Lezione 23 maggio 2023

Recap, da p.106 prop.170

Abbiamo introdotto la *speranza condizionata* $E[\cdot|\mathcal{F}] : L^2(\Omega, \mathbb{R}^M) \to L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$

dove a sinistra abbiamo delle $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie, e a destra un sottoinsieme $F - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie, infatti $F \subseteq \xi$.

Tale operatore lo abbiamo visto anche a CPS, per questo mostriamo solo qualche proprietà, come:

- $\int_F E[X|\mathcal{F}]dP = \int_F XdP \; \forall F \in \mathcal{F}$, da cui in particolare si ha:

  $E[E[X|\mathcal{F}]] = E[X]$ mettendo $F = \Omega$

- Se $X \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M) \to E[X|\mathcal{F}] = X$ perchè X è già osservabile in funzione di $\mathcal{F}$, in quanto vi appartiene.

- Se $X \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$ e $Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, solo X è osservabile rispetto informazione $\mathcal{F}$. Allora X esce fuori. $E[XY^T|\mathcal{F}] = XE[Y^T|\mathcal{F}]$

- Se X è indipendente da $\mathcal{F}$, l'osservazione di X è indipendente da \mathcal{F}, quindi l'osservazione di $\mathcal{F}$ non dà "vantaggi", allora: $E[X|\mathcal{F}] = E[X]$

- tower property: $E[\ E[X|\mathcal{F}] \mid G] = E[\ E[X|G] \mid \mathcal{F}] = E[X|G] \ se \ G \subseteq \mathcal{F}$

- Se $\phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ convessa, $\phi \circ X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \ E[\phi(X)|\mathcal{F}] \geq \phi(E[X|\mathcal{F}])$. Caso di interesse è se $\phi(X) \doteq |X|$.

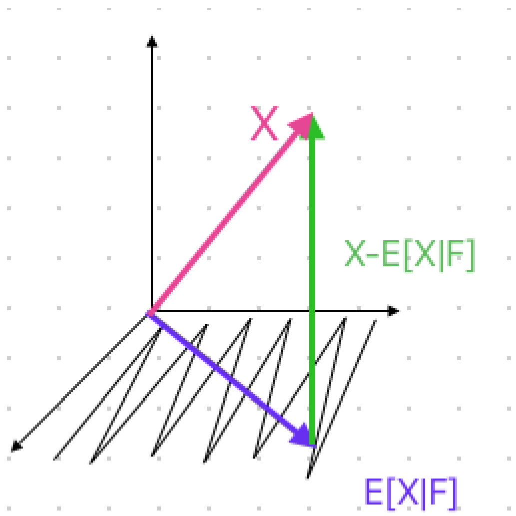
Vediamo due conseguenze di questa proprietà:

- $E[X|\mathcal{F}] = E[E[X|\mathcal{F}]^2] - E[X]^2$

- Se $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ allora $Var(E[X|\mathcal{F}]) \leq D^2[X]$. Cioè ho uno stimatore ($E[X|\mathcal{F}]$) di qualcosa (X). La variabilità di uno stimatore è sempre più piccola della variabilità dell'oggetto che stimo. Se devo stimare un oggetto complesso, e non ho tutte le informazioni a lui associate, ha senso pensare che la stima che farò sarà meno "precisa" rispetto al comportamento vero che può assumere l'oggetto stimato.

Proposizione 172:

$X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$ e $Y \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$ allora $Cov(X - E[X|\mathcal{F}], Y) = 0$, cioè l'approssimazione di X sullo spazio. Sono tutti *vettori*. Se la covarianza è 0, stiamo dicendo che la differenza è *ortogonale* allo spazio. **Le speranze condizionate sono *proiezioni ortogonali*.**



Def 174 - Serie di Martingala

Riconsieriamo lo spazio di probabilità **C.R.R.** (Ω, ξ, P).

Prendiamo $(X_n)_{n=0}^{N}$ con X_n che sono $\xi - \beta(\mathbb{R}^M)$ variabili aleatorie.

La successione è di **Martingala** se:

$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} \ \forall \ n = 1, ..., N$ Cioè il predittore migliore del dato di domani, è fornito dal dato di oggi. Notiamo che ha media costante.

Nel caso delle previsioni del tempo, se oggi