff alla maturità* T *dipende dai possibili accadimenti, positive e negativi, che occorrono al titolo* S.

La caratteristica di un derivato di tipo europeo D è che può essere esercitato solo alla scadenza. Quindi, il suo payoff è computabile solo dopo aver osservato la successione $\omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N$ di tutti gli accadimenti occorsi al titolo S dal tempo t_1 al tempo $t_N \equiv T$. In conseguenza, il payoff del derivato D è rappresentabile come una $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ variabile aleatoria $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$. Sulla base di questa considerazione, introduciamo la seguente definizione.

Definizione 200 *Chamiamo* payoff *di un derivato europeo una qualunque* $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *variabile aleatoria* $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$.

Nell'osservazione 201 vediamo che w è la successione di elementi "andati bene" ed "andati male", sono 2^N.

Osservazione 201 *Stante l'Equazione 3.55 per ogni derivato di tipo europeo esiste una funzione boreliana* $F_D : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$D_T(\omega) = F_D(S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)) \tag{3.79}$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Nella definizione 202 vediamo i titoli che possiedono l'indipendenza. Vengono evidenziati anche i valori C_T e P_T, nel caso europeo (indipendenti) e asiatici (dipendenti).

Definizione 202 *Diciamo che il payoff di un derivato europeo $D : \Omega \to \mathbb{R}$ è* indipendente dalla storia del titolo rischioso S, *esiste una funzione boreliana $F_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$D_T(\omega) = F_D(S_N(\omega)), \tag{3.80}$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Le opzioni europee d'acquisto e vendita sul titolo S, con strike K alla maturità T, che anche nel modello CRR sono caratterizzate dai rispettivi payoff

$$C_T \overset{\text{def}}{=} \max\{S_T - K, 0\} \qquad \text{e} \qquad P_T \overset{\text{def}}{=} \max\{K - S_T, 0\},$$

sono derivati europei indipendenti dalla storia di S. Le opzioni asiatiche d'acquisto e vendita sul titolo S, con strike K alla maturità T, che nel modello CRR sono caratterizzate dai rispettivi payoff

$$\bar{C}_T \overset{\text{def}}{=} \max\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n - K, 0\right\} \qquad \text{e} \qquad \bar{P}_T \overset{\text{def}}{=} \max\left\{K - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n, 0\right\},$$

sono derivati europei dipendenti dalla storia di S.

> T e N sono uguali, cambia solo il contesto in cui vengono usati.

Teorema 203

Teorema 203 *In assenza di portafogli d'arbitraggio, ogni derivato europeo del modello CRR è replicabile mediante un portafoglio autofinanziante costituito dal bond B e dallo stock S. Di conseguenza, in assenza di portafogli d'arbitraggio, il modello CRR è un modello di mercato completo.*

Se non ci sono portafogli di arbitraggio, allora ogni derivato europeo è *replicabile* mediante portafoglio autofinanziante composto da bond e stock, sia che si tratti di path indipendent, sia path dependent. Allora il modello CRR è un modello di mercato *completo*, poichè posso replicare con portafoglio autofinanziante. Come si dimostra questo fatto? Esistono due versioni:

- Nella versione "facile" assumo che i titoli siano europei, allora devono soddisfare l'equazione 3.81. Vediamo come sono fatti i bond B_N ed S_N, se li sostituisco alla 3.81 ottengo un sistema a due incognite, risolvibile. Ci dice come prendere le componenti X_N e Y_N subito dopo il temo $N-1$, ovvero prima di N. Vediamo come entrambe siano in funzione di S_{N-1}. Le ipotesi sono $B_0, S_0 > 0$ (bond e stock positivi, banale) e che $u > d$, ovvio anche questo, ed infine il tasso $r > 0$. Sono ipotesi banali, che faccio per via del denominatore che non può essere 0. Posso farlo sempre, senza *ipotesi di arbitraggio*. Mi chiedo allora il portafoglio autofinanziante al tempo $N-1$,
  ovvero cerco $W_{N-1} = X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1}$

  Risolvendo trovo W_{N-1} in funzione delle probabilità neutrali al rischio, (qui applico l'ipotesi di non arbitraggio). Nella 3.86 sviluppiamo ulteriormente, e vediamo che a destra abbiamo il valore neutrale al rischio del derivato calcolato al tempo $N-1$, a sinistra ho il valore del portafoglio autofinanziante W_{N-1}. Successivamente facciamo *backward - induction*, ovvero cerchiamo $W_{N-2}, W_{N-3}, \ldots$, Andando avanti nel calcolo delle altre X_N, Y_N non avremo più il valore del derivato, bensì il valore del portafoglio. In particolare vediamo, nella 3.90, che W_{N-2} è dato dalla speranza condizionata dal valore del derivato al tempo N. Quindi io faccio *backward-induction*, quando arrivo a 0 so come costruire il portafoglio passo dopo passo, e quindi vado avanti, per vedere i valori.

$$X_{N-n}=\frac{\begin{vmatrix} W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right) & uS_{N-(n+1)} \\ W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right) & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & uS_{N-(n+1)} \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}}=\frac{uW_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right)-dW_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right)}{(1+r)\,(u-d)\,B_{N-(n+1)}},$$

$$Y_{N-n}=\frac{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right) \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & uS_{N-(n+1)} \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}}=\frac{W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right)-W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right)}{(u-d)\,S_{N-(n+1)}}. \tag{3.91}$$

Nella 3.91 si ha il caso generico per n passi indietro. Si ha sempre struttura *binomiale* perchè abbiamo dipendenza solo dallo stato finale del titolo, non del percorso. Per arrivare a 0? Prendo $n = N - 1$, ovvero $W_{N-(N-1)}$, cioè le prime compontenti del portafoglio replicante.

Quindi, uguaglia il valore neutrale al rischio del derivato stesso allo stesso tempo. Inoltre, le componenti X_1 e Y_1 del portafoglio replicante costituite tra il tempo $t = t_0$ e $t = t_1$ sono date da

$$X_1=\frac{uW_1\,(dS_0)-dW_1\,(uS_0)}{(1+r)\,(u-d)\,B_0},\qquad Y_1=\frac{W_1\,(uS_0)-W_1\,(dS_0)}{(u-d)\,S_0}, \tag{3.94}$$

dove il valore

$$W_1\equiv W_1\,(S_1)$$

del portafoglio replicante al tempo $t = t_1$ è dato da

$$W_1=\frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{p}^{N-1-k}\tilde{q}^{k}F_D\left(u^{N-1-k}d^{k}S_1\right). \tag{3.95}$$

Troviamo W_0 e ricaviamo, dalla 3.94, X_1 e Y_1, però sono in funzione di W_1, non dovevano non dipendere dagli step intermedi? Se sostituisco la 3.95, vediamo che X_1, Y_1 dipendono solo da S_0 e altre componenti che sono note. Se combinassi X_1, Y_1 con B_1, S_1 dovrei poter ricostruire esattamente W_1. Ottengo due casi, associati ai valori d ed u, che ci riportano a W_1. Quando vendo il derivato al tempo 0 al prezzo detto da W_0, so che componenti mettere al mio portafoglio al tempo 0, ma anche ai tempi successivi, vedendo se mi ha detto bene o mi ha detto male. *Ho costruito la mia strategia al tempo 0.*

- Se ci fosse dipendenza dal path? Ho aleatorietà su Sn, a seconda se assume valore d o u . Cioè rispetto al passo successivo ho solo questi due casi (ragiono passo per passo, non sul path completo). Le formule sono più lunghe, ma la metodologia è quella. Vediamo come X_N, Y_N dipendono da tutta la storia del processo, ma il meccanismo di progressione è sempre *bernoulliano*.

$$
\begin{aligned}
W_{N-1} &= X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1} \\
&= \frac{u F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}) - d F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1})}{(1+r)(u-d) B_{N-1}} B_{N-1} \\
&+ \frac{F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}) - F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1})}{(u-d) S_{N-1}} S_{N-1} \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d} F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}) + \frac{u-(1+r)}{u-d} F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1})\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}) + \tilde{q} F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1})\right) \\
&= \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbf{E}}\left[F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, S_N) \mid S_1, \ldots, S_{N-1}\right] \\
&= \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbf{E}}_{N-1}\left[F_D(S_1, \ldots, S_{N-1}, S_N)\right].
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

Nella 3.100, W_{N-1} dipende dalla speranza condizionata di tutti i precedenti S_i. Procedendo con la ricostruzione in avanti, abbiamo qualche difficoltà tecnica in più, ma comunque alla fine ci si riesce, ottendendo la 3.102. (la riga finale è sbagliata, mancano le componenti $F_D[S_1, ...]$ Nella quart'ultima riga, vediamo come $\tilde{p}\tilde{q}$ viene 'capovolto' in $\tilde{q}\tilde{p}$, che non è così scontato, qui possiamo perchè ci sono dietro le proprietà del reticolo. Anche questi sono *replicabili*!

$$
\begin{aligned}
& W_{N-2} \\
& = X_{N-1} B_{N-2} + Y_{N-1} S_{N-2} \\
& = \frac{u W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}) - d W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2})}{(1+r)(u-d) B_{N-2}} B_{N-2} \\
& + \frac{W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}) - W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2})}{(u-d) S_{N-2}} S_{N-2} \\
& = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d} W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}) + \frac{u-(1+r)}{u-d} W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2})\right) \\
& = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}) + \tilde{q} W_{N-1}(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2})\right) \\
& = \frac{1}{1+r} \tilde{p}\left(\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}) + \tilde{q} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, d S_{N-1})\right)\right) \\
& + \frac{1}{1+r} \tilde{q}\left(\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1}) + \tilde{q} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1})\right)\right) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2}\left(\tilde{p}^2 F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}) + \tilde{p}\tilde{q} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, d S_{N-1})\right) \\
& + \frac{1}{(1+r)^2} \tilde{q}\tilde{p} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1}) + \tilde{q}^2 F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1}) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2}\left(\tilde{p}^2 F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}) + 2\tilde{p}\tilde{q} F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1})\right. \\
& \left. + \tilde{q}^2 F_D(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1})\right) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2} \tilde{\mathbf{E}}_{N-2}\left[F_D(S_N)\right].
\end{aligned} \tag{3.102}
$$

Opzioni europee 3.5.2

Sono caratterizzate da $C_N = C_T \doteq max\{S_T - K, 0\}$, con payoff $u^n d^{N-n} S_0$ Possiamo introdurre le probabilità neutrali al rischio. **Def 204**, definizione di portafoglio autofinanziante rispetto alle *call*. **Def 205** saltabile, perchè agiamo in un mercato completo e privo di portafogli arbitraggio.

