

# Indice

<b>1</b>	<b>Investments and Financial Markets</b>	<b>2</b>
1.0.1	Investment Decision . . . . .	2
1.0.2	Arbitrage . . . . .	2
1.0.3	Risk Aversion . . . . .	3
1.0.4	Dynamics . . . . .	3
1.1	Financial Markets . . . . .	3
1.1.1	Bonds . . . . .	3
1.1.2	Stocks . . . . .	4
1.1.3	Derivatives . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Single-Period Investment Models</b>	<b>13</b>

# Capitolo 1

## Investments and Financial Markets

By *investment* we mean the commitment of current resources in economic or financial activity to achieve future benefits. If resources and benefits are expressed in terms of money, then the investment is characterized by a *cash flow stream*, which occurs at some dates from the beginning to the end of the activity. In particular, the values taken by the cash flow at the *initial* and *terminal date* of the investment are respectively known as the *initial* and *terminal cash flow* of the investment. The common convention is that the parts of the cash flow stream which represent a profit [resp. a loss] for the investor are considered with a positive [resp. negative] sign and more specifically referred to as *cash inflow* [resp. *outflow*].

**Esempio 1** *We watch our bank statement in particular, the transactions: the deposits, including direct deposits, checks cashed, payments received, reimbursements, interest earned, are shown as positive amounts, the withdrawals, including purchases, ATM withdrawals, automatic payments, checks issued, bank fees are shown as negative amounts.*

**Esempio 2** *We take a loan: the amount we receive must be considered part of our inflow. Our periodic payments to repay the loan must be considered part of our outflow.*

### 1.0.1 Investment Decision

Comparison Principle: evaluate an investment by comparing it with other investments which are available in financial markets. Financial markets assets constitute the reference systems for an economic evaluation of assets.

### 1.0.2 Arbitrage

We say that an economic or financial activity is an *arbitrage* if it produces a non-negative [resp. positive] cash flow with probability one [resp. with positive probability] without the commitment of initial or intermediate cash flow. We will make this concept more precise in what follows. However, we give here a simple funny example of arbitrage.

**Esempio 3** *Assume that, while walking a road, we spot on the sidewalk a ticket from the current national lottery lost by a careless buyer. Assume we bend down to pick the ticket up and store it in the wallet. With this action, we get the opportunity of winning some money on the draw date at no cost. If we are lucky we will get the money. If we are not lucky we don't get the money, but, still, we lose no money out of our own pockets. Summarizing, by picking the lost ticket on the sidewalk, we get an opportunity of making money without running the risk of losing money. We have realized an arbitrage.*

### 1.0.3 Risk Aversion

Risk aversion principle - mean variance analysis - utility functions

### 1.0.4 Dynamics

The future price of an asset has to be regarded as a stochastic process, that is a time indexed sequence of random variables. An important part of the analysis of investments in financial assets is concerned with the characterization of this process. The predictability problem.

## 1.1 Financial Markets

Si definiscono *mercati finanziari* i luoghi ideali nei quali vengono scambiati strumenti finanziari di varia natura. Nel contesto economico odierno, i mercati finanziari sono chiamati a svolgere due funzioni base:

- il trasferimento di risorse all'interno dell'economia tra unità in surplus e unità in deficit;
- la mitigazione mediante diversificazione e condivisione dei rischi insiti nelle attività economiche e finanziarie.

I mercati finanziari consentono infatti il trasferimento del risparmio dai soggetti che lo accumulano (prevalentemente le famiglie) ai soggetti che lo richiedono (governi, banche, imprese,...). Questi ultimi sono definiti *soggetti in disavanzo finanziario* ed emettono strumenti finanziari (titoli di stato, depositi bancari, obbligazioni, azioni,...) che cedono ai soggetti in avanzo finanziario in cambio di moneta. Lo scambio tra strumenti finanziari e moneta consente la redistribuzione dei rischi e dei profitti economici, perché vengono assunti in parte dagli acquirenti degli strumenti finanziari. Inoltre questi ultimi possono a loro volta cedere tali strumenti ad altri soggetti economici, scambiandoli in mercati appositi. Esistono quindi varie tipologie di mercati finanziari, ognuno con proprie regole e proprie caratteristiche.

La combinazione trasferimento di risorse-redistribuzione dei rischi e dei profitti costituisce la principale funzione economica dei mercati finanziari, che consentono di realizzare un'efficiente allocazione delle risorse finanziarie ai fini della formazione del capitale produttivo. In un sistema economico, domanda ed offerta di capitale devono tendere all'equilibrio e l'investimento del capitale deve essere efficiente. I mercati finanziari svolgono una funzione essenziale per il raggiungimento di questi due obiettivi.

Occupiamoci adesso di descrivere alcuni dei più comuni strumenti finanziari.

#### 1.1.1 Bonds

I *titoli obbligazionari (bond)* sono contratti in cui l'emittente, in cambio di un prezzo alla sottoscrizione, si obbliga a remunerare l'investitore con il valore nominale del titolo sottoscritto (*principal*) alla maturità del titolo stesso, più un eventuale dividendo sotto forma di interessi pagati periodicamente in corso di maturità, noti come *cedole (coupons)*. I titoli obbligazionari si dividono generalmente in due tipologie: i titoli a *cedola fissa (fixed coupon)*, in particolare *senza cedola (zero coupon)*, il cui dividendo è noto con certezza al momento della sottoscrizione e i titoli a *cedola variabile (variable coupon)*, il cui dividendo alla sottoscrizione è aleatorio.

In Italia, tra i titoli obbligazionari figurano numerosi Titoli di Stato, emessi dal Ministero del Tesoro per costituire risorse finanziarie da destinare agli investimenti di pubblica utilità. Tra questi ricordiamo i BTP, acronimo per Buoni del Tesoro Poliennali, a cedola fissa, i BOT, Buoni Ordinari del Tesoro, e i CTZ, Certificati del Tesoro Zero Coupon, entrambi senza cedola. Inoltre abbiamo i CCT, Certificati di Credito del Tesoro, a cedola variabile in dipendenza dall'andamento del tasso di interesse di mercato. Sempre con la finalità di raccogliere risorse per gli investimenti, titoli obbligazionari possono essere emessi anche da imprese pubbliche e private, quali ENI, ENEL, FIAT, Telecom, ecc... Inoltre nel mercato obbligazionario italiano possono essere trattate anche obbligazioni di emittenti straniere.

