Performance Modeling
of Computer Systems and Networks

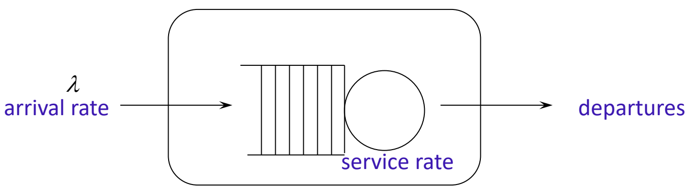
Prof. Vittoria de Nitto Personè

The model for a service center: analytical results

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

1

Server center



Little's law

$$E(T_S) = E(T_Q) + E(S) \qquad E(N_S) = \lambda E(T_S) \qquad E(T_S) = \frac{E(N_S)}{\lambda}$$

$$E(N_S) = E(N_Q) + \rho \qquad E(N_Q) = \lambda E(T_Q) \qquad E(T_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda}$$

2

The Kendall notation

A/S/m/B/N/D

Interarrival distribution

Service distribution

n° of servers

Queue capacity

Population size

Queue discipline

Distributions: D, M, E_k, H_2, G

deterministica, esponenziali M, sequenziali di esponenziali Erlang con k numero di fasi con stessa media, parallele esponenziali H (due fasi //, cioè iperesponenziale) e distribuzione generale G (qualsiasi distribuzione)

Non-preemptive abstract scheduling

FIFO, LIFO-non-preemp, Random

It seems like
- FIFO should have the best mean response time because jobs are serviced most closely to the time they arrive (rispetta ordine di arrivo)
- LIFO may make a job wait a very long time

all the above policies have exactly the *same* mean response time.

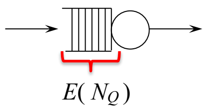
(hanno stessa media ma NON HANNO STESSA VARIANZA)

1930: The Khinchin Pollaczek equation (KP)

interrarivi esponenziali, distribuzione servente generale, 1 servente

M/G/1 abstract scheduling

$$E(N_Q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1 + \frac{\sigma^2(S)}{E(S)^2}\right]$$



$= C^2$

Squared coefficient of variation

Service time dispersion

rapporto tra varianza e quadrato delle media

1. Any service time distribution
2. Poisson arrivals
3. Abstract discipline (FIFO, LIFO, RAND…)

Più il coefficiente cresce, più le prestazioni peggiorano!

Rho è la vera misura del carico, non lambda, il quale pesa pochissimo come carico, in quanto rho = lambda * E[S]

5

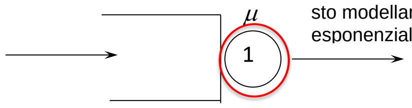
TIPO M/G/1, SI ANALIZZA UN SOLO JOB, QUINDI QUESTI SONO I PERCORSI CHE PUO' SEGUIRE UN JOB. IL SERVENTE E' SEMPRE SINGOLO

Phase-type distributions

unica fase di servizio
sto modellando tempo job con variabile esponenziale

Servente singolo

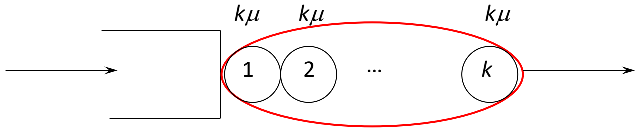
Exponential



che senso ha modellare queste cose, se mediamente sono uguali?

modello diverse variabilità!!

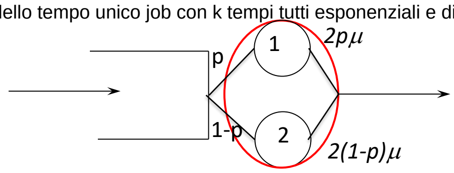
k-Erlang



E' SEMPRE UNICO SERVENTE, CAMBIA COME MODELLO TEMPO (comparo a parità di media)

modello tempo unico job con k tempi tutti esponenziali e distribuiti allo stesso modo.

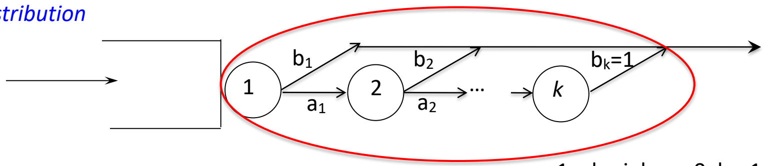
hyperexponential distribution



modello 1 tempo di servizio con 2 fasi alternative esponenziali con due tassi diversi

media: 1/u (media del servizio uguale)

Cox distribution



$a_i = 1 - b_i$, $i<k$, $a_k=0$, $b_k=1$

6

serie di fasi esponenziali, nella erlang passo per tutti gli stati, qui il job potrebbe fare un solo stadio ed uscire, fare due stadi e uscire,..., farli tutti! Ma sempre un job c'è.

The Khinchin Pollaczek equation (KP)

$$E(N_Q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1 + C^2\right]$$

The mean queue population grows as C^2

D $\longrightarrow$ C^2=0

$E_k \longrightarrow C^2 = \frac{1}{k}, k \geq 1$

M $\longrightarrow$ C^2=1

$H_2 \longrightarrow C^2 = g(p) = \frac{1}{2p(1-p)} - 1$

in funzione della probabilità,
dipende da p.
per p = 0.5, ottengo 1 come l'esponenziale.

