

### esercizio lect 5

$$\mu = 1.2 \text{ j/s} \quad \lambda = 0.45 \text{ j/s} \quad E[N_q] = 0.225$$

1)  $p = ?$       2)  $E[T_s] = ?$

poiché  $\lambda < \mu$  sono in **equilibrio stocastico**, sistema **NON COLLASCA**  
STAZIONARIO

$$1) p = \frac{\lambda}{\mu} = 0.375$$

$$2) E[T_s] = E[T_q] + E[S]$$

$$\text{mi serve } E[T_q] \stackrel{\text{LITTLE}}{=} \frac{E[N_q]}{\lambda} = \frac{0.225}{0.45} = 0.5,$$

$$E[S] = \frac{1}{\mu} = 0.83 \text{ s}, \text{ allora}$$

$$E[T_s] = 0.5 + 0.83 = 1.33 \text{ s}. \text{ In } \textcolor{red}{\text{ALTERNATIVA}}:$$

$$E[T_s] \stackrel{\text{LITTLE}}{=} \frac{E[N_s]}{\lambda} = \frac{E[N_q] + p}{\lambda} = \frac{0.6}{0.45} \approx 1.33 \text{ s}$$

$$3) \lambda' e' + 20\%, \quad E[N_q] = 0.3681818, \quad p? \quad E[T_s]?$$

$$\lambda' = \lambda \cdot 1.2 = 0.54 \text{ j/s} < \mu, \quad p' = \frac{\lambda'}{\mu} = 0.45$$

$$E[T_q'] = \frac{E[N_q']}{\lambda'} = 0.681818 \text{ s}, \text{ mentre}$$

$$E[T_s'] = E[T_q'] + E[S] = 0.681818 \text{ s} + 0.83 = 1.51 \text{ s}$$

1) voglio  $\lambda'$  che porti il sistema al collasso

esco  $\lambda'$ :  $x \cdot \frac{\lambda'}{\mu} = 1$ , cioè  $x \cdot 0.54 = 1.2$  se  $x = 2.22$ ,

ovvero incremento del 122%. Poiché  $p \rightarrow 1$  non vole più Little ( $E[T_s] \neq \frac{E[N_s]}{\lambda'}$ ) e  $E[T_s] \rightarrow +\infty$

lect + exq dist - esercizio

$$\lambda = 15 \text{ J/s}, E[S] = 0,05837 \rightarrow \text{generale}$$

$E[T_q] \text{ vs } E[T_q']?$   
 $E[T_S] \text{ vs } E[T_S']?$

$$\lambda' = \lambda \cdot (1,2) = 16,5 \text{ J/s}$$

$$E[T_q] = \frac{E[S] \cdot p}{1-p} \cdot \frac{1+c^2}{2} \quad \text{con } c^2 = \frac{\sigma^2(s)}{E(s)^2}$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = 15 \cdot 0,05837 = 0,87555$$

$$E[T_q] = \frac{0,05837 \cdot 0,87555}{1-0,87555} \cdot \left( \frac{1+c^2}{2} \right) = 0,41048 \left( \frac{1+c^2}{2} \right) \quad \boxed{\text{con } \lambda}$$

$$E[E[S]] = E[T_q] + E[S] = 0,41048 \left( \frac{1+c^2}{2} \right) + 0,05837$$

$$p' = \frac{\lambda'}{\mu} = 16,5 \cdot E[S] = 0,963105$$

$$E[T_q] = \frac{0,05837 \cdot 0,963105}{1-0,963105} \left( \frac{1+c^2}{2} \right) = 1,52368 \left( \frac{1+c^2}{2} \right) \quad \boxed{\text{con } \lambda}$$

$$E[T_S] = 1,52368 \left( \frac{1+c^2}{2} \right) + 0,05837$$

confronto

$$\frac{E[T_q']}{E[T_q]} = 3,71 \text{ cioè circa } 271\% \text{ in più di attesa in coda.}$$

Per  $E[T_S]$  servirebbe  $C^2$  (dipende dal caso), ma  $E[S]$  non dovrebbe comunque incidere molto.

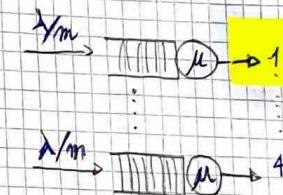
esercizio

$$\lambda = 4 \text{ j/s} \quad p = 0,533334$$

CASO 1 - SINGLE M/M/1

Sono indipendenti, allora per il singolo

$$\text{centro attesa} : P = \frac{(\lambda)}{(\mu)} = 0,53334$$



Allora  $\mu = 1,8750 \text{ J/s}$ . Sono singole code M/M/1,  $\lambda' = \frac{\lambda}{m}$

$$E[T_S] = E[T_q] + E[S] = \underline{pE[S]} + \underline{E[S]} - \underline{pE[S]} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1,8750 - 1} = 1,142857 \text{ s}$$

$$E[T_q] = \frac{pE[S]}{1-p} = E[T_S] - E[S] = 0,609525 \text{ s}$$

$(mp)^m$  sta fuori da  $\frac{1}{m! (1-p)}$  io l'ho messo dentro

CASO 2 - MULTISERVER M/M/m

ma serve  $P(\text{ristima vuota})$

$$P(0) = \sum_{i=0}^{m-1} \left[ \frac{(mp)^i}{i!} + \frac{(mp)^m}{m!(1-p)} \right]^{-1} = \left[ \frac{(4 \cdot 0,5334)^0}{0!} + \frac{4(4 \cdot 0,5334)^4}{4!(1-0,5334)} \right]^{-1} \\ \frac{(4 \cdot 0,5334)^1}{1!} + \frac{(4 \cdot 0,5334)^4}{2!} + \frac{(4 \cdot 0,5334)^4}{3!} \quad \text{WOLFRAM} \quad 0,0693$$

$$P_0 = \frac{(mp)^m}{m! (1-p)} P(0) = \frac{(4 \cdot 0,5334)^4}{4! (1-0,5334)} \cdot 0,0693 = 0,12826 = \text{prob. sistema con serventi tutti occupati}$$

da cui :  $\frac{E[S]}{1-p}$

$$E[T_q] = P_0 \cdot E[S] = \frac{0,12816 \cdot \frac{1}{1,8750}}{1-0,53334} = 0,03661 \text{ s e}$$

$$E[T_S] = E[T_q] + E[S] = 0,03661 + 0,53334 = 0,569943 \text{ s}$$

CASO 3 - "single server potenzialmente"

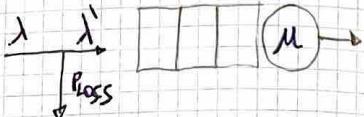
$$\mu = 4 \cdot \mu = 7.5 \text{ J/s} \rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu} = 0.13$$

$$E[T_q] = \frac{\rho E[S]}{1-\rho} = \frac{0.533334 \cdot 0.13}{1-0.533334} = 0.15238 \text{ s}$$

$$E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.15238 + 0.13 = 0.2857 \text{ s}$$

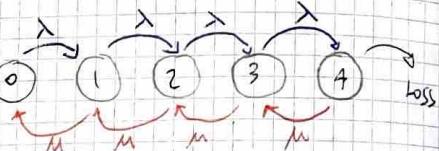
### lect15 Markov Esercizio CODA FINITA

$$\lambda = 5 \text{ J/s} \quad \mu = 5 \text{ J/s}$$



- Sistema presenta coda finita  $\rightarrow$  stazionario
- Utilizzazione è  $p = \frac{\lambda^i}{\mu^i}$ , dove  $\lambda = \lambda(1 - p_{\text{loss}})$ .

Per ottenere modello con Markov, applicando bilanciamento globale:



$$\pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \cdot \mu ; \quad \pi_1 \cdot (\lambda + \mu) = \pi_0 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \mu \quad \dots \quad \text{trovo}$$

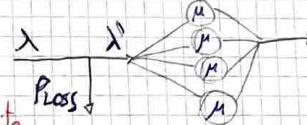
è da entrare in stato 0      esce da stato 1      entra in stato 1

$$\begin{cases} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \\ \sum_{i=0}^4 \pi_i = 1 \end{cases} \quad \text{con } \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \quad \text{e } \pi_4 = p_{\text{loss}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 = \frac{1}{5}$$

$$\text{allora } \lambda' = \lambda(1 - \frac{1}{5}) = 4 \text{ J/s} \quad \text{e } p = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\text{Il throughput è } X = \min(\lambda', \mu) = 4 \text{ J/s}$$

Adesso passiamo a 4 core con  $E[S] = 0.3$ ,  $\rightarrow \mu = 3.3$  per core trattori di Multiserver.



NOTA:

abbiamo visto Multiserver con coda infinita

e senza coda, MAI multiserver con coda FINITA. Quindi non possiamo parlare di buffer size come prima. Assumiamo senza coda Erlang - B

Dobbiamo calcolare:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3.3}\right)^0 + \left(\frac{5}{3.3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{5}{3.3}\right)^4} = 0.227353$$

necessaria per  $\pi_4 = p_{\text{loss}}$

$$p_{\text{loss}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \cdot \frac{\pi_0}{4!} = \left(\frac{5}{3.3}\right)^4 \cdot \frac{0.227353}{4!} = 0.04795$$

allora  $\lambda' = \lambda(1 - p_{\text{loss}}) = 4.76025 \text{ J/s}$ . Di conseguenza:

$$P' = \frac{\lambda'}{4\mu} = \frac{\max \text{ che entra}}{\max \text{ che esce}} = 0.357018$$

$$\text{Throughput } X = \min(\lambda', \mu) = 4.76025 \text{ J/s}$$

Se vogliamo calcolare  $E[N_s]$ ?

$$E[N_s] = \sum_{i=1}^4 \pi_i \cdot i = \pi_1 \cdot 1 + \pi_2 \cdot 2 + \dots + \pi_4 \cdot 4, \text{ cioè}$$

la probabilità  $\pi_i$  che ci sono "i" serventi attivi, per "i" numero di serventi attivi.

## Esercizio

$$\lambda = 0.8 \text{ J/S} \quad E[S] = 0.4 \rightarrow \mu = 2.5 \text{ J/S}$$

$Q_1 S = E[T_{q_1}] = 0.1 S$ , se rispettato guadagno  $C_1 = 5$ ,  
se non rispettato perdo  $C_2 = 3$ .

CONTESTO ABSTRACT PREEMPTIVE.

Probabilità  $p_1, p_2$ :  $R = p_1 C_1 - p_2 C_2$  è massimo?

Svolgimento

Poiché il QoS è un prestazioni globali, cioè porta a considerare un sistema con PRELAZIONE, l'unico che porta miglioramenti globali.

Prese due code, voglio maximizzare  $R_1$  e quindi  $p_2$ .

Impongo che:

$$E[T_{q_K}] = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \lambda_i E[S^2]}{\left(1 - \sum_{i=1}^K p_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i\right)} \stackrel{K=2}{=} \frac{\frac{1}{2} \lambda_1 E[S^2]}{1 - p_1} = \frac{p_2 E[S]}{1 - p_1}$$

calcolo quindi  $p = \lambda E[S] = 0.32$ . Chi è  $p_2$ ? è  $p \cdot p_1$

Impongo che  $\frac{p \cdot p_1 \cdot E[S]}{1 - p \cdot p_1} = 0.05 = 0.1$ , risolvo:

$$\frac{0.128 \cdot p_1}{1 - 0.32 p_1} = 0.1 \rightsquigarrow 0.128 \cdot p_1 = 0.1 - 0.032 p_1 \rightsquigarrow$$

$$p_1 (0.128 + 0.032) = 0.1 \rightsquigarrow p_1 = 0.625$$

quindi  $p_2 = 1 - p_1 = 0.375$  e quindi

$$R = 0.625 \cdot 5 - 0.375 \cdot 3 = 2$$

Voglio anche calcolare  $E[T_{s_2}]$  delle due code.

$$E[T_{s_1}] = E[T_{q_1}] + E[S] = 0.1 + 0.4 = 0.5 \text{ s}$$

Per  $E[T_{q_2}]$  ricordo che "vede tutta la coda di classe 2".

$$E[T_{q_2}] = \frac{p E[S]}{(1-p)(1-p_1)} = \frac{(0.32) \cdot 0.4}{(1-0.32) \cdot (1-0.32 \cdot 0.625)} \approx 0.235294$$

Attenzione! In prelazione un job di classe 2 può essere sostituito da uno di classe 1 e poi eventualmente rientrare. Devo calcolare il tempo di SERVIZIO VIRTUALE

$$E[S_{\text{virt},k}] = \frac{E[S]}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i} \stackrel{K=2}{=} \frac{E[S]}{1 - p_1} = \frac{0.4}{1 - 0.32 \cdot 0.625} = 0.5 \text{ s}$$

allora concludiamo con  $E[T_{s_2}] = E[T_{q_2}] + E[S_{\text{virt},2}] = 0.735294$  secondi

## Esercizio Multipriority

$\lambda = 1 \text{ J/s}$  domanda media  $Z = 4 \cdot 10^5 \text{ OP/job}$ , expo attivato  
 2 configurazioni : { SINGLE SERVER } Dual core  
 Capacità  $\Rightarrow C = 10^6 \text{ OP/s}$  con  $\frac{C}{2}$

Voglio i seguenti requisiti : •  $T_q < 0.15 \text{ s}$

- $T_s < 0.5 \text{ s}$  per almeno il 35% degli arrivi

### Svolgimento

$$E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{4 \cdot 10^5 \text{ OP}}{10^6 \text{ OP/s}} = 0.4 \text{ s}$$

portiamo con SINGLE SERVER

#### ► SENZA CLASSI DI PRIORITÀ

$$\text{inizio col calcolo } E[T_q] = \frac{P E[S]}{1-P} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) E[S]}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{(\lambda \cdot E[S]) E[S]}{1 - \lambda E[S]} = \frac{1 \cdot 0.4 \cdot 0.4}{1 - 1 \cdot 0.4} = 0.26$$

$$\text{di conseguenza } E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.26 + 0.4 = 0.66$$

non rispetta NULLA.

#### ► CON CLASSI DI PRIORITÀ

Poiché i QoS riguardano metriche del sistema generale e non delle singole classi, passo al caso PREEMPTIVE, in quanto dalla teoria sappiamo che classi NON PREEMPTIVE non appartengono miglioramenti generali, ma solo locali

#### ► CLASSI PRIORITÀ PREEMPTIVE

Per la classe 1, che vede solo se stessa, abbiamo:

$$E[T_{q_1}] = \frac{P_1 E[S]}{1 - P_1} \quad \text{con } P_1 = P_2 \cdot P. \quad \text{Dovrei trovare } P_2$$

tale che  $E[T_{q_1}] < 0.15 \text{ s}$  ma notiamo che il testo chiede come 2° requisito che  $E[T_s] < 0.5 \text{ s}$  per almeno il 25% dei job. Proviamo con  $P_1 = 0.35$

$$E[T_{q_1}] = \frac{P_1 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot E[S]}{1 - P_1 \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{P_1 \lambda E[S]^2}{1 - P_1 \lambda E[S]} = \frac{0.35 \cdot 1 \cdot 0.4^2}{1 - 0.35 \cdot 1 \cdot 0.4} = 0.065$$

$$E[T_{q_2}] = \frac{P E[S]}{(1 - P_1)(1 - P)} = \frac{0.4 \cdot 0.4}{(1 - 0.35 \cdot 0.4) \cdot (1 - 0.4)} = 0.31$$

$$\text{da cui } E[T_{q_{\text{generale}}}] = E[T_{q_1}] \cdot P_1 + E[T_{q_2}] \cdot P_2 = 0.065 \cdot 0.35 + 0.31 \cdot 0.65$$

= 0.2273 s, non rispecchia il 1° QoS!

Se trovami altro  $P_1$ ? Impongo che:

$$E[T_{q_1}] = \frac{P_1 \cdot P \cdot E[S]}{1 - P_1 \cdot P} = 0.15, \text{ sviluppo:}$$

$$P_1 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.15 - P_1 \cdot 0.15 \cdot 0.4$$

$$P_1 (0.16 + 0.06) = 0.15 \rightarrow P_1 = 0.68$$

$$\text{da cui } E[T_{q_1}] = 0.149, \text{ ma comunque non rispetta!}$$

$$(0.149 \cdot 0.68 + 0.36 \cdot 0.32 = 0.21)$$

$$E[T_{q_1}] \quad P_1 \quad E[T_{q_2}] \quad P_2$$

## Parliamo al Dual Core

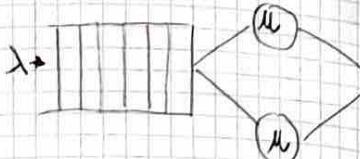
Ogni core ha doppio). Trattori di M/M/2, Erlang C

Calcolo:

$$P(0) = \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(mP)^i}{i!} + \frac{(mP)^m}{m! (1-P)} \right]^{-1}$$

$$m=2 \quad \left| 1 + 2P + \frac{(2P)^2}{2(1-P)} \right|^{-1} = 0.428571$$

$$P = \frac{\lambda}{m \cdot \mu_1} = 0.4$$



$P = \frac{\text{entrate max}}{\text{uscite max}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu_1}$   
con  $\mu_1$ : del server a metà  
 $E[S_i]$  solo nel calcolo di  $E[S]$

Calcolo  $P_a = \frac{(mP)^m}{m! (1-P)} P(0) = \frac{(2 \cdot 0.4)^2}{2(1-0.4)} \cdot 0.428571 = 0.2285712$

e quindi Erlang C  $E[T_q] = \frac{P_a E[S]}{1-P} = \frac{(0.2285712) \cdot 0.4}{1-0.4} = 0.1523808$

$E[T_s] = E[T_q] + E[S] = 0.1523808 + 0.8 = 0.9523808 > 0.5$

Neanche questa soluzione va bene? Se unisco le 2 tecniche?

Multiservizi multicoda

$$E[T_q] = P_1 \cdot \frac{P_2 \cdot E[S]}{1-P_1} + P_2 \cdot \frac{P_1 \cdot E[S]}{(1-P)(1-P_1)}$$

Dal 2° QoS:  $P_2 = 0.35$ ,  $P_1 = 0.65$ ,

$P = 0.4 \rightarrow P_1 = 0.35 \cdot 0.4 = 0.14 \quad | P_2 = 0.26$

Calcolo  $P_a(P_1)$ , in funzione di  $P_1$ :

$$P(0) = \left[ 1 + 2P_1 + \frac{(2P_1)^2}{2(1-P_1)} \right]^{-1} = \left[ 1 + 2 \cdot 0.14 + \frac{(2 \cdot 0.14)^2}{2(1-0.14)} \right] = 0.7543$$

$$P_a(P_1) = \frac{(2P_1)^2 \cdot P(0)}{2(1-P_1)} = \frac{(2 \cdot 0.14)^2 \cdot 0.7543}{2 \cdot (1-0.14)} = 0.03438$$

Per la seconda coda riuso i perzi di prima (vedi formula)

$$E[T_q] = 0.35 \cdot \frac{0.03438 \cdot 0.4}{1-0.14} + 0.65 \cdot \frac{0.2285712 \cdot 0.4}{(1-0.14)(1-0.4)} = \\ = 0.12076 \leq Q_{oS} = 0.15 !!$$

• Il 2° QoS basterebbe rispettarlo per la classe 2 (35%) ma

$$E[T_{s2}] = E[T_{q1}] + E[S] = \frac{0.03438 \cdot 0.4}{1-0.14} + 0.4 = 0.41599 \leq Q_{oS}=0.5$$

è  $E[S]$ , non  $E[S_1]$  perché per prelievare un job di classe 2 serve a disposizione i due server (non che li usi entrambi, ma non viene ristituito come i job di classe 2!)