### 1.1.2 Stocks

Con *titoli azionari* (*stock*) si intendono contratti emessi da imprese pubbliche e private, sempre con lo scopo di costituire risorse per gli investimenti, che, diversamente dai titoli obbligazionari, non impegnano l'emittente alla restituzione del debito contratto con l'investitore, ma offrono all'atto della sottoscrizione una percentuale di proprietà dell'impresa emittente stessa. Ciò comporta tuttavia il diritto dell'investitore, noto come *azionista* (*share holder*), a ricevere una remunerazione periodica costituita da una percentuale dei profitti dell'impresa, proporzionale alla percentuale di proprietà sottoscritta. Tale diritto non è però garantito, potendo essere sospeso qualora l'impresa necessiti, a giudizio della maggioranza degli azionisti, di un reinvestimento degli utili prodotti. Gli investitori che sottoscrivono titoli azionari si trovano a sopportare un rischio assai più elevato rispetto ai sottoscrittori dei titoli obbligazionari, in quanto i flussi di reddito prodotti dagli investimenti azionari sono molto più aleatori rispetto a quelli prodotti dai titoli obbligazionari. Infatti, relativamente a questi ultimi almeno il capitale inizialmente investito è garantito, a meno d'insolvenza (*default*) dell'emittente. Pertanto gli investitori in titoli azionari si attendono rendimenti molto più elevati come premio per il rischio sopportato. Il rapporto che si instaura fra l'azionista e l'impresa è un rapporto partecipativo che dipende dalle caratteristiche del titolo azionario in possesso dell'azionista. Le imprese hanno infatti la possibilità di emettere azioni di tipo diverso: oltre alle azioni ordinarie, esistono anche azioni cosiddette speciali, come le azioni privilegiate e quelle di risparmio:

- le *azioni ordinarie* attribuiscono ai loro possessori pieni diritti amministrativi, consentono quindi la partecipazione alle assemblee, sia ordinarie che straordinarie, e permettono l'esercizio del diritto di voto;
- le *azioni privilegiate* garantiscono all'azionista il diritto a una determinata quota dell'utile distribuibile prima che venga assegnato il dividendo alle azioni ordinarie. Il privilegio può anche riguardare il diritto di priorità al rimborso del capitale all'atto dello scioglimento dell'impresa. Esistono inoltre azioni privilegiate che consentono un dividendo cumulabile e quindi, entro un certo numero di anni, il recupero dei dividendi non corrisposti in precedenza per mancanza o insufficienza di utili.
- le *azioni di risparmio* possono essere emesse solo da società quotate e si differenziano dalle azioni ordinarie per la particolarità che il loro possessore non ha diritto di voto, sia in assemblea ordinaria che straordinaria, ma ha diritto ad un dividendo maggiorato rispetto all'azionista ordinario.

### 1.1.3 Derivatives

Gli *strumenti finanziari derivati* (*derivatives*), sono così denominati perchè il loro valore deriva dal prezzo di *un'attività sottostante* (*underlying asset*), che può essere costituita da *un'attività reale* (*commodity derivative*), da *un'attività finanziaria* (*financial derivative*), o da un *indice* sintetico dei prezzi o dei rendimenti relativo alle precedenti attività (*index derivative*). I derivati sono distinguibili in quattro grandi famiglie: i *contratti a termine* (*forwards*), i *futures*, le *opzioni* (*options*) e gli *swaps*. Un'ulteriore distinzione rilevante fa riferimento ai mercati nei quali tali derivati sono quotati: si distinguono derivati scambiati in mercati organizzati, *exchange traded derivatives*, e derivati negoziati fuori mercato, *over the counter derivatives*. Un vantaggio chiave delle contrattazioni over the counter è rappresentato dal fatto che le condizioni contrattuali non devono necessariamente corrispondere a quelle fissate dai mercati, ma i contraenti sono liberi di negoziare qualunque tipo di contratto risulti di reciproco interesse. Lo svantaggio maggiore è rappresentato dal rischio di credito, o più precisamente rischio d'insolvenza. C'è infatti una probabilità, per quanto piccola, che il contratto non venga onorato. Al contrario, i mercati organizzati si prefiggono lo scopo di eliminare, o quanto meno di ridurre, il rischio di credito. I contratti forwards e gli swaps sono negoziati fuori mercato, mentre i futures, proprio per le loro caratteristiche

intrinseche, sono negoziati in mercati organizzati. Le opzioni sono negoziate sia nei mercati organizzati, sia *over the counter*.

Consideriamo adesso le caratteristiche principali degli strumenti derivati ed il modo in cui vengono negoziati nel mercato.

## Forwards

Un *contratto a termine (forward)* è un accordo tramite il quali due contraenti, un acquirente (*buyer*) e un venditore (*seller*), si scambiano un certo sottostante (*underlying*) a una data, detta *maturità (maturity)*, e a un prezzo, detto *prezzo di consegna (delivery price)*, che vengono concordati alla stipula dell'accordo stesso. In ciò si differenziano dai *contratti a pronti (spot)*, che hanno regolamento immediato. I forward vengono negoziati, di solito fuori mercato, tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria e uno dei suoi clienti. In questi contratti l'acquirente assume una *posizione lunga (long position)* e, alla maturità del contratto, si obbliga a comprare il sottostante dal venditore, al prezzo di consegna concordato alla stipula. Di contro, il venditore assume una *posizione corta (short position)* e, alla maturità, si obbliga a vendere il sottostante all'acquirente al prezzo di consegna. Lo scopo dei contratti forward è garantire sia all'acquirente che al venditore la copertura dal rischio derivante dalla variabilità del prezzo dell'attività sottostante dal momento della sottoscrizione alla maturità del contratto.