$p = 0.6 \quad C^2 = 1.08\overline{3}$

$p = 0.7 \quad C^2 = 1.38095$

$p = 0.8 \quad C^2 = 2.125$

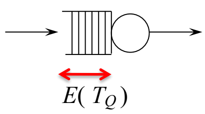
$p = 0.9 \quad C^2 = 4.\overline{5}$

variabilità cresce nel verso della freccia.

7

The Khinchin Pollaczek equation (KP)

M/G/1 abstract scheduling



$\rho = \lambda E[S]$

$$E(T_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda 2(1-\rho)}\left[1 + C^2\right] = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{C^2+1}{2}E(S)$$

Se c^2, anche per utilizzazione grande, questo tempo nella coda piò esplodere,
anche essere 30 volte il tempo di servizio è tanto!

8

fine

"mu" è lo stesso, quindi io confronto prestazioni supponendo stessa media, utilizzazione etc...
cambia solo la varianza. La media deve essere uguale, sennò confronto due cose diverse.

The Khinchin Pollaczek equation (KP)

$$g(p) = \frac{1}{2p(1-p)} - 1 \qquad E(N_Q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1 + C^2\right], \quad E(T_Q) = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{C^2+1}{2}E(S)$$

Service time	$E(N_Q)$ popolazione media in coda	$E(T_Q)$ tempo medio attesa in coda
Determinisctic, M/D/1	$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$	$\frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}$
Markovian, M/M/1	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{\rho E(S)}{1-\rho}$
K-Erlang, M/E$_k$/1 $\sigma^2(S) = \frac{E(S)^2}{k}$	$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left(1+\frac{1}{k}\right)$	$\frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
Hyperexpo, M/H$_2$/1 $\sigma^2(S) = E(S)^2 g(p)$	$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1+g(p))$	$\frac{\rho E(S)}{2(1-\rho)}(1+g(p))$

9

Nella colonna della popolazione media in coda, viene già incluso il C^2 con valore associato al caso in questione.
Ciò ci fa capire che abbiamo sempre una dipendenza da rho^2.
Nei tempi medi di attesa in coda si introduce E[S], raddoppiando tasso arrivo e tasso servizio, i tempi si dimezzano.
Le popolazioni non cambiano medie. Nei tempi rho non cambia, ed E[s] diventa E[S]/2

Service time Sensitivity

sensibilità rispetto a variazioni di tempi di servizio a parità di media (sennò non ha senso).

$$E(N_Q)_D \le E(N_Q)_{E_k} \le E(N_Q)_M \le E(N_Q)_{H_2}$$

$$\sigma^2(N_Q)_D \le \sigma^2(N_Q)_{E_k} \le \sigma^2(N_Q)_M \le \sigma^2(N_Q)_{H_2}$$

non lo dimostriamo

By considering $E(N_S) = E(N_Q) + \rho$, the same order holds for the variable N_S

By considering the Little's equation, the same order can be derived for the mean times $E(T_S)$ and $E(T_Q)$, but just for the 1° order moment, not for the variance

cioè in media, una distribuzione deterministica comporta tempo risposta medio minore dell'erlang etc..
ma ciò non si applica alle varianze tramite Little.

10

Discipline Sensitivity

non posso però basarmi su quello che i job chiedono, sarebbe size based

By definition, KP holds for any abstract service discipline, so

$$E(N_Q)_{FIFO} = E(N_Q)_{LIFO} = E(N_Q)_{RAND} = E(N_Q)_{abstract}$$

$$\sigma^2(N_Q)_{FIFO} = \sigma^2(N_Q)_{LIFO} = \sigma^2(N_Q)_{RAND} = \sigma^2(N_Q)_{abstract}$$

By considering $E(N_S) = E(N_Q) + \rho$, the same equalities hold for the variable N_S

By considering the Little's equation, the same holds for $E(T_S)$ and $E(T_Q)$,

$$E(T_Q)_{FIFO} = E(T_Q)_{LIFO} = E(T_Q)_{RAND} = E(T_Q)_{abstract}$$

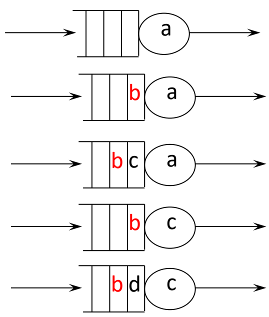
Is $\sigma^2(T_Q)$ the same for all these policies?

Discipline Sensitivity

No! alcuni job potrebbero essere svantaggiati, incidendo su variabilità, MEDIA UGUALE.
LIFO can generate some extremely high response times because we have to wait for system to become empty to take care of that first arrival

$$\sigma^2(T_Q)_{FIFO} \leq \sigma^2(T_Q)_{RAND} \leq \sigma^2(T_Q)_{LIFO}$$

FIFO rispetta ordine arrivo, variabilità minima.
LIFO caso peggiore.



in questo esempio LIFO, "b" è svantaggiato.