23/03/2023

Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Memoryless property
and
probability distributions

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

1

La storia passata non ha influenza sul futuro. Il futuro dipende solo da informazioni presente, e non da come sono arrivato a queste informazioni presenti.

Memoryless property

Informally:
the RV does not “remember” the past,
it behaves as a new variable

the future depends only on relevant information about the current time, not on information from further in the past

Example:
X is the time elapsed in a shop from 9 am on a certain day until the arrival of the first customer
X is the time a server waits for the first customer

The "memoryless" property makes a comparison between the probability distributions of the time a shop has to wait from 9 am onwards for his first customer, and the time that the shop still has to wait for the first customer on those occasions when no customer has arrived by any given later time:
the property of memorylessness is that these distributions of "time from now to the next customer" are exactly the same.

exponential continua
geometric discreta

2

Una proprietà del genere può portare importanti semplificazioni, quindi verificare la proprietà di memoryless è importante.
E' però anche importante vedere SE la distribuzione memoryless in questione modella bene ciò che devo fare, sennò non ci faccio nulla.
Se riesco a modellare una distribuzione con un insieme di stati (Cox), per quanto complessi possano essere, riesco a mantenere la memoryless.
Per fare questo mi serve Markov, perchè devo passare da un certo stadio ad un altro stadio. Il processo stocastico che modella questa realtà continua ad essere di Markov, avendo proprietà memoryless, utile per i nostri scopi. Questa è l'importanza delle distribuzioni a fasi.

The remaining service time

A post office has 2 clerks.
Customer B is being served by one clerk, and customer C is being served by the other clerk, when A walks in.
All service times are exponentially distributed.

What is $Pr\{\text{A } is\ the\ last\ to\ leave\}$?
Il primo che esce o B o C. Poi entra A.
Quindi confronto A e B (o A e C). Ma a me non interessa sapere da quanto B stia già in servizio, perchè è memoryless, potrei essere io più veloce.

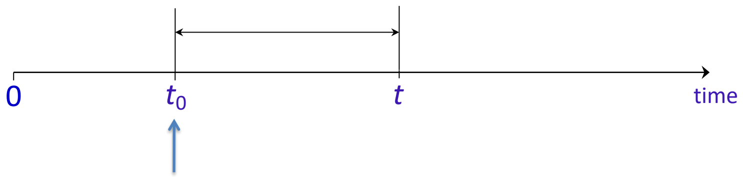
½

Note that one of B and C will leave first.
Let us say B leaves first.
Then C and A will have the same distribution on their remaining service time.
It doesn't matter that C has been serving for a while.

The remaining service time

X *Exponential*$(1/\mu)$ service time

service start $Prob\{X \leq t\}$ $=1-e^{-\mu t}$ distribuzione cumulativa di una esponenziale.



$Prob\{X \leq t_0+t \mid X > t_0\}$? $X - t_0$ is the *remaining service time*

{X - t0 <= t | X - t0 > 0} (cioè lo porto a sinistra)

The remaining service time

$$Prob\left\{X \le t_0 + t \,\middle|\, X > t_0\right\} = \frac{Prob\left\{t_0 < X \le t_0 + t\right\}}{Prob\left\{X > t_0\right\}} = \frac{Prob\left\{X \le t_0 + t\right\} - Prob\left\{X \le t_0\right\}}{Prob\left\{X > t_0\right\}}$$

$$= \frac{\cancel{1} - e^{-\mu(t_0+t)} - \left(\cancel{1} - e^{-\mu t_0}\right)}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-\mu t_0}\right)} = \frac{e^{-\mu t_0} - e^{-\mu(t_0+t)}}{e^{-\mu t_0}}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{e^{-\mu t_0}} e^{-\mu t}}{\cancel{e^{-\mu t_0}}} = 1 - e^{-\mu t}$$

è tornata una esponenziale

$$Prob\left\{X \le t_0 + t \,\middle|\, X > t_0\right\} = Prob\left\{X \le t\right\}$$