**Esempio 4** *Supponiamo che in data 1 marzo 2019. Il tesoriere di una società statunitense sappia che tra 6 mesi, ossia in data 1 settembre 2019, dovrà effettuare un esborso di £1.00 milioni e vuole coprirsi dal rischio delle fluttuazioni del tasso di cambio che in data 1 marzo 2019 è di 1.31559£/\$. Il tesoriere si mette in contatto con una banca britannica e appreso che la banca è disposta a vendergli le sterline, con consegna tra 6 mesi, al tasso di cambio forward di 1.32734£/\$, cioè con la maggiorazione di 117.5 punti forward, accetta di entrare in un contratto per l'acquisto a termine di £1.00 milioni. La società si trova quindi ad avere una posizione lunga in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data 1 marzo 2019 ad acquistare in data 1 settembre 2019 la somma di £1.00 milioni dalla banca in cambio di \$1.32734 milioni. La banca si trova ad avere una posizione corta in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data 1 marzo 2019 a vendere in data 1 settembre 2019 la somma di £1.00 milioni alla società in cambio di \$1.32734 milioni. Entrambe le parti hanno assunto un impegno vincolante (binding commitment). Se nel corso dei 6 mesi successivi alla stipula il tasso di cambio spot dovesse salire rispetto al tasso forward a, diciamo, 1.42734£/\$, il valore del contratto per la società sarebbe di \$100,000, dato che le sterline invece di essere acquistate a \$1.42734 milioni, verrebbero pagate \$1.32734 milioni. Al contrario, se nel corso dei 6 mesi successivi alla stipula del contratto, il tasso di cambio spot dovesse scendere rispetto al tasso forward a, diciamo, 1.22734\$/£, il valore del contratto per la società sarebbe di -\$100,000, dato che il contratto forward la obbligherebbe a pagare \$100,000 in più rispetto al prezzo di mercato delle sterline.*

L'esempio esposto illustra un aspetto chiave della copertura mediante i contratti forward, che eliminano l'incertezza circa il costo dell'attività sottostante, o il ricavato derivante dalla vendita, ma non comportano necessariamente un risultato migliore. Dal momento che entrare in un contratto forward non comporta alcun costo, il valore finale del contratto è anche pari al profitto o alla perdita derivante dal contratto.

## Futures

Un *contratto future (futures)*, al pari di un contratto forward, stabilisce tra due contraenti, un *acquirente (buyer)* e un *venditore (seller)*, l'obbligo di acquistare o vendere un *titolo sottostante (underlying asset o underlying security)* a una data futura, nota come *data d'esercizio (exercise date)* o data di scadenza (*expiration date*) o maturità (*maturity*) e a un prezzo di consegna (*delivery price*), concordati alla stipula del contratto. Il sottostante può essere o un titolo di possesso di un bene reale (*commodity*),

per esempio petrolio, oro, rame, grano, caffè, soia, e ci si riferisce a un tale future col termine *commodity futures*, o un titolo di possesso di una valuta (*currency*) denominato *currency futures*, o anche un titolo di possesso di un portafoglio di titoli (*stock portfolio*) del mercato finanziario, per esempio un indice borsistico, e in quest'ultimo caso si parla di *financial futures*. Acquistare [resp. vendere] futures significa impegnarsi ad acquistare [resp. a vendere] alla scadenza e al prezzo prefissati l'attività sottostante indipendentemente dal suo prezzo corrente di mercato (*market spot price*). Sottolineiamo che per prezzo del future deve intendersi il prezzo d'esercizio. Le parti contraenti stipulano un contratto future a costo zero. Non c'è alcun esborso di denaro per entrare come acquirente in un contratto future, né tantomeno per entrarvi come venditore. Però alla maturità i contraenti sono obbligati all'acquisto o alla vendita del sottostante al prezzo d'esercizio. Il rispetto di quest'obbligo viene assicurato dall'imposizione di un *deposito di garanzia (futures margin)* ad ogni sottoscrittore di un contratto future proporzionale all'entità del contratto sottoscritto. Ovviamente l'acquisto di futures corrisponde ad una aspettativa da parte dell'acquirente di rialzo dell'attività sottostante; la vendita, invece, sottende un'aspettativa del venditore al ribasso. A differenza dei forward, i future sono di norma trattati in un mercato finanziario. Per rendere possibili le negoziazioni, il mercato standardizza certi aspetti del contratto. La standardizzazione consiste nella definizione del taglio unitario, della scadenza contrattuale e delle modalità che regolano i flussi finanziari tra le parti contraenti a garanzia del buon fine del contratto. Non è possibile negoziare futures che non soddisfino questi requisiti. Inoltre, dal momento che nel caso di contratti futures i due contraenti sono generalmente ignoti l'uno all'altro, viene anche fornito un meccanismo che assicura il rispetto del contratto da parte dei due contraenti. Infatti, tutti i contratti vengono stipulati di fatto con la *Cassa di Compensazione e Garanzia (Exchange Clearinghouse)*. Questa è in genere una società per azioni avente un oggetto sociale esclusivo che le impone di assicurare il buon fine dei contratti future e di emanare regolamenti che disciplinano l'operatività del mercato di propria competenza. Quindi il prezzo di consegna dei future non è concordato tra le singole parti, ma è univocamente determinato sul *floor* del mercato organizzato in base alla legge della domanda e dell'offerta. Pertanto, è anche noto come *prezzo del future (futures price)*. Se ci sono più investitori che vogliono assumere posizioni lunghe rispetto a quelli che vogliono assumere posizioni corte, il prezzo sale. Viceversa, il prezzo scende. La circostanza che i contratti futures rispettino degli standard e vengano stipulati con la Cassa di Compensazione rende possibile il loro annullamento tramite compensazione, ossia stipulando un contratto di segno opposto all'originale. In questo modo verrà evitata la consegna dell'attività sottostante il contratto. Infatti, acquistando un future con intenzioni speculative sarà essenziale effettuarne la vendita prima della scadenza contrattuale; se, invece, le intenzioni fossero di tipo assicurativo, ossia di copertura (*hedge*), per garantirsi un prezzo futuro certo di acquisto o vendita del sottostante, si aspetterà la scadenza prevista per provvedere all'acquisto o vendita del sottostante al prezzo stabilito.

Il mercato dei futures offre agli speculatori un'interessante *leva finanziaria (financial leverage)*. Cerchiamo di chiarire meglio questo concetto mediante l'esempio seguente.