Definizione 204 *Chiamiamo* portafoglio replicante *o* strategia di copertura *(*hedging strategy*) dell'opzione call un BS-portafoglio autofinanziante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *tale che all'istante terminale* $t_N = T$ *si abbia*

$$W_T(\Pi) = X_T B_T + Y_T S_T = C_T. \tag{3.112}$$

Definizione 205 *Chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizioni rischiose *nei titoli* U *e* V, *più sinteticamente* BSS-portafoglio, *una processo stocastico* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ *le cui componenti* $(X_n)_{n=0}^N$ *[resp.* $(Y_n)_{n=0}^N$, *resp.* $(Z_n)_{n=0}^N$*] siano processi stocastici reali rappresentanti la quantità di bond [resp. titolo rischioso* U, *resp. titolo rischioso* V*] in cui investiamo al tempo* $t = t_n$.

Vediamo **Lemma 210**.

Lemma 210 *Siano* U *e* V *due titoli del mercato multiperiodale di valori* $(U_n)_{n=0}^N$ *ed* $(V_n)_{n=0}^N$. *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il sussistere dell'uguaglianza*

$$U_N = V_N$$

comporta necessariamente che

$$U_n = V_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

$$C_T \doteq max\{S_T - K, 0\} = \frac{|S_T - K| + S_T - K}{2}$$

$$P_T \doteq max\{-S_T + K, 0\} = \frac{|K - S_t| - S_T + K}{2}$$

$$C_T(w) - P_T(w) = \frac{S_T - K - (K - S_T)}{2} = S_T(w) - k$$

$$C_n = \frac{\tilde{E_n}[C_N]}{(1+r)^n}$$

$$P_n = \frac{\tilde{E_n}[P_N]}{(1+r)^n}$$

$$S_n = \frac{\tilde{E_n}[S_N]}{(1+r)^n}$$

$$C_n = X_n^C B_n + Y_n^c S_n$$

$$P_n = X_n^P B_n + Y_n^P S_n$$

Li sottraggo ed esce $S_N - K$, sfruttando il fatto che il mercato sia completo, e quindi la parte sui BSS portafogli non serve.

Digressione sui progetti

Le domande sono del tipo:

- Definizione di arbitraggio
- Cosa è portafoglio di Markowitz,...,etc

Non ci sono delle dimostrazioni 'ferree'. Per il progetto possiamo fare dei lucidi, markdown etc a seconda di ciò che riteniamo più congeniale per il progetto. Il prof dovrebbe lasciare una lista di alternative, ma se siamo interessati a qualcosa di specifico possiamo dirglielo. Possiamo vedere cose del tipo: titolo vale X, secondo il mio modello quanto si discosta? Non è per forza in singolo, se due persone fanno stesso progetto è possibile vederne le differenze. Ovviamente se uno una formula X nel progetto devo sapere che cosa sto facendo, ma non devo dimostrarle o altro.

Esempio caso studio Progetto

Voglio studiare il titolo di Amazon. So che è un titolo americano, quindi devo spiegare cosa voglia dire questo. Suppongo di usare il modello binomiale, devo calibrare il modello (ancora non fatto), ho necessità di avere dati, giorni, 'u' e 'd', per confrontare i prezzi teorici con quelli reali. Posso anche trovare un portafoglio ottimo.

Lezione 9 giugno 2023

Visione del file html # *Essentials of Time Series Analysis @ Metodi Probabilistici e Statistici per i Mercati Finanziari (MPSMF) 2021-2022*

Visione grafico "Now, we consider some real time series".

"As discussed above": noi vediamo la traiettoria passata nera, se ne verifica solamente una che ci porta ad oggi. A destra c'è il futuro, non so quale traiettoria si verificherà.

La proiezione migliore è una soluzione di compromesso, la *speranza condizionata del modello*(non dei dati), ovvero la retta rossa. Prima creo il modello, poi faccio la speranza condizionata. Le bande intorno sono le *bande di predizione*, cioè simili al concetto di intervalli di confidenza. Una predizione senza queste bande *non significa nulla*. Banda verde: 90%, banda blu: 95%, banda rossa 99%. Ovvero più è ampia la banda, più dati includo. Sarebbe più accurata una banda dell'80%, per avere più "precisione", anche se ricadono meno traiettorie. Come si costruiscono? E' simile alle bande di confidenza (dove lavoravo su media, non media condizionata). L'idea era:

- Se distribuzione è gaussiana e conosco la varianza, allora ci metto i quantili del 90/95% per la deviazione standard e ci costruisco intervallo.
- Senza conoscere la varianza, uso Student, prendo quantili Student, moltiplico per la varianza stimata e calcolavo intervalli, più ampi.

- Senza varianza nè distribuzione, dovevo sperare di avere tanti dati.

Qui è simile:

- Se conosco distrubuzione, e ho anche il rumore della traiettoria, allora prendo i quantili e faccio le bande di previsione.

- Se non riesco, posso simulare le traiettorie (1000,10000,...) e poi costruisco le bande di confidenza empiriche delle traiettorie simulate. Nell'esempio ce ne sono 3. Tiro giu verticalmente rispetto allo stesso tempo tutti i punti, ho un dataset sull'asse y, ci creo i quantili. Approccio di tipo *bootstrap*, sfruttando tante simulazioni. Devo avere il modello, perchè devo stimare la prima parte della traiettoria, dove avrò degli errori(residui=stima del rumore che colpisce la traiettoria). Invece di dire che distrubuzione abbiano i residui, li uso come rumore per calcolare la traiettoria futura. (E' come un sacchetto coi residui, estraggo residuo con reimbussolamento). Un buon modello *non fitta* perfettamente la traiettoria passata, perchè il residuo è 0, come faccio ad andare avanti? non posso. Il polinomio con cui 'fitto' la traiettoria passata non va bene per le future, perchè più è alto il grado, più è rigido nel futuro. Polinomio deterministico. Un buon modello non fitta perfettamente, ma ha *buoni residui*, cioè i residui sono *stazionari*, *omoschedastici*, *scorrelati*, se possibile *gaussianamente distribuiti* (difficile questo ultimo punto). Dato per buono che abbiamo questi residui, andando avanti, ad ogni step ci metto un residuo passato e lo rimetto dentro l'*urna*.

Procedendo nel file, subito dopo il grafico. Abbiamo serie storica, di cui vogliamo creare processo stocastico N-variato. Costruire modello da 0 è complicato, cerco di prendere modello noto (autoregressivi, media mobile, white noise) ed adattarlo per trasformarlo nel modello che noi vogliamo. N_t è l'errore nell'adattamento, ci deve essere sempre, sennò non posso fare predizioni futuri. E' un processo stocastico, ideale se è white-noise, ovvero pesca allo stesso modo, dalla stessa distribuzione, come un lancio della moneta. $F(t, X_t)$ è funzione deterministica. Y_t è una scrittura formale di un modello, come ad esempio la regressione lineare, che però è un caso specifico. X_t dipende dalle espressioni di Y ritardate, cioè non mi servono variabili esplicative, perchè ho solo dipendenza del passato. Spiego un processo rispetto alla sua storia ed altre variabili adattive.

Un processo predittivo **autoregressivo** dipende da un processo e da un disturbo. Nel processo predittivo **media mobile** dipende solo dagli errori passati.

La 3.2 (cioè Y_n) è una generalizzazione di una regressione. Per determinare F devo scomporla in parti deterministiche, e poi considerare il rumore. Il *trend/ciclo* è deterministica, ma varia nel tempo, la variabilità può essere periodica ma occasionale, ad esempio, se immetto un nuovo prodotto nel mercato, all'inizio la domanda salirà (prezzo sale), per poi scendere (prezzo scende), *non* è legato alla stagionalità, ma alla legge della domande e dell'offerta. La componente stagionale è dovuta alle *stagioni*, ad esempio i gelati sono più venduti in estate che in inverno, non posso controllarlo. C'è anche nella vendita delle macchine: in estate, quando parto per le vacanze, vorrei avere una macchina in buono stato, oppure a gennaio con la tredicesima, a febbraio/marzo di meno. Scrivo allora come in formula 3.6.

As a consequence, in several cases we try to represent the process $\mathbf{Y}$ by an additive decomposition of the form

$$Y_t = m(t) + s(t) + g(X_t) + N_t, \tag{3.6}$$

for every $t \in \mathbb{T}$, where $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ is an appropriate function. In other cases, especially with reference to models for time series in financial markets, it might be more useful consider a multiplicative decomposition ot the form

$$Y_t = m(t) \times s(t) \times g(X_t) \times N_t, \tag{3.7}$$

for every $t \in \mathbb{T}$.

Un problema ricorrente con le serie storiche è che la *variabilità* varia a sua volta nel tempo. E' un bel problema. Si cerca di trasformare la serie storica tramite funzione di *Box-Cox* (il logaritmo ne è un esempio) per ricondurmi ad altra serie storica, possibilmente con variabilità meno variabile nel tempo, o ancora meglio omogenea. Posso sempre l'inversa.

Grafico "Gold Fixing Price"

Il trend lineare *verde* non va bene. Il trend esponenziale *rosso* (LOESS) va molto meglio, tuttavia la variabilità si assotiglia, quindi devo applicare *Box-Cox*, quale? il logaritmo. Differenza tra logaritmi: stima dei rendimenti. Scrivo modello $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ dove $dS_t = S_{t+dt} - S_t$, differenza infinitesimale, mi dice che l'incremento che subisce il prezzo dello stock dal passaggio tra questi due tempi è dovuto dal valore attuale dello stock moltiplicata per la costante μ. Se non ci fosse $\sigma S_t dW_t$ sarebbe l'equazione l'esponenziale con soluzione $S_t = e^{\mu t}$. Essendoci la seconda componente, cosa stiamo trattando? $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ è la differenza tra due v.a. gaussiane indipendenti, ovvero sempre una v.a. gaussiana. Cioè rappresenta un rumore gaussiano elementare. Questa ampiezza è moltiplicata per il valore del titolo S_t, più aumenta più cresce l'oscillazione.