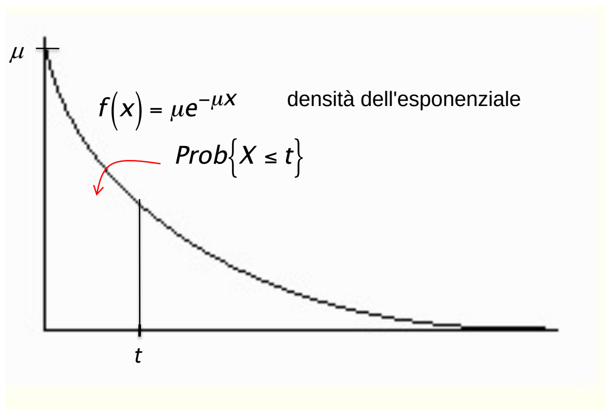
$$Prob\left\{X - t_0 \le t \,\middle|\, X > t_0\right\} = Prob\left\{X \le t\right\}$$

remaining service time — service time

The two distributions are exactly the same.

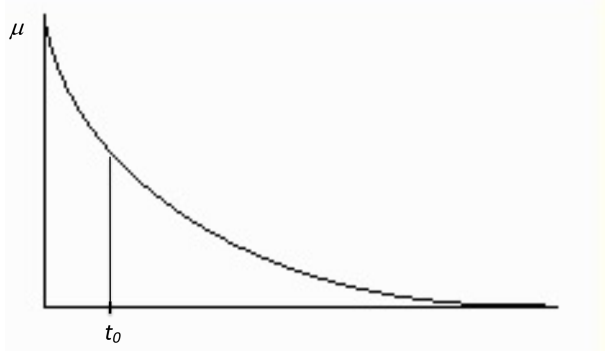
il tempo di servizio rimanente è distribuito allo stesso modo del tempo di servizio iniziale esponenziale. Seguono stessa distribuzione di probabilità.

Exponential$(1/\mu)$



The remaining service time

Exponential$(1/\mu)$

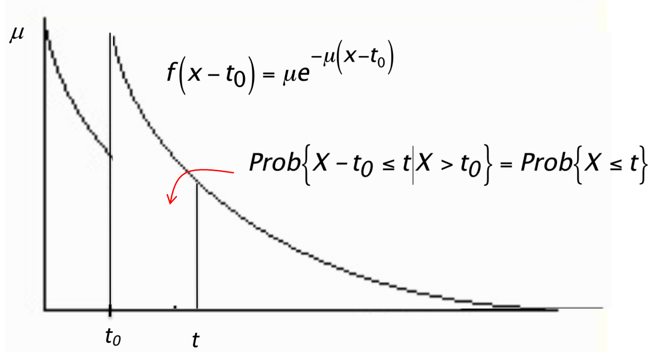


$$Prob\{X - t_0 \le t | X > t_0\}$$

7

The remaining service time

Exponential$(1/\mu)$



$$f(x - t_0) = \mu e^{-\mu(x - t_0)}$$

$$Prob\{X - t_0 \le t | X > t_0\} = Prob\{X \le t\}$$

Ho stessa distribuzione di prima, è memoryless.

The exponential is the only continuous distr memoryless

8

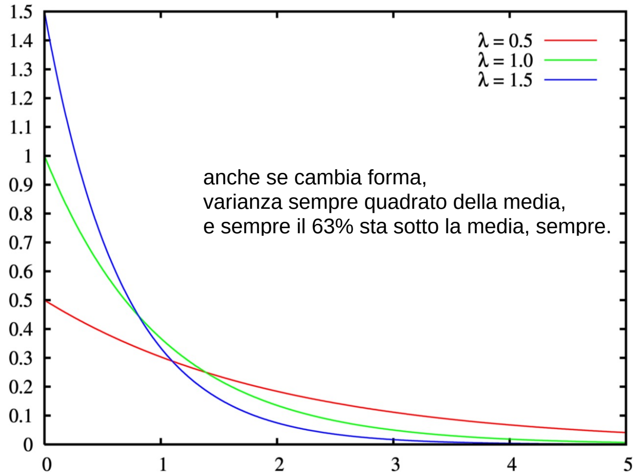
generalmente, nell'esponenziale: f(n) = f(n-1)*e^(- lambda)
ovvero f(0) = lambda; f(1) =lambda* e^(- lambda)   f(2) = lambda * e^(- lambda)* e^(- lambda)
lambda è costante di decadimento. Se calcolo densità nel valore medio = 1/lambda ottengo f(1/lambda) = lambda * e^(-1) = lambda * 0.36788
cioè indipendentemente dal valore della sua media, la distribuzione parte sempre da lambda e in un tempo pari alla sua media, questo valore viene ridotto al 36.788% indipendentemente dal valore di lambda.

