Recap sulle Filtrazioni, 6.3

Definiamo $\Omega = \{(w_n)_{n=1}^N, w_n = 1, w_n = 0\}$ l'insieme delle successioni in cui abbiamo questi due eventi che si possono verificare. Questo è lo spazio.

$\xi = \mathcal{P}(\Omega)$ insieme delle parti.

La probabilità di un evento elementare è $P(w) = p^k q^{N-k}$ con $k = \{n \in \{1, ..., N\} : w_n = 1\}$ Definiamo la probabilità di un qualunque evento come estensione degli eventi elementari appartenenti all'evento: $P(E) = \sum_{w \in E} P(w)$

Su questo spazio noi trattiamo un fenomeno stocastico, osserviamo normalmente alla terminazione del fenomeno. Noi però vogliamo predirre il futuro, quindi prima del completamento. Ad esempio:

$0, 1, ..., n_0, n_0 + 1, ...$ Noi ad n_o dobbiamo fare delle scelte conoscendo il passato, non il futuro. Qui entra in gioco la filtrazione. Ricordiamo che $F_n \subset F_{n+1}$, ovvero l'informazione non viene mai persa. Supponiamo di avere un evento $E \in F_n$ con un certo n fissato. Cioè eventi della filtrazione in questione. Di questi eventi posso vedere in maniera precisa gli accadimenti prima dell'n fissato, dopo non lo so! Ho un punto (cioè una successione) in E, cioè $(w_n)_{n=1}^N = w \in E$

Di questo punto considero le prime n componenti con certi valori specifici. Tutti gli altri punti aventi stesse prime n componenti, ed il resto come mi pare, **devono stare in E**.

Supponiamo $n = 3$ e $N = 7$, cioè $w \in E \in F_3$ Osserviamo i seguenti $w \in E : w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = 1$ Allora, dato tale evento che sta nella filtrazione, tutte le altre sequenze di w aventi le prime 3 componenti come quelle osservate, appartengono alla filtrazione. Quindi $(1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 1), ...$

Se $E \in F_1$, allora $w \in E$ può essere $w_1 = 1$ oppure $w_1 = 0$. Se prendiamo il caso $w_1 = 1$, e tale punto $\in E$, allora E contiene tutti gli altri punti aventi w_1: Allora $E = \{(1, 0, 0, ...), (1, 0, 1, ...), ...\} = E_1$, cioè la prima coordinata è 1, le altre tutti i modi possibili. Se ci fosse w_0, allora la prima coordinata sarebbe 0, le altre combinate in tutti i modi possibili.

La mia filtrazione $F1 = \{0, \Omega, E_1, E_0\}$ Le prime due componenti ci devono essere perchè trattiamo una σ - algebra.

mentre $F_2 = \{0, \Omega, E_0, E_1, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ cioè tutte le combinazioni "è andata bene/è andata male". Devono esserci anche unioni,complementari etc, perchè è una sigma algebra. $E_{0,0} \subset E_0$, $E_0 = E_{0,0} \cup E_{0,1} \in F_2$ Tutte le unioni possibili degli eventi di questa partizione sono nella filtrazione, la quale deve essere chiusa rispetto a tutte le unioni numerabili. Noi addirittura lavoriamo in un caso chiuso.