Matematicamente potrei fare: $\frac{dS_t}{St} = \mu dt + \sigma dWt = dlog(S_\sigma)$

in pratica abbiamo ottenuto un modello più facile da studiare, perchè separo le due componenti. Con questo ultimo passaggio mi riconduco ad un *moto casuale* intorno ad una retta (*moto browniano con drift*), ovvero fisso una rete, e ci oscillo intorno.

> Penso ad una stanza con delle mosche, è un moto browniano. Se apro le finestre c'è uno stream di corrente che se le porta via, quindi c'è una corrente che le porta via, cioè un drift. L'unica zanzara buona è quella morta.

Dalla trasformata cerco di tirare fuori un trend (deterministico, come ad esempio la retta di regressione). Rimane la trasformata a cui ho tirato via il trend/ciclo, ovvero $\tilde{y_t}^0$. Tiro via anche la stagionalità e rimane $\tilde{y_t}^{0,*}$.

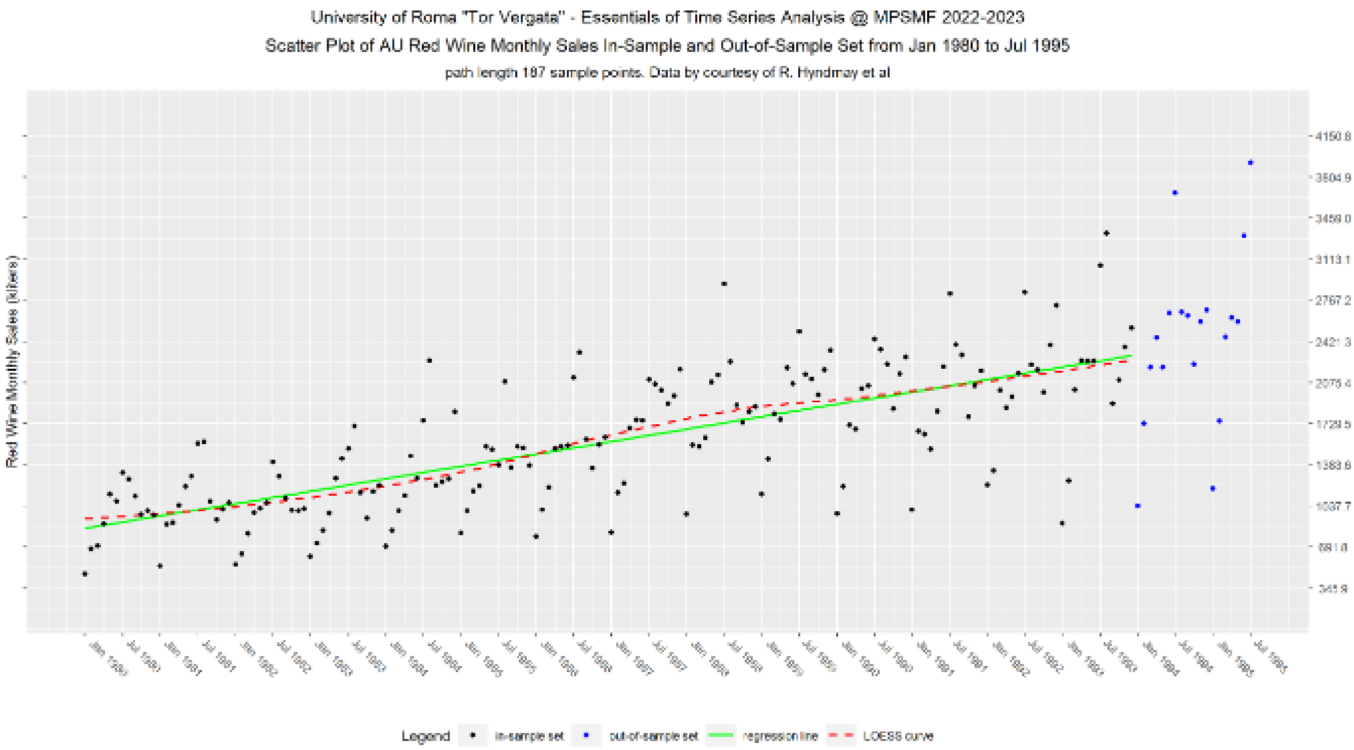
1. Explore the possibility to subject $\mathbf{y}$ to an invertible non linear transformation, so called *Box-Cox transformation*, often the *logarithm* or the *square root* transformation, to remove simple form of *heteroskedasticity*, which shows as a pronounced variation of the spread of the points in the time series graph around the regression line. This leads to the *homoskedastic* transformed time series $(\tilde{y}_t)_{t=1}^{T} \equiv \tilde{\mathbf{y}}$, such that
$$\tilde{y}_t = BC(y_t), \tag{3.8}$$
for every $t = 1, \ldots, T$, where $BC : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is the Box-Cox transformation considered.
2. Try to remove a mean component in the transformed time series $\tilde{\mathbf{y}}$ by time-regressions (e.g. a linear time-regression) or by smoothing procedures (e.g. a moving average). This leads to the *demeaned* homoskedastic transformed time series $\left(\tilde{y}_t^0\right)_{t=1}^{T} \equiv \tilde{\mathbf{y}}^0$ such that
$$\tilde{y}_t^0 = \tilde{y}_t - m(t), \tag{3.8}$$
for every $t = 1, \ldots, T$.
3. Try to remove a seasonal component from the demeaned time series $\tilde{\mathbf{y}}^0$ by spectral decomposition (e.g. a linear combination of sinusoids) or by a deseasonalizing procedure (e.g. a seasonal average). This leads to the *deseasonalized* demeaned homoskedastic transformed time series $\left(\tilde{y}_t^{0,*}\right)_{t=1}^{T} \equiv \tilde{\mathbf{y}}^{0,*}$ such that
$$\tilde{y}_t^{0,*} = \tilde{y}_t^0 - s(t), \tag{3.9}$$
for every $t = 1, \ldots, T$.

Questi sono modelli già studiati, come white-noise. Se residuo è esprimibile tramite *white-noise*, non mi rimane molto da fare.

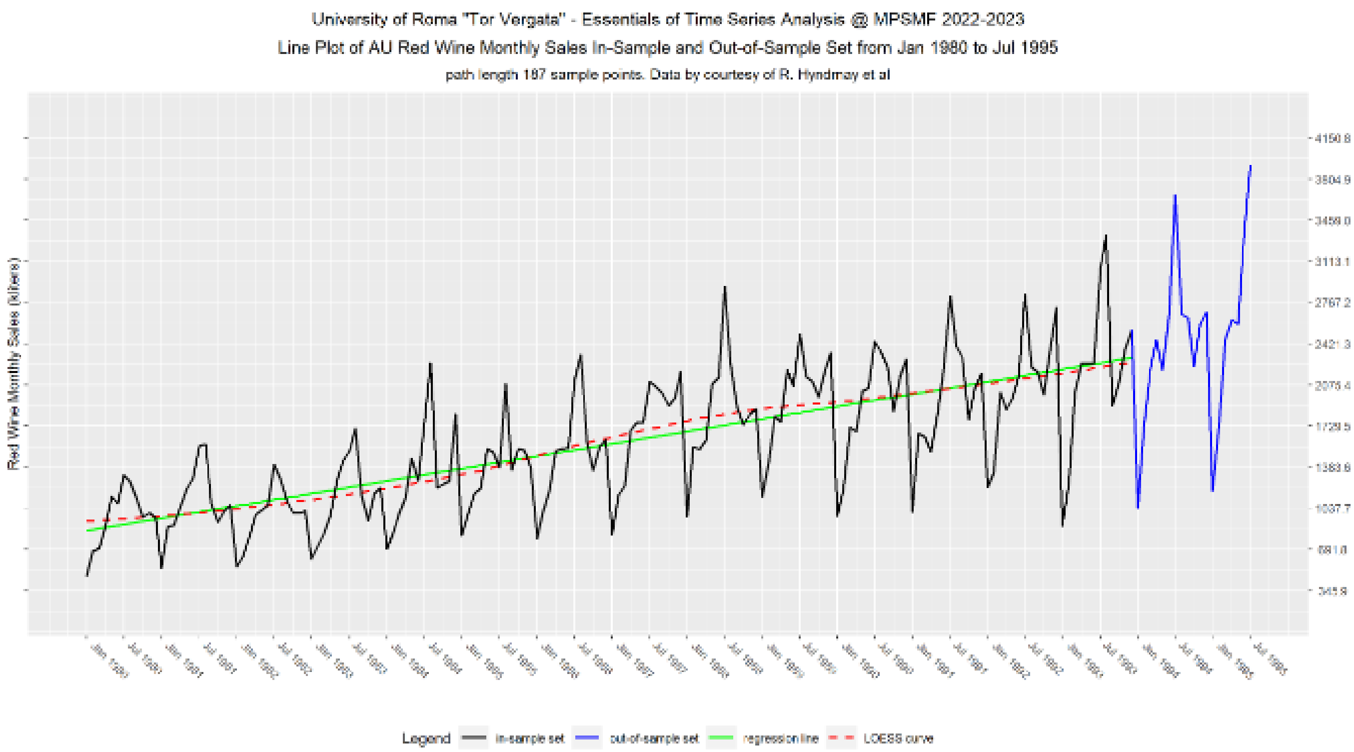
In Finanza, un fenomeno indipendente dalla stagionalità è ad esempio un titolo che cresce con una certa *dolcezza* grazie a delle notizie. Per via di altre notizie/mercato si inizia a vendere il titolo, il valore del prezzo del titolo inizia ad oscillare (*fibrillazione*), catturabile con modelli *GARCH*. Cioè variabilità volatile condizionata dalla variabilità precedente. E' dovuto dall'avversità al rischio, cioè rischio non viene gestito bene e si opera in modo irrazionale.