**Esempio 5** Consideriamo uno speculatore che in data 1 marzo 2019 ritenga che nei prossimi 6 mesi la sterlina si rafforzerà rispetto al dollaro ed è pronto a scommettere sulla sua intuizione la somma di \$250,000. Lo speculatore potrebbe semplicemente comprare l'equivalente in sterline di \$250,000 al prezzo spot sperando di conseguire un profitto quando le riconvertirà in dollari. Le sterline, una volta acquistate, verrebbero depositate in un conto fruttifero ed eventualmente rivendute tra 6 mesi. Ipotizziamo che il tasso di cambio spot in data 1 marzo 2019 sia  $1.31559\text{£}/\$$ . L'acquisto al prezzo spot darebbe allo speculatore il possesso immediato di  $\text{£}190,029$ , per cui se tra 6 mesi il tasso di cambio risultasse pari a, diciamo,  $1.42734\text{£}/\$$  [resp.  $1.22734\text{£}/\$$ ], lo speculatore avrebbe guadagnato [resp. perso] \$21,236 [resp. \$16.770]. Un'altra possibilità è quella di assumere una posizione lunga sulla sterlina con 4 contratti futures standard a 6 mesi (ogni future standard comporta l'acquisto di  $\text{£}62,500$ ) sapendo che il tasso futures a 6 mesi sia di  $1.32734\text{£}/\$$ . Se tra 6 mesi il tasso di cambio risultasse pari a  $1.42734\text{£}/\$$ , i futures consentirebbero allo speculatore di comprare a  $\$1.32734$  un bene che varrebbe  $\$1.42734$ , con un

conseguente profitto di £25,000. Qualora però tra 6 mesi il tasso di cambio risultasse pari a 1.22734£/\$, lo speculatore, costretto a comprare a \$1.32734 un bene che varrebbe \$1.22734, avrebbe perso £25,000. Le alternative sembrano quindi dare origine a profitti o perdite lievemente differenti, ma questi calcoli non tengono conto degli interessi che si incassano o si pagano. Infatti, quando si considerano gli interessi percepiti sulle sterline depositate nel conto fruttifero e quelli persi sui dollari vincolati nel deposito di garanzia, i profitti o le perdite derivanti dalle due alternative risultano approssimativamente uguali. In definitiva, la differenza tra le due alternative è rappresentata esclusivamente dal fatto che l'acquisto di sterline a pronti richiede un investimento iniziale di \$250,000, mentre l'acquisto dei futures richiede solo che lo speculatore effettui un deposito di garanzia di circa \$30,000.

## Options

Il contratto di opzione (*option*) è un contratto tra due contraenti, un titolare (*holder*) ed un garante (*writer*), che sancisce l'acquisizione di un diritto e l'assunzione di un obbligo. Grazie alla stipula di un contratto di opzione il titolare, dietro la corresponsione di un premio (*prime*), acquisisce il diritto di acquistare dal garante, nel caso di *opzione d'acquisto* (*call option*), o di vendere al garante, nel caso di *opzione di vendita* (*put option*), un attivo finanziario rischioso, *titolo sottostante* (*underlying risky asset* o *underlying security*), entro un scadenza (*maturity* o *expiration*) e a un prezzo d'esercizio (*exercise* o *strike price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto. Si dice che il titolare assume una *posizione lunga* (*long position*) sull'opzione. Il garante, in cambio del premio, si obbliga a soddisfare alla scadenza il titolare del diritto d'opzione. Si dice che il garante assume una *posizione corta* (*short position*) sull'opzione. Differentemente da un contratto forward o futures in cui le parti contraenti sono entrambe obbligate a onorarlo. Un contratto d'opzione garantisce al titolare il diritto di acquistare o vendere senza obbligo d'esercitarlo. Al contrario il garante è obbligato a farsi carico dell'eventuale esercizio dell'opzione da parte del titolare. Inoltre, mentre la negoziazione di contratti forward o future non implica alcun costo, fatta eccezione per il deposito di garanzia nel caso dei future, l'acquisto di un'opzione richiede un pagamento immediato. Da notare che chi acquista un'opzione call scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sopra del prezzo d'esercizio, ossia assume una *posizione rialzista* (*bullish position*) sul sottostante, mentre chi vende l'opzione call assume una *posizione ribassista* (*bearish position*). Viceversa, chi acquista un'opzione put scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sotto del prezzo d'esercizio, ossia assume una *posizione ribassista* sul sottostante, mentre chi vende l'opzione put assume una *posizione rialzista*. Le opzioni sono negoziabili sia nei mercati over the counter, sia nei mercati organizzati: si tratta in quest'ultimo caso delle cosiddette *listed options*. Il funzionamento dei mercati organizzati è in larga misura simile a quello dei mercati dei future. Le opzioni più comunemente trattate sono le *opzioni americane* (*american options*) possono essere esercitate in qualsiasi momento antecedente alla data di scadenza. Le opzioni di più semplice modellizzazione matematica sono le *opzioni europee* (*european options*) che possono essere esercitate solo alla data di scadenza.

**Esempio 6** Consideriamo un contratto di opzione call europea su 100 azioni Amazon in data di sottoscrizione 01 marzo 2019, con scadenza 21 giugno 2019 e prezzo d'esercizio di \$1,700 (per azione). Con la titolarità di questo contratto otteniamo il diritto di acquistare 100 azioni Amazon in data 21 giugno 2019 dal sottoscrittore pagandole \$1,700 l'una. Ci sono due possibili scenari futuri, secondo che il prezzo spot del titolo Amazon alla scadenza vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:

- al 21 giugno 2019 le azioni Amazon hanno un prezzo spot superiore a \$1,700, ad esempio \$1,896.17, allora esercitiamo il diritto di opzione, compriamo dal sottoscrittore del contratto le 100 azioni, pagandole \$170,000, e le rivendiamo all'istante sul mercato a \$189,617. Il guadagno è quindi di \$19,617 al quale va tuttavia sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto;
- al 21 giugno 2019 le azioni Amazon hanno un prezzo spot inferiore a \$1,700 (o uguale), allora non esercitiamo il diritto di opzione, in quanto esercitandolo ci troveremmo a comprare al prezzo

di \$1,700 delle azioni che sul mercato valgono di meno. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.