Se calcolo la cumulativa (cioè la distribuzione) in 1/lambda avrei: $F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^{1/\lambda} f(x)\,dx = 1 - e^{-1} = 0{,}63212$

ovvero circa il 63% dei valori cade PRIMA di 1/lamdba. ovvero se faccio graficamente la funzione e segno il punto 1/lambda sulle 'x', il 63% vi cade dentro.

Decadimento molto forte ed indipendente dal tasso, infatti abbiamo un valore indipendente da lambda quando calcolo l'integrale.
Con le distribuzioni di probabilità modelliamo la realtà.

exponential distribution



anche se cambia forma,
varianza sempre quadrato della media,
e sempre il 63% sta sotto la media, sempre.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

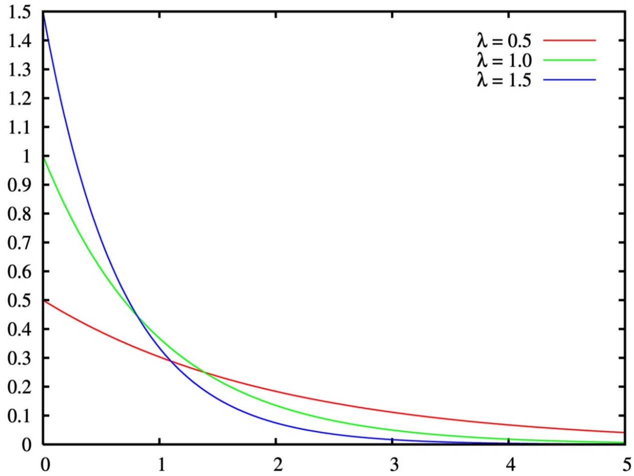
1. For each unit step, the "quantity" is reduced of $e^{-\lambda}$

λ is the *decay constant*

Prof. Vittoria de Nitto Personè 9

9

exponential distribution

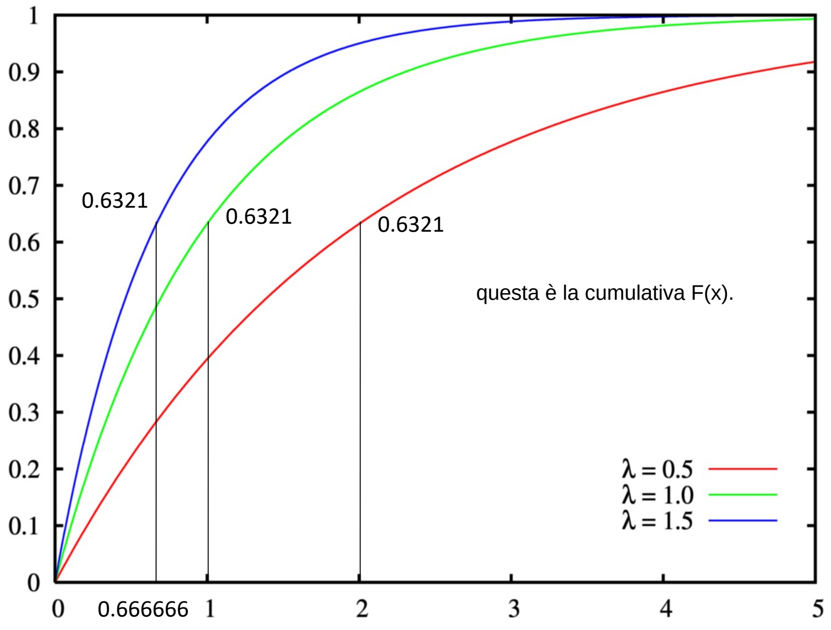


$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

2. Independently of the λ value, $1/\lambda$ is called the exponential *time constant* : is the time to reduce the initial value of about 63.21%

Prof. Vittoria de Nitto Personè 10

10

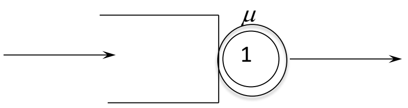


11

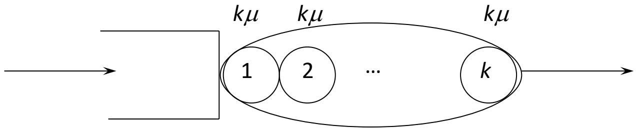
Phase-type distributions

SERVENTE SINGOLO, Modello diversamente il servizio.