Analisi di serie storica "First, we split the RWS"

Abbiamo tabelle con indicie, anno, mese, ettoliti di litri venduti. Facciamo un plot con GGPlot.

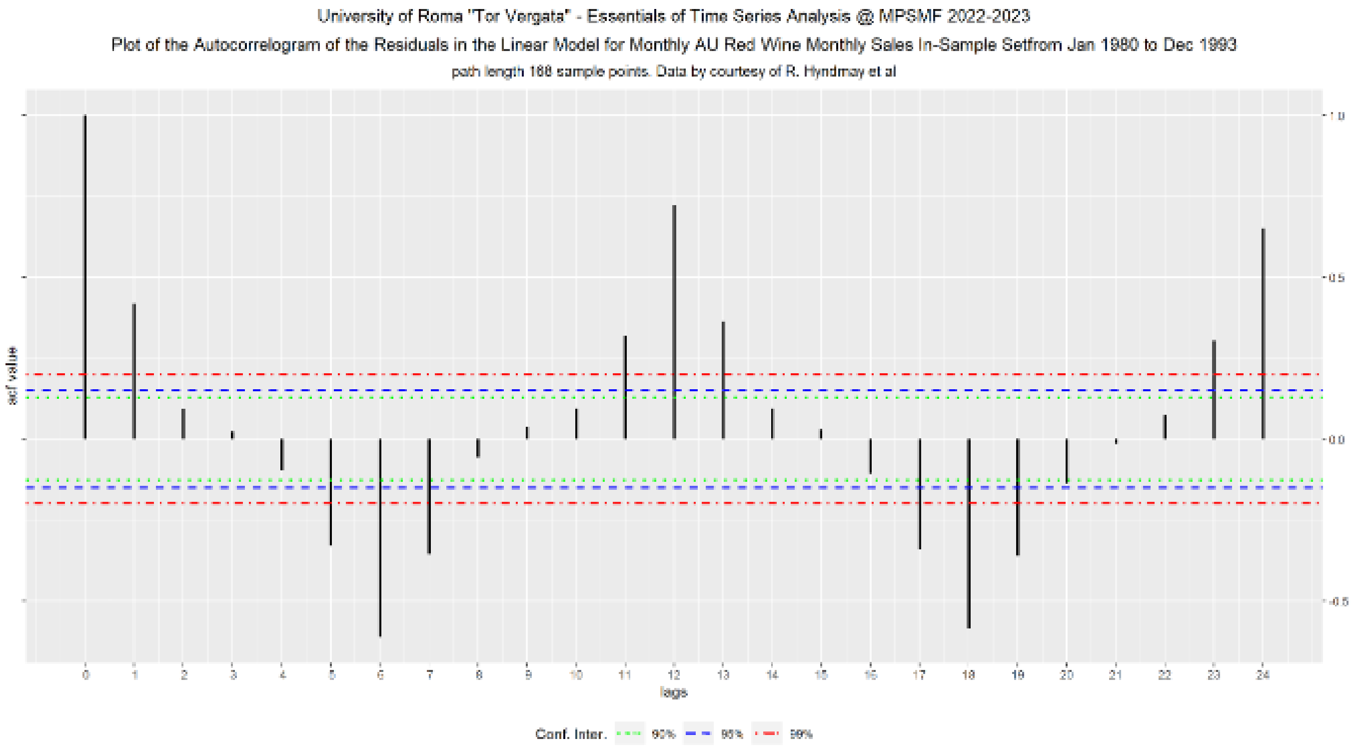


Nel secondo plot, line-plot, vediamo stagionalità, vediamo che nei vari *gennaio* ho picchi verso il basso, a luglio rialzo. Perchè? Perchè siamo in Australia, quindi le stagioni sono invertite, a gennaio sono al mare e ne consumano di più.



Prima del termine della parte nera vediamo retta simile alla LOESS. Quando voglio fare modello predittivo, tolgo la parte blu che sarà il mio test set, quella nera training set. La formula 3.10 $f(t, X_t) \doteq \alpha + \beta t, \quad \forall t \in T$ è predizione lineare, sarebbe stupendo se funzionasse, ma purtroppo porta a brutti residui. Con una certa stagionalità non conviene mai provare la predizione lineare. Falliamo miseramente.

[.... skippato cose alla velocità della luce]



Residui.

Lezione 25 - 13 giugno 2023

Abbiamo parlato di derivato, un titolo il cui valore dipende solo dal sottostante, cioè lo stock nel nostro caso.

I derivati di tipo europeo rilasciano valore alla scadenza/maturità, cioè sono funzioni del titolo. Possono dipendere da tutta la storia del titolo, o solo dal valore finale. Ad esempio le *Call/Put* dipendono solo dal valore finale, mentre un derivato di tipo *opzioni asiatiche* durante tutta la traiettoria.

Replicabilità del derivato

Prendiamo un qualsiasi derivato, ci chiediamo se esiste un portafoglio fatto da bond e stock che al tempo finale eguaglia il valore dell'opzione asiatica? Se sì, allora l'opzione asiatica può essere replicata, altrimenti no.

> **Definizione 208** *Diciamo che un derivato europeo D del modello CRR è replicabile se considerato il payoff $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$ del derivato esiste un BS-portafoglio autofinanziante $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N \right)$, tale che all'istante terminale $t_N = T$ si abbia*
>
> $$D_T(\omega) = X_N(\omega) B_N(\omega) + Y_N(\omega) S_N(\omega), \tag{3.93}$$
>
> *per ogni $\omega \in \Omega$.*

Si dimostra che, nel mercato CRR multiperiodale, senza portafogli di arbitraggio, cioè $u > 1 + r > d$ allora ogni derivato può essere replicato, sia nel caso *path dependent* sia *path independent*.

L'idea è partire da un portafoglio che eguaglia il valore finale del derivato (3.94), devo costruire tutti gli stati precedenti del portafoglio.

Teorema 209 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, ogni derivato europeo del modello CRR multi-periodale è replicabile mediante un BS-portafoglio autofinanziante. Pertanto, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, il modello CRR multiperiodale è un modello di mercato completo.*

Proof. *Assumiamo in primo luogo che il valore al tempo $t = t_N \equiv T$ di maturità del derivato D sia indipendente dalla storia del titolo rischioso S. Quindi, esiste una funzione boreliana $F_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che valga l'Equazione (3.92). Un portafoglio $\Pi \equiv \left((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N\right)$ che alla maturità del derivato replichi il payoff del derivato stesso deve soddisfare l'equazione*

$$X_N B_N + Y_N S_N = F_D(S_N). \tag{3.94}$$

D'altra parte,

$$B_N = (1+r)\, B_{N-1} \qquad e \qquad S_N = \beta_N S_{N-1} = \begin{cases} uS_{N-1}, & \mathbf{P}(\beta_N = u) \equiv p, \\ dS_{N-1}, & \mathbf{P}(\beta_N = d) \equiv q. \end{cases} \tag{3.95}$$

Pertanto, le Equazioni (3.94) e (3.95) si traducono nel sistema

$$\begin{cases} (1+r)\, X_N B_{N-1} + uY_N S_{N-1} = F_D(uS_{N-1}), \\ (1+r)\, X_N B_{N-1} + dY_N S_{N-1} = F_D(dS_{N-1}). \end{cases} \tag{3.96}$$

Stanti le condizioni $B_0 > 0$, $S_0 > 0$, $u > d$ ed $r \geqslant 0$, il Sistema (3.96) ammette un'unica soluzione data da

$$X_N = \frac{\begin{vmatrix} F_D(uS_{N-1}) & uS_{N-1} \\ F_D(dS_{N-1}) & dS_{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\, B_{N-1} & uS_{N-1} \\ (1+r)\, B_{N-1} & dS_{N-1} \end{vmatrix}} = \frac{uF_D(dS_{N-1}) - dF_D(uS_{N-1})}{(1+r)(u-d)\, B_{N-1}},$$

$$Y_N = \frac{\begin{vmatrix} (1+r)\, B_{N-1} & F_D(uS_{N-1}) \\ (1+r)\, B_{N-1} & F_D(dS_{N-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\, B_{N-1} & uS_{N-1} \\ (1+r)\, B_{N-1} & dS_{N-1} \end{vmatrix}} = \frac{F_D(uS_{N-1}) - F_D(dS_{N-1})}{(u-d)\, S_{N-1}}. \tag{3.97}$$

Se c'è replicabilità devo avere la 3.94, esso diventa sistema di equazioni risolvibile, troviamo X_N e Y_N, ci poniamo poi di trovare il valore del portafoglio che replica il derivato. Tenendo conto che il portafoglio deve essere *autofinanziante* troviamo la 3.98.

Da notare che l'Equazione (3.97) consente di esprimere le componenti X_N e Y_N del portafoglio al tempo $t = t_N \equiv T$ della maturità del derivato come funzioni del solo prezzo S_{N-1} dello stock S al tempo $t = t_{N-1}$, caratterizzandole quindi come $\sigma(S_{N-1}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ variabili aleatorie, a fortiori $\mathcal{F}_{N-1} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ variabili aleatorie. In conseguenza della (3.97) e della condizione di autofinanziamento, il valore al tempo $t = t_{N-1}$ del portafoglio replicante è allora dato da

$$\begin{aligned} W_{N-1} &= X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1} \\ &= \frac{uF_D(dS_{N-1}) - dF_D(uS_{N-1})}{(1+r)(u-d)B_{N-1}} B_{N-1} + \frac{F_D(uS_{N-1}) - F_D(dS_{N-1})}{(u-d)S_{N-1}} S_{N-1} \\ &= \frac{uF_D(dS_{N-1}) - dF_D(uS_{N-1})}{(1+r)(u-d)} + \frac{F_D(uS_{N-1}) - F_D(dS_{N-1})}{u-d} \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}F_D(uS_{N-1}) + \frac{u-(1+r)}{u-d}F_D(dS_{N-1})\right) \end{aligned} \tag{3.98}$$

In assenza di portafogli d'arbitraggio, vale la condizione

$$u > 1 + r > d.$$

e sappiamo che

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad e \quad \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

sono le componenti della misura neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ per cui otteniamo

$$W_{N-1} = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}F_D(uS_{N-1}) + \tilde{q}F_D(dS_{N-1})\right) = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}\left[F_D(S_N) \mid S_{N-1}\right], \tag{3.99}$$

ed essendo $(S_n)_{n=0}^N$ un $\left(\mathfrak{F},\tilde{\mathbf{P}}\right)$-processo di Markov (cfr Proposizione (203)), ne segue

$$W_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_{N-1}\left[F_D(S_N)\right]. \tag{3.100}$$

Si scopre che il portafoglio che replica il derivato è il valore scontato del derivato al tempo precedente, la 3.99.