Come si vede dall'esempio, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio. Da notare anche che mentre l'acquisto di un'opzione call consente, in linea di principio, guadagni illimitati, la vendita di un'opzione call può causare perdite illimitate. Ciò è illustrato dai due grafici seguenti

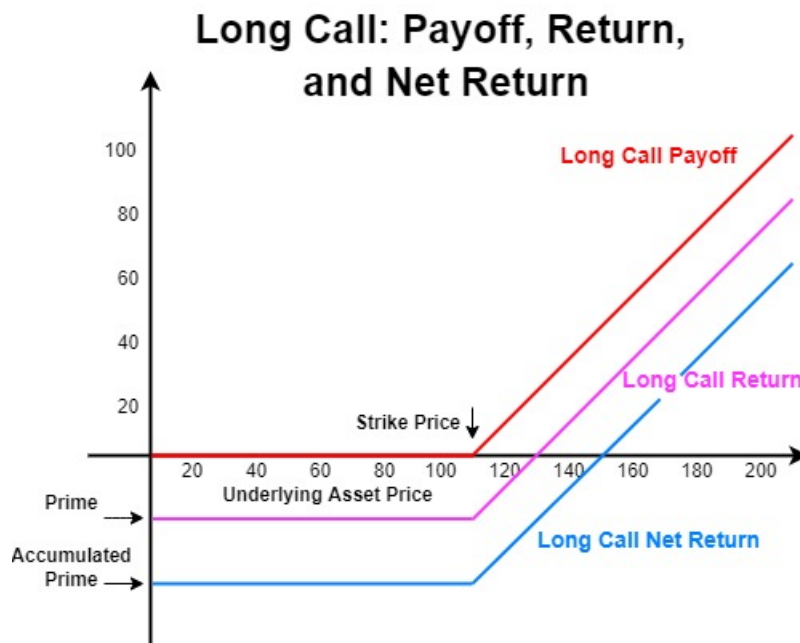


Figura 1.1: Payoff per una posizione lunga su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della call.

Presentiamo adesso un esempio analogo riferito alle opzioni put.

**Esempio 7** Consideriamo un contratto di opzione put europea su 100 azioni Amazon in data di sottoscrizione 05 marzo 2019 con scadenza 21 giugno 2019 e prezzo d'esercizio \$1,700 (per azione). Sottoscrivendo questo contratto otteniamo il diritto di vendere 100 azioni Amazon in data 21 giugno 2019 al prezzo di \$1,700 l'una. Anche in questo caso ci sono due possibili scenari futuri, secondoche alla scadenza il prezzo spot del titolo Amazon vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:

- al 21 giugno 2019 le azioni Amazon hanno, un prezzo spot inferiore a \$1,700, ad esempio \$1,496.17, allora compriamo sul mercato le 100 azioni pagandole \$149,617 e, esercitando il diritto di opzione, le rivendiamo all'istante al sottoscrittore del contratto a \$170,000. Il guadagno è quindi di \$20.383 ai quali va ancora sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto.
- al 21 giugno 2019 le azioni Amazon hanno, un prezzo spot superiore a \$1,700 (o uguale), allora rinunciamo a esercitare il diritto di opzione, perchè esercitandolo ci troveremmo a vendere al prezzo di \$1,700 delle azioni che sul mercato valgono di più. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.



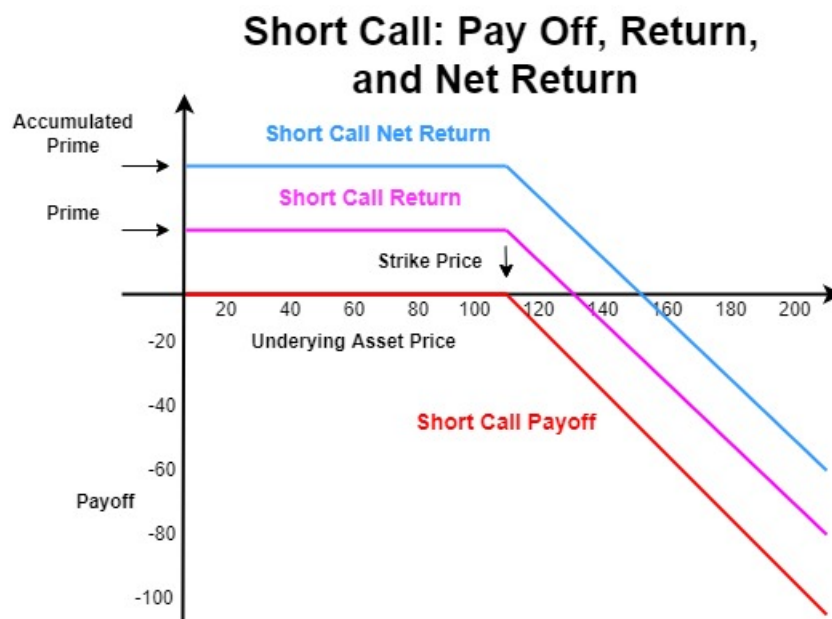


Figura 1.2: Payoff per una posizione corta su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff del venditore della call.

Simmetricamente al caso delle call, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio. Tuttavia, differentemente dalle opzioni call, l'acquisto di un'opzione put non permette guadagni superiori alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il premio e la vendita di un'opzione put non può causare perdite superiori alla differenza tra il premio e il prezzo d'esercizio.

Da notare che i payoff delle opzioni put e call europee o americane dipendono solo dal valore che il sottostante assume alla data d'esercizio e non dal suo andamento fino a tale data. Nei mercati reali, dove si opera prevalentemente in modalità telematica, l'acquisto di un contratto call [resp. put] è del tutto equivalente ad una scommessa: se il prezzo spot alla scadenza è maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio viene pagato subito il guadagno, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si perde il premio. Analogamente in caso di vendita di un contratto call [resp. put]: se il prezzo spot alla scadenza è maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio si paga subito la perdita, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si guadagna il premio. In genere i prezzi d'esercizio sono vicini alle quotazioni giornaliere dei sottostanti e ci danno quindi un'idea delle aspettative degli operatori sulle possibilità di rialzo o di ribasso degli stessi. In particolare un'opzione call o put è detta *at the money* [resp. *near the money*] quando il prezzo d'esercizio è uguale [resp. vicino] al prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *in the money* quando il prezzo d'esercizio è minore [resp. maggiore] del prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *out of the money* quando il prezzo d'esercizio è maggiore [resp. minore] del prezzo corrente del sottostante.