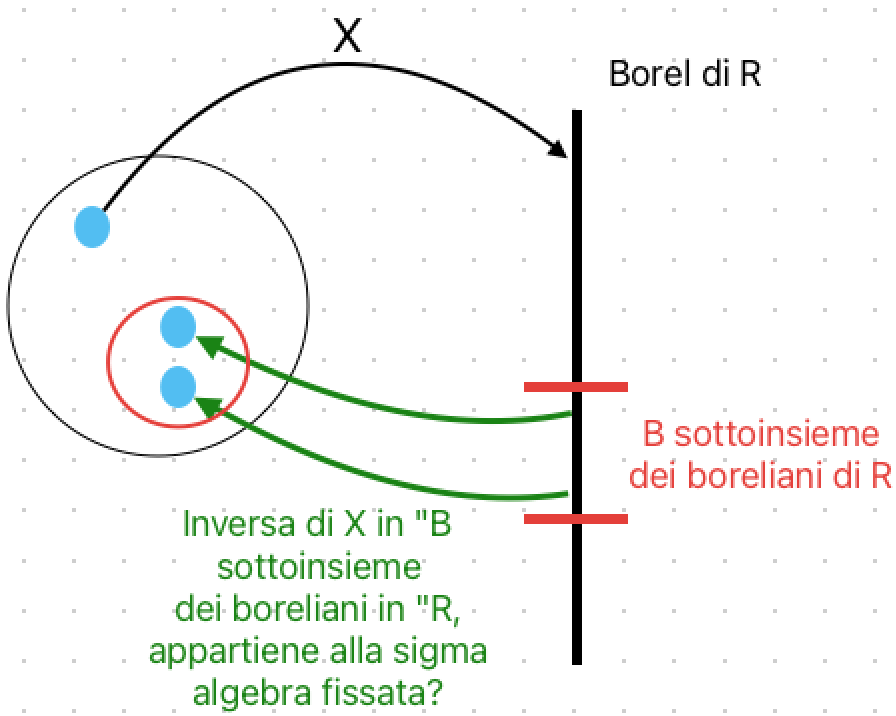
Supponiamo di poter distinguere le componenti fino alla n-esima, ovvero: $F_n = \{E_{0,0,0,..0_n}, E_{0,0,0,...,1_n}\}$, ovvero è una partizione di Ω. Devo fare tutte le unioni possibili.

Voglio uno strumento che rappresenti il flusso delle informazioni.

Processo stocastico

Formalmente, si prende uno spazio di probabilità (Ω, ξ, P), una successione $(X_n)_{n=0}^N$ con $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$, con ogni X_n che è una $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria su sigma algebra di Borel. Come lo capisco?

Prendo l'evento (cioè la controimmagine) $\{X_n \in B\} \in \xi, \forall B \in \beta(\mathbb{R}^M)$. Cioè prendo un B, sottoinsieme Borelliano di $\mathbb{R}^M$, vedo la controimmagine $E \subset \Omega$, che è un sottoinsieme di Ω. Se tale evento appartiene alla sigma algebra fissata, cioè $E \in \xi$, allora è un processo stocastico. (Da CPS: Suppogo di avere l'informazione $\Omega = \{1, ..., 6\}$, la $\sigma-$ algebra $\xi \doteq \{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}$, ovvero ξ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che raggruppa gli esiti in "pari" e "dispari". Se in B prendo '5', non posso associarla ad ξ, perchè in ξ non è presente l'evento "E' uscito esattamente 5").



Se l'informazione è tutta l'informazione possibile, cioè $\xi = P(\Omega)$, allora ogni successione di variabile aleatoria è un processo stocastico.

Siccome Ω è finito, non solo parliamo di processo stocastico, bensì è un processo stocastico di ordine k, $\forall k \in N$, cioè abbiamo ogni ordine, anche se a noi interessano i primi quattro. Se la matrice varianza-covarianza è invertibile, allora possiamo anche ricavare Skewness e Kurtosi.

La filtrazione rappresenta il **flusso temporale degli eventi**. Particolarizziamo allora la definizione di processo stocastico. Riprendo lo spazio di probabilità, ci metto la filtrazione $(F_n)_{n=0}^N$. Allora la successione $(X_n)_{n=0}^N$ è un **processo stocastico adattato** a $(F_n)_{n=0}^N$ se $\forall n$, X_n è una $F_n - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Prendo Boreliano, faccio controimmagine su X_n, essa è un evento E che deve stare in F_n (nella sigma algebra è scontata). Al tempo n posso osservare le realizzazioni della variabile aleatoria X_n.

Esempio in cui ciò non si verifica

Prendo $N = 7, n_1 = 3, n_2 = 5$. Prendo la variabile aleatoria $B_1(w) \doteq w_{n_1}$, cioè se $w = (1,0,1,0,1,0,1)$ allora $B_{n_1}(w) = B_3(w) = 1$, e se $w = (1,0,0,1,0,1,0)$ allora $B_{n_1}(w) = 0$. Semplicemente prendo come valore di tutto w il valore della componente in posizione n_1.