Quindi ciò che facciamo è andare "all'indietro". Alla fine, il primo valore assunto W_0 è composto da valori del portafoglio che replicano il derivato che sono esattamente i valori scontati del valore finale del derivato rispetto la probabilità neutrale al rischio.

Tale risultato si può ottenere anche nel caso del derivato dipendente da tutta la storia del processo, anche se lo svolgimento è più complicato.

L'idea dietro è comunque la medesima.

Prezzo di non arbitraggio

Definizione 210 *In riferimento al modello di mercato CRR multiperiodale, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *di un derivato D al tempo $t = t_n$, per ogni $n = 0, 1, \dots, N$, il valore del portafoglio replicante allo stesso tempo.*

Osservazione 211 *In riferimento al modello di mercato CRR multiperiodale, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, il prezzo di non arbitraggio di un derivato D al tempo $t = t_n$, è univocamente determinato, per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.*

Proof. *È sufficiente osservare che, in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, la dimostrazione del Teorema 209 mostra come il prezzo di non arbitraggio di un derivato D al tempo $t = t_n$ coincida con il prezzo neutrale al rischio del derivato allo stesso tempo e che si ha l'unicità della probabilità neutrale al rischio.* □

E' il valore del portafoglio replicante calcolato allo stesso tempo del derivato. Sto in modello multiperiodale in assenza di BS portafogli d'arbitraggio. Si può dimostrare che se ogni derivato è replicabile, allora NON ci sono portafogli di arbitraggio. E' un teorema "se e solo se". Nel modello giocattolo è banale, nel modello più serio un pò meno.

[Corollario 212 importante]

al rischio. □

Corollary 212 *Siano U e V due derivati europei del modello di mercato CRR multiperiodale privo di BS-portafogli d'arbitraggio e siano $(U_n)_{n=0}^N$ e $(V_n)_{n=0}^N$ le successioni dei prezzi di non arbitraggio di U e V rispettivamente. Il sussistere dell'uguaglianza*

$$U_N = V_N \tag{3.124}$$

comporta necessariamente che

$$U_n = V_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{3.125}$$

Se due derivati prendono stesso valore finale, allora devono prendere stessi valori intermedi. L'idea è che se prendono stesso valore finale allora sono replicabili (sono in CRR), quindi posso trovare portafoglio che li replica entrambi. I prezzi di non arbitraggio coincidono con i prezzi neutrali al rischio. Quest'ultima è unica, allora segue che i due derivati hanno stessa forma. Se, per assurdo, un derivato sia maggiore dell'altro ad un certo instante, allora lo vendo, compro quello minore e metto a deposito la differenza. Alla fine avrei stessi valori, quindi alla fine avrei maturato una certa ricchezza.

3.5.2 Opzioni europee

All'istante finale hanno un payoff. Se $S_t < k$ il payoff è 0, altrimenti la loro differenza. Il payoff NON è il guadagno! (dovrei fare differenza payoff - quanto l'ho pagata, oppure ancora meglio payoff - quanto l'ho pagato capitalizzato, cioè li avrei potuti usare per comprare un bond e vedere quanto avrei guadagnato.) L'idea è trovare n_k per la quale $u^n d^{N-n} S_0 \geq K$

Consideriamo adesso un'opzione europea d'acquisto (*call*) sul titolo rischioso di maturità T, prezzo d'esercizio K e valore di mercato $(C_n)_{n=0}^N$, di cui C_0 sia il *premio*. Anche nel caso di un mercato multiperiodale il valore dell'opzione alla maturità è dato da

$$C_N \equiv C_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_T - K, 0\} \equiv \max\{S_N - K, 0\}.$$

D'altra parte S_N è dato dalla (3.39). Pertanto posto

$$n_K \equiv \min\left\{n \in \{0, \ldots, N\} \mid u^n d^{N-n} S_0 \geqslant K\right\},$$

ovvero

$$n_K \equiv \left\lceil \frac{\log(K) - (\log(S_0) + N\log(d))}{\log(u) - \log(d)} \right\rceil,$$

dove $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ceiling, risulta

$$C_N = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \ldots, n_K - 1, \\ u^n d^{N-n} S_0 - K, & \text{se } n = n_K, \ldots, N, \end{cases} \tag{3.128}$$

con

$$\mathbf{P}(C_N = 0) = \sum_{n=0}^{n_K-1} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = 1 - \sum_{n=n_K}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n},$$
$$\mathbf{P}(C_N = u^n d^{N-n} S_0 - K) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}, \quad \text{se } n = n_K, \ldots, N.$$

e, in riferimento alla misura neutrale al rischio, con

$$\tilde{\mathbf{P}}(C_N = 0) = \sum_{n=0}^{n_K-1} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n} = 1 - \sum_{n=n_K}^{N} \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n},$$
$$\mathbf{P}(C_N = u^n d^{N-n} S_0 - K) = \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}, \quad \text{se } n = n_K, \ldots, N.$$

La 3.128 è la funzione che mi dice quale valore prende la call in dipendenza dai valori finali del titolo, espressi in termini di valori iniziali del titolo mediamente le formule viste prima. Dopo la 3.128, abbiamo la probabilità che la call vale 0 con *probabilità oggettiva* e sotto la stessa probabilità calcolata con la *probabilità neutrale al rischio*. Esistono *due probabilità diverse per valutare l'occorrenza dello stesso evento* $C_N = 0$. Ciò significa che un agente di mercato che si affida alla probabilità neutrale al rischio, in realtà ha una sua probabilità soggettiva, sconta il rischio, e questo perchè c'è *l'avversione al rischio*. Nel portafoglio di Markowitz, abbiamo visto che un altro modo per calcolare l'avversione al rischio era scontare per il tasso privo di rischio aggiustato una certa quantità, era un altro modo per scontare la probabilità neutrale al rischio. Secondo De Finetti, la probabilità è sempre soggettiva, cioè attribuisce a fenomeni casuali una probabilità dipendente da soddisfazione, felicità, etc in rapporto al fenomeno. Non c'era, per lui, probabilità oggettiva.

Definizione 213

E' un portafoglio che all'istante finale soddisfa la 3.129. So che posso costruirlo, per le condizioni in cui mi trovo.

Definizione 213 *Come caso particolare della Definizione 208, chiamiamo* portafoglio replicante *(*replicating portfolio*) o* strategia di copertura *(*hedging strategy*) dell'opzione call un BS-portafoglio autofinanziante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *tale che all'istante terminale* $t_N = T$ *si abbia*

$$X_N(\omega) B_N(\omega) + Y_N(\omega) S_N(\omega) = C_N(\omega), \tag{3.129}$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Corollario 216, ad ogni istante la call è sempre positiva. Se sconto variabile positiva, il risultato è variabile positiva.

Corollary 216 *Si ha*

$$C_n \geqslant 0 \tag{3.137}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$.
Proof. *La (3.137) è immediata conseguenza dell'Equazione 3.131, stanti la positività di* C_N *e la positività dell'operatore speranza condizionata* $\tilde{\mathbf{E}}_n[\cdot]$. □

Definizione 217 *Chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *(*no arbitrage price*) al tempo* $t = t_n$ *dell'opzione call il valore del portafoglio replicante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *al tempo* $t = t_n$

$$C_n = X_n B_n + Y_n S_n, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.138}$$

Definizione 217, come caso particolare c'è la **proposizione 218**.

Proposizione 218 *Risulta*

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=n_K}^{N} \left(u^n d^{N-n} S_0 - K\right) \binom{N}{n} \tilde{p}^n \tilde{q}^{N-n}, \tag{3.139}$$

dove

$$n_K \equiv \min\{n \in \{0, \ldots, N\} \mid u^n d^{N-n} S_0 \geqslant K\}, \tag{3.140}$$

ovvero

$$n_K \equiv \left\lceil \frac{\log(K) - (\log(S_0) + N \log(d))}{\log(u) - \log(d)} \right\rceil, \tag{3.141}$$

dove $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è la funzione ceiling, e*

$$\tilde{p} = \frac{r+1-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-(r+1)}{u-d}.$$

Un risultato è dato dal **Corollario 219**, dove ho relazione tra il valore del titolo e il valore K (parte positiva). Al tempo N diventa un'uguaglianza, per tutti i valori inferiori ad N è una disuguaglianza.

Corollary 219 *Si ha*

$$C_n \geqslant \left(S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}\right)^+, \tag{3.142}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.

La stima corretta di C_0 deriva dal fatto che vendendo una Call mi espongo a rischio illimitato, quindi devo ideare una *strategia di copertura* per imitare il valore finale. Per questo si parla di *portafoglio replicante* o *strategia replicante*. Nella put si attuano stesse considerazioni in maniera simmetrica.

Proposizione 220, tra Call e Putt sussiste la relazione 3.147, da cui si passa alla 3.148 (un'idea di progetto è vedere quanto essa sia verificata).

Proposizione 220 *Si ha chiaramente*

$$C_T - P_T = S_T - K. \tag{3.147}$$

Proof. *La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione 2.49 relativa al modello CRR monoperiodale.* □

Proposizione 221 *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, sussiste necessariamente la relazione di parità put-call*

$$C_n - P_n = S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}}, \tag{3.148}$$

per ogni $n = 0, \dots, N$.

Le variabili sono r ed S_n, ovviamente se ho una delle due stimo l'altra.