Consider a web server with the following system characteristics:

- Single processor with capacity  $10^5$  op/sec
- Exponential mean service demand  $4 \cdot 10^4$  op/job
- System utilization 60%.

By knowing the job size, the service provider adopts a simple Size Based priority scheduling without preemption: jobs with size  $\leq z$  (or equal) than the average will have the highest priority (class 1), jobs with size greater than the average have the lowest priority (class 2). Determine:

- the mean response time for both classes and the global mean response time.
- The service provider wants to investigate if a dual core server would improve the service performance.
- Conjecture the behaviour of the performance measures for both classes, by writing the mean waiting and response time definition for the dual core case.

→ solo formule, non calcoli.

## Svolgimento

$$C = 10^5 \text{ op/s}, Z = 4 \cdot 10^4 \text{ op/job} \rightarrow E[S] = \frac{Z}{C} = 0.4 \text{ s}$$

$$\text{da cui } \mu = \frac{1}{E[S]} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ j/s}$$

$$\rho = 0.6 = \frac{\lambda}{\mu} \rightsquigarrow \lambda = \rho \cdot \mu = 0.6 \cdot 2.5 = 1.5 \text{ j/s}$$

## Size Based SENZA PRELAZIONE

- classe 1: job con size  $\leq Z = 4 \cdot 10^4$  op/job
- classe 2: job con size  $> Z = 4 \cdot 10^4$  op/job

$$\text{a)} E[T_{S_1}] ? E[T_{S_2}] ? E[T_S] ?$$

Come prima cosa voglio sapere i job che vanno in classe 1, ovvero cadenti nell'area che descrive  $P(E[S] \leq 0.4)$ .

Trattandosi di esponenziale, chiamiamo  $F(\frac{t}{\mu}) - F(0)$  con

$F = 1 - e^{-\mu t}$ . Usò  $\mu$  e  $\frac{1}{\mu}$  (media), è più conveniente rispetto ad avere ' $E[S]$ ' ed ' $\frac{1}{E[S]}$ ' CREDO.

$$P_1 = \left[ 1 - e^{-\mu t} \right]_0^{\frac{1}{\mu}} = 0.6321$$

$$P_2 = \left[ 1 - e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} = 0.36788$$

$$\rightsquigarrow \text{check: } \sum_{i=1}^2 p_i = 1 \quad \checkmark$$

Note  $p_1$  e  $p_2$ , poniamo calcolo  $E[S_k] = \int_{X_{k-1}}^{X_k} t \cdot f'(t) dt$ ,

con  $f'(t) = \frac{f(t)}{F(X_k) - F(X_{k-1})}$ ,  $f(t) = F'(t) = (1 - e^{-\mu t})' = \mu e^{-\mu t}$  per l'esponenziale!

$$\cdot E[S_1] = \int_0^{\frac{1}{\mu}} t \cdot \frac{\mu e^{-\mu t}}{P_1} dt = \frac{1}{P_1} \int_0^{\frac{1}{\mu}} t \cdot \mu e^{-\mu t} dt \Rightarrow \text{PARTI}$$

$$\frac{1}{P_1} \left[ + \int_0^{\frac{1}{\mu}} 1 \cdot e^{-\mu t} + t \cdot (-) \cdot e^{-\mu t} \right] = \frac{1}{P_1} \left[ -\frac{1}{\mu} \cdot e^{-\mu t} \Big|_0^{\frac{1}{\mu}} - t e^{-\mu t} \Big|_0^{\frac{1}{\mu}} \right] =$$

$$= \frac{1}{0.6321} \left[ -0.9 \cdot \left[ e^{-1} - 1 \right] - 0.4 \cdot e^{-1} \right] = 1.5820 \left[ -0.14715 + 0.4 - 0.14715 \right]$$

$$= 0.1672174 \text{ s}$$

$$\cdot E[S_2] = \frac{1}{P_2} \left[ -t e^{-\mu t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \Big|_0^{\infty} \right] = 2.7181 \left[ 0 + \frac{1}{\mu} e^{-1} - 0 + \frac{1}{\mu} e^{-1} \right]$$

$$= 0.7999 \text{ s}$$

$$\text{Per la } E[T_{Q_1}] = \frac{P_1 E[S_1]}{1 - P_1} ; E[T_{Q_2}] = \frac{P_2 E[S_2]}{(1 - P_1)(1 - P)}$$

$$\text{Non c'è bisogno di avere } E[T_{Q_{k+1}}] = \frac{\lambda_k E(S^2)}{(1 - \lambda) \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt} (1 - \lambda) \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt$$

perché posso calcolo  $\begin{cases} p_1 = \lambda_1 E[S_1] \\ p_2 = \lambda_2 E[S_2] \end{cases}$  per Little;  $\lambda_1 = p_1 \cdot \lambda = 0.94815$ ;  $\lambda_2 = p_2 \cdot \lambda = 0.55185$

$$p_1 = 0.94815 \cdot 0.1672 = 0.15853;$$

$$p_2 = 0.55185 \cdot 0.8 = 0.44148;$$

Faccio lo stesso calcolo, per completezza, con l'integrale sopra.

$$P = \lambda \int_0^{\infty} t \cdot \mu e^{-\mu t} dt = \lambda \left[ -t e^{-\mu t} \right] + \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt =$$

$$= \lambda \left[ -\frac{1}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right] = \lambda \left[ -\frac{1}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} (e^{-\mu t} - 1) \right] =$$

$$= 1,5 (-0,4 e^{-1} - 0,4 e^{-1} + 0,4) = 0.1585$$

$$\rightarrow E[T_{a_1}] = \frac{\rho E[S]}{(1-p_1)} = \text{come prima appunto} = \frac{0.6 \cdot 0.4}{1-0.1585} = 0.2852$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{\rho E[S]}{(1-p_1)(1-p)} = \frac{0.6 \cdot 0.4}{(1-0.1585)(1-0.6)} = 0.7130 \Delta$$

$$E[T_a] = p_1 E[T_{a_1}] + p_2 E[T_{a_2}] = 0.443003 \Delta$$

Ora posso calcolare i valori  $E[T_{s_i}]$ , ho tutto!

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0.2852 + 0.1672 \approx 0.452 \Delta$$

$$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0.7130 + 0.7989 \approx 1.513 \Delta$$

$$\begin{aligned} E[T_s] &= p_1 E[T_{s_1}] + p_2 E[T_{s_2}] = 0.6321 \cdot 0.452 + 0.36788 \cdot 1.513 \\ &= 0.842311 \end{aligned}$$

Adesso passo al dual core, capacità dimezzata  $\frac{10^5}{2} = 5 \cdot 10^4$  op/sec, cambia il contesto, infatti parlando solo di dual core allora cambia solo quello  $p_1, p_2, \lambda, \rho$  invarianti! Scheduling astratto con coda prioritaria

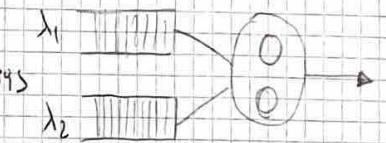
$$\text{Calcolo } P(0) = \left( \sum_{i=0}^1 \frac{(2\rho)^i}{i!} + \frac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)} \right)^{-1} = \left( 1 + 2 \cdot 0.6 + \frac{(2 \cdot 0.6)^2}{2(1-0.6)} \right)^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\text{NB: } \rho \text{ invariato, } \rho = \frac{\max \text{ entrata}}{\max \text{ uscita}} = \frac{\lambda}{m \mu \text{ dimezzato}} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{\mu}{2}\right)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_a = \frac{(mp)^m}{m! (1-p)} \quad P(0) = \frac{(2 \cdot 0.6)^2}{2(1-0.6)} \cdot 0.25 = 0.45$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{P_a \cdot E[S]}{1-p} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{1-0.1583} \times 0.2139$$

quello di prima?



MULTI-PRIORITY  
NO PRELACIONE

$$E[T_{a_2}] = \frac{P_a \cdot E[S]}{(1-p_1)(1-p)} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{(1-0.1583)(1-0.6)} = 0.5346 \Delta$$

$$E[T_a] = p_1 \cdot E[T_{a_1}] + p_2 \cdot E[T_{a_2}] = 0.33176 \quad \text{NO PRELACIONE}$$

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0.2139 + 2E[S_1] = 1.0139 \Delta$$

$$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0.5346 + 2E[S_2] = 1.3346 \Delta$$

$$\begin{aligned} E[T_s] &= p_1 E[T_{s_1}] + p_2 E[T_{s_2}] = 0.6321 \cdot 1.0139 + 0.36788 \cdot 1.3346 = \\ &= 1.1318 \Delta \end{aligned}$$

(con dual core:  $E[T_a] \downarrow, E[T_s] \uparrow$ )

SB

1. Il responsabile di uno sportello comunale per il rilascio di certificati anagrafici vuole investigare le prestazioni del servizio. Analizzando lo storico dell'attività, si desume che una distribuzione uniforme  $Unif(2, 15)$  può ben caratterizzare il tempo di servizio (espresso in minuti). Gli utenti, identificati con la propria richiesta, arrivano in modo random con frequenza 0,112 req/min. Si assume che sia possibile conoscere il tempo di servizio della pratica all'istante di arrivo. Si calcolino i seguenti indici:

- tempi di attesa e risposta per una pratica qualsiasi;
  - i tempi di attesa e risposta per classi e globali assumendo di usare un meccanismo prioritario opportunamente scelto (senza prelazione):
  - lo slowdown condizionato, per richieste di 5 min e di 10 min, nel caso 1.a;
  - lo slowdown condizionato, per richieste di 5 min e di 10 min, nel caso 1.b;
- Si commenti al riguardo del vantaggio della soluzione al punto 1.b. Indicare le assunzioni utilizzate per la soluzione.

$$Unif(2, 15) \quad \lambda = 0,112 \text{ req/min}$$

## SVOLGIMENTO

$\lambda = 0,112 \text{ [req/min]}$ , size based (tempo servizio noto) NO PRELAZ

1.a)  $E[T_{a_i}]$  e  $E[T_s]$ ?

$$E[T_{a_1}] = E[T_{a_2}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{(1-\lambda) \int_0^\infty t \cdot f(t) dt} \rightarrow \text{non è esp} \rightarrow P(E[S] \text{ noto})$$

$$\int_0^\infty t \cdot f(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{13} dt = \frac{1}{13} \int_0^\infty t dt = \frac{1}{13} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{13} \cdot \frac{15^2 - 2^2}{2} = \frac{1}{13} \cdot \frac{205}{2} = \frac{102.5}{13} = 7.82 \text{ min}$$

$$\sigma_s^2 = E[S^2] - E[S]^2 \rightarrow E[S^2] = \sigma_s^2 + E[S]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 14,08 + 72,25 = 86,3 \text{ min}^2$$

mentre  $E[S] = \sqrt{E[S^2]} = 8,5 \text{ min}$

Calcolo  $\int_0^\infty t \cdot f(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{b-a} dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{13} dt = ?$

Non so dove integrare, però so che per le size based posso sempre usare Little:  $P = \lambda E[S] = 0,112 \cdot 8,5 = 0,952$

$$\Rightarrow E[T_{a_1}] = \frac{0,112 \cdot 86,3}{1 - 0,952} = 100,722 \text{ min}$$

alla fine è una KP

$$E[T_s] = E[T_a] + E[S] = 105,2 \text{ min}$$

1.b)  $E[T_a]$ ,  $E[E[T_s]]$ ,  $E[T_{a_1}]$ ,  $E[T_{a_2}]$  usando code con priorità senza prelazione.

L'operazione più semplice è dividere in base a  $E[S] = 8,5 \text{ min}$ , come nell'esercizio precedente!

Calcolo le proporzioni delle classi

$$P_1 = F(E[S]) - F(a) \quad \text{con } F = \frac{x-a}{b-a} \text{ (cumulativa uniforme)}$$

$$= \frac{8,5-2}{13} = \frac{2-2}{13} = \frac{1}{2} = 0,5 = P_2$$

allora  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \cdot 0,5 = 0,056$

$$E[S_1] = \int_2^{8,5} t \cdot \frac{f(t)}{P_1} dt = 2 \cdot \int_2^{8,5} t \cdot \frac{1}{6,5} dt = \frac{2}{13} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_2^{8,5} = \frac{1}{13} (8,5^2 - 4^2) = 5,25$$

$$E[S_2] = \frac{1}{13} (15^2 - 8,5^2) = 11,75 \text{ min}$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S_1^2]}{1 - P_1} ; E[T_{a_2}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S_2^2]}{(1-P_1)(1-P)}$$

$$P_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = 0,056 \cdot 5,25 = 0,294$$

$$P_2 = \lambda_2 \cdot E[S_2] = 0,056 \cdot 11,75 = 0,658$$

ho tolto

$$E[T_{a_1}] = \frac{0,112 \cdot 86,3}{1 - 0,294} = 6,84 \text{ min}$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{0,112 \cdot 86,3}{(1-0,294)(1-0,658)} = 192,6604 \text{ min}$$

↳ p precedente!

$$E[T_a] = p_1 \cdot E[T_{a_1}] + p_2 \cdot E[T_{a_2}] = 0.5 (6.84 + 142.66) = 74.75$$

minore del caso precedente!

$$E[T_{S_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 6.84 + 5.25 = 12.09 \text{ min}$$

$$E[T_{S_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 142.66 + 11.75 = 154.41 \text{ min}$$

$$E[T_S] = p_1 E[T_{S_1}] + p_2 E[T_{S_2}] = 0.5 (12.09 + 154.41) = 83.25 \text{ min}$$

minore del caso precedente!



1.c slowdown per 5 e 10 min nel caso 1.a

Nel caso 1.a non ho partizionato la coda  $E[T_{S(x)}] = E[T_a] + x$

$$E[T_{S(x)}] = \frac{E[T_a] + x}{x} \frac{100.7 + 5}{5} = 21.194$$

$$\text{e } \frac{100.7 + 10}{10} = 11.072$$



1.d slowdown per 5 e 10 min nel caso 1.b

Qui ho due 'code'  $5 < 8.5 \rightarrow E[T_{S_1}]$ ,

$10 > 8.5 \rightarrow E[T_{S_2}]$

$$\bullet E[T_{S(x \in \text{classe 1})}] = \frac{E[T_{a_1}] + x}{x} = \frac{6.84 + 5}{5} = 2.36$$

$$\bullet E[T_{S(x \in \text{classe 2})}] = \frac{E[T_{a_2}] + x}{x} = \frac{142.66 + 10}{10} = 15.266$$

Consider a web server with processing capacity  $C = 10^5 \text{ op/sec}$ . The server receives requests with a mean rate  $Z \text{ req/sec}$ . The requests have different demand  $Z$ . Consider the following intervals:

- ♦  $Z < 20.000 \text{ op}$
- ♦  $20.000 \text{ op} \leq Z < 40.000 \text{ op}$
- ♦  $Z \geq 40.000 \text{ op}$

By assuming that:  $Z = 31.3 \text{ demand}$

- i. the mean size is  $40.000 \text{ op}$ , characterized by an exponential distribution;
- j. the arrival rate is characterized by a Poisson process;
- Define a management mechanism of the server to satisfy the following QoS requirements:

1. Mean response time  $\leq 1.5 \text{ s}$  for all requests
2. Mean waiting time  $\leq 0.5 \text{ s}$ , for  $Z < 40.000 \text{ op/sec}$ .

Evaluate

- a. The mean throughput for the server with the chosen management mechanism;
  - b. The mean conditional slowdown for jobs with size  $x = 0.1 \text{ s}, 0.3 \text{ s}$
  - c. Compare the mean slowdown obtained in b. with the corresponding mean slowdown for FIFO and PS scheduling.
- Please comment all the obtained results.

## Svolgimento

$$\bullet C = 10^5 \text{ op/s} , \lambda = Z \frac{\text{req}}{\text{s}}, Z = \begin{cases} Z < 20K \\ 20K \leq Z < 40K \\ Z \geq 40K \end{cases}$$

$$\therefore Z \text{ medio} = 40K \frac{\text{op}}{\text{s}} \text{ ESPONZIALE}$$

•  $\lambda$  è di Poisson.