In base a queste caratteristiche, mentre le opzioni forniscono agli speculatori una vera e propria leva finanziaria che permette di amplificare i rendimenti di un investimento nel mercato finanziario, le stesse opzioni possono realizzare una copertura assicurativa contro il rischio di mercato.

**Esempio 8** Il 05 marzo 2019 uno speculatore vuole assumere una posizione lunga sulle azioni Amazon

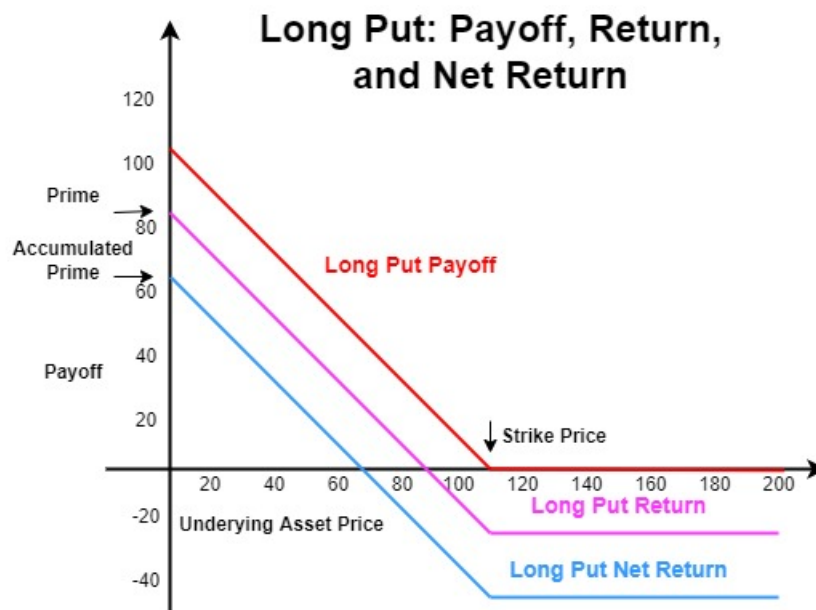


Figura 1.3: Payoff per una posizione lunga su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della put.

quotate al prezzo di \$1,696.17, ritenendo molto probabile che il loro prezzo salga nei successivi mesi. Il 05 marzo 2019 una call europea con scadenza 21 giugno 2019 con prezzo d'esercizio di \$1,700 è quotata a \$102,95. Nell'ipotesi in cui abbia una disponibilità d'investimento pari a \$169.617, lo speculatore ha a disposizione due alternative: la prima consiste semplicemente nell'acquisto di 100 azioni; la seconda consiste nell'investimento di \$164.000 per l'acquisto di 16 contratti di 100 opzioni l'uno per un totale di 1,600 opzioni. Supponiamo che l'intuizione dello speculatore sia corretta e che le azioni Amazon si apprezzino effettivamente, ad esempio, fino a \$1,896.17 alla scadenza. La prima alternativa, consistente nel comprare le azioni, comporterebbe un profitto di  $100 \times \$200 = \$20,000$ . La seconda alternativa è molto più redditizia. Un'opzione call sulle Amazon, con prezzo d'esercizio di \$1,700, comporterebbe un ricavo di \$196.17 a opzione, consentendo di acquistare a \$1,700 l'azione che varrebbe sul mercato \$1,896.17. Il valore complessivo di tutte le opzioni comprate sarebbe allora pari a  $1,600 \times \$196.17 = \$313,872$ . Pertanto, sottraendo il costo originale sostenuto per l'acquisto delle opzioni, il profitto sarebbe pari a  $\$313,872 - \$164,000 = \$149,872$ . La strategia d'acquisto delle opzioni risulterebbe essere molto più redditizia della strategia consistente nell'acquisto delle azioni. Naturalmente, le opzioni comportano anche maggiori perdite potenziali. Supponiamo che il prezzo dell'azione ribassi, ad esempio sino a \$1,496.17, alla scadenza. La prima strategia comporterebbe una perdita di  $100 \times \$200 = \$20,000$ , mentre la strategia mediante opzioni, che scadrebbero senza essere state esercitate, causerebbe una perdita di \$164.000, ossia il premio originariamente pagato.

**Esempio 9** Consideriamo un investitore che il 05 marzo 2019, scommettendo sul rialzo nei prossimi mesi delle azioni Amazon, decida di comprarne 100 al prezzo corrente di \$1,696.17 per azione. L'investitore, più prudente dello speculatore, decide di cautelarsi dal rischio che presenta il suo investimento comprando allo stesso tempo 100 opzioni put europee sulle azioni Amazon a scadenza 21 giugno 2019 con prezzo d'esercizio di \$1,700. In data il 05 marzo 2019 il premio per l'opzione put con tale prezzo d'esercizio è di \$95.94. Nel caso in cui le azioni Amazon dovessero effettivamente apprezzarsi sul mercato, ad esempio fino a \$1,896.17, l'investitore non eserciterà le opzioni ed incasserà il prezzo di mercato delle azioni realizzando così un profitto pari alla differenza tra l'incremento di valore di mercato delle azioni ed il premio pagato per l'acquisto delle opzioni per un totale di  $\$20,000 - \$9,594 = \$10,406$ . Invece, nel caso in cui il titolo dovesse deprezzarsi sul mercato, ad esempio sino a \$1,496.17, l'investitore