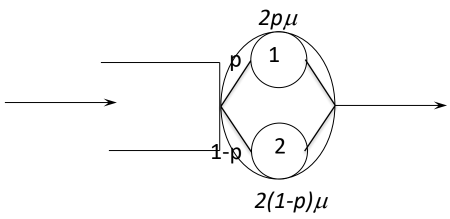
Exponential



k-Erlang



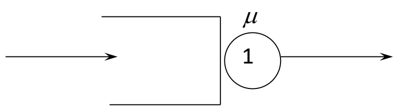
hyperexponential distribution



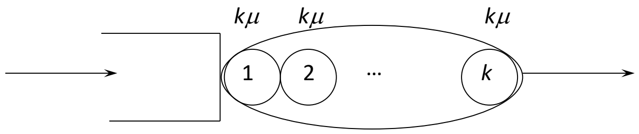
12

Phase-type distributions

Exponential



k-Erlang



- a job that requires the execution of k programs in series
- I/O unit that needs of a series of operations to serve a requirement (search for a cylinder, sector, read/write etc.)

confronti sempre fatti a parità di media.

13

Phase-type distributions

Qui abbiamo la classica esponenziale.

Exponential $\quad f(x) = \mu e^{-\mu x} \qquad E[X] = \frac{1}{\mu} \qquad \sigma^2(X) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$

k-Erlang $\quad f_i(x) = k\mu e^{-k\mu x} \qquad E[X_i] = \frac{1}{k\mu} \qquad \sigma^2(X_i) = \left(\frac{1}{k\mu}\right)^2$

$$f(x) = (k\mu)^k \frac{e^{-k\mu x}}{(k-1)!} x^{k-1} \qquad k \geq 1$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{k} E[X_i] = k\frac{1}{k\mu} = \frac{1}{\mu}$$

as the exponential!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2(X_i) = k\left(\frac{1}{k\mu}\right)^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$$

k times less than the exponential!

La varianza totale invece diminuisce, portandoci quindi dei vantaggi.

La media della funzione, che include tutti gli stadi, ci ritorna la stessa media dell'esponenziale. Deve essere così, altrimenti starei confrontando due cose diverse, e non avrebbe senso.

Qui abbiamo la k-erlang. Ragioniamo prima sul " singolo stadio i": Abbiamo a che fare con "k*mu" perché il tempo di servizio E[S(i)] è diviso k volte (fa solo una parte del lavoro) e quindi il tasso di servizio, che è l'inverso, viene quindi moltiplicato per k volte. Media e varianza del singolo stadio vengono di conseguenza.

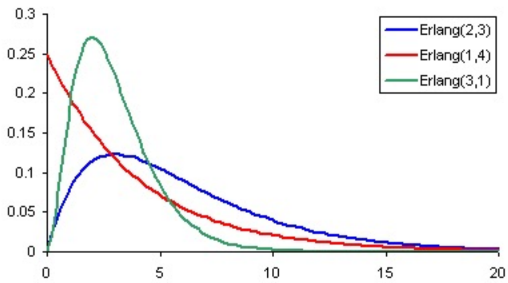
14

più stadi ci sono, più decresce
con infiniti stati avrei un valore unico in "verticale" sul grafico

Phase-type distributions

Exponential $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ $E[X] = \frac{1}{\mu}$ $\sigma^2(X) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$

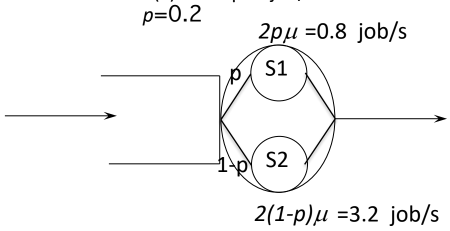
k-Erlang $f_i(x) = k\mu e^{-k\mu x}$ $E[X_i] = \frac{1}{k\mu}$ $\sigma^2(X_i) = \left(\frac{1}{k\mu}\right)^2$