QoS:

- 1)  $E[T_S] \leq 1.5 \forall \text{ richiesta}$
- 2)  $E[T_a] \leq 0.5 \text{ se } Z < 40K$

$$E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^5} \frac{[\text{op}]}{[\text{op}]} = 0.4 \text{ s} \rightsquigarrow \mu = \frac{1}{0.4} = 2.5 \frac{[\text{job}]}{\text{s}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

Potremo suddividere in 3 classi, perché il testo classifica tre tipi di richieste. Inoltre, la size based non è mai peggiorativa sulle singole classi, mentre globalmente va sempre meglio rispetto ad Abstract, quindi vado diretto con lui. provo con NON PREEMPTIVE

Le 3 classi rispecchiano le 3 'z':

$$C_1 = \left( 0, \frac{2 \cdot 10^4}{10^5} = 0.2 \right); C_2 = \left( 0.2, \frac{4 \cdot 10^4}{10^5} = 0.4 \right); C_3 = (0.4, \infty)$$

Calcolo le probabilità di appartenere a ci:

$$P_1 = F(0.2) - F(0) = 1 - e^{-\mu t} \Big|_0^{0.2} = 0.393469$$

$$P_2 = F(0.4) - F(0.2) = 0.238651$$

$$P_3 = F(\infty) - F(0.4) = 0.367879$$

check

$$\sum P_i = P_1 + P_2 + P_3 \approx 2$$

NB: essendo size based,  $P_i$  dipende dalla cumulativa dell'esponenziale

ovvero dall'area occupata, che dipende da quanto il job chiede

La cumulativa dipende da  $\mu$ , perché è la domanda media ad essere esponenziale,  $\lambda$  non c'entra nulla, è di Poisson. Inoltre

la probabilità è adimensionale  $\rightarrow e^{-\mu t}$  adimensionale  $\rightarrow$

$-\mu t$  adimensionale  $\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{s} \right] \cdot [s]$ , frequenza, cui tanto  $\mu$

Calcoliamo i tempi di servizio per le varie classi,  $E[S_k]$

Generalmente:

$$E[S_k] = \int_a^b \frac{t \cdot \mu e^{-\mu t}}{P_i} dt = \frac{1}{P_i} \int_a^b t \cdot \mu e^{-\mu t} dt =$$

$$= \frac{1}{P_i} \left[ t \cdot (-e^{-\mu t}) - \int_a^b 1 \cdot (-e^{-\mu t}) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{P_i} \left[ -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right]_a^b, \text{ lo applico ai singoli casi}$$

$$E[S_1] = \frac{1}{0.393469} \left[ -0.2 \cdot e^{-2.5 \cdot 0.2} - \frac{1}{2.5} \left( e^{-2.5 \cdot 0.2} - 1 \right) \right]$$

$$= 0.0917013 \wedge$$

$$\begin{aligned} a &= \phi \\ b &= 0.2 \end{aligned}$$

$$E[S_2] = \frac{1}{0.238651} \left[ -0.4 \cdot e^{-2.5 \cdot 0.4} + 0.2 e^{-2.5 \cdot 0.2} - \frac{1}{2.5} \left( e^{-2.5 \cdot 0.4} - e^{-2.5 \cdot 0.2} \right) \right]$$

$$= 0.291701 \wedge$$

$$\begin{aligned} a &= 0.2 \\ b &= 0.4 \end{aligned}$$

$$E[S_3] = \frac{1}{0.367879} \left[ +0.4 e^{-2.5 \cdot 0.4} - \frac{1}{2.5} \left( 0 - e^{-2.5 \cdot 0.4} \right) \right] =$$

$$= 0.80000 \wedge$$

$$\begin{aligned} b &= \infty \\ a &= 0.4 \end{aligned}$$

Ora calcolo  $E[T_{ak}] = \frac{PE[S]}{(1 - \sum_{i=0}^k p_i)(1 - \sum_{i=0}^k p_i)}$   $\rightarrow$  perché exp

$$p_i = \lambda_k \cdot E[S_k],$$

più semplice dell'integrale.

$$\lambda_k = \lambda \cdot p_k$$

$$\lambda_1 = 2 \cdot 0,393469 = 0,786938, \quad \lambda_2 = 2 \cdot 0,238651 = 0,477302$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot 0,367879 = 0,735758$$

$$\text{check} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \approx 2 = \lambda \quad \checkmark$$

Calcolo i vari  $p_k$

$$P_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = 0,786938 \cdot 0,0917013 = 0,07216$$

$$P_2 = \lambda_2 \cdot E[S_2] = 0,477302 \cdot 0,291701 = 0,13922$$

$$P_3 = \lambda_3 \cdot E[S_3] = 0,735758 \cdot 0,8 = 0,58860$$

## PARTE "VALUTATIVA"

a) throughput medio del server

$p = 0.8 \leftarrow \rightarrow$  throughput è  $\lambda = 2$ , sistema stabile.

b) slowdown per size  $x = 0.2 \leftarrow x = 0.3$

se  $x = 0.1 \rightarrow$  classe 1  $\rightarrow$  slowdown(0,1) =  $\frac{E[T_{a_1}] + x}{x} = 4,4488$

se  $x = 0.3 \rightarrow$  classe 2  $\rightarrow$  slowdown(0,3) =  $\frac{E[T_{a_2}] + x}{x} = 2,45774$

c) compare con modello FIFO lo slowdown

IN FIFO:  $E[sd] = \frac{E[E[T_s(x)]]}{x} = 1 + \frac{\frac{1}{2} E[S^2]}{x(1-p)}$ ,

poiché solo exp diventa:  $1 + \frac{PE[S]}{x(1-p)}$

$$E[sd(0.1)] = 1 + \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.1(1-0.8)} = 17$$

$$E[sd(0.3)] = 1 + \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.3(1-0.8)} = 6,33333$$

Notiamo che  $E[T_{a_1}] \in E[T_{a_2}] < 0.5$ , quindi senza fare la matrice possiamo dire che i tempi in coda medi di  $c_1$  e  $c_2$  rispettano il vincolo  $< 0.5$

Calcoliamo  $E[T_{si}]$

$$\cdot E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0,34488 + 0,09170 = 0,43658$$

$$\cdot E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_1] = 0,437338 + 0,291701 = 0,729039$$

$$\cdot E[T_{s_3}] = E[T_{a_3}] + E[S_3] = 2,02886 + 0,8 = 2,82886$$

$$\text{calcolo } E[T_s] = \sum p_i E[T_{s_i}] =$$

$$= (0,393469 \cdot 0,43658) + (0,238651 \cdot 0,729039) + (0,367879 \cdot 2,82886) =$$

$$= 2,3864477 < 1,5 \text{ VINCOLO RISPECTATO.}$$

NB: dato  $E[S]$  medio = 0.4, potrò fare  $E[T_s] = 0.4 + \sum p_i \cdot E[T_{ai}]$

Assumo che web server possa tenere solo 2 job (CAPACITA' = 2), discipline PS.

• Poss probability

$$\begin{aligned} \text{Ho equazioni: } & \begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \pi_0(\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_1 \frac{\mu}{2} \\ \pi_2 \frac{\mu}{2} = \pi_1 \lambda \\ \pi_1 \lambda = \pi_2 \mu \end{cases} \sim \begin{cases} \pi_0(1 + \frac{\lambda + 2\lambda^2}{\mu}) = 1 \\ \mu = \pi_1 2 \frac{\lambda}{\mu} = \pi_0 2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} \\ \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \end{cases} \text{ e' PS} \end{aligned}$$

$$\text{Trovare } \pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 2 \frac{\lambda^2}{\mu^2}} = 0,3246, \text{ allora: } \begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot 0,3246 = 0,2597 \\ \pi_2 = 2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot 0,3246 = 0,3324 \end{cases}$$

$$P_{loss} = \pi_2 = 0,3324$$

• media e varianza del numero di richieste

$$E[\text{richieste}] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 = 0,9245$$

$$\sigma^2[\text{richieste}] = E[\text{richieste}^2] - (E[\text{richieste}])^2 = (1 \cdot \pi_1 + 2^2 \cdot \pi_2) - (0,9245)^2 = 0,7346$$

• probabilistica sistema vuoto?

$$\text{e' } \pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + 2 \frac{\lambda^2}{\mu^2}} = 0,3246$$

• throughput del sistema?

$$X = \min(\lambda, \mu) \text{ dove } \lambda' = \lambda(1 - P_{loss}) = 2(1 - 0,3324) = 1,3352$$

allora  $X = 1,3352$

- 1.2. Consider a single-core server hosting a web service. Requests arrive to the server according to a Poisson, with an average inter-arrival time of 200 ms.
- Knowing that the maximum buffer size is  $N = 4$  (including the jobs in service) and that each request requires on average 200 ms of processing time, compute the throughput of the system.
  - Consider a CPU upgrade to a faster single-core processor which can process a request in 150 ms. Compute the throughput of the upgraded system.
  - Consider a CPU upgrade to a slower quad-core processor, which can process a request in 300 ms using one of its processor cores. Compute the throughput of the upgraded system.

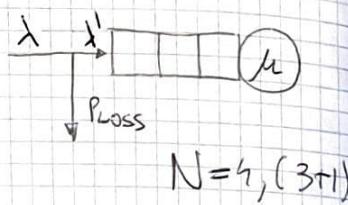
→ non può accogliere più di 4 job,  
nella + NO CODA, NO LOSS

## Svolgimento

a) arrivi Poisson,  $\lambda = \frac{1}{200 \text{ ms}} = 5 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1}{\text{ms}} \right] = 5 \text{ J/s}$

$E[S] = 200 \text{ ms}$ , da cui

$$\mu = \frac{1}{E[S]} = \frac{1}{200 \text{ ms}} = 5 \text{ J/s}$$



Nel sistema entra  $\lambda' = \lambda(1 - P_{\text{loss}})$ , dove:

$$P_{\text{loss}} = \pi_4 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \cdot \pi_0, \text{ calcoliamo prima } \pi_0.$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{5}{5} \right)^i}, \text{ lo mettiamo in } P_{\text{loss}},$$

$$P_{\text{loss}} = \frac{\left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i} = \frac{\left( \frac{5}{5} \right)^4}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{5}{5} \right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 1} = \frac{1}{5} = 0.2$$

allora  $\lambda' = 5(1 - 0.2) = 4$  da cui

$$X = \min(\lambda', \mu) = \min(4, 5) = 4.$$

b) il singolo core porta a  $E[S] = 150 \text{ ms}$ , da cui  
ricaviamo  $\mu = \frac{1}{150 \text{ ms}} = 6.6 \text{ J/s}$   
Le formule non combiano, cambia solo  $\mu$ .

$$P_{\text{loss}} = \frac{\left( \frac{5}{6.6} \right)^4}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{5}{6.6} \right)^i} = 0.10371 \quad (\text{con } \pi_0 = 0.327785)$$

Allora

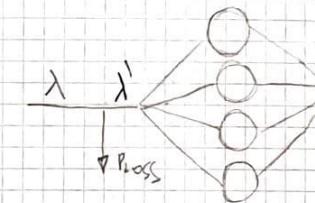
$$\lambda' = \lambda(1 - 0.10371) = 4.481432734, \text{ infine}$$

$$X' = \min(\lambda', \mu) = 4.481432734$$

c) passo a 4 core (quindi diventa SENZA CODA e i multiple server). Ogni core processa  $E[S] = 300 \text{ ms}$ .

$$\text{Allora } \mu' = \frac{1}{300 \text{ ms}} = 3.3 \text{ J/s}$$

Nel caso NO CODA si usa Erlang-B.



$$\pi_4 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \cdot \frac{\pi_0}{4!} \quad \text{con } \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \cdot \frac{1}{i!}}$$

$$\pi_4 = \left( \frac{5}{3.3} \right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^4 \left( \frac{5}{3.3} \right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = 0.048 = P_{\text{loss}}$$

Allora  $\lambda'' = \lambda(1 - P_{\text{loss}}) = 5(1 - 0.048) = 4.76 \text{ J/s}$

Allora  $X'' = \min(\lambda'', \mu') = \min(4.76, 3.3) = 4.76 = X'$

## Esercizio

$E[S] = 0.9$ , NO PENALITY se  $T_a \leq 0.45$ , GUADAGNO se  $T_a > 0.45$   
 Nella slide sono presenti diverse  $\lambda$  e  $\mu$ . Decido di lavorare con  $\lambda = 2$  J/J.

### CASO NO SIZE BASED e NO PRELAZIONE

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8 \quad E[T_{a1}] = \frac{E[S]}{1 - P_1} < 0.45?$$

$$\frac{P E[S]}{1 - P_1} < 0.45 \rightarrow \frac{0.8 \cdot 0.4}{1 - 0.8 P_1} < 0.45 \rightarrow 0.32 = 0.45 - 0.36 P_1$$

$$\rightarrow 0.36 P_1 = 0.45 - 0.32 \rightarrow P_1 = \frac{0.45 - 0.32}{0.36} \approx 0.36$$

$$\text{Con } P_1 = 36\% \text{ ho } E[T_{a1}] = 0.449 \text{ J.}$$

$$\text{Con } P_2 = 64\% \text{ ho } E[T_{a2}] = \frac{0.8 \cdot 0.4}{(1 - P_1)(1 - P)} = 2.297$$

$$E[T_a] = 0.36 \cdot E[T_{a1}] + 0.64 \cdot E[T_{a2}] = 1.6$$

F NON CI SIA MO PROPRIO - cit Franchino.

Anche se ponessi il vincolo sul guadagno  $T_a > 0.9$  risulta.  
 Era prevedibile?

Si, l'abstract migliora localmente, non in generale!

### SIZE BASED NO PRELAZIONE

Normalmente, partiziona rispetto alla size del job piu' alla media delle job sizes, cioe'  $E[S]$ .

- classe 1 ( $0, E[S] = 0.4$ )
- classe 2 ( $0.4, +\infty$ )

$$P_1 = F(0.4) - F(0) = 1 - e^{-\mu t} \Big|_0^{E[S]} = 1 - e^{-1} - (1 - 1) = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$$

$$\text{allora } P_2 = 1 - P_1 = 0.3679$$

$$\text{Calcolo: } E[S_K] = \int_{x_{K-1}}^x t \cdot f^n(t) dt = \int_{x_{K-1}}^x \frac{t \cdot f(t)}{P_K} = \int_{x_{K-1}}^x \frac{t \cdot \mu e^{-\mu t}}{P_K} dt$$

$$= \frac{1}{P_K} \int_{x_{K-1}}^x t \cdot \mu e^{-\mu t} dt \stackrel{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{P_K} \left( -te^{-\mu t} - \int -e^{-\mu t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{P_K} \left( -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} \int -\mu e^{-\mu t} dt \right) = \frac{1}{P_K} \left( -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right)$$

$$E[S_1] = \frac{1}{0.6321} \left( -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right) \Big|_0^{E[S]} =$$

$$= \frac{1}{0.6321} \left[ -0.4e^{-1} - 0.4e^{-1} - (0 - 0.4) \right] = 0.1672$$

$$E[S_2] = \frac{1}{0.3679} \left[ -0 - 0.4/0 - \left( -\frac{0.4}{e} - \frac{0.4}{e} \right) \right] = 0.81$$

NB:  $E[S_K]$  mi. surviva. perché lo metto nel denominatore di  $E[T_a]$

$$E[T_{Q_1}] \stackrel{\text{exr}}{=} \frac{P_E[S]}{(1-P_k)} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{(1-\lambda_k E[S_k])} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{(1-\lambda \cdot p_1 \cdot E[S_k])}$$

$$= \frac{0,8 \cdot 0,4}{(1-2 \cdot 0,6321 \cdot 0,1672)} = 0,40576$$

PROVA:  $E[T_{Q_1}] = \frac{P_E[S]}{1-\lambda \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt} = \frac{P_E[S]}{1-\lambda \cdot p_1 \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt} \xrightarrow{f(t) = \frac{0,8}{t}}$

$$= \frac{P_E[S]}{1-\lambda \cdot p_1} = \frac{P_E[S]}{1-\lambda \cdot p_1 \cdot E[S_1]} = \frac{0,4 \cdot 0,8}{1-2 \cdot 0,6321 \cdot 0,1672} = 0,40576$$

$$E[T_{Q_2}] = \frac{P_E[S]}{(1-p_1)(1-p)} = \frac{E[T_{Q_1}]}{1-p} = \frac{0,40576}{0,2} = 2,0288$$

$$E[T_Q] = p_1 E[T_{Q_1}] + p_2 E[T_{Q_2}] = 0,6321 \cdot 0,40576 + 0,3679 \cdot 2,0288 \\ = 1,00 D.$$

Meglio ma non basta!

Possiamo alle ABSTRACT e SIZE BASED CON PRELAZIONI

### ABSTRACT PREEMPTIVE

$$E[T_{Q_1}] = \frac{p_1 E[S]}{1-p_1} = \frac{p_1 \cdot p \cdot 0,4}{1-p_1} = 0,16312$$

$$\xrightarrow{p = 0,28968}$$

$$E[T_{Q_2}] = \frac{P_E[S]}{(1-p_2)(1-p)} = 2,0288$$

$$E[T_Q] = 0,6321 \cdot 0,16312 + 2,0288 \cdot 0,3679 = 0,84950$$

### SIZE BASED PREEMPTIVE

$$E[T_{Q_1}] = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^2 dF(t) + \frac{\lambda}{2} \times k^2 (1 - F(x_k))}{1-p_1}$$

$$\text{da } \int t^2 dF(t) ? \quad \int t^2 dF(t) \rightarrow F(t) = 1 - e^{-\mu t} = y$$

$$e^{-\mu t} = 1-y \quad \leftarrow$$

$$-\mu t = \ln(1-y) \quad \leftarrow$$

$$t = -\frac{\ln(1-y)}{\mu} \quad \leftarrow$$

$$E[T_{Q_1}] = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} 0,4^2 [\ln(1-y)]^2 dy + \frac{1}{2} 0,4^2 (1-0,6321)}{1-0,289} =$$

$$= 0,225 \int_0^{0,4} \ln(1-y)^2 dy + 0,08279$$

$$1-y = z \quad \begin{matrix} 1-0,4 = 0,6 \\ 1-0 = 1 \end{matrix} \quad -dy = dz$$

$$= 0,225 \int_{0,6}^1 z \cdot (\ln(z))^2 dz + 0,08279 = 0,225 \left[ z \cdot [\ln(z)]^2 - \int z \cdot 2 \ln(z) \cdot \frac{1}{z} dz \right] + 0,08279$$

$$= 0,225 \left[ z \cdot (\ln(z))^2 - 2 \int \ln(z) dz \right] + 0,08279$$

$$= 0.225 \left[ z(\ln z)^2 - z \left[ z \ln z - \int z \cdot \frac{1}{z} dz \right] \right] \Big|_1^{0.6} + 0.08279 =$$

$$= 0.225 \left\{ z(\ln z)^2 - 2[z \ln z - z] \right\} \Big|_{0.6}^{0.6} + 0.08279$$

$$= 0.225 \left\{ 1.0 - 2[0-1] - 0.6(\ln 0.6)^2 + 2[0.6 \ln 0.6 - 0.6] \right\} + 0.08279 =$$

$$= 0.08963$$

Possiamo ora  $E[T_{a2}] = \int_0^{+1} \frac{0.4^2 \ln(4-y)^2 dy}{(1-0.289)(1-0.8)} + \emptyset =$

$$= 1.1235 \int_0^{+1} \ln(1-y)^2 dy = -1-y = z \xrightarrow{y=0} \emptyset, -dy = dz$$

$$1.1235 \int_0^1 \ln(z)^2 dz = 1.125 \left[ z(\ln z)^2 - 2[z \ln z - z] \right]_0^1 =$$

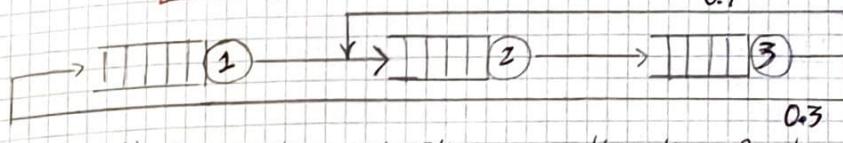
$$= 1.1235 \left[ 1 \ln(1)^2 - 0 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \ln(z)^2 - 2(0-1 - 0 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \ln z + 0) \right] = 2.247$$

$$E[T_a] = p_1 E[T_{a1}] + p_2 E[T_{a2}] =$$

$$= 0.6321 \cdot 0.08963 + 0.3679 \cdot 2.247 \approx 0.88$$

### Esercizio MVA

0.7



0.3

DATI :  $N=3$ ,  $\mu_1 = 1 \text{ j/s}$ ,  $\mu_2 = \mu_3 = 2 \text{ j/s}$

Svolgimento

Scriviamo le equazioni di bilanciamento

$$\begin{cases} y_1 = 0.3 y_3 \\ y_2 = y_2 + 0.7 y_3 \end{cases} \xrightarrow{y_3=1} \begin{cases} y_2 = 0.3 \\ y_2 = 0.3 + 0.7 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

L'equivalente matrice di Routing è :

0	1	0
0	0	1
0.3	0.7	0

• CALCOLO DELLE VISITE di "i" rispetto "j"  $v_{ij} = \frac{y_i}{y_j}$

$$\left[ v_{1,1} = \frac{y_1}{y_1} = 1 ; \quad v_{2,1} = \frac{y_2}{y_1} = 3.3 \quad v_{3,1} = \frac{y_3}{y_1} = 3.3 \right] \text{ centro 1}$$

$$\left[ v_{1,2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1}{y_2} = 0.3 ; \quad v_{2,2} = v_{3,2} = \frac{y_3}{y_2} = 1 \right] \text{ centro 2}$$

Le visite al centro 3 sono uguali :  $v_{1,3} = 0.3$ ,  $v_{2,3} = 1$ ,  $v_{3,3} = 1$

• CALCOLO DEGLI INDICI DI PRESTAZIONI

Secondo l'algoritmo mva, dobbiamo partire dal sistema con 1 job, calcolare gli indici, passare al sistema con 2 job, calcolare gli indici, rifarlo con 2 job e poi con 3 job. È incrementale poiché ricorsivo.