3.5.3 American Options

Le opzioni europee sono *scommesse* che possono essere esercitate solo alla scadenza. Cioè scommetto che ad una certa data, l'*indice* sarà sopra o sotto una certa soglia. Se vinco, prendo la differenza la valore della soglia e titolo, se perdo, ho perso quanto ho pagato il titolo. Sono come biglietti della lotteria. Ci sono poi opzioni sui vari titoli. Le opzioni *americane* possono essere esercitate a qualunque momento prima della scadenza. Quindi posso esercitarla appena vedo che *sto vincendo*. Anche qui ci sono opzioni *put* e *call*. Ovviamente costano di più, perchè offrono un diritto in più. Deve quindi valere l'osservazione 226 e la disuguaglianza 3.151, ma alla scadenza valgono allo stesso modo dell'opzione europea.

Definizione 225 *Il payoff di un'opzione americana d'acquisto [risp. vendita] con maturità T e prezzo d'esercizio K esercitata al tempo $t_n \leqslant T$ è dato da*

$$(S_n - K)^+ \equiv \max\{S_n - K, 0\} \quad [risp. \ (K - S_n)^+ \equiv \max\{K - S_n, 0\} \ ], \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N.$$

Inoltre, se esercitata a un tempo $t = t_{n_0} \leqslant T$, per un certo $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N\}$, il payoff diventa nullo per ogni $t = t_n$ con $n = n_0 + 1, \ldots, N$.

Osservazione 226 *Il valore di mercato di un'opzione americana d'acquisto [risp. vendita] con maturità T e prezzo d'esercizio K al tempo $t_n \leqslant T$ (non esercitata a un tempo $t < t_n$) soddisfa la disuguaglianza*

$$AC_n \geqslant C_n \quad e \quad AP_n \geqslant P_n \tag{3.151}$$

Mi conviene esercitare la call america prima della scadenza?

Dalla proposizione 228 scopriamo che *Non conviene MAI*, perchè farlo vuol dire che la call americana, nella circostanza degli eventi in cui viene esercitata, prende valori più bassi rispetto alla call europea. (interessante). Vediamo infatti che: $AC_n = max\{S_n - K, 0\}$

Proposizione 228 *L'esercizio anticipato di una call americana non è mai ottimale.*
Proof. *Consideriamo un call americana e supponiamo che il tempo ottimale d'esercizio sia $t = t_{n_0}$, per un qualche $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ e all'occorrenza di un qualche $\omega_0 \in \Omega$. Stante l'Equazione (3.142), abbiamo*

$$C_{n_0}(\omega_0) \geqslant \left(S_{n_0}(\omega_0) - \frac{K}{(1+r)^{N-n_0}} \right)^+ .$$

D'altra parte, se la call americana fosse esercitata avremmo

$$AC_{n_0}(\omega_0) = (S_{n_0}(\omega_0) - K)^+ .$$

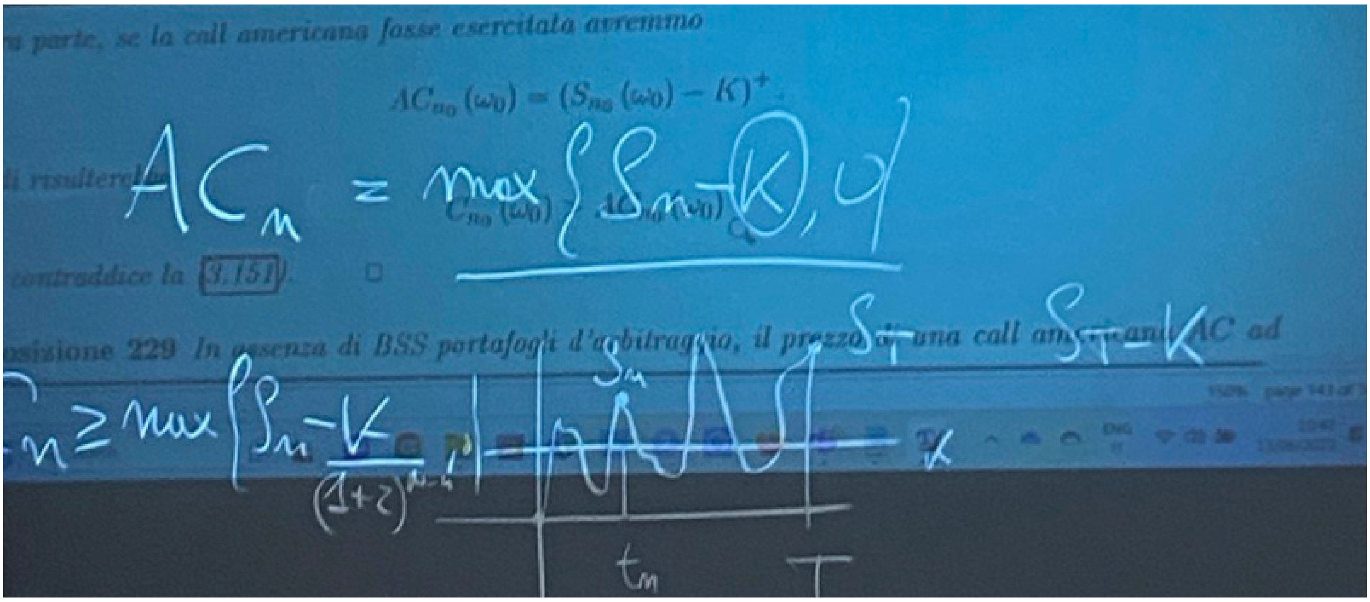
Quindi risulterebbe

$$C_{n_0}(\omega_0) > AC_{n_0}(\omega_0)$$

il che contraddirebbe la (3.151). □

$$C_n \geqslant \left(S_n - \frac{K}{(1+r)^{N-n}} \right)^+ , \tag{3.142}$$

Immaginiamo un grafico con picchi in alto e in basso, alla fine della traiettoria abbiamo al tempo T un valore S_T. Per la call europea vedo solo questo valore finale, e vedo $S_T - K$. Con il rispettivo americano, magari trovo un precedente sopra K, ma K non viene *scontato*. Se esercitassi AC avrei: $C_n > A_{C_n}$, il fatto che ad ogni payoff considero K e non lo scontato K, rende l'esercizio della opzione anticipata non vantaggioso. La disuguaglianza di prima genere un arbitraggio sul mercato. La gente non la esercita perchè ci sono arbitraggi, allora alla fine sono come quelle europee.



$C_n \geq max\{S_n - \frac{K}{(1+r)^n}\}$ $AC_n = max\{S_n - K, 0\}$

Per le PUT il discorso è diverso. L'idea è: L'opzione PUT ha questa caratteristica, ovvero $AP_n = max\{K - S_n, 0\}$ Essendo PUT, devo aspettare che S_n vada *SOTTO* K. Supponiamo che scenda proprio a 0, conviene esercitare? Devo esercitarla, più di quello non può scendere, quindi prendiamo K. Suppongo di non esercitarla: il titolo sale (dovevo esercitarlo prima) e poi riscende a 0. Esercitarla ora è svantaggioso a farlo prima, perchè K lo capitalizzo. Il guadagno che faccio va *sempre* capitalizzato, quindi può convenire l'esercizio anticipato. Quindi appena so che un titolo non può andare sotto, devo esercitare la call. Metto sul bond e alla fine ho guadagnato di più. Se esercito dopo, mi perdo la capitalizzazione del guadagno tra il primo punto in cui il titolo è andato a 0, rispetto alla seconda volta che ci va. In pratica potevo prendere subito quei soldi e investirlo in bond.

Proposizione 230 *In assenza di BS portafogli d'arbitraggio, il prezzo di una put americana AP al tempo* $t = t_0 \equiv 0$ *soddisfa*

$$K \geqslant AP_0 \geqslant (K - S_0)^+ . \tag{3.158}$$

Proof. *Se fosse*

$$(K - S_0)^+ > AP_0,$$

sarebbe possibile acquistare la put americana al prezzo AP_0 *ed esercitarla istantaneamente realizzando un payoff*

$$(K - S_0)^+ - AP_0 > 0.$$

Se altresì fosse

$$AP_0 > K,$$

sarebbe possibile vendere allo scoperto la put al prezzo AP_0 *e investire il ricavato sul bond ottenendo ad ogni tempo* $t = t_n$ *un payoff* $AP_0 (1 + r)^n$ *sicuramente superore l valore massimo* K *del possibile payoff derivante dal possibile esercizio della put ad ogni tempo* $t = t_n$*. Infatti, l'eventuale esercizio della put a un qualsiasi tempo* $t = t_n$*, con* $n \in \{1, \ldots, N\}$*, e per un qualsiasi esito* $\omega \in \Omega$*, comporterebbe un esborso di entità* K *a fronte dell'acquisizione del titolo di prezzo* $S_n(\omega)$ *e darebbe quindi luogo al payoff complessivo*

$$AP_0 (1 + r)^n - K + S_n(\omega) > 0,$$

mentre se la put non venisse esercitata otterremmo un payoff finale di

$$AP_0 (1 + r)^N > 0.$$

Come faccio a stabilire quando conviene esercitare la PUT?

Vista **Proposizione 230, 231**. (per un progetto, posso verificare se la 231 è verificata).

Proposizione 231 *Nel caso di opzioniam ericane la relazione di call-put parity diventa*

$$AC_0 - S_0 + K \geqslant AP_0 \geqslant AC_0 + \frac{K}{(1 + r)^N} - S_0. \tag{3.159}$$

Queste sono disuguaglianze, ma se volessi valore esatto?

Introduco il concetto del *tempo ottimale di esercizio*, che è più complesso. E' un problema di *ottimizzazione stocastica*, sto cercando di massimizzarlo. **Definizione 232**.

Definizione 232 *Chiamiamo* tempo d'arresto *rispetto alla filtrazione* $\mathfrak{F}$*, più brevemente* $\mathfrak{F}$-tempo d'arresto*, una variabile aleatoria reale* $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nu(\Omega) \subseteq \{0, 1, \ldots, N\} \quad e \quad \{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leqslant n\} \equiv \{\nu \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{3.161}$$

Lì N è il numero di intervalli in cui è stato diviso lo spazio. Gli eventi w in cui la la variabile aleatoria v prende valori $\leq n$, posso osservare in corso d'opera, perchè ho l'informazione fino ad n. $\mathcal{F}_n$ è la filtrazione.

Visto esempio 234.