Se $0, 1 \notin B(\mathbb{R})$ allora la controimmagine è l'insieme vuoto. Se $0, 1 \in B(\mathbb{R})$ allora la controimmagine è tutto Ω. Se $B_1 \doteq \{0 \notin B_1, 1 \in B_1\} \doteq \{w \in \Omega : w_3 = 1\} \in F_3$, se posso distinguere le prime tre componenti, allora sicuramente posso distinguere solamente la terza. Questo vuol dire che in F_3 ci sono nelle prime due coordinate tutte le combinazioni possibili, nella terza devo avere '1'. Cioè vi appartengono: $E_{0,0,1} \in F_3, E_{1,0,1} \in F_3, E_{0,1,1} \in F_3, E_{1,1,1} \in F_3$; ma F_3 è σ-algebra, quindi anche l'unione vi appartiene, ma l'unione è ciò che abbiamo scritto sopra.

Processo predicibile nel tempo discreto, def 157

$(X_n)_{n=0}^N$ è **predicibile** rispetto a $(F_n)_{n=0}^N$ se $\forall n = 1, ..., N$ la variabile aleatoria X_n è $F_{n-1} - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Cioè posso osservare le realizzazione della variabile aleatoria "un tempo prima", è legato al discorso della "scelta". La composizione del portafoglio è un gruppo di variabili *predicibile*, lo stock invece è *adattato*. Noi scegliamo il portafoglio prima di osservare il valore dello stock, sono in anticipo su cosa accadrà, quindi è predicibile, ciò che faccio è alla luce della informazione vecchia. Faccio scelta iniziale alla luce di ciò che potrebbe accadere alla fine. Lo scopo è "cucire bene" tale modello sulla realtà, stimandone bene i parametri. Cerco di fare investimento sulla base di oggi, e poi vedo che succede domani. La ricchezza di domani dipende da ciò che si è realizzato domani. Riconfiguro il portafoglio e il processo va avanti. Guardo all'oggi per vedere cosa succederà domani (o un tempo futuro qualunque).

> Un processo stocastico predicibile è un tipo di processo stocastico in cui è possibile fare previsioni o predizioni sulla sua futura evoluzione con una certa precisione o affidabilità. In altre parole, un processo stocastico predicibile è un processo che presenta una certa regolarità o struttura nel modo in cui si evolve nel tempo, il che consente di fare previsioni ragionevoli sul suo comportamento futuro. I processi stocastici predicibili contengono ancora un certo grado di casualità o incertezza, poiché sono influenzati da fattori aleatori o imprevedibili.

Processo di Bernoulli, def 153 p.101

Consideriamo successioni di variabili aleatorie così definite: $(\beta_n)_{n=1}^N$ dove $\beta_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\beta_n(w) = \beta_n((w_k)_{k=1}^N)$

Essa guarda la componente n-esima, se essa è 1, cioè $w_n = 1$, allora vale "u", se vale '0' allora assume "d", con $u > d$, e probabilità q e p.

Prende il nome di **processo di Bernoulli.** E' un processo stocastico a valori reali $(F_n)_{n=1}^N-$adattato, con $F_n = \sigma(\beta_1, ..., \beta_n)$, la più piccola $\sigma-$algebra tale che le β_i sono osservabili. Rappresenta il rumore di mercato, ciò che accade per caso.

Processo di conteggio del processo di Bernoulli, def 154

Consideriamo la successione di variabile aleatorie $(\mathbb{N}_n)_{n=1}^N$ dove $\mathbb{N}_n : \Omega \to \mathbb{R}$ dove, $N_0 \doteq 0$ e $N_n \doteq \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k - d}{u-d}$

cioè conta quanti 1 si sono realizzati fino al tempo N, infatti β_k assume valori "u" o "d", e la sommatoria può quindi addizionare valori 1 o 0. Sto sommando variabili aleatorie di Bernoulli standardizzate, allora N_n è una *variabile aleatoria binomiale*.

Sia β_n sia $(\mathbb{N}_n)_{n=1}^N$ sono $(F_n)_{n=0}^N-$ adattati. Comodi per descrivere il fenomeno.

Processo dei prezzi dello stock

Sfrutta il processo di Bernoulli. Consideriamo $(S_n)_{n=0}^N$ dove $S_0 \in \mathbb{R}$ (è una variabile di Dirac/numero che scegliamo noi.) $S_n \doteq \beta_n S_{n-1}, \forall n = 1, ..., N$

$S_1 = \beta_1 S_0$ assume uS_0 oppure dS_0, $S_2 = \beta_2 S_1 = \beta_2 \beta_1 S_0$ assume $u^2 S_0$ oppure $d^2 S_0$ oppure $udS_0 = duS_0$

Questo è il processo dei prezzi del titolo rischioso, è un processo *adattato*.