•  $N=0$

Per definizione:  $E[m_1(N=0)] = E[m_2(0)] = E[n_3(0)] \stackrel{!}{=} 0$

•  $N=1$

$$E[t_{\text{central}}(N)] = E[S_{\text{central}}] \cdot (1 + E_{m_{\text{central}}}(N-1))$$

$$E[t_1(1)] = \frac{1}{\mu_1} (1 + E_{m_1}(0)) = 1(1+0) = 1 \quad \text{tempi}$$

$$E[t_2(1)] = \frac{1}{\mu_2} (1 + E_{m_2}(0)) = 0,5(1+0) = 0,5$$

$$E[t_3(1)] = \frac{1}{\mu_3} (1 + E_{m_3}(0)) = 0,5(1+0) = 0,5$$

$$\lambda_1(N=1) = \frac{N}{\sum_{j=1}^N v_j \cdot E(t_j|N)} = \frac{1}{1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5} = 0,230769$$

entrate

$$\lambda_2(N=1) = \frac{1}{0,3 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5} = 0,76923$$

$$\lambda_3(N=1) = \lambda_2(N=1) = 0,76923$$

$$E[m_1(N=1)] = \lambda_1(1) \cdot E[t_1(1)]$$

$$E[m_1(1)] = \lambda_1(1) \cdot E[t_1(1)] = 0,230769$$

$$E[n_2(1)] = \lambda_2(1) \cdot E[t_2(1)] = 0,3846155$$

$$E[n_3(1)] = \lambda_3(1) \cdot E[t_3(1)] = 0,3846155$$

popolazione

•  $N=2$

$$E[t_1(2)] = E[S_1] \cdot (1 + E_{m_1}(1)) = 1(1+0,230769) = 1,230769$$

$$E[t_2(2)] = E[S_2] \cdot (1 + E_{m_2}(2)) = 0,5(1+0,3846155) = 0,69230775$$

$$E[t_3(2)] = 0,69230775$$

$$\lambda_1(2) = \frac{2}{1 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 3,3 + 0,69 \cdot 3,3} = 0,3430$$

$$\lambda_2(2) = \frac{2}{0,3 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 1 + 0,69 \cdot 1} = 1,1435$$

$$\lambda_3(2) = \frac{2}{0,3 \cdot 1,23 + 0,69 \cdot 1 + 0,69 \cdot 1} = 1,1435$$

$$E[m_1(2)] = \lambda_1(2) \cdot E[t_1(2)] = 0,3430 \cdot 1,230769 = 1,1435$$

$$E[m_2(2)] = 1,1435 \cdot 0,6923 = 0,791162$$

$$E[n_3(2)] = 1,1435 \cdot 0,6923 = 0,791162$$

•  $N=3$

$$E[t_1(3)] = E[S_1](1 + E_{m_1}(2)) = 1 \cdot (1+0,4222) = 1,4222$$

$$E[t_2(3)] = E[t_3(3)] = 0,5(1+0,791162) = 0,8958505$$

$$\lambda_1(3) = \frac{3}{1 \cdot 1,4222 + 3,33 \cdot 0,8958505 + 3,33 \cdot 0,8958505} = 0,406051$$

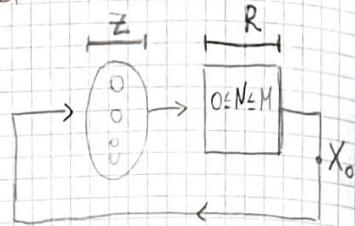
$$\lambda_2(3) = \lambda_3(3) = \frac{3}{1,4222 \cdot 0,3 + 0,8958505 \cdot 1 + 0,8958505 \cdot 1} = 1,35244$$

$$E[m_1(3)] = 0,406051 \cdot 1,4222 = 0,577197$$

$$E[m_2(3)] = E[m_3(3)] = 1,35244 \cdot 0,8958505 = 1,211402$$

# Esercizi Analisi Operazionale

- ① Ogni job genera 20 req/s, utilizza disco 50%, tempo medio servizio disco 0,025s, 25 termini, think time 18s. Tempo risposta sistema interattivo?



Svolgimento

$$\begin{aligned} \bullet V_{\text{disk}} &= 20 \text{ s/r} & \bullet V_{\text{disk}} &= 0.5 & \bullet S_{\text{disk}} &= 0.025 \text{ s} \\ \bullet M &= 25 & \bullet Z &= 18 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\text{Il tempo di risposta interattivo è } R = \frac{M}{X_0} - Z$$

Serve  $X_0$ , per la LEGGE DEL FLUSSO FORZATO  $X_i = X_0 \cdot V_i$   
da cui  $X_0 = \frac{X_{\text{disk}}}{V_{\text{disk}}}$ . Mi serve  $X_{\text{disk}}$ , per la

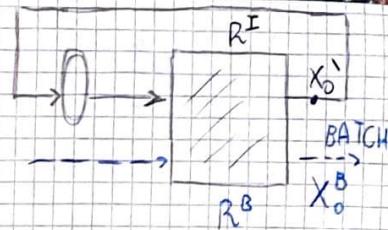
$$\text{LEGGE DELL' UTILIZZAZIONE } U_i = X_i \cdot S_i, \text{ da cui}$$

$$X_{\text{disk}} = \frac{U_{\text{disk}}}{S_{\text{disk}}} \quad \text{Allora } X_0 = \frac{U_{\text{disk}}}{S_{\text{disk}} \cdot V_{\text{disk}}}$$

$$\text{Allora } R = \frac{25}{\left( \frac{0.5}{0.025 \cdot 20} \right)} - 18 = 7 \text{ s}$$

## ② SISTEMA MISTO

$$\begin{aligned} \bullet M &= 40 & \bullet Z &= 15 \text{ s} & R &= 5 \text{ s} \\ \bullet S_{\text{disk}} &= 4 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$



• If job interattivo ha 10 richieste al disco  $\Rightarrow V_{\text{disk}}^i = 10 \text{ req/s}$

• If job batch ha 5 richieste al disco  $\Rightarrow V_{\text{disk}}^b = 5 \text{ req/s}$

$$U_{\text{disk}} = 0.9$$

Svolgimento

2.a) throughput del sistema batch?

Viene chiesto  $X_0^B$ , dal FLUSSO FORZATO  $X_0^B = X_{\text{disk}}^B \cdot V_{\text{disk}}^B$

$$\text{allora } X_0^B = \frac{X_{\text{disk}}^B}{V_{\text{disk}}^B}$$

Mi serve  $X_{\text{disk}}^B$ . ATTENZIONE: Non posso usare

$$X_{\text{disk}}^B = \frac{U_{\text{disk}}^B}{S_{\text{disk}}^B}$$

specifico per "B" e "I". Posso calcolare però

$$X_{\text{disk}} = \frac{U_{\text{disk}}}{S_{\text{disk}}} = \frac{0.9}{4 \cdot 10^{-2}} = 22.5 \text{ s/s}$$

OSSERVAZIONE:  $X_{\text{disk}} = X_{\text{disk}}^B + X_{\text{disk}}^I$  !!

$$\text{Posso trovare } X_{\text{disk}}^I = X_0 \cdot \underbrace{V_{\text{disk}}^I}_{\text{NOTO}} \quad \text{MANCA}$$

Converte il tempo di risposta interattivo!  $R^I = \frac{M}{X_0^I} - Z = 5$

$$\text{Allora } X_0^I = \frac{M}{Z + R^I} = 2 \text{ J/s}, \text{ da cui:}$$

$$X_{\text{DISK}}^I = X_0^I \cdot V_{\text{DISK}}^I = 2 \cdot 20 = 20 \text{ J/s}$$

$$\text{Mettendo insieme } X_{\text{DISK}}^B = X_{\text{DISK}}^I - X_{\text{DISK}}^I = 22.5 - 20 = 2.5 \text{ J/s}$$

$$\text{Finalmente: } X_0^B = \frac{X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B} = \frac{2.5}{5} = 0.5 \text{ J/s}$$

2.b) Adesso tale throughput triplica.  $X_0^B = 1.5 \text{ J/s}$ .  $R^I$  MINIMO?

Sappiamo che  $R^I = \frac{M}{X_0^I} - Z$ . Me è fissi, vedo  $X_0^I$ .

$$X_0^I = \frac{X_{\text{DISK}}^I}{V_{\text{DISK}}^I} = \frac{X_{\text{DISK}}^B - X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B}, \text{ devo } \nearrow \text{ numeratore}$$

per avere  $R^I \rightarrow$ , cioè  $X_{\text{DISK}}^B \nearrow$ . Fino a quanto?

Il massimo è in l'utilizzazione  $P \rightarrow Z$ , ovvero

stava tutto ciò che arriva, a "pieno regime"

Cioè  $X_{\text{DISK}} = \frac{1}{S_{\text{DISK}}} = 25 \text{ J/s}$  (inverso tempo servizio).

$$\text{da cui: } X_0^I = \frac{X_{\text{DISK}}^B - X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B} = \frac{25 - (1.5 \cdot 5)}{10} = \frac{25 - 7.5}{10} = 1.75 \text{ J/s}$$

$$X_{\text{DISK}}^B = X_0^B \cdot V_{\text{DISK}}^B$$

$$\text{conclusione: } R_{\text{MIN}}^I \geq \frac{M}{X_0^I} - Z = \frac{90}{1.75} - 15 = 7.9 \text{ J/s}$$

## Esercizi Lect 27 Queue

①

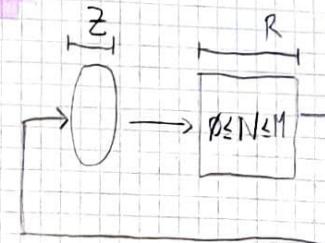
• ogni job genera 20 req/disk =  $V_{\text{DISK}}$

• uso disco 50% =  $V_{\text{DISK}}$

• tempo medio servizio 0.025 s =  $S_{\text{DISK}}$

• terminali 25 = M

• think time 18 s = Z



Tempo di risposta interattivo?

Ci viene chiesto  $R = \frac{M}{X_0} - Z$ , di cui ci manca  $X_0$ .

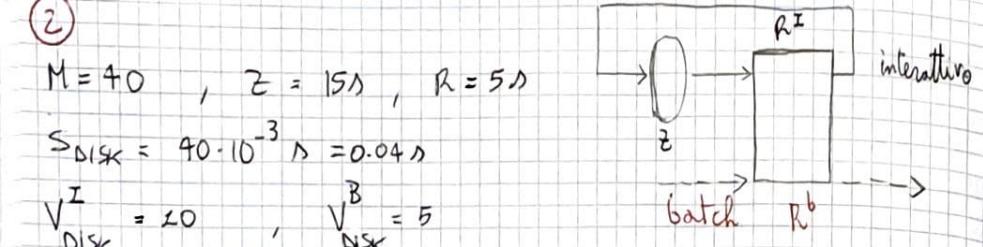
Dalla legge dell'utilizzazione  $U_i = X_i \cdot S_i$ , FLUSSO FORZATO  $(X_0 V_i)$  Si

$$\text{a me serve allora: } X_0 = \frac{U_i}{V_i S_i} = \frac{V_{\text{DISK}}}{V_{\text{DISK}} S_{\text{DISK}}} = \frac{0.5}{20 \cdot 0.025} = 1 \text{ J/s}$$

$$\text{calcolo } R = \frac{25}{1} - Z = 25 - 18 = 7 \text{ s}$$

NOTA:  $\frac{20 \text{ req}}{\text{disk}}$  sono le visite, per parlare di domanda deve

considerare anche quanto chiedono, cioè si



• throughput del sistema batch?

Dal flusso forzato  $X_0^B = \frac{X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B}$ , mi serve  $X_{\text{DISK}}^B$ .

$$X_{\text{DISK}} = X_{\text{DISK}}^B + X_{\text{DISK}}^I \rightsquigarrow X_{\text{DISK}}^B = \underbrace{X_{\text{DISK}}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{X_{\text{DISK}}^I}_{\textcircled{2}}$$

① Dalla legge dell'utilizzazione  $U_{\text{DISK}} = X_{\text{DISK}} S_{\text{DISK}}$ , allora

$$X_{\text{DISK}} = \frac{U_{\text{DISK}}}{S_{\text{DISK}}} = \frac{0.9}{0.04} = 22.5 \text{ J/}\Delta$$

② La seconda componente è INTERATTIVA, allora posso usare

$$R = \frac{M}{X_0^I} - Z \rightarrow X_0^I = \left( \frac{R+Z}{M} \right)^{-1} = \frac{M}{R+Z} = \frac{40}{15+5} = 2 \text{ J/}\Delta$$

mi serve insieme alla LEGGE FLUSSO FORZATO  $X_{\text{DISK}}^B = X_0^I V_{\text{DISK}}^I$

$$= 2 \cdot 10 = 20 \text{ J/}\Delta$$

$$\text{allora } X_{\text{DISK}}^B = X_{\text{DISK}} - X_{\text{DISK}}^I = 22.5 - 20 = 2.5 \text{ J/}\Delta$$

$$\text{e, concludendo, } X_0^B = \frac{X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B} = \frac{2.5}{5} = 0.5 \text{ J/}\Delta$$

. Suppongo che  $X_0^B = 1.5 \text{ J/}\Delta$ , lower bound per  $R^I$ ?

$R^I = \frac{M}{X_0^I} - Z$  decresce se  $X_0^I \nearrow$ , come posso aumentarlo?

$$X_0^I = \frac{X_{\text{DISK}}^B}{V_{\text{DISK}}^B} = \frac{(X_{\text{DISK}} - X_{\text{DISK}}^B)}{V_{\text{DISK}}^I} \rightsquigarrow X_{\text{DISK}}^B = X_0^B V_{\text{DISK}}^B = 1.5 \cdot 5 = 7.5 \text{ J/}\Delta$$

e' un valore "fisso", non posso maximizzarlo!

da maximizzare

$X_{\text{DISK MAX}}$  lo ho se  $p \rightarrow 1$  (utilizzazione)

$$\text{cioè se } X_{\text{DISK MAX}} = \frac{1}{S_{\text{DISK}}} = \frac{1}{0.04} = 25 \text{ J/}\Delta$$

$$\text{allora } X_0^I = \frac{25 - 7.5}{10} = 1.75 \text{ J/}\Delta \text{ e quindi}$$

$$R^I = \frac{40}{1.75} - 15 = 7.9 \Delta$$

# Bottleneck 30/05

(2)

$$\begin{aligned} \text{① } & T = 5 \text{ min}, \quad U_{CPU} = 0.3, \quad D_{DISK} = 0.4 \text{ s}, \\ \therefore & V_{DISK} = 10, \quad U_{DISK} = 0.4, \quad R = 15 \text{ s}, \quad N = 50 \end{aligned}$$

V Valore del think time? (Z)

Il think time Z viene dalla formula  $R = \frac{M}{X_0} - Z$ ,

dove ci manca  $X_0$ .

Per il flusso forzato  $X_{DISK} = X_0 V_{DISK} \rightsquigarrow X_0 = \frac{X_{DISK}}{V_{DISK}}$ ,

per la legge dell'utilizzazione  $X_{DISK} = \frac{U_{DISK}}{S_{DISK}}$ ,

$$\text{allora } X_0 = \left( \frac{U_{DISK}}{V_{DISK}} \right) \cdot \frac{1}{S_{DISK}} = \frac{U_{DISK}}{D_{DISK}} = \frac{0.4}{0.4} = 1$$

$$\text{da cui } Z = \frac{M}{X_0} - R = \frac{50}{1} - 15 = 35 \text{ s}$$

(2) Sistema con 2 risorse:  $R_1 = 10 \text{ s}$ ,  $R_2 = 1 \text{ s}$ ;

$$X_1 = 4 \text{ tr/s}, \quad X_2 = 8 \text{ tr/s}, \quad X_0 = 4 \text{ tr/s}$$

Quale è il tempo di risposta del sistema?

Per definizione,  $R = \sum V_i R_i$ , ricavo le visite da flusso forzato:  $X_i = X_0 V_i \rightsquigarrow V_i = \frac{X_i}{X_0}$ , cioè  $V_2 = \frac{X_1}{X_0} = 1$

$$\text{e } V_2 = \frac{X_2}{X_0} = 2 \quad \text{da cui:}$$

$$R = V_2 R_2 + V_1 R_1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 10 = 12 \text{ s}$$

(3)  $D_{CPU} = 4 \text{ s}$ ;  $U_{CPU} = 0.5$ ;  $R = 15 \text{ s}$ ,  $Z = 25 \text{ s}$ ,

numero N di utenti?

Poiché  $R = \frac{N}{X_0} - Z$ , cerco  $X_0$ : dalla legge

$$\text{dell'utilizzazione } U_{CPU} = X_{CPU} \cdot S_{CPU} \xrightarrow{\text{FLUSSO FORZATO}} X_0 U_{CPU} \cdot S_{CPU} = X_0 D_{CPU}$$

$$\text{cioè } X_0 = \frac{U_{CPU}}{D_{CPU}} = \frac{0.5}{4} = 0.125, \quad \text{pertanto}$$

$$N = (R + Z) X_0 = 40 \cdot 0.125 = 5 \text{ utenti}$$

(4)  $T = 1 \text{ h}$ ,  $M = 80 \text{ utenti}$ ,  $R = 5 \text{ s}$ ,  $C = 60 \text{ / ora}$ ,

$$U_{CPU} = 0.8, \quad U_{DISK1} = 0.5, \quad U_{DISK2} = 0.5, \quad Z?$$

NON sempre siamo tutti i dati!