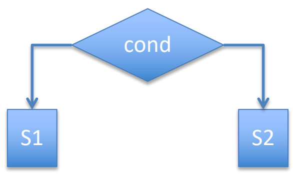


Phase-type distributions

E(S)=0.5 s μ=2 job/s
p=0.2

hyperexponential distribution





- a job that requires the execution of 2 programs as an alternative

varianza sale, questi due pezzi non hanno stessa media, in quanto ho probabilità diverse che fanno crescere in modi diversi le medie. Se faccio la media generale, questa deve essere invece uguale a quella esponenziale.

Phase-type distributions

Exponential $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ $E[X] = \frac{1}{\mu}$ $\sigma^2(X) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$

hyperexponential distribution

$$f_1(x) = 2p\mu e^{-2p\mu x} \qquad f_2(x) = 2(1-p)\mu e^{-2(1-p)\mu x}$$

$$f(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$$ (somma pesate delle due)

$$E[X] = pE[X_1] + (1-p)E[X_2] = p\frac{1}{2p\mu} + (1-p)\frac{1}{2(1-p)\mu} = \frac{1}{\mu}$$ as the exponential!

(confronto sempre a parità di media)

$$\sigma^2(X) = g(p)\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$$ where $$g(p) = \frac{1}{2p(1-p)} - 1$$

$g(p)$ times more than the exponential!

varianza exp

p=0.5 ⟶ $g(p)$=1, hyperexpo=expo

p=0.2 ⟶ $g(p)$=2.125

(piu del doppio rispetto exp con stessa media)

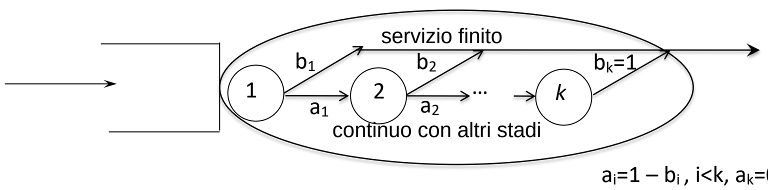
$p \to 0.5$ ⟶ $g(p) \to 1$ variance decreases
$p \to 0$ or 1 ⟶ $g(p) \to \infty$ variance grows

0.5 perfettamente bilanciata, 0 o 1 casi estremi.

Cox distribution

La particolarità di questa distribuzione è che riesco sempre ad approssimare bene una qualsiasi funzione arbitraria.

How can we model a service demand with a different law, that is an arbitrary distribution?



$a_i = 1 - b_i$, $i<k$, $a_k=0$, $b_k=1$

- each stage is expo with mean $1/\mu_i$ per questo posso modellare distribuzioni qualsiasi. Ogni stage può avere mu diversi.
- if $t_1, t_2, \ldots, t_k$, are the time spent in each stage the total time spent t is:
  - t = t_1 with probability b_1 (esco al primo stadio)
  - t = t_1+t_2 with probability a_1b_2 (esco al secondo stadio)
  - t = $t_1+t_2+t_3$ with probability $a_1a_2b_3$ (esco al terzo stadio)

  ...

  - t = $t_1+\ldots+t_k$ with probability $a_1a_2\ldots a_{k-1}b_k$

Arbitrary distribution

in alcuni casi la trasformazione è esatta, in altri è una approssimazione. Dipende se la trasformata di Laplace è razionale.

Case a) Arbitrary $f(t)$ with rational Laplace transform

$$\longrightarrow C_k(t) = f(t)$$ for a given k,

exact, or with known precision

(valutazione esatta dell'errore che sto commettendo)

Case b) Arbitrary $g(t)$ without rational Laplace transform

$$\longrightarrow f(t) \approx g(t)$$ approximate, with known precision

$$C_k(t) \approx g(t)$$

(l'errore è noto dunque)

Sostanzialmente approssimo la mia funzione g(t) che non ha Laplace razionale, con un'altra funzione f(t) che invece ha Laplace razionale, trasformandola in Coxiana.