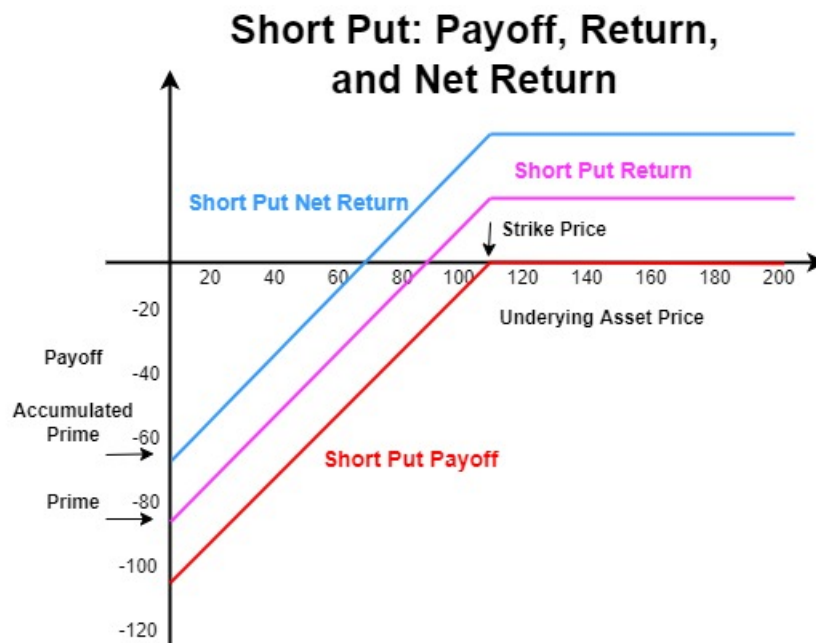


Figura 1.4: Payoff per una posizione corta su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff del venditore della put.

avrebbe modo di esercitare le sue opzioni put, limitando la sua perdita al costo del premio unitamente all'eventuale differenza tra il prezzo pagato per acquistare le azioni e lo strike delle opzioni per un totale di  $\$9,594 - \$383 = \$9,166$ , invece della perdita di  $100 \times \$200 = \$20,000$  che subirebbe se non avesse comprato le opzioni put.

Le opzioni call e put sin qui descritte vengono chiamate *plain vanilla* e rappresentano la più semplice tipologia di contratto d'opzione, combinando tra di loro calls e puts si possono definire derivati *non standard* anche molto complicati.

Nelle prossime sezioni entreremo in maggior dettaglio nella presentazione dei contratti d'opzione nell'ambito di semplici modelli matematici di mercato finanziario.

## Swaps

I *contratti swaps* sono accordi privati tra una società ed una banca, ma anche tra due società, per scambiarsi dei futuri pagamenti. L'accordo definisce le date in cui i pagamenti vengono scambiati ed il modo in cui devono essere calcolati. Di solito la loro determinazione viene effettuata in base al futuro valore di un tasso d'interesse, un tasso di cambio o qualche altra variabile di mercato.

Il più comune tipo di *swap sul tasso d'interesse* (*interest rate swap*) è chiamato *plain vanilla*. In questo contratto, una società si impegna a pagare ad un'altra, per un certo numero di anni ed in base a un capitale di riferimento detto *capitale nozionale* (*notional principal*), un tasso d'interesse fisso predeterminato. A sua volta, la controparte si impegna a pagare un tasso d'interesse variabile sullo stesso capitale, per lo stesso numero di anni. I pagamenti a tasso variabile vengono calcolati in funzione dell'andamento nel tempo di un prefissato indice di riferimento, che per lo più è rappresentato dal *London InterBank Offer Rate (Libor)*, ovvero il tasso al quale le Banche Centrali offrono fondi ad altre banche nel mercato delle eurovalute.

**Esempio 10** Supponiamo che il 5 marzo 2004 Microsoft Europe si impegni a pagare per 3 anni alla Bank of England un tasso del 5% per cento annuo su un capitale nozionale di £100 milioni ed in cambio

la Bank of England si impegni a pagare a Microsoft il Libor a 6 mesi sullo stesso capitale nozionale e per la stessa durata triennale. Supponiamo che i pagamenti vengano scambiati ogni 6 mesi e che il tasso d'interesse del 5% sia composto semestralmente. Il primo scambio di pagamenti ha luogo il 5 settembre 2004, sei mesi dopo la stipula del contratto. Microsoft paga alla Bank of England £2,5 milioni. Questi sono gli interessi su un capitale di £100 milioni al tasso annuo del 5% per cento. Di contro la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di \$100 milioni al Libor a 6 mesi osservato sei mesi prima del 5 settembre 2004, ossia esattamente il 5 marzo 2004. Supponiamo che il 5 marzo 2004 il Libor a 6 mesi sia pari al 4,2%. Quindi la Bank of England paga a Microsoft £2,1 milioni. Si noti che non c'è incertezza circa il primo scambio di pagamenti, dato che il pagamento variabile è determinato in base al Libor osservato nel momento in cui il contratto viene stipulato. Il secondo scambio di pagamenti ha luogo il 5 marzo 2005, un anno dopo la stipula del contratto. Microsoft paga £2,5 milioni alla Bank of England e la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di £100 milioni in base al Libor a 6 mesi osservato sei mesi prima del 5 marzo 2004, ossia il 5 settembre 2004. Supponiamo che il 5 settembre 2004 il Libor a 6 mesi sia pari al 4,8%, allora la Bank of England paga a Microsoft un importo pari a £2,4 milioni. In totale lo swap comporta sei scambi di pagamenti. I pagamenti fissi sono sempre uguali a \$2,5 milioni. I pagamenti variabili vengono determinati in base al Libor a 6 mesi, osservato sei mesi prima di ciascuna scadenza di pagamento. Ovviamente, gli swaps su tassi d'interesse sono strutturati in modo che una delle due parti remunererà l'altra solo la differenza tra i due pagamenti. Nell'esempio in questione, Microsoft paga alla Bank of England £0,4 milioni il 5 settembre 2004 e £0,1 milioni il 5 marzo 2005. Si noti che il capitale viene usato solo per determinare l'importo degli interessi, esso non viene scambiato. Questo è il motivo per cui viene chiamato capitale nozionale.

L'esempio presentato evidenzia come lo swap possa essere considerato a tutti gli effetti lo scambio di un titolo a tasso fisso contro un titolo a tasso variabile. La posizione di Microsoft Europa è lunga su un titolo a tasso variabile ed è corta su un titolo a tasso fisso. La Bank of England è lunga su un titolo a tasso fisso ed è corta su un titolo a tasso variabile. Questa caratterizzazione dei pagamenti previsti dallo swap aiuta a spiegare perché il tasso variabile dello swap venga fissato sei mesi prima del pagamento. Gli interessi pagati sui titoli a tasso variabile sono in genere fissati all'inizio del periodo al quale si riferiscono e vengono pagati alla fine dello stesso. Gli interest rate swaps più comuni vengono pertanto costruiti nel modo illustrato dall'esempio. Chiaramente gli swaps sui tassi d'interesse sono strumenti finanziari che consentono ad uno dei due contraenti di tutelarsi dall'incertezza sulla variabilità del tasso di cambio e all'altro di speculare proprio su questa variabilità.