Potrei scrivere  $Z = \frac{M}{X_0} - R$ , ma chi è  $X_0$ ?

$$X_0 = \frac{C_0}{T}, \quad \text{cioè completamenti del sistema, allora}$$

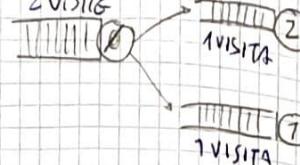
$$Z = \frac{80}{\left(\frac{60}{60}\right)} - 5 = 75 \text{ s}$$

Quanti sono gli utenti che pensano? #think =  $X_0 \cdot Z = 75$ ,

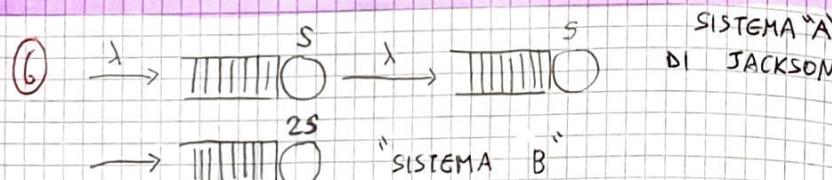
cioè 75 utenti che pensano mediamente 75 s

(5) Noti  $R_0, R_1, R_2$ ,

quanto vale  $R$ ?



$$R = \sum V_i R_i = 2 R_0 + 1 R_1 + 2 R_2$$



$$S = 0.5 \lambda, \quad \lambda = 0.4 \text{ tr/s.} \quad \frac{R_A}{R_B} ?$$

$$\text{SISTEMA "A", 1° centro: } R = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{5} - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{0.5} - 0.4} = \frac{5}{8} \text{ λ}$$

infatti è un single server con coda, e  $R = E[T_S]$  nell'M/M/1. Se sistema di Jackson  $\rightarrow$  per Burke ciò che esce dal 1° centro entra totalmente nel 2° centro, che in comporterà uguale!

$$R_A = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{5}{4} \text{ λ.}$$

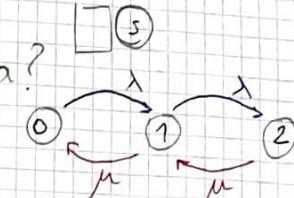
$$R_B = E[T_{SB}] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{0.5 \cdot 2} - 0.4} = \frac{5}{3} \text{ λ, allora}$$

$$e \quad \frac{R_A}{R_B} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{cioè!}$$

$$\int R_A = 0.75 R_B, \quad \text{meglio } R_A, \text{ poiché } R_A < R_B$$

(7) M/M/1/2,  $\lambda = 0.5 \text{ req/h, } S = 0.5$

N° medio richieste nel centro? Varianza?



SISTEMA CHIUSO  $\rightarrow$  MARKOV

solvo eq. bilanciamento dei flussi

$$\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \quad \text{"cioè" che esce da '0' = ciò che entra in '0'"}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 (\lambda + \mu) &= \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \quad \xrightarrow{\text{ND}} \quad \frac{\pi_0 \lambda}{\mu} (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \rightarrow \frac{\pi_0 (1^2 + \lambda \mu)}{\mu} = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \\ \sum \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

$$\pi_2 = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \quad \rightarrow \quad \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \quad \xrightarrow{\text{ND}}$$

$$\pi_2 = \left( \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} (\lambda + \mu) - \pi_0 \lambda \right) \cdot \frac{1}{\mu} \quad \text{"cioè":}$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot 0,25 \quad ; \quad \pi_2 = \left( \pi_0 \cdot 0,25 (2,5) - \pi_0 \cdot 0,5 \right) \cdot 0,5 \\ = \pi_0 \cdot 0,0625$$

$$\text{trovo } \pi_0 : \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 = \pi_0 (1 + 0,25 + 0,0625)$$

$$\rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1 + 0,25 + 0,0625} = 0,7619 \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \pi_1 = 0,1905 \\ \pi_2 = 0,0476 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ N° medio richieste nel centro: } 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 =$$

$$= 1 \cdot 0,1905 + 2 \cdot 0,0476 = 0,2857 = E[\text{req. media}]$$

$$\bullet \text{ Varianza} - E[\text{req. media}^2] - (E[\text{req. media}])^2 =$$

$$= (1^2 \cdot 0,1905 + 2^2 \cdot 0,0476) - (0,2857)^2 = 0,29928$$

## Bottleneck parte 2, 1/06/23

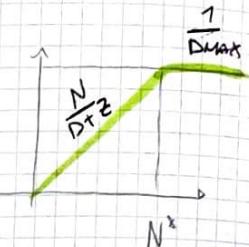
$$\textcircled{1} \quad D_1 = 1S, \quad D_2 = 2S, \quad D_3 = 2S, \quad Z = 6S$$

Throughput massimo?

$$\text{Vale sempre: } X(N) \leq \min\left(\frac{1}{D_{\max}}, \frac{N}{D+Z}\right)$$

$$\frac{1}{D_{\max}} = \frac{1}{D_3} = \frac{1}{2} = 0.5 \frac{\text{req}}{s}$$

$$\frac{N}{D+Z} = \frac{N}{(1+1+2)+6} = \frac{N}{10} \frac{\text{req}}{s}$$



quale dei due prendere dipende da  $N^*$ ,

prima di  $N^*$   $X_0 = \frac{N}{10}$ , dopo  $X_0 = 0.5$ . Chi è  $N^*$ ?

$$\text{Impongo } \frac{1}{D_{\max}} = \frac{N^*}{D+Z} \rightarrow N^* = \frac{D+Z}{D_{\max}} = \frac{(1+1+2)+6}{2} = 5$$

N.B. anche se c'è  $D_1, D_2, D_3$  non vuol dire che ci sono 3 intenti. 3  $D_i$  = 3 centri

$$\textcircled{2} \quad D_1 = 1S, \quad D_2 = 2S, \quad D_3 = 2S, \quad N=2, \quad X_0 ?$$

Voglio throughput esatto, non bound. APPLICO MVA,

$$\text{cioè } \lambda_i(2) = X(2) = \frac{2}{\sum R_i(2)}, \quad \text{"MVA riadattato"}$$

in MVA "originale"

ero intento, ero verlo di renderlo "globale"

Idea:

$$V_i \cdot E(t_i(N)) = \underbrace{E(S_i)}_{R_i(N)} \cdot \underbrace{(1 + E(m_i(N-1))) \cdot V_i}_{D_i(1 + E(m_i(N-1)))}$$

procedo iterativamente:

$$m_1(0) = 0, \quad m_2(0) = 0, \quad m_3(0) = 0$$

$$R_1(1) = D_1(1+0) = D_1 = 1S$$

$$R_2(1) = D_2(1+0) = D_2 = 2S$$

$$\text{da cui } X(1) = \frac{1}{R_1(1) + R_2(1) + R_3(1)} = 0.2 \quad \text{con}$$

$$E[m_2(1)] = X(1) \cdot R_2(1) = 0.2 \cdot 2 = 0.4 \quad (\text{utenti nel "centro"}, \text{e che fanno domanda } D_2)$$

$$E[m_2(1)] = E[m_3(1)] = \frac{2}{5} = 0.4$$

Procedo

$$R_1(2) = D_1(1 + E[m_1(1)]) = 1(1+0.2) = 1.2 = \frac{6}{5}$$

$$R_2(2) = R_3(2) = 2 \cdot 0.4 = \frac{14}{5}$$

$$\text{finalmente: } X(2) = \frac{2}{R_1(2) + R_2(2) + R_3(2)} = \frac{5}{17} = 0.29411$$

③ Sia dato un sistema di router, aperto.

$$\mu_1 = 3 \text{ pkt/s} ; \mu_2 = 5 \text{ pkt/s}$$

• max frequenza tollerabile al

$$1^{\circ} \text{ Router se } \gamma_2 = 1 \text{ pkt/s?}$$

$$M_1 \text{ chiede } \gamma_1^{\text{MAX}}.$$

Trovare le equazioni del traffico: **In FUNZIONE DI  $\gamma_1$**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \gamma_2 + \frac{1}{3} \lambda_2 \quad \text{cioè "quali sono le entrate di } \gamma_1 \text{"} \\ (\text{throughput}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = \gamma_2 + \frac{1}{3} \lambda_1 + \frac{1}{3} \lambda_2 = \frac{2}{3} \lambda_2 = \gamma_2 + \frac{1}{3} \lambda_1 \end{array} \right.$$

La notazione la ho fatta se  $p_2 \rightarrow \gamma_2$  ma se  $p_2 \rightarrow 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3} \lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} (\gamma_2 + \frac{\lambda_1}{2}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3} (\frac{3}{2} \gamma_2 + \frac{\lambda_1}{2}) = \gamma_1 + \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{6} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \gamma_2 + \frac{\lambda_1}{2} \end{array} \right.$$

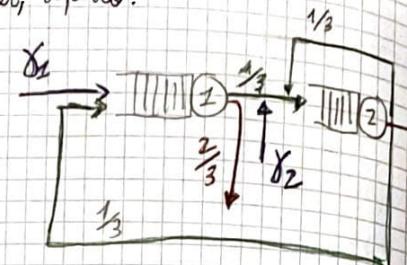
ma dire che  $\gamma_1 = 2$   
non va bene per il  
router 2 ma va  
bene per il router 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{6} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{5} \gamma_1 + \frac{9}{5} \end{array} \right. \quad \sim \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{6}{5} \gamma_1 + \frac{3}{5} \\ \lambda_2 = \frac{3}{5} \gamma_1 + \frac{9}{5} \end{array} \right.$$

devo vedere:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\frac{6}{5} \gamma_1 + \frac{3}{5}}{3} < 1 \quad \Leftrightarrow \gamma_1 < 2 \\ \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\frac{3}{5} \gamma_1 + \frac{9}{5}}{5} < 1 \quad \Leftrightarrow \gamma_1 < 5. \bar{3} \end{array} \right.$

La prima condizione è la più stringente:  $\gamma_1^{\text{MAX}} \leftarrow 2 \frac{\text{pkt}}{\text{s}}$

N.B. il testo parlava di "toleranza della rete"  
per questo ho visto le utilizzazioni di entrambi!



$\gamma_2 = 0.9 \gamma_1^{\text{MAX}} = 1.8 \text{ pkt/s}$ , tempo risposta per pkt che entra nel sistema dal centro 1?

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3} \lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{2}{3} \gamma_2 + \frac{\lambda_1}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{6}{5} \gamma_1 + \frac{3}{5} \\ \lambda_2 = \frac{3}{5} \gamma_1 + \frac{9}{5} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = 1.8 \\ \gamma_2 = 0.9 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2.76 \frac{\text{pkt}}{\text{s}} \\ \lambda_2 = 2.88 \frac{\text{pkt}}{\text{s}} \end{array} \right.$$

$$\text{con questi valori } p_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0.92, p_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0.576$$

Essendo due code M/M/1 il tempo di risposta vede tener conto delle visite.

$$E[T_{S1}] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = 4.16667 = \frac{\lambda_1 E[S_1]}{1 - p_1} + E[S_1] = \frac{0.92 \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0.92} + \frac{1}{3}$$

$$E[T_{S2}] = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = 0.471698$$

questi sono i tempi <entata, uscita> del centro 1 e centro 2.

$$\text{Le visite sono: } V_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\gamma_1} = \frac{2.76}{1.8} = 1.53$$

entra nel  
sistema

$$\text{e } V_{2,0} = \frac{\lambda_2}{\gamma_2} = \frac{2.88}{1.8} = 1.6$$

$$E[t_{R1}] = \sum V_i R_i = 1.53 \cdot 4.16667 + 1.6 \cdot 0.471698 = 7.1436$$

$$E[m_1] = \lambda_1 \cdot E(t_1) = 2.76 \cdot 4.16667 = 11.5$$

$$E[m_2] = 1.3585$$

sotto ipotesi  
esponenziali!

tiene conto grazie alle visite che un  
pkt entrante nel router 2 potrebbe uscire subito  
dal centro 1 oppure entrare nel router 2 ed uscire da lui.

# Esercizi per ora

$$\textcircled{1} \quad V_{CPU} = 0,5, \quad R = 15 \Delta, \quad Z = 5 \Delta, \quad N = 100,$$

$\Delta_{CPU}$ ?

$$R = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{N}{\left(\frac{V_{CPU}}{\Delta_{CPU}}\right)} - Z \rightarrow 15 + 5 = \frac{100}{0,5} \cdot \Delta_{CPU}$$

$$\rightarrow \Delta_{CPU} = \frac{20 \cdot 0,5}{100} = \frac{1}{10} \quad \sim X_0 = \frac{0,5}{\frac{1}{10}} = 5$$

$$\textcircled{2} \quad T = 1h = 60 \text{ min} = 3600 \Delta, \quad C = 900, \quad M = 60$$

$$\therefore N_{think} = 57,5, \quad R = ?$$

$$\therefore R = \frac{M}{X_0} - Z \quad \curvearrowleft \quad Z = \frac{\#_{think}}{X_0}; \quad X_0 = \frac{C}{T} = 0,25$$

$$\text{allora } R = \frac{60}{\frac{C}{T}} - \frac{57,5}{\frac{C}{T}} = \frac{1}{0,25} (60 - 57,5) = 10 \Delta$$

de \textcircled{3} Sistema chiuso con 3 centri.

$$D_1 = 2 \Delta, \quad D_2 = 2 \Delta, \quad D_3 = 3 \Delta, \quad Z = 21 \Delta$$

Upper bound del throughput con 6 utenti?

$$2 \quad X(N) \leq \min \left\{ \frac{1}{D_{MAX}}, \frac{N}{D+Z} \right\}$$

$$N = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{6}{(3+2+1)+21} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{9} \right\}$$

Primo di  $N^*$  è  $\frac{2}{9}$ , dopo è  $\frac{1}{3}$ .  $N^*$  chi è?

$$\frac{1}{D_{MAX}} \equiv \frac{N^*}{D+Z} \rightarrow N^* = \frac{D+Z}{D_{MAX}} = \frac{(3+2+1)+21}{3} = 9. \quad N=6 \text{ è } \frac{2}{9}$$

# Esempio Bottleneck

$$Z = 20 \Delta, \quad S_1 = 0,05 \Delta, \quad S_2 = 0,08 \Delta, \quad S_3 = 0,04 \Delta$$

$$\text{abbiamo } \begin{cases} V_0 = 0,05 V_1 \\ V_1 = V_0 + V_2 + V_3 \\ V_2 = 0,55 V_1 \\ V_3 = 0,4 V_1 \end{cases} \quad \text{Fisso } \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = \frac{1}{0,05} = 20 \\ V_2 = 0,55 \cdot 20 = 11 \\ V_3 = 8 \end{cases}$$

Note VISITE ed i TEMPI SERVIZIO, ricavo DOMANDE  $D_i = V_i \cdot E[S_i]$

$$D_1 = V_1 S_1 = 20 \cdot 0,05 = 1 \Delta, \quad D_2 = V_2 S_2 = 11 \cdot 0,08 = 0,88$$

$$D_3 = V_3 S_3 = 8 \cdot 0,04 \Delta = 0,32 \quad D = \sum D_i = D_1 + D_2 + D_3 = 2,2$$

$$D_{MAX} = D_1 = 1 \Delta$$

$$\bullet \text{ N° termini "pensanti"? } N_{think} = \frac{X_0 \cdot Z}{\underbrace{D_{MAX}}_{\text{throughput}}} = \frac{1}{\frac{1}{D_{MAX}}} \cdot Z = 20 \text{ utenti}$$

$$\text{throughput} = \frac{1}{\frac{1}{D_{MAX}}} = D_{MAX}$$

• se  $X_0 = 0,715 \text{ J/utente}$  e  $R_0 = 5,2 \Delta$ , quanti terminali collegati?

$$R_0 = \frac{N}{X_0} - Z \quad \sim (R_0 + Z) X_0 = N = (5,2 + 20) \cdot 0,715 = 18$$

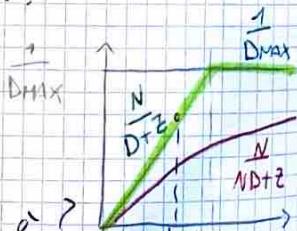
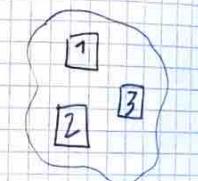
• se  $N = 30, X_0 = 1, Z = 20$ , è vero che  $R_0 = 8 \Delta$ ? Quanto deve valere  $X_0$ ?

$$R_0 = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{30}{1} - 20 = 10 \Delta > 8 \Delta \quad \text{NO!}$$

$$\text{Dovremo avere: } \left( \frac{R_0 + Z}{N} \right)^{-1} = X_0 = \frac{N}{R_0 + Z} = \frac{30}{8} = 1,071428 = \frac{1}{D_{MAX}}$$

$$\Rightarrow D_{MAX} = \frac{1}{1,071428} = 0,93 = V_1 \cdot S_1 \iff S_1 = \frac{0,93}{V_1} = 0,04666 < S_1$$

il nuovo tempo di servizio per soddisfare i requisiti.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1,071428}{S_2}$



$$N=6 \quad N=9$$

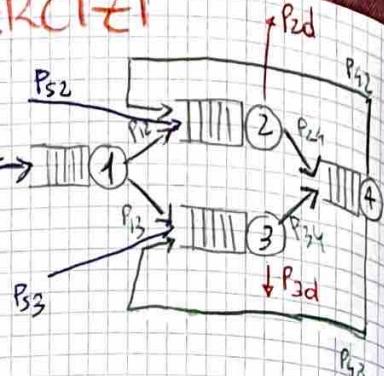
# FOGLI ESERCIZI

Rete Jackson

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad P_{S1} &= \frac{3}{5} & P_{S2} &= \frac{3}{10} & P_{S3} &= \frac{1}{10} \\ P_{T2} &= \frac{1}{5} & P_{T3} &= \frac{1}{5} & P_{2d} = P_{3d} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\mu_1 = 18 \text{ J/D} \quad \mu_2 = 18 \text{ J/D} \quad \mu_3 = 30 \text{ J/D}$$

$$\mu_4 = 15 \text{ J/D} \quad \gamma = 15 \text{ J/D}$$



①  $P_{12} = \frac{2}{3}$ ,  $P_{13} = \frac{1}{3}$ , quale è il system response time?

(Il sistema è aperto, inoltre, poniamo ricavare  $P_{24} = P_{34} = \frac{1}{3}$   
poiché  $P_{2d} = P_{3d} = \frac{2}{3}$ .