Esempio 234 *Consideriamo le variabili aleatorie $\nu_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\nu_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definite ponendo*

$$\nu_1(\omega) \stackrel{def}{=} \omega_1 + 1, \quad \forall \omega \in \Omega,\ \omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N,$$

e

$$\nu_2(\omega) \stackrel{def}{=} \omega_2 + 1, \quad \forall \omega \in \Omega,\ \omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N.$$

w_1 può essere 0 o 1, qualunque sia w, essa è una successione che può partire da 0 o 1. v_2 ignora il primo elemento della successione, considera solo il secondo, anch'esso vale 0 o 1. Solo v_1 è tempo di arresto. Se N=3 Ω è quello fornito. Vediamo quando vale w_1 1 e 2. Vediamo la controimmagine, dove vale $\Omega, E_0, ...$ Soddisfa le condizioni di *tempo d'arresto.* Per v_2 abbiamo problema con $E_{0,0} \cup E_{1,0}$ che però non appartiene. Quindi il problema è che nel secondo caso so che avrei dovuto prendere un certo valore al tempo x, DOPO che il tempo X è passato. Visto **teorema 235**:

Teorema 235 *Il processo dei prezzi $(AP_n)_{n=0}^N$ di un'opzione put americana soddisfa l'equazione*

$$AP_n = \max_{\nu \in \mathcal{N}(n,N)} \tilde{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{\nu-n}}(K - S_\nu)^+ \mid \mathcal{F}_n\right], \tag{3.163}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$, essendo $\mathcal{N}(n,N) \equiv \mathcal{N}(t_n, T)$ l'insieme degli $\mathfrak{F}$-tempi d'arresto che soddisfano la condizione $n \leqslant \nu \leqslant N$, o equivalentemente $t_n \leqslant \nu \leqslant T$, per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$. Inoltre, il tempo d'arresto $\nu_n^* \in \mathcal{N}(n,N)$ per il quale vale l'Equazione (3.163), noto come tempo d'arresto ottimale *successivo al tempo $t = t_n$, è dato da*

$$\nu_n^*(\omega) = \min\{u \geqslant n : AP_u(\omega) = (K - S_u(\omega))^+\}.$$

Idea: Ho $S_N(w_1), ..., S_N(w_4)$. All'istante terminale, noto K, posso calcolare tutte le differenze e il massimo, cioè $(K - S_N(w_1))^+, (K - S_N(w_2))^+, ...$ Alcuni di questi saranno 0, altri saranno >0. L'idea è partire da S_0 e costruire il reticolo dei valori prezzi. (I valori sopra citati sono alla fine del reticolo) Se faccio lo sconto dei valori precedenti, quelli che erano 0 continuano ad essere 0, gli altri maggiore di 0 continuano ad essere >0. Devo confrontare questi valori scontati con $K - S_{N-1}$. Il valore della PUT è il valore più grande tra questo ed i valori scontati. Quindi confronto $K - S_{N-1}$ coi valori scontati presi al tempo successivo $(K - S_N)^+$ Appena questi valori scontati sono >0, dovrei esercitare la PUT.

Lez 27 - 16 giugno 2023

Opzioni americane 3.5.3

Riprendiamo il confronto tra probabilità oggettiva e soggettiva. $\tilde{E}[P_N]$ è la *speranza condizionata*.

Sappiamo che varrà P_n rispetto alle informazioni iniziali. P_0 è invece un numero. Ricordiamo che per le *americane* l'esercizio non è per forza al valore terminale. Vediamo quando conviene esercitare l'opzione (non conviene mai esercitare prima, quindi alla fine sono come call europee. Questo vale **solo per le call.**) Il payoff, nelle opzioni europee, si può ottenere solo alla fine, cioè alla fine è una variabile aleatoria dipendente dallo stato, non dal tempo.

Per i derivati americani (in particolare opzioni americane) il tempo entra come variabile per il payoff, riscuotere prima è diverso da riscuotere dopo. Non posso invocare la *completezza del mercato*, devo trovare altre vie. Il valore delle call americane non va mai esercitato prima, per le Put invece sì, appena si arriva al valore del titolo pari a 0 conviene vendere. Se aspetto che riscenda a 0 non è conveniente come farlo subito.

Dalla **definizione 232**, il tempo di arresto è una variabile aleatoria che permette di accorgerci di un valore che essa assume in quel tempo li, non dopo!

Definizione 232 *Chiamiamo* tempo d'arresto *rispetto alla filtrazione* $\mathfrak{F}$, *più brevemente* $\mathfrak{F}$-tempo d'arresto, *una variabile aleatoria reale* $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nu(\Omega) \subseteq \{0, 1, \ldots, N\} \quad e \quad \{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leqslant n\} \equiv \{\nu \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{3.161}$$

Quindi, ad esempio, se prende valore 2, me ne accorgo a tempo 2, non dopo! Visto **esempio 234**. (già visto nella lezione precedente) Dal **teorema 235**, troviamo la formula per calcolare il prezzo della PUT. E' in funzione di un massimo, con uno sconto basato sul tempo di arresto.

Teorema 235 *Il processo dei prezzi* $(AP_n)_{n=0}^N$ *di un'opzione put americana soddisfa l'equazione*

$$AP_n = \max_{\nu \in \mathcal{N}(n,N)} \tilde{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{\nu-n}}(K - S_\nu)^+ \mid \mathcal{F}_n\right], \tag{3.163}$$

per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$, *essendo* $\mathcal{N}(n, N) \equiv \mathcal{N}(t_n, T)$ *l'insieme degli* $\mathfrak{F}$*-tempi d'arresto che soddisfano la condizione* $n \leqslant \nu \leqslant N$, *o equivalentemente* $t_n \leqslant \nu \leqslant T$, *per ogni* $n = 0, 1, \ldots, N$. *Inoltre, il tempo d'arresto* $\nu_n^* \in \mathcal{N}(n, N)$ *per il quale vale l'Equazione (3.163), noto come* tempo d'arresto ottimale *successivo al tempo* $t = t_n$, *è dato da*

$$\nu_n^*(\omega) = \min\left\{u \geqslant n : AP_u(\omega) = (K - S_u(\omega))^+\right\}.$$

Esiste un metodo alternativo, che prende il nome di **Tecnica del Bellman, teorema 236**.

Teorema 236 *Il processo dei prezzi* $(AP_n)_{n=0}^N$ *di un'opzione put americana può anche ottenersi con l'induzione retroattiva definita da*

$$AP_N = (K - S_N)^+ = P_N \tag{3.164}$$

e

$$AP_n = \max\left\{(K - S_n)^+, \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_n[AP_{n+1}]\right\} = \max\left\{(K - S_n)^+, \frac{1}{1+r}\left(AP_{n+1}^+\tilde{p} + AP_{n+1}^-\tilde{q}\right)\right\} \tag{3.165}$$

per ogni $n = N-1, \ldots, 1, 0$. *A sua volta, il tempo d'arresto ottimale nell'insieme* $\mathcal{N}(n, N)$ *può anche ottenersi con l'induzione retroattiva definita da*

$$\nu_N^*(\omega) = N \tag{3.166}$$

per ogni $\omega \in \Omega$ *e*

$$\nu_n^*(\omega) = n1_{\{AP_n=(K-S_n)^+\}}(\omega) + \nu_{n+1}^*(\omega)1_{\{AP_n>(K-S_n)^+\}}(\omega) \tag{3.167}$$

per ogni $n = N-1, \ldots, 1, 0$ *ed ogni* $\omega \in \Omega$.

Da notare che stante l'Equazione (3.154), gli eventi $\{AP_n = (K - S_n)^+\}$ e $\{AP_n > (K - S_n)^+\}$ costituiscono una partizione di Ω.

Vediamo che è presente il valore di esercizio differito AP_{n+1}.

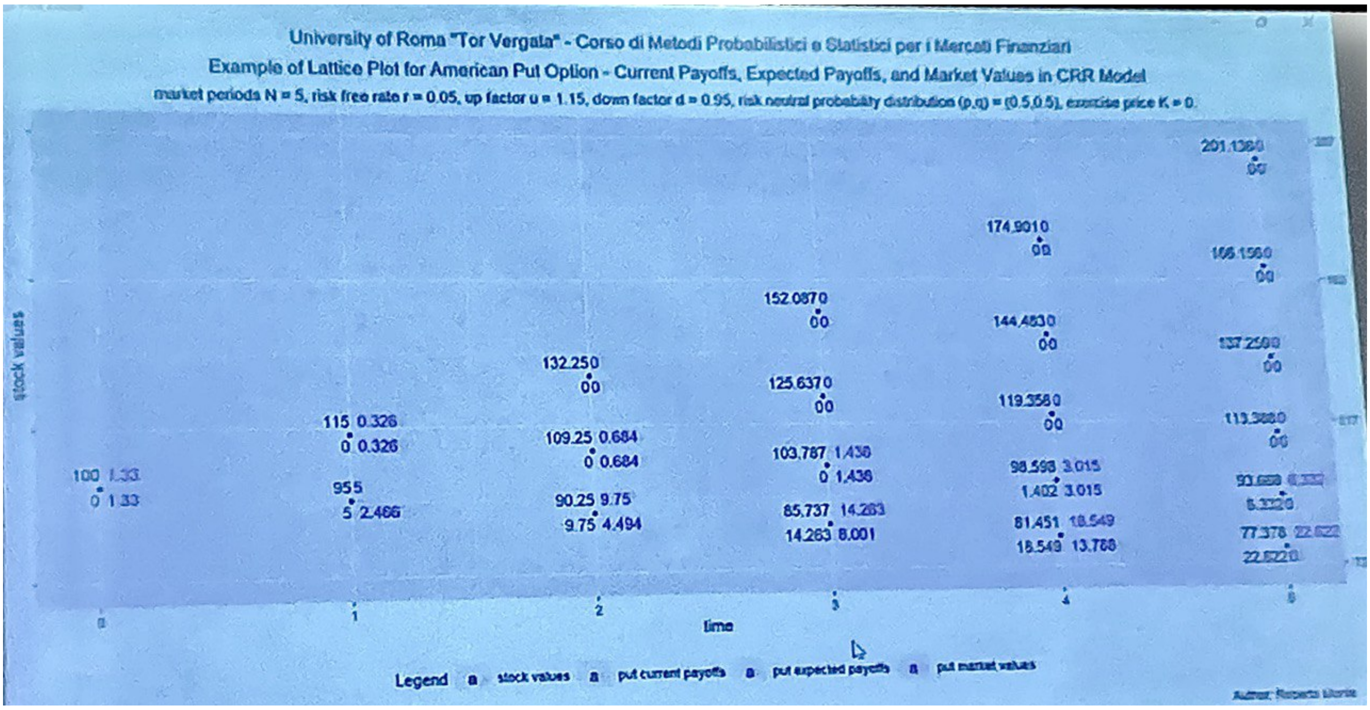
Nella **definizione 237** abbiamo esercizi immediati e futuri.