## Capitolo 2

# Single-Period Investment Models

By *single-period investment* we mean any investment characterized by a cash flow stream which occurs only at two dates: an *initial* or *present* date and a *terminal* or *future* date. The difference between the terminal and the initial date of an investment is called the *maturity* of the investment.

For simplicity, write  $t = 0$  [resp.  $t = T$ ] for the initial [resp. terminal] date of a single-period investment and write  $X_0$  [resp.  $X_T$ ] for the *initial* or *present* [resp. *terminal* or *future*] cash flow of the investment. In this case the maturity is just the terminal date of the investment. The amount of the initial cash flow, also termed *principal* in a single-period investment perspective, is observed at the present date. Hence, with reference to the present date, the initial cash flow is usually considered as certain and may be represented by a real number, that is a Dirac random variable,  $X_0 \sim \text{Dir}(X_0)$ , concentrated on the amount of the cash flow. On the contrary, the value of the terminal cash flow, also termed *payoff* in a single-period investment perspective, is observed at the future date. Therefore, at the present date, the terminal cash flow should be considered as uncertain and should be represented by a real random variable  $X_T$ , defined on some probability space  $\Omega$ . Depending on whether the state space  $X_T(\Omega)$  is countable or continuous, we will speak of *countable* or *continuous space state model*. However, in some cases, it may be convenient to consider also the payoff of an investment as certain. For instance, this is the case of the payoff generated by investments in deposits of several US banks or investments in the US Treasury Bills. In fact, in these cases the uncertainty in the payoff of the investment is only due to a possible default of the depositary bank or the USA. However, the Federal Deposit Insurance Corporation provides deposit insurance that guarantees the deposit of member banks for at least \$250,000 per depositor, per bank and the eventuality of default of the USA is considered to be rather unlikely.

### Esempio 11 Website cost and banners

From now on, let us assume that the principal  $X_0$  of the single period investment considered is actually certain and the payoff  $X_T$  at maturity  $T$  is a real random variable.

**Definizione 12** *In a forward-looking perspective, we call the return or interest of the investment at maturity  $T$  the difference between the payoff and the principal, that is the random variable*

$$R_T \stackrel{\text{def}}{=} X_T - X_0. \quad (2.1)$$

*An interest may be either positive or negative. Accordingly, when  $X_0 > 0$ , it is called profit or loss.*

**Definizione 13** *Assume that  $X_0 \neq 0$ . We call the rate of return or rate of interest of the investment at maturity  $T$  the ratio between the interest and the principal, that is the random variable*

$$r_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_T}{X_0}. \quad (2.2)$$

Note that the term *interest* [resp. *rate of interest*] rather than *return* [resp. *rate of return*] is more commonly used with reference to investment in loans such as bank deposit, bonds or even private loans.

**Definizione 14** Assume that  $X_0 \neq 0$ . We call the accumulation factor of the investment at maturity  $T$  the ratio between the payoff and the principal, that is the random variable

$$a_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X_T}{X_0}. \quad (2.3)$$

**Osservazione 15** Assume that  $X_0 \neq 0$ . We clearly have

$$X_T = X_0 + R_T, \quad r_T = \frac{X_T - X_0}{X_0}, \quad R_T = r_T X_0, \quad X_T = a_T X_0. \quad (2.4)$$

In addition,

$$a_T = 1 + r_T. \quad (2.5)$$

**Proof.** To prove (2.5), observe that, combining (2.3), (2.1), (2.2), and simplifying the term  $X_0$ , we obtain

$$a_T = \frac{X_T}{X_0} = \frac{X_0 + R_T}{X_0} = \frac{X_0 + r_T X_0}{X_0} = 1 + r_T,$$

as claimed.  $\square$

**Definizione 16** In a backward-looking perspective, we call the discount generated by an investment at maturity  $T$  again the difference between the payoff and the principal. Despite from a mathematical point of view the discount cannot be distinguished by the interest, from an economic or financial point of view distinguishing between the discount and the interest is rather useful. Therefore, for the discount is commonly used a different notation. We also follow this practice and denote the discount at the terminal date  $T$  by  $S_T$ . As a consequence,

$$S_T \stackrel{\text{def}}{=} X_T - X_0. \quad (2.6)$$

**Definizione 17** Assume that  $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$ . We call the rate of discount of an investment at maturity  $T$  the ratio between the discount and the payoff, that is the random variable

$$s_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_T}{X_T}. \quad (2.7)$$

**Definizione 18** Assume that  $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$ . We call the discount factor of the investment at maturity  $T$  the ratio between the principal and the payoff, that is the random variable

$$d_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X_0}{X_T}. \quad (2.8)$$

**Osservazione 19** Assume that  $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$ . We clearly have

$$X_0 = X_T - S_T, \quad s_T = \frac{X_T - X_0}{X_T}, \quad S_T = s_T X_T, \quad X_0 = d_T X_T. \quad (2.9)$$

In addition,

$$d_T = 1 - s_T. \quad (2.10)$$

**Proof.** To prove (2.10), observe that

$$d_T = \frac{X_0}{X_T} = \frac{X_T - S_T}{X_T} = \frac{X_T - s_T X_T}{X_T} = 1 - s_T,$$

as claimed.  $\square$

**Osservazione 20** Assume that  $X_0 \neq 0$  and  $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$ . We have

$$a_T d_T = 1. \quad (2.11)$$

Equivalently,

$$(1 + r_T)(1 - s_T) = 1. \quad (2.12)$$

As a consequence

$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \quad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}. \quad (2.13)$$

**Proof.** To prove Equation (2.11), we just apply Equations (2.3) and (2.8). Thus,

$$a_T d_T = \frac{X_T}{X_0} \frac{X_0}{X_T} = 1.$$

Now, combining the latter with (2.10) and (2.10) we obtain Equation (2.12). In the end, Equation (2.13) clearly follows from (2.12).  $\square$