Essendo una rete di Jackson cioè che esce da un centro e cioè  
che entra nel centro collegato, inoltre è come se stessi  
trattando reti separabili (centri studiabili in modo indipendente)

scrivo le equazioni di flusso

$$\begin{aligned} d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \gamma \cdot \frac{3}{5} = 6 \\ \lambda_2 = \gamma \cdot \frac{3}{10} + \lambda_1 \cdot \frac{2}{3} + \lambda_4 \cdot \frac{1}{5} \\ \lambda_3 = \gamma \cdot \frac{1}{10} + \lambda_1 \cdot \frac{1}{3} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3} \lambda_2 + \frac{1}{3} \lambda_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 + 4 + \frac{\lambda_4}{5} \\ \lambda_3 = 1 + 2 + \lambda_4 \cdot \frac{4}{3} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3} \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

~~Barreggia, barreggia, barreggia~~:  
Sostituisco  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  nell'equazione

di  $\lambda_4$ , trovando  $\lambda_4 = 5$ , che uso per trovare

Adesso trovo le vinte rispetto  $\gamma$ , cioè prima di entrare nel sistema  
 $V_{1\gamma} = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{3}{5}$  ,  $V_{2\gamma} = \frac{\lambda_2}{\gamma} = \frac{4}{5}$  )  $V_{3\gamma} = \frac{\lambda_3}{\gamma} = \frac{7}{10}$  )  $V_{4\gamma} = \frac{\lambda_4}{\gamma} = \frac{1}{2}$

$$\text{Trovo } R_i = E[T_{Si}] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \text{ A centro}$$

$$E[T_{S1}] = \frac{1}{18 - 6} = \frac{1}{12} \rightarrow E[T_{S2}] = \frac{1}{18 - 8} = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$$E[T_{S3}] = \frac{1}{30 - 7} = \frac{1}{23} \rightarrow E[T_{S4}] = \frac{1}{15 - 5} = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$$\text{Trovo } E[t_R] = \sum V_i E[T_{Si}]$$

$$E[t_R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{23} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0,2104347 \text{ D}$$

②  $P_{12}$  e  $P_{13}$  tali che servir 1 e 2 hanno stessa utilizzabilità  
devo imporne  $P_2 = P_3$  cioè  $\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$  cioè

$$\left\{ \frac{\gamma \cdot \frac{3}{10} + \lambda_1 \cdot P_{12} + \lambda_4 \cdot \frac{1}{5}}{18} = \frac{\gamma \cdot \frac{1}{10} + \lambda_1 \cdot P_{13} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5}}{30} \right. \quad \text{setto } \lambda_4 = 5$$

$$P_{12} + P_{13} = 1$$

$$\left\{ \frac{3 + \lambda_1 P_{12} + 1}{18} = \frac{1 + \lambda_1 P_{13} + 4}{30} \right. \quad \left\{ \frac{4 + 6 P_{12}}{18} = \frac{5 + 6 P_{13}}{30} \right. \quad P_{13} = 1 - P_{12}$$

$$\left\{ 30(4 + 6 P_{12}) = 18(5 + 6 P_{13}) \right. \quad \left\{ 180 P_{12} + 120 = 90 + 108 P_{13} \right. \quad P_{13} = 1 - P_{12}$$

$$\left\{ 180 P_{12} + 30 = 108 P_{13} \right. \quad \left\{ 180 P_{12} + 30 = 108 - 108 P_{12} \right. \quad P_{12} = \frac{78}{288} = \frac{13}{48} \approx 0.27$$

$$\Rightarrow P_{13} = 1 - \frac{13}{48} = \frac{35}{48} \approx 0.73$$

③ con  $P_{12}$  e  $P_{13}$  trovati, come si evolve  $R_v$ ?

Avevamo:  $\begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 + \lambda_1 \frac{13}{98} + \lambda_4 \cdot \frac{1}{5} \\ \lambda_3 = 1 + \lambda_1 \frac{35}{98} + \lambda_4 \cdot \frac{4}{5} \\ \lambda_4 = \frac{1}{3} \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{3} \end{cases}$

VISITE E TEMPI:

$$V_{18} = \frac{3}{5}, V_{48} = \frac{1}{2} \text{ (INVARIATE)}; V_{28} = \frac{45}{8} = \frac{9}{16}; V_{38} = \frac{75}{8} = \frac{15}{16}$$

$$E[T_{S1}] = \frac{1}{12}, E[T_{S2}] = \frac{1}{10} \text{ (INVARIATE)}$$

$$E[T_{S2}] = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{1}{10 - \frac{45}{8}} = \frac{8}{99}; E[T_{S3}] = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{1}{30 - \frac{75}{8}} = \frac{8}{165}$$

R TOTALE:

$$E[T_h] = \sum V_{i8} \cdot E[T_{Si}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{99} + \frac{15}{16} \cdot \frac{8}{165} = 0,200909$$

### Ultimo Es p. 2 del foglio ES

$C = 10^3$  op/sec. Le richieste arrivano nel seguente modo:

• 80%  $Z = 1875$  op/Job • 20%  $Z = 7500$  op/Job

Il flow d'arrivo è uniformemente partitionato in 2 classi, secondo ABSTRACT PRIORITY.

Arrival process è esponenziale e servizi iperesponenziali.

a) massimo flow ammissibile tale che  $E[T_S] < 20$

Sappiamo che  $E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{1875 \cdot 0,8 + 7500 \cdot 0,2}{10^3} = 3$

e quindi  $\mu = \frac{1}{E[S]} = 0,33$

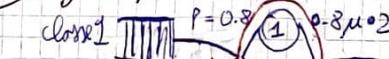
Calcolo  $P = \frac{\lambda}{\mu} = 3\lambda$ , allora  $P_1 = 1,5\lambda$  e  $P_2 = 1,5\lambda$  perché

il flusso è uniformemente partitionato.

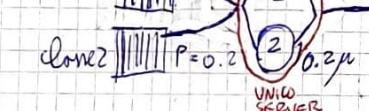
Perche' abbiamo due classi, dobbiamo trovare  $E[T_S] = 0,5E[T_{S1}] + 0,5E[T_{S2}]$  sempre perche' partitionati uniformemente.

Parto da  $E[T_{S1}] = E[T_{Q_1}] + E[S]$

uguale per le 2 classi:



$$E[T_{Q_1}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{1 - P_1} = \frac{14,0625\lambda}{1 - 1,5\lambda}$$



code astratte, ho

usato l'hyperexponential solo per calcolare  $E[S^2]$

$$E[T_{Q_2}] = \frac{\frac{\lambda}{2} E[S^2]}{(1 - P_1)(1 - P)} = \frac{14,0625\lambda}{(1 - 1,5\lambda)(1 - 3\lambda)}$$

sapendo che  $\sigma^2(S) = g(P)E^2[S] = \left(\frac{1}{2P(1-P)} - 1\right)E[S]^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,8} - 1\right)9 = 19,125\lambda^2$

e quindi  $E[S^2] = E[S] + \sigma^2 = 28,125\lambda^2$

$$\text{② } E[T_{S_2}] = E[T_{Q_1}] + E[S] = \frac{14,0625\lambda}{1 - 1,5\lambda} + 3$$

$$\text{f } E[T_{S_2}] = E[T_{Q_2}] + E[S] = \frac{14,0625\lambda}{(1-1,5\lambda)(1-3\lambda)} + 3$$

allora

$$E[T_{S_{TOT}}] = \frac{1}{2} [E[T_{S_1}] + E[T_{S_2}]] \leq 10 \quad \text{Avendo}$$

$\uparrow$   
equiprobabili

$$E \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{14,0625\lambda}{1-1,5\lambda} + 6 + \frac{14,0625\lambda}{(1-1,5\lambda)(1-3\lambda)} \right] \right] \leq 10$$

$$E \left[ 0,5 \cdot 14,0625\lambda \left( \frac{1-3\lambda+2}{(1-1,5\lambda)(1-3\lambda)} \right) \right] \leq 10 - 3$$

$$E \left[ \lambda \left( \frac{2-3\lambda}{(1-1,5\lambda)(1-3\lambda)} \right) \right] \leq \frac{7}{0,5 \cdot 14,0625} = 0,99555555$$

$$2\lambda - 3\lambda^2 \leq 0,99555555 ((1-1,5\lambda)(1-3\lambda))$$

$$2\lambda - 3\lambda^2 \leq 0,99555555 (1 - 3\lambda - 1,5\lambda + 4,5\lambda^2)$$

$$2\lambda - 3\lambda^2 \leq 0,99555555 - 9,47999\lambda + 4,47999\lambda^2$$

$$7,47999\lambda^2 - 6,47999\lambda > -0,9955555$$

$$\text{perciò } 7,48\lambda^2 - 6,48\lambda + 0,995 = 0$$

$$\frac{+6,48}{2 \cdot 7,48} \pm \sqrt{\frac{6,48^2 - 4 \cdot 7,48 \cdot 0,995}{14,99}} = \frac{6,48 \pm 3,49}{14,99}$$

$\uparrow 0,666 = \lambda_2$   
 $\downarrow 0,1998 = \lambda_1$

quindi come massimo flusso ammissibile prendo  $\lambda_1 = 0,1998 \text{ J/s}$

b) assumo  $\lambda = 0,2$ , scheduling astatto garantisce  $E[T_{Q_2}] = 2\Delta$ ?

$$\text{avrei } E[T_{Q_1}] = \frac{14,0625 - 0,2}{1 - 1,5 \cdot 0,2} = 4,02. \text{ Se modifico } p_1?$$

$$\frac{2,8125}{1 - 0,2 p_2} \leq 2 \iff 0,8125 \leq -0,4 p_2 \iff p_2 \geq 0 \text{ NO.}$$

c) valuta  $E[T_{S_k}]$  ed  $E[T_{Q_k}]$   $\forall$  cloni considerando le caratteristiche dell' Hyperex.

Come abbiamo visto:

$$\begin{aligned} E[T_{Q_1}] &= 4,02 \rightarrow E[T_{S_2}] = 7,01 \\ E[T_{Q_2}] &= 10,044 \rightarrow E[T_{S_1}] = 13,044 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} E[T_{S_{TOT}}] &= \frac{1}{2} (E[T_{S_1}] + E[T_{S_2}]) \\ &= 10,022 \end{aligned} \right\}$$

L' Hyperexponential condiziona  $E[S]$  perché puo' operare a due tempi  $\mu$  diversi (di cui ne faccio la media).

(in realtà sono 2 carichi diversi, la capacità del server è inviata, ma ciò porta a diversi  $E[S]$  e  $\mu$ ) di cui faccio la media perché le dom sono mischiate. In  $E[T_Q]$  serve per trovare  $E[S^2]$ , tramite  $\sigma^2(S)$ .

d) con tempi di servizio EXP, prova che  $E[T_S]$  e' indipendente dalle partitioni delle due cloni.

Siamo nel caso ESPONENZIALE, non penso più all' hyperexp.

$$\begin{aligned} E[T_Q] &= \frac{P E[S]}{1-p} \quad ; \quad E[T_Q] = \frac{P_1 P E[S]}{1-p} + \frac{P_2 P E[S]}{(1-p)(1-p_2)} = \\ &= \frac{P_1 P E[S](1-p)}{(1-p)(1-p_1)} + \frac{P_2 P E[S]}{(1-p)(1-p_2)} = \frac{E[S](P \cdot P_1 - P_2 p^2 + P P_2)}{(1-p)(1-p_1)} = \frac{E[S](P - P^2 p_2)}{(1-p)(1-p_2)} = \\ &= \frac{E[S] P (1 - P \cdot P_2)}{(1-p)(1-p_2)} = \frac{E[S] P}{(1-p)(1-p_2)} \quad \text{perciò in exp } P \cdot P_2 = P_2. \text{ SOLO IN QUESTO CASO.} \end{aligned}$$

es. n° 2 p. 2 dei compiti

coda chiusa dove:

$$D_1 = 20 \quad D_2 = 5 \quad N = 3 \quad Z = 10$$

Quale è il tempo di risposta?

Trovando in coda chiusa usiamo lo M.V.A, riadattato perché voglio un tempo globale, non  $\forall$  coda:

$$\underbrace{V_i E(t_i(N))}_{R_i(N)} = E[S_i] (1 + E(n_i(N-1))) \cdot V_i$$

$$R_i(N) = D_i (1 + E(n_i(N-1)))$$

procedo iterando:

$$R_2(1) = D_2(1+0) = 20 \quad R_1(1) = D_1(1+0) = 5$$

Dalla teoria  $\lambda_i(N) = \frac{n}{\sum v_{j,i} E(t_j(n))}$ , nel nostro riadattamento

'generale' abbiamo  $X_o(n) = \frac{n}{\sum R_i}$

quindi  $X_o(1) = \frac{1}{10+5} = \frac{1}{15}$

L'ultima formula è  $E(n_i(n)) = X_o(n) \cdot R_i(n)$

cioè  $E(n_1(1)) = X_o(1) \cdot R_1(1) = \frac{1}{15} \cdot 10 = \frac{2}{3}$

e  $E(n_2(1)) = \frac{1}{15} \cdot 5 = \frac{1}{3}$

Paremo a 2 utenti:

$$R_2(2) = D_2 \left(1 + E_{n_2}(1)\right) = 20 \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3}$$

$$R_1(2) = D_1 \left(1 + E_{n_1}(1)\right) = 5 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

$$X_o(2) = \frac{2}{\frac{50}{3} + \frac{20}{3}} = \frac{2}{\frac{70}{3}} = \frac{3}{35}$$

$$E(n_2(2)) = \frac{2}{35} \cdot \frac{50}{3} = \frac{20}{7}, \quad E(n_1(2)) = \frac{3}{35} \cdot \frac{20}{3} = \frac{4}{7}$$

Paremo a 3 utenti:

$$R_2(3) = D_2 \left(1 + E_{n_2}(2)\right) = 20 \left(1 + \frac{4}{7}\right) = 10 \cdot \frac{11}{7} = \frac{170}{7}$$

$$R_1(3) = D_1 \left(1 + E_{n_1}(2)\right) = 5 \left(1 + \frac{4}{7}\right) = 5 \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{7}$$

$$X_o(3) = \frac{3}{\frac{170}{7} + \frac{55}{7}} = \frac{3}{\frac{225}{7}} = \frac{7}{75} \quad \text{quello che mi serve per:}$$

(solo per sistemi interattivi)

$$R_{TOT} = R_1(3) + R_2(3) = 32.142 s, \quad \text{NON PUÒ USARE } R = \frac{N-Z}{X_o}$$

Notiamo come la somma di  $E(n_2(1)) + E(n_1(2)) = 1$ ,

$E(n_1(1)) + E(n_2(2)) = 2$ , check di correttezza.

Inoltre l'R trovato e'  $\frac{N-Z}{X_o}$  con  $X_o = \frac{1}{D_{MAX}} = \frac{1}{D_2}$

ovvero  $\frac{3}{\frac{1}{10}} - 20 = 20$ , cioe' "il tempo risposto più piccolo possibile"

## esercizio 1 pagina 2

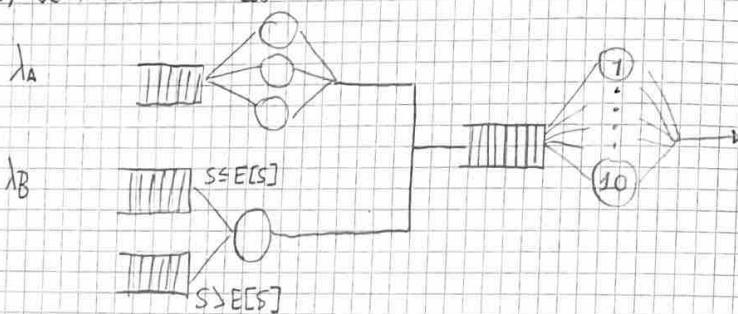
2 servizi "A" e "B", entrambi arrivi Poisson. Le richieste vengono prima elaborate da servers dedicati ( $A \rightarrow$  servizio 'a',  $B \rightarrow$  servizio 'b') e poi server 'c' comune ad entrambi. Servizi esponenziali.

server A:  $C_A = 10^4$  op/msec  $\bar{z}_A = 8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_A = 1.5$ ,  $m_A = 3$ , FIFO

server B:  $C_B = 10^5$  op/msec  $\bar{z}_B = 7 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_B = 2$ , SB non preemptive con 2 code priorita':  $S \leq E(S)$ ,  $S > E(S)$ .

server C:  $C_C = 10^3$ ,  $\bar{z}_C = 2 \cdot 10^3$ ,  $m_C = 10$ , FIFO

a) il modello della rete



b)  $E[T_{SA}]$ ? (del solo centro 'A')

$$\text{Calcolo } E[S_{Ai}] = \frac{\bar{z}_0}{C_A} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^4} = \frac{8}{10} \text{ ms} \rightarrow \mu_i = \frac{5}{8} = 1.25$$

questi valori sono riferiti ad un server, non ai 3 in //.

Sappiamo che  $E[T_{An}] = \frac{P_A \cdot E[S]}{1-P}$  dove:

$$E[S] = \text{tempo per liberare un server qualiasi} = \frac{E[S_{Ai}]}{3} = 0,2666$$

$$P = \frac{\text{massimo input}}{\text{massimo output}} = \frac{\lambda}{3\mu_i} = 0.4$$

$$P_A = \text{prob che nro pieno} = \frac{(mp)^m}{m!(1-p)} P(0) \quad \text{prob. idle}$$

$$P(0) = \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(mp)^i}{i!} + \frac{(mp)^m}{m!(1-p)} \right]^{-1}$$

$$= \left[ \sum_{i=0}^2 \frac{(3 \cdot 0.4)^i}{i!} + \frac{3 \cdot 0.4}{3! (1 - 0.4)} \right]^{-1} = [1 + 1.2 + 0.72 + 0.48]^{-1}$$

$$= 0,2941$$

$$\therefore P_A = \frac{(3 \cdot 0.4)^3}{3! (1 - 0.4)} \cdot 0,2941 = 0,1411$$

$$\text{fimolmente, } E[T_{SA}] = \frac{0,1411 \cdot 0,2666}{1 - 0,4} = 0,0627$$

$$\text{e } E[T_{S_A}] = E[T_{Q_A}] + \underbrace{E[S_{A_i}]}_{0 \cdot 8 = \frac{4}{5}} = 0,8627$$

c)  $E[T_S]$  per ogni richiesta

Server B

$$E[S_B] = \frac{\bar{z}_B}{C_B} = \frac{7 \cdot 10^4}{10^5} = 0,7 \text{ ms}. \text{ Adesso opero nelle due classi}$$

$$E[S_i] = \int_0^{0.4} t \cdot f''(t) dt = \frac{1}{F(0.8) - F(0)} \int_0^{0.4} t \cdot f(t) dt$$

$$\text{dove } F = 1 - e^{-\mu t} \quad \sim \quad F(0.4) - F(0) = (1 - e^{-\mu E[S]}) - 0 = 0.6321 = P_2$$

$$\text{e quindi } P_2 = 1 - 0,6321 = 0,3679.$$

$$f = F' = -\mu e^{-\mu t}$$

$$\text{Calcolo } \frac{1}{0,6321} \int_0^{0,4} t \cdot \mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{0,6321} \left( -t e^{-\mu t} - \int_0^t e^{-\mu t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{0,6321} \left( -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right) \Big|_0^{0,4} = 0,1672 \text{ ms}$$

Dato  $E[S_1] = 0,1672 \text{ ms}$  voglio  $E[T_{a_1}] = \frac{P_B E[S]}{1-P_1}$

$$P_1 = \lambda \cdot P_1 \cdot E[S_1] = 2 \cdot 0,6321 \cdot 0,1672 = 0,2113$$

NON E'  $P_1 = P_1 \cdot P$ , errore grave! ;  $P_B = \frac{\lambda_B}{M_B} = \frac{2}{2,5} = 0,8$

$$E[T_{a_1}] = \frac{0,8 \cdot 0,4}{1 - 0,2113} = 0,4057 \text{ ms.}$$

Allora  $E[T_{S_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0,5729$

► Passiamo alla seconda coda.