Definizione 237 *Considerata un'opzione put americana AP chiamiamo* valore d'esercizio immediato (current payoff) *[risp.* valore d'esercizio atteso (expected payoff)*] di AP al tempo* $t = t_n$, *per ogni* $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *la variabile aleatoria*

$$(K - S_n)^+ \quad [\textit{risp.}\ \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}_n[AP_{n+1}]]$$

In ogni punto del reticolo, se volessi esercitare la put e veder il current payoff, devo fare la differenza tra il nodo precedente e quello attuale. Se il nodo da cui parto è 100, e ora sono a 95, allora faccio $100 - 95$. Se parto da 100, e sono a 105, allora $100 - 105 = -5$, quindi non posso essendo < 0. Infatti, se decido di vendere un titolo quando la sua quota è x, io ho il guadagno se questo valore scende (vendo a 10 una cosa che vale 5), e quindi non ha senso vendere a 10 una cosa che vale 15.

L'**Expected payoff** è il valore *atteso*, cioè quanto guadagno se sto in un certo nodo e *non* esercito l'opzione? e' 0, il futuro non c'è (sto sull'ultimo nodo, non c'è niente dopo). L'opzione dopo tali nodi muore, non c'è futuro. L'expected payoff è 0. Se mi metto "prima", allora è valore atteso futuro dato il punto in cui mi trovo. Se mi trovo in un nodo con valore 81, e futuro può essere 93 o 77. Allora faccio $100 - 93$ e $100 - 77$, li moltiplico per le probabilità $\tilde{p}, \tilde{q}$ e li sconto di *un periodo* $(1 + r)$ e trovo 81, lo devo fare dalla fine verso l'inizio! Valori futuri condizionati da dove mi trovo.



Nei grafici, stock in nero, payoff atteso blu, payoff rosso. Se vedo primo nodo, trovo che il primo nodo ha payoff 1.33, quindi devo aspettare. Vado al secondo nodo (quindi ora mi sto muovendo da inizio alla fine). Ho due percorsi: adesso payoff immediato è superiore a quello atteso, allora devo esercitare immediamente. Se non lo esercito ho altri due percorsi, potrei guadagnare in uno dei due percorsi dopo. Ma devo vedere quanto è probabile. Potrei avere payoff immediato 9.75, e scontando di (1+r) avrei un payoff atteso maggiore del precedente, però sto considerando solo il caso in cui "mi va bene", nei conti devo considerare anche il caso in cui "mi va male". Sarebbe $\frac{9{,}75\cdot 0{,}5}{1+0.05} = 4.64 < 5$ (valore in rosso) Quindi devo esercitare, non posso sperare nel futuro, devo essere razionale. Ottengo un valore medio futuro più basso di quello attuale. Vale anche se aspetto di più! Appena payoff corrente > payoff atteso, *devo esercitare*. Successivamente è stato aggiunto in magenta il valore di mercato, il massimo tra i due valori, cioè il payoff corrente. Se payoff corrente è 0 devo aspettare. Se valore atteso è 0, *non ho più speranze*. La put americana prende valore quando titolo scende. Dipende dalla traiettoria, è una v.a. Finchè blu > rosso non esercito.

Esempio 240

Esempio 240 *In relazione all'esempio presentato nello script, abbiamo*

$$AP_5(\omega) = \max\{K - S_5(\omega), 0\} = \begin{cases} 22.622, & se\ S_5(\omega) = 77.378, \\ 6.332, & se\ S_5(\omega) = 93.688, \\ 0, & altrimenti, \end{cases}$$

e

$$\nu_5^*(\omega) = 5.$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} AP_4(\omega) &= \max\left\{K - S_4(\omega), \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}\left[AP_5 \mid S_4 = S_4(\omega)\right]\right\} \\ &= \max\left\{K - S_4(\omega), \frac{1}{1+r}\left(AP_5^+\tilde{p} + AP_5^-\tilde{q}\right)\right\} \\ &= \begin{cases} 18.549, & se\ S_4(\omega) = 81.451, \\ 3.015, & se\ S_4(\omega) = 98.598, \\ 0, & altrimenti, \end{cases} \end{aligned}$$

Vediamo $v_4^*(w) = 5$ se $\sum \omega = 1$, altrimenti 4.

Al tempo 4, il tempo di arresto si esercita successivamente, quindi devo aspettare. Il valore del payoff futuro > payoff corrente, devo andare avanti. Nel caso *altrimenti*, la somma non deve fare 1, ad esempio potrebbe fare 0, oppure 2. Il reticolo parte da indice 0. Questo modo di calcolare mi dice in anticipo quando esercitare. Ma quale è l'algoritmo dietro?

A riga 544 del file.r sono scritte le possibili realizzazioni. Sulla base di tale spazio vediamo quali sono i punti dove va eseguita l'opzione. Vediamo il massimo tra il payoff corrente e quello futuro. Otteniamo tavola che mi dice i vari massimi. Successivamente viene creata una matrice usando la formula del tempo di arresto. Se la somma è 1, devo esercitare subito. Lo vedo traiettoria per traiettoria. Nei grafici, se il primo valore viene 1, come la mettiamo, dobbiamo esercitarla sempre a 5. Se mi va male, esercitarla a 5 = morta, è "uguale". Idealmente, da un certo punto in poi la put "muore", e noi gli assegniamo 0 pur di definirle. Se vediamo 1,0,0,1,0 con 1 salgo, con 0 scendo, muore a 4. Con un caso in cui vale 2, il nome della "tabella" è 32, cioè 1,1,0,.. diventa 2 perchè si azzera. Possiamo vedere che opzioni europee e americane alla fine sono "uguali"? Vediamo le call americane. In rosso payoff corrente. In blu payoff atteso. 15 rosso vs 33 blu, aspetto. Blu è sempre maggiore del payoff corrente. Alla fine payoff atteso coincide con quello "futuro", perchè non c'è più futuro. Si è discusso se magari 0 come valore futuro risulti più appropriato. Difficile capiti corrente=atteso, perchè non sarebbe più una funzione, il tempo di arresto non sarebbe più una funzione ma una corrispondenza. Vuol dire che in un nodo il tempo di arresto può prendere due valori (o mi arresto, o vado a quello dopo) e non dovrebbe verificarsi.

3.5.4 Calibrazione

Un modello non è la realtà, devo renderlo più simile alla realtà tramite certi parametri, cioè lo calibro. CRR non è la realtà, quindi lo calibro. Se cerco distribuzione altezza degli uomini dai 30 ai 40 anni, allora questa fascia di età si presume una gaussiana, e si parla di stima della media e della varianza della gaussiana. Non è un modello astratto, ma come effettivamente devono andare la casa. La *stima* la si fa sui parametri reali per adattare un modello realistico, la *calibrazione* prevede di definire parametri per adattare un modello non reale ad una situazione reale. Come lo si fa? Abbiamo il problema di *r* tasso privo di rischio in Δt, che si lega con tasso di interesse non rischioso, secondo l'**osservazione 241**. ρ viene calcolato su base annua, cioè su 365 anni, fornito dalla FED/banca.

Osservazione 241 *La relazione tra r e ρ è data da*

$$r = \exp(\rho\Delta t) - 1, \qquad \rho = \frac{\log(1+r)}{\Delta t} \tag{3.168}$$

Proof. *Infatti, considerato il tasso d'interesse non rischioso r_T relativo al periodo $[0,T]$, si ha*

$$(1+r)^N = 1 + r_T = \exp(\rho T),$$

da cui

$$N \ln(1+r) = \rho T,$$

che comporta

$$\ln(1+r) = \rho\frac{T}{N} = \rho\Delta t.$$

L'Equazione 3.168 segue immediatamente. □

Notare che risulta

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = \exp(\rho\Delta t),$$

per ogni $n = 1, \dots, N$. Assumiamo che

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right), \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

Cio significa che la variabile aleatoria S_n/S_{n-1} è lognormalmente distribuita, ossia

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_n\right), \quad Z_n \sim \mathcal{N}(0,1).$$

per ogni $n = 1, \dots, N$. In conseguenza [10],

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\tfrac{S_n}{S_{n-1}}\right] &= \exp\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)\exp\left(\tfrac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right) = \exp(\mu\Delta t) \\ \mathbf{D}^2\left[\tfrac{S_n}{S_{n-1}}\right] &= \exp\left(\sigma^2\Delta t - 1\right)\exp(2\mu\Delta t), \end{aligned}\right. \qquad \forall n = 1, \dots, N.$$

[10] If X is a log-normally distributed random variable, then, setting $\mathbf{E}[\ln(X)] \equiv \mu$ e $\mathbf{D}^2[\ln(X)] \equiv \sigma^2$, we can write

$$X = \exp(\mu + \sigma Z), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

.

Altri calcolano solo i giorni in cui i mercati sono aperti, cioè 250/255 giorni. Se faccio rapporto tra S_n e S_{n-1}, e ne faccio il log, ottengo una normale dipendente da certi parametri stimabili. E' come fare la differenza dei logaritmi. Se le variabili aleatorie in funzione del log sono indipendenti, e rendimenti lognormalmente distribuiti, allora si può fare S_N/S_0.

β_n è v.a. bernoulliana. nella 3.16 abbiamo 2 equazioni e tre incognite (q=1-p), per stimare i parametri 'fisso' d=1/u, ma non è l'unica. 3.17 è sviluppato con Taylor. $\bar{X}_N$ è stimatore per la speranza. $S_N^2(X)$ è stimatore per varianza, da cui le mettiamo a sistema per ricavare μ, σ.