Ci chiediamo $P(N_n = k)$ cioè conto le volte che compare "1" nelle prime n componenti, allora può prendere valori $N(\Omega) = 0, 1, ..., n$.

La somma di Bernoulli è una v.a. binomiale, allora $P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

E' dimostrabile che $S_n = u^{N_m} d^{n-N_m} S_0$, ($u^{N_m} \doteq$ ho avuto N_m volte esito u) allora $P(S_n) = P(N_m = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Infatti abbiamo S_n che è l'insieme di valori assunti da una binomiale. Processo dei prezzi ha stessa probabilità del processo di conteggio.

Media del processo dei prezzi stock, prop 163:

Devo calcolare: $E[S_n] = \sum_{k=0}^{n} u^k d^{n-k} S_0 * \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = S_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (up)^k (dq)^{n-k} = S_0(up+dq)^n$

> Nella sommatoria, moltiplichiamo il peso per la probabilità nel primo step, raggruppiamo nel secondo, e risolviamo il ninomio di Newton nella conclusione.

Lo scopo del modello è fare delle **previsioni ottimali**, ma che vuol dire? Ogni variabile aleatoria ammette momento di qualunque ordine, perchè lo spazio è finito, l'integrale diventano somme, somme di cose finite sono sempre finite. Tutte le variabili aleatorie che possiamo considerare, cioè $X : \Omega \to \mathbb{R}^M \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, cioè spazio di Hilbert. Si può provare che questo spazio è di dimensione finita, anche se in realtà per noi è uno spazio euclideo. La sua particolarità è poterci mettere un prodotto scalare, ovvero: $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, con prodotto scalare:

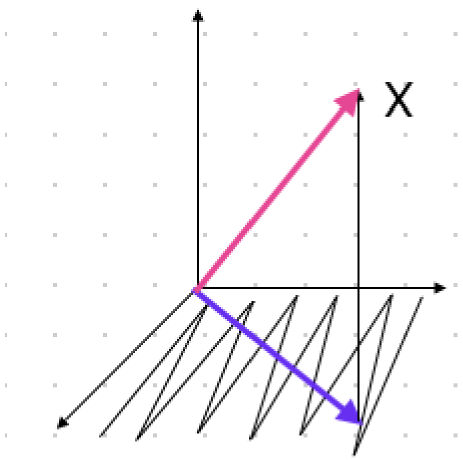
$$< X, Y >= X^T Y \doteq \sum_{m=1}^{M} \sum_{w\in\Omega} X_m(w) Y_m(w) P(w)$$

perchè $X = (X_1, ..., X_M)^T$ e $Y = (Y_1, ..., Y_M)^T$

Immaginiamo di avere $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, con X che è $F_N - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabile aleatoria. Ovvero posso osservarla solo alla fine, come una **call europea**, che conosco solo quando si realizza S_n perchè $C_N \doteq max\{S_n - K, 0\}$. Quale è la migliore stima di questa variabile aleatoria al passo $n < N$?

La migliore stima è la **Speranza condizionata** rispetto all'informazione "n", l'ultima che ho! Cioè cerco $E[X|F_n]$. Se considero il sottospazio di Hilbert $L^2(\Omega_n, \mathbb{R})$ con $\Omega_n = (\Omega, F_n, P)$, allora la speranza condizionata diventa la **proiezione ortogonale di X su questo sottospazio**.

Grafico: la distanza dal centro alla proiezione di X, l'oggetto ha distanza minima possibile. Distanza minima $||X - Y||^2 =< X - Y, X - Y >= E[(X - Y)^T (X - Y)]$ perchè trattiamo vettori, se caso reale è al quadrato. (M=1).



Presa $(X_t)_{t\in R_T}$, e una serie storica fino a 't', voglio predirre il suo futuro. Come faccio? Costruisco processo stocastico di cui la serie storica può essere vista come una traiettoria. La difficoltà è nell'overfitting, ok per il passato, meno per il futuro. Deve carpire le proprietà nell'insieme, non punto per punto. La predizione sarà $E[X_{t+h}|F_t]$, una banda di predizione (non una traiettoria precisa, è come dire "ho possibili futuri".) Per quanto riguarda la distanza dei minimi quadrati, questo è il meglio che posso fare.