$$P_2 = 0,3679$$

$$E[S_2] = \frac{1}{0,3679} \left( -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right) \Big|_{0,4}^{\infty} = \frac{1}{0,3679} \left( 0 + 0,4 e^{-0,4} - 0 + E[S_1] e^{-0,4} \right) = 0,8 \text{ ms}$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{P_B E[S]}{(1-P_1)(1-P)} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{(1-0,2113)(1-0,8)} = 2,02865 \text{ ms}$$

Allora  $E[T_{S_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 2,02865 + 0,8 = 2,8286 \text{ ms}$

$$E[T_{S_{\text{globale}}}] = P_1 E[T_{S_1}] + P_2 E[T_{S_2}] = 1,40277203 \text{ ms}$$

sistema C

$$\lambda_C = \lambda_A + \lambda_B = 3,5 \text{ J/s} \quad E[S_{C_1}] = 2 \text{ ms}, \quad E[S_C] = E[S_{C_1}] = 0,2 \text{ ms}$$

$$P_C = \frac{\lambda_C}{10 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3,5}{10 \cdot 0,5} = 0,7$$

"uci"

$$\text{Calcolo } P(0) = \left[ \sum_{i=0}^3 \frac{(0,7)^i}{i!} + \frac{10 \cdot 0,7^{10}}{10!(1-P_C)} \right]^{-1}$$

$$(1 + 7 + 24,5 + 57,166 + 100,041 + 140,058 + 163,401 + 163,401 + 142,9762 + 111,20372 + 253,475)^{-1} = 0,001098$$

$$P_a = \frac{(10 \cdot 0,7)^{10}}{10!(1-0,7)} \cdot 0,001098 = 0,284903$$

$$E[T_{a_C}] = \frac{P_a E[S]}{1-P_C} = \frac{0,2849 \cdot 0,2}{0,3} = 0,1899$$

$$E[T_{S_C}] = E[T_{a_B}] + E[S_B] = 0,1899 + 2 = 2,1899$$

Ora, le richieste ponono essere di tipo 'A':

$$V_{A/A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = 1 \quad V_{B/A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{2}{1,5} = 1,33 \quad V_{C/A} = \frac{\lambda_C}{\lambda_A} = \frac{3,5}{1,5} = 2,33$$

$$E(t_{r_A}) = V_{A/A} \cdot E[T_{S_A}] + V_{B/A} \cdot E[T_{S_B}] + V_{C/A} \cdot E[T_{S_C}] =$$

$$1 \cdot 0,8627 + 1,3333 \cdot 1,40277203 + 2,3333 \cdot 2,1899 = 7,84204936$$

o di tipo 'B'

$$V_{A/B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \quad V_{B/B} = 1, \quad V_{C/B} = \frac{3,5}{2} = 1,75$$

$$E(t_{r_B}) = 0,75 \cdot 0,8627 + 1 \cdot 1,40277203 + 1,75 \cdot 2,1899 = 5,882122$$

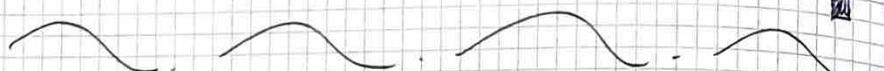
d) slowdown di  $x=0,1$  server A;  $x=0,2$  server B,  
 $x=0,2$  a server C

$$E[S_{dA}(0,4)] = E[T_{aA}] + x = \frac{0,0627}{0,4} + 1 = 1,15675 \text{ msec}$$

- coda 2!

$$E[S_{dB}(0,2)] = E[T_{a1}] + x = \frac{0,9057}{0,2} + 1 = 3,0285 \text{ msec}$$

$$E[S_{dC}(0,2)] = E[T_{ac}] + x = \frac{0,1899}{0,2} + 1 = 1,9495 \text{ msec}$$



### ESERCIZIO 1 p. 3

15% reg. critiche, 60% standard, 25% nuovi utenti.

REQ1: abbandono nuovi utenti se  $E[T_a] > 3$  min. (25%)

REQ2: richieste critiche completate con  $E[T_S] < 5$  min. (15%)

REQ3: perdo cliente se  $E[T_S] > 30$  min. (60%)

ARRIVI POISSON  $\lambda = 0,23$  req/min.

SERVIZI HYPEREXP con  $E[S] = 4$ ,  $p = 0,35$

a) tempo di servizio & stage dell'Hyperexp con percentuale:

$$pE[S_1] + (1-p)E[S_2] = E[S]$$

$$\mu_1 = 2p\mu = \frac{2p}{E[S]} \rightarrow \mu_1 = \frac{1}{E[S]} = \frac{E[S]}{2p}$$

$$0,35 \frac{E[S]}{2,075} + (1-p)E[S_2] = E[S]$$

$$\rightarrow E[S_2] = \frac{E[S]}{2(1-p)} = 3,0769$$

analogo mettendo  $E[S_2]$  nell'equazione e cercando  $E[S_1]$ :

$$pE[S_1] + (1-p) \frac{E[S]}{2p} = E[S] \rightarrow E[S_1] = \frac{E[S]}{2p} = 5,71428$$

b) meccanismo per soddisfare reg1 e reg2

voglio  $\begin{cases} I: E[T_S] < 5 \text{ min con } p_1 = 0,15 \\ II: E[T_a] < 3 \text{ min con } p_2 = 0,25 \end{cases}$   
 ho ordinato iò, perché 2° reg è più stringente

uso ricavo le clavi, posso provare con o senza prelazione.  
 Con prelazione ho  $E[T_a]$  migliori, ma per  $E[T_S]$  non posso dire nulla.  
 Servizi Hyperexp!! Non sono  $E[S]$ , ma  $\frac{1}{2} E[S^2]$

Poiché:  $\sigma^2(x) = f(p)E[S]^2$  con  $f(p) = \frac{1}{2p(1-p)} - 1$ , ho:

$$\sigma^2(x) = \left( \frac{1}{2 \cdot 0,35 \cdot 0,65} - 1 \right) 4^2 = 19,1648 \quad \text{e poi}$$

$$\sigma^2(x) = E[X^2] - E[X]^2 \rightarrow E[S^2] = \sigma^2(x) + E[S]^2 = 35,1648$$

$$0,92 = \frac{\lambda}{\mu}$$

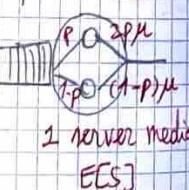
$$p_1 = \lambda_1 E[S] = \lambda \cdot p_1 \cdot E[S] = 0,23 \cdot 0,15 \cdot 4 = 0,138 = p \cdot p_1$$

$$0,15$$

$$p_2 = \lambda_2 E[S] = \lambda \cdot p_2 \cdot E[S] = 0,23 \cdot 0,25 \cdot 4 = 0,23$$

### CON PRELAZIONE

$$E[T_{a1}] = \frac{\frac{1}{2} \lambda_1 E[S^2]}{1 - p_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,23 \cdot 0,15 \cdot 35,1648}{1 - 0,138} = 0,7037$$



$$E[S_{virT_1}] = E[S] \rightarrow E[T_{S1}] = E[T_{a1}] + E[S_{virT_1}] = 4,7037 \text{ min}$$

Va bene! Devo vedere l'altro requisito.

$$E[T_{a_2}] = \frac{1}{2} E[S^2] (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \cdot 35,1648 (0,23 \cdot 0,15 + 0,23 \cdot 0,25) \\ \frac{(1-P_1-P_2)(1-P_1)}{(1-0,138-0,23)(1-0,138)} = 2,9692 \text{ min } \checkmark$$

rispettati entrambi.

b) meccanismo per req2 e req3

il req2 (avvisi attivi) lo modella esattamente come prima, con  $E[T_s] = 9,07 < 5$  ✓

Vediamo il req3.  $E[T_s] < 90$  min;  $P_3 = \lambda_3 E[S] = 0,552$

$$E[T_{a_{req3}}] = \frac{1}{2} E[S^2] 0,23 \cdot (0,15 + 0,6) = 11,35 \text{ min} \\ \frac{(1-0,138-0,552)(1-0,138)}{}$$

$$E[S_{virt}] = \frac{E[S]}{1-0,138} = 4,6403 \text{ min}$$

$$\text{allora } E[T_s]_{req3} = 11,35 + 4,6403 = 15,9904 \text{ min } \checkmark$$

Potrò usare NON PREEMPTIVE?

Non credo, perché avrei avuto:  $E[T_{a_i}] = \frac{\lambda_i E[S^2]}{1-P_i} = 4,6813$ ,

a cui sommare  $E[S]$  superando il  
requisito.

c) slowdown per richieste di  $\leq$  min. E nel caso PS?

$$E[Sd(x)] = \frac{E[T_a]}{x} + 1 = \frac{\frac{1}{2} E[S^2]}{1-P} + 1 \Big|_{P=\lambda E[S]=0,92} = 5,5494$$

molte cose  
soprattutto dove  
collocarlo pure  
se forse.

KP  
(nessuno ha parlato  
di code o altro!)

Nel PS (equo).

$$E[Sd(x)] = \frac{1}{1-P} = 12,5 \text{ Mx}$$

d) dimostrare, per uno dei meccanismi precedenti, e in generale, le relazioni tra  $E[T_a]$  ed  $E[T_s]$  tra "i" ed "i+1" dom.

Basta da  $E[T_a]$  generale, voglio for vedere che:

$$E[T_{a_{K+1}}] = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \lambda_i E[S^2]}{(1 - \sum_{i=1}^K p_i)(1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i)} \leq \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i E[S^2]}{(1 - \sum_{i=1}^{K+1} p_i)(1 - \sum_{i=1}^K p_i)} = E[T_{a_{K+1}}]$$

$$\text{NUMERATORE: } \sum_{i=1}^K \lambda_i \leq \sum_{i=1}^K \lambda_i + \lambda_{K+1} \Leftrightarrow 0 \leq \lambda_{K+1} \quad \checkmark$$

$$\text{DENOMINATORE: } \frac{1}{(1 - \sum_{i=1}^K p_i)(1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i)} \leq \frac{1}{(1 - \sum_{i=1}^{K+1} p_i)(1 - \sum_{i=1}^K p_i)} \Leftrightarrow$$

$$1 - \sum_{i=1}^{K+1} p_i \leq 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{K-1} p_i \leq \sum_{i=1}^{K+1} p_i \quad \text{Vero se } \forall p_i > 0,$$

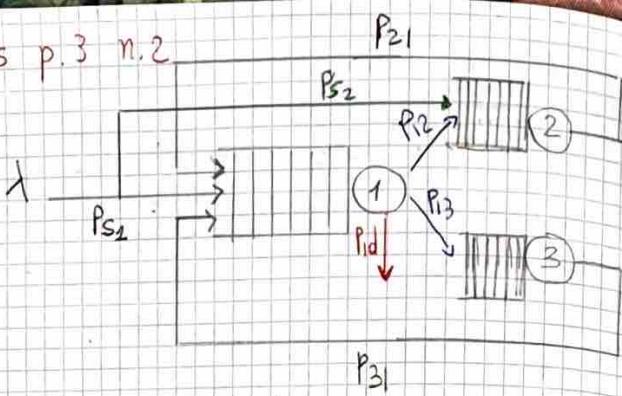
$$\text{con } \sum_{i=1}^{K+1} p_i - \sum_{i=1}^{K-1} p_i \geq 0, \text{ ma sarebbe vero con } p_k + p_{k+1} \geq 0 \text{ ovvio.}$$

Per  $E[T_s]$  basta vedere che  $E[S_{virt_{K+1}}] \leq E[S_{virt_{K+1}}]$  cioè

$$\frac{E[S]}{1 - \sum_{i=1}^{K+1} p_i} \leq \frac{E[S]}{1 - \sum_{i=1}^K p_i} \Leftrightarrow 1 - \sum_{i=1}^{K+1} p_i \leq 1 - \sum_{i=1}^K p_i \quad \text{cioè } \sum_{i=1}^{K+1} p_i \geq \sum_{i=1}^K p_i$$

$$\text{cioè } \sum_{i=1}^{K-1} p_i + p_K \geq \sum_{i=1}^{K-1} p_i \Leftrightarrow p_K \geq 0 \quad \checkmark$$

Es p.3 n.2



$$\text{DATI: } P_{S2} = \frac{2}{5}, P_{1d} = \frac{1}{2}, P_{12} = \frac{1}{10}$$

$$\lambda = 3 \text{ J/D} \quad \mu_1 = 20 \text{ J/D} \quad \mu_2 = 15 \text{ J/D} \quad \mu_3 = 5 \text{ J/D}$$

Possiamo ricavare anche:

$$P_{S1} = 1 - P_{S2} = \frac{3}{5}, \quad P_{13} = 1 - P_{1d} - P_{12} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P_{21} = P_{31} = 1$$

La rete non è chiusa, ma è di Jackson.

1) n° visite & stazione

Scrivo le equazioni dei flussi:

$$\begin{cases} \lambda_1 = P_{S1}\lambda + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = P_{S2}\lambda + \lambda_1 \cdot P_{12} \\ \lambda_3 = P_{13} \cdot \lambda_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{5} + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot \frac{1}{10} \\ \lambda_3 = \frac{2}{5} \lambda_1 \end{cases}$$

essendo il sistema NON chiuso, applico le sostituzioni:

$$\lambda_1 = \frac{6}{5} + \left( \frac{9}{5} + \frac{\lambda_1}{10} \right) + \frac{2}{5} \lambda_1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = \frac{9}{5} + \frac{6}{10} = \frac{12}{5}$$

$$\lambda_3 = \frac{12}{5}$$

Le visite rispetto a λ esterno sono:

$$V_1, \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{6}{3} = 2; \quad V_2, \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{12}{5} = \frac{4}{5}; \quad V_3, \lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda} = \frac{4}{5}$$

2) Response time & stazione

Sono code M/M/1 (Jackson → exp) quindi posso usare

$$E[T_{S_i}] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

$$E[T_{S_1}] = \frac{1}{10 - 6} = 0.25 \text{ s} ; \quad E[T_{S_2}] = \frac{1}{15 - 12} = 0.07936 \text{ s}$$

$$E[T_{S_3}] = \frac{1}{5 - 12/5} = 0.38461 \text{ s}$$

3) tempo risposta del sistema

$$E[t_R] = \sum_i v_i \lambda_i E[T_{S_i}]$$

$$= 2 \cdot 0.25 + \frac{4}{5} \cdot 0.07936 + \frac{4}{5} \cdot 0.38461 = 0.871176$$

d)  $P_{12}$  e  $P_{13}$  tale che il tempo di risposta del sistema sia minimo?

Vediamo che  $E[T_{S_3}]$  rallenta di più rispetto  $E[T_{S_2}]$ , allora cerco di mandare più visite a  $E[T_{S_2}]$ !

$V_2, \lambda \uparrow, V_3, \lambda \downarrow \Leftrightarrow \lambda_2 \uparrow, \lambda_3 \downarrow$  cioè:

$$\lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot P_{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = P_{13} \cdot \lambda_2 \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{9}{5} + \lambda_1 \cdot P_{12} \\ \lambda_3 = \lambda_1 \cdot P_{13} \end{cases} \quad \begin{matrix} P_{12} = \frac{1}{2} \\ P_{13} = 0 \end{matrix}$$

$$\text{con: } \lambda_2 = \frac{9}{5} + \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{24}{5} \quad e \quad \lambda_3 = 0 \quad \begin{matrix} P_{12} + P_{13} + P_{1d} = 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Concludo:

$$V_1 = 2 \quad V_2 = \frac{8}{5} \quad V_3 = 0$$

$$E[t_R] = 2 \cdot E[T_{S_1}] + \frac{8}{5} \cdot E[T_{S_2}] = 0.626984 \text{ s} \quad \checkmark$$

## esercizio 1 p. 4

Sistema con utenti non paganti e paganti, che hanno priorità preemptive.  $E[T_s]$  è l'unità di misura della soddisfazione.

Devo valutare:

- 1)  $E[T_{s_1}]$  è il mean response time minore.
- 2)  $E[T_{s_2}]$  è il mean response time peggiore
- 3) globalmente, la prelazione migliora  $E[T_{s\text{medio}}]$

Prova SE tali affermazioni sono corrette, e per quali arrivi e servizi.

### Svolgimento

Prendiamo 2 classi di priorità "1" e "2", se dimostro che  $E[T_{s_1}] \leq E[T_{s_2}]$  allora i primi due punti sono veri, avendo solo due classi  $\Rightarrow E[T_{s_1}]$  è MIN,  $E[T_{s_2}]$  è MAX.

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_{\text{virt-1}}]$$

$$\begin{aligned} \text{generale: } & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \lambda_i E[S^2] \\ & \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K-1} \lambda_i E[S^2]}{(1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i)} \left( 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i \right) \end{aligned}$$

$$\text{per } E[T_{s_1}], k=1$$

$$\frac{\frac{1}{2} \lambda_1 E[S^2]}{(1-0)(1-p_1)} + \frac{E[S]}{1-0}$$

Λ

$$\frac{\frac{1}{2} E[S^2](\lambda_1 + \lambda_2)}{(1-p_1)(1-p_1-p_2)} + \frac{E[S]}{1-p_1}$$

Λ

Vediamo che  $E[T_{a_1}]$  ha numeratore per  $K=2 >$  numeratore  $K=1$  e denominatore  $K=2 <$  denominatore  $K=1$ .  
Stesso ragionamento per  $E[S_{\text{virt}}]$ , infatti:

$$\frac{E[S]}{1} < \frac{E[S]}{1-p_1} \Leftrightarrow 1-p_1 < 1 \text{ ma } p_1 \geq 0 \text{ quindi vero!}$$

Per il punto ③ sappiamo che non è sempre vero, infatti:

### Prelazione

$$E[T_{s_1}] = \frac{\frac{1}{2} \lambda_1 E[S^2]}{1-p_1} + E[S]$$

$$E[T_{s_2}] = \frac{\frac{1}{2} E[S^2](\lambda_1 + \lambda_2)}{(1-p_1-p_2)(1-p_1)} + \frac{E[S]}{1-p_1}$$

λ

||

✓

### No Prelazione

$$E[T_{s_1}] = \frac{\frac{1}{2} \lambda E[S^2]}{1-p_1} + E[S]$$

$$E[T_{s_2}] = \frac{\frac{1}{2} E[S^2]\lambda}{(1-p_1-p_2)(1-p_1)} + E[S]$$

||

✓

Quindi in generale non posso dirlo sempre, con prelazione la classe 1 va sempre meglio, ma le altre no!

Venho fatto ipotesi su arrivati e servizi, ma nel caso di servizi di Poisson e servizi exp, la memoryless annulla tutti i vantaggi e  $E[T_s] = E[T_s]^{\text{Green priority}} = E[T_s]$ .

① Vole sempre con arrivi Random (distr. Poisson).

② Vole sempre con arrivi Random (distr. Poisson)

Dati  $C = 10^5$  op/acc,  $Z = 5 \cdot 10^5$  op/job,  $\rho = 0,75$   
 (solo)  $E[T_{a,1}]$  ed  $E[T_{S,1}]$  ne  $\lambda_1 = 0,3\lambda$ , EXPON.

$$\text{Poniamo } \rho = 0,75 = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = \lambda \cdot \frac{Z}{C} = \lambda \cdot 0,5 = 0,75$$

$$\text{da cui } \lambda = 0,75 \cdot \frac{1}{0,5} = 1,5 \quad \text{Allora } \lambda_1 = 0,3 \cdot 1,5 = 0,45$$

$$\text{e } P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{0,45}{\mu} = 0,225$$

$$E[T_{S,1}] = E[T_{a,1}] + E[S]$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_1 E[S^2] + 0,5$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,45 \cdot Z \cdot (0,5)^2}{1 - 0,225} + 0,5$$

$$= 0,645161 \quad \checkmark$$

Per exp.

$$\sigma^2 = E[S^2] - E[S]^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

$$\rightarrow E[S^2] = \sigma^2 + E[S]^2 = \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{2}{\mu^2}$$

cioè  $E[S^2] = 2E[S]^2$

$$\text{b)} \left(1 - \lambda \int_0^1 t \cdot d(1 - e^{-\mu t})\right)^2 = \left[1 - 1,5 \int_0^1 t (2e^{-2t}) dt\right]^2 = \\ \left[1 - 1,5 \left(-t e^{-2t} - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-2t}) dt\right)\right]^2 = \\ \left[1 - 1,5 \left(-t e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-2t}\right)\right]_0^1 = \left[1 - 1,5 \left(-e^{-2} + 0 - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}\right)\right]^2 = \\ = 0,307475$$

$$\text{c)} 0,75 \int_0^1 t^2 \cdot d(1 - e^{-2t}) = 0,75 \int_0^1 t^2 (2e^{-2t}) dt =$$

$$= 0,75 \left[ t^2 \cdot (-e^{-2t}) - \int (-e^{-2t}) \cdot 2t \right] =$$

$$= 0,75 \left[ -t^2 e^{-2t} + \int 2t \cdot e^{-2t} dt \right] =$$

$$= 0,75 \left[ -e^{-2} + 0 + \left(-e^{-2} + 0 - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}\right)\right] = 0,121246$$

$$\rightarrow E[T_{a,1}(x=1)] = \frac{0,121246 + 0,1015014}{0,307475} = 0,7244406 \quad \checkmark$$

c) % job con  $E[T_a] \leq E[T_a(2)]$ ?

SRPT e size based,  $F(t)$  rappresenta l'area = n° job, allora

$$F(1) - F(0) = \left[1 - e^{-\mu t}\right]_0^1 = \left[1 - e^{-2t}\right]_0^1 = \left[1 - e^{-2} - (1-1)\right] =$$

$$= 1 - e^{-2} = 0,864665, \quad F(1) - F(0) = \text{n° job da '0' a '2' rel.}$$

## esercizio n° 2 p. 4 degli esercizi

Abbiamo un sistema interattivo dove:

$$T = 10 \text{ min} = 600 \text{ s} \quad N = \text{n° users} = 50 \quad \text{servers} = 10$$

$$R = \text{avg response time / trans} = 20 \text{ s}$$

$$D_{\max} = 1 \text{ sec/trans} \quad D_{\text{TOT}} = 2 \text{ sec/trans}$$

$$\text{n° completamenti} = c = 90$$

N° utenti pendenti?

Sappiamo, dalla teoria, che  $N_{\text{think}} = \frac{Z \cdot X_0}{\text{tempo throughput}}$

$$\text{Sappiamo che: } X_0 = \frac{C}{T} = \frac{90}{600} = 0,15 \text{ job/s}$$

$$\text{e inoltre } R = \frac{N}{X_0} - Z = \frac{50}{0,15} - Z = 20$$

$$\Leftrightarrow Z = 31\overline{3} \rightarrow$$

$$\text{Concludiamo con } N_{\text{think}} = 31\overline{3} \cdot 0,15 = 47$$

## Ultimo esercizio p.4 foglio esercizi

Dati:

$$C = 10^5 \text{ op/rec} ; \exp Z = 9 \cdot 10^4 \text{ op/job} \quad p = 0,6$$

Nota la job size (size based) in una size based  
senza prebazione con due classi:

$$\text{classe 1 se } Z \leq E[S]$$

$$\text{classe 2 se } Z > E[S]$$

$$E[T_{\text{size}}] \text{ e } E[T_{\text{global}}] ?$$

### Svolgimento

Sappiamo che  $E[S] = \frac{Z}{C} = 0,9$ , da cui  $\mu = \frac{1}{E[S]} = 1,111$

$$\text{e } p = 0,6 = \frac{\lambda}{\mu} \text{ da cui } \lambda = p\mu = 0,6 \cdot 1,111 = 0,666$$

$$\text{Calcolo } E[S] = \frac{1}{F(0,9) - F(0)} \int_0^{0,9} t \cdot s(t) dt$$

$$F(0,9) - F(0) = 1 - e^{-\mu t} \Big|_0^{0,9} = 1 - e^{-0,666 \cdot 0,9} = 0,6321 = P_1 \rightsquigarrow P_1 = 0,3678$$

$$\int_0^{0,9} t \cdot f(t) dt = \int_0^{0,9} t \cdot (\mu e^{-\mu t}) dt = t \cdot (-\mu e^{-\mu t}) - \int_0^{0,9} -\mu e^{-\mu t} dt$$

$$= -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \Big|_0^{0,9} = 0,10569$$

$$\text{allora } E[S] = \frac{0,10569}{0,6321} = 0,1672$$

$$\text{Analogamente } E[S_2] = \frac{1}{0,3679} \left[ -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right] \Big|_{0.4}^{\infty} \approx 0,8 \lambda$$

$$\text{Quindi } E[S_1] = 0,167210 \quad E[S_2] = 0,8 \lambda$$

Calcolo EETak

$$E[T_{Q1}] = \frac{PE[S]}{1-P_1} \quad \text{con } P_1 = \lambda_1 \cdot E[S_1] = \lambda \cdot P_1 E[S_1]$$

$$= 1,5 \cdot 0,6321 \cdot 0,167210 = 0,15855$$

dai cui

$$E[T_{a1}] = \frac{0,6 \cdot 0,4}{1-0,15855} \approx 0,28522 \lambda$$

$$\text{e } E[T_{S1}] \cdot E[T_{a1}] + E[S_1] = 0,28522 + 0,167210 = 0,45243 \lambda$$

$$E[T_{a2}] = \frac{PE[S]}{(1-P_1)(1-P)} = \frac{EET_{a1}}{(1-P)} = \frac{0,28522}{0,4} = 0,71305 \lambda$$

$$\text{e } E[T_{S2}] = E[T_{a2}] + E[S_2] = 0,71305 + 0,8 = 1,51305 \lambda$$

$$(\text{concluso con } E[T_{S \text{ total}}] = P_1 E[T_{S1}] + P_2 E[T_{S2}] =$$

$$= 0,842620 \lambda)$$

[congettura] un dual core migliora le performance?

Sarebbe multi server con multi priority, di tipo  
SIZE BASED

$$E[T_{a1}] = \frac{P_{a1} E[S]}{1-P_1} \quad , \quad E[T_{a2}] = \frac{P_{a2} E[S]}{(1-P_1)(1-P)}$$

Se considero il caso con PRELAZIONE (quello visto sopra)

$$\text{allora } E[T_S] = E[T_{a1}] + E[S] \quad \text{e}$$

$$E[S_{\text{virt.2}}]$$

$$E[T_{S2}] = E[T_{a2}] + \underbrace{\frac{E[S]}{1-P_1}}_{E[S_{\text{virt.2}}]}$$

# Esercizi "Varzi" Fondo

Dati: tempo medio interattivo = 6 s ,  $Z = 5000 \text{ op/ut}$   
 $C = 1000 \text{ op/s}$

1) calcola  $\mu$ ,  $E[S]$ ,  $\lambda$ ,  $E[T_{Q_1}]$ ,  $E[T_s]$ ,  $E[N_q]$ ,  $E[N_s]$  FIFO

$$\lambda = \frac{1}{\text{interattivo}} = \frac{1}{6}$$

$$E[S] = \frac{Z}{C} = \frac{5 \cdot 10^3}{10^3} = 5 \text{ s}$$

$$\mu = \frac{1}{E[S]} = 0.2$$

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{0.2} = \frac{5}{6} = 0.8\bar{3}$$

$$E[T_{Q_1}] = \frac{PE[S]}{1-P} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{1 - \frac{5}{6}} = 25$$

$$E[T_s] = E[T_{Q_1}] + E[S] = \frac{1}{\mu - \lambda} = 30 \text{ s}$$

$$E[N_q] = \lambda \cdot E[T_{Q_1}] = \frac{1}{6} \cdot 25 = 4.\bar{1}\bar{6}$$

$$E[N_s] = E[N_q] + \underbrace{\lambda E[S]}_{P} \cdot \lambda \cdot E[T_s] = 5$$

$$\text{slowdown}(0.5) = \frac{E[T_{Q_1}]}{0.5} + 1 = \frac{25}{0.5} + 1 = 50 + 1 = 51$$

2) Calcolo di  $E[T_s]$  con due classi SIZE BASED, in base al valore di  $E[S]$

Con due code, il n° dei job per iosum delle due classi

è: classe 1:  $F(E[S]) - F(0)$  , classe 2:  $F(\infty) - F(E[S])$

$$F(x) = 1 - e^{-\mu t} \rightsquigarrow \text{classe 1: } 1 - e^{-\mu \cdot E[S]} + (1 - e^{-\mu \cdot 0}) = \\ = 1 - e^{-\mu \cdot \frac{1}{6}} - (1 - 1) = 1 - e^{-\frac{1}{6}} = 0.6321$$

allora in classe 2 mi avranno  $1 - 0.6321 = 0.3679 = P_2$

Periamo a  $E[S_k] = \frac{1}{P_k} \sum_{x=1}^{x_k} t \cdot f(t) dt$

CLASSE 1:

$$E[S_1] = \frac{1}{0.6321} \int_0^{E[S]} t \cdot (\mu e^{-\mu t}) dt = \frac{1}{0.6321} \left[ t(-e^{-\mu t}) - \int_1^t (-e^{-\mu t}) dt \right]_0^{E[S]} \\ = \frac{1}{0.6321} \left[ -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right]_0^{E[S]} = \frac{1}{0.6321} \left[ -E[S] e^{-\mu E[S]} + 0 - E[S] e^{-\mu 0} + E[S] \right] \\ = 2,0901$$

CLASSE 2

$$E[S_2] = \frac{1}{0.3679} \left[ -t e^{-\mu t} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{0.3679} \left[ -\infty - \left( -E[S] e^{-\mu E[S]} - E[S] e^{-\mu 0} \right) \right] \\ = E[S]$$

$\approx 20 \text{ s}$

Calcoliamo  $E[T_{Q_1}]$  ed  $E[T_{S_2}]$ , prima per la classe 1.

$$E[T_{Q_1}] = \frac{PE[S]}{(1-P_2)} = \frac{PE[S]}{(1-\lambda \cdot P_1 \cdot E[S_1])} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{(1 - \frac{1}{6} \cdot 0.6321 \cdot 2,09)} = 5,3431$$

$$E[T_{S_2}] = E[T_{Q_1}] + E[S_2] = 5,3431 + 2,09 = 7,4332 \rightarrow$$

poi per la classe 2:

$$E[T_{Q_2}] = \frac{PE[S]}{(1-P_1)(1-P)} = \frac{PE[S_1]}{1-P} = \frac{5,3431}{1 - \frac{1}{6}} = 32,0586 \text{ s}$$

$$E[T_{S_2}] = E[T_{Q_2}] + E[S_2] = 42,0586 \text{ s}$$

Calcoliamo anche

$$E[T_{\text{global}}] = \sum P_i E[T_{S_i}] = 0,6321 \cdot E[T_{S_1}] + 0,3679 \cdot E[T_{S_2}] = \\ = 0,6321 \cdot 7,4332 + 0,3679 \cdot 42,0866 = 20,18181$$

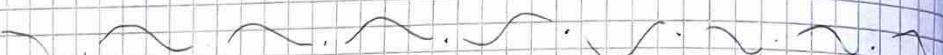
$$E[N_S] = \lambda \cdot E[T_S] = \frac{1}{6} \cdot 20,18181 = 3,3636$$

$$E[S_d(0,5)] = \frac{E[T_{0,5}]}{0,5} + 1 = \frac{5,3432}{0,5} + 1 = 11,6865$$

$$\text{Nel caso Fair (Processor Sharing)} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 6 \rightarrow$$

Spreading tra tempi di attesa?

$$\frac{E[T_{\text{eff}}]}{E[T_{q_1}]} = \frac{25}{5,3432} = 4,6789$$



Altro esercizio

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 20$$

$$\mu_1 = 30 \quad \mu_2 = 40 \quad \mu_3 = 60$$

voglio avere distribuzione

stationaria di probabilità,

$$\text{cioè } p_1, p_2, p_3 < 2$$

trovo prima le entrate.

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda'_2 = \lambda_2 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3 = \lambda'_1 + \lambda'_2 \end{cases} = \begin{cases} \lambda'_1 = 20 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda'_2 = 20 + p \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3 = 40 + 2p \lambda_3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda'_1 = \frac{20}{1-2p} \\ \lambda'_2 = \frac{20}{1-2p} + \frac{40p}{1-2p} = \frac{20+40p}{1-2p} \\ \lambda_3(1-2p) = 40 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{40}{1-2p} \end{cases}$$

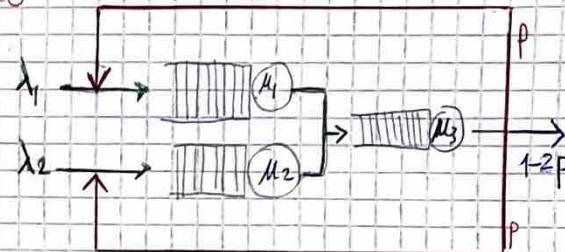
dobbiamo imporre:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda'_1}{\mu_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2p} < 2 \\ p_2 = \frac{\lambda'_2}{\mu_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2p} < 1 \\ p_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2p} < 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{2}{3} < 1-2p \\ \frac{1}{2} < 1-2p \\ \frac{2}{3} < 1-2p \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{3} < -2p \\ -\frac{1}{2} < -2p \\ -\frac{2}{3} < -2p \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{3} > 2p \\ \frac{1}{2} > 2p \\ \frac{2}{3} > 2p \end{cases}$$

come la 2°

$$\begin{cases} \frac{1}{6} > p \\ \frac{1}{4} > p \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} p < \frac{1}{6} \\ p < \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{\hspace{1cm}} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow p < \frac{1}{6} = 0,16$$

Procediamo con  $p = 0,1$  che  $e^{-p} < 0,16$



$$\begin{cases} \lambda' = \frac{20}{1-2 \cdot 0,1} = 25 \\ \lambda_2 = \frac{20}{1-2 \cdot 0,1} = 25 \\ \lambda_3 = \frac{40}{1-2 \cdot 0,1} = 50 \end{cases}$$

$$e \quad \begin{cases} P_1 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0,83 \\ P_2 = 0,83 \\ P_3 = \frac{5}{3} = 1,6 \end{cases}$$

Calcoliamo i tempi di attesa per ogni centro:

$$E[T_{a_k}] = \frac{P_k E[S_k]}{1-P_k} \quad \text{da cui:}$$

$$E[T_{a_1}] = \frac{P_1 E[S_1]}{1-P_1} = \frac{0,83 \cdot \frac{1}{30}}{1-0,83} \approx 0,166667 \Delta$$

$$E[T_{a_2}] = \frac{P_2 E[S_2]}{1-P_2} = \frac{0,625 \cdot \frac{1}{30}}{1-0,625} \approx 0,041667 \Delta$$

$$E[T_{a_3}] = \frac{P_3 E[S_3]}{1-P_3} = \frac{0,83 \cdot \frac{1}{60}}{1-0,83} \approx 0,083333 \Delta$$

con tempi di risposta:

$$E[T_{s_1}] = E[T_{a_1}] + E[S_1] = 0,2$$

$$E[T_{s_2}] = E[T_{a_2}] + E[S_2] = 0,041667 + \frac{1}{40} = 0,066667$$

$$E[T_{s_3}] = E[T_{a_3}] + E[S_3] = 0,083333$$

Per il tempo di risposta del sistema calcolo le vinte:

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{25}{40} = 0,625 \quad v_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{25}{40} = 0,625$$

$$v_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{50}{40} = 1,25 \quad \text{da cui:}$$

$$E[t_r] = v_1 E[T_{s_1}] + v_2 E[T_{s_2}] + v_3 E[T_{s_3}] = 0,25 \cdot 20 + 0,625 \cdot 19 + 1,25 \cdot 19 = 68,75$$

[Minimizzare il tempo di risposta vuol dire impostare  $P_1 = P_2$ ]

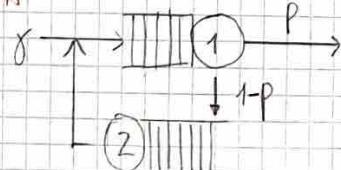
N.B.: non c'è legato all'esercizio fatto, è una cosa in generale.



### Esercizio p.60 FANFA

DATI

$$\gamma = 2,3 \text{ J/b} \quad p = 0,05$$



$$\mu_1 = 30 \text{ J/D} \quad \mu_2 = 25 \text{ J/D}$$

Calcolare  $E(t_r)$  del sistema e  $\gamma_{\max}$  ammissibile

Svolgimento

- scrivo eq flussi in entrata & centro, risolvendoli

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma + \lambda_2 \\ \lambda_2 = (1-p)\lambda_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = \gamma + [(1-p)\lambda_1] \\ \lambda_2 = (1-p)\lambda_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} p\lambda_1 = \gamma \\ \lambda_1 = \frac{\gamma}{p} \end{cases}$$

$$\text{quindi } \lambda_1 = \frac{\gamma}{p} = \frac{2,3}{0,05} = 26, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot \gamma = 25,7$$

- scrivo utilizzazioni e visite (rispetto  $\gamma$ )

$$\bullet P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{26}{30} = 0,8666 \quad \bullet P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{25,7}{25} = 0,988$$

$$\bullet V1/\gamma = \frac{\lambda_1}{\gamma} = \frac{26}{2,3} = 20 \quad \bullet V2/\gamma = \frac{25,7}{2,3} = 19$$

- scrivo i tempi di risposta & centro, poi tempo risposta del sistema

$$E[T_{s_1}] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{30-26} = 0,25 \quad ; \quad E[T_{s_2}] = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{1}{25-25,7} = 3,3$$

$$E[t_r] = \sum E[T_{s_i}] \cdot V_i/\gamma = 0,25 \cdot 20 + 3,3 \cdot 19 = 68,75$$

$\gamma_{\max}$  lo trovo imponendo.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma}{p} \rightsquigarrow p_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \leq 1 \\ \lambda_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)\gamma \rightsquigarrow p_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \leq 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma \leq p \cdot \mu_2 = 1,5 \\ \gamma \leq \frac{1}{1-p} \cdot \mu_2 = 1,3157 \end{cases}$$

allora  $\gamma \leq 1,3157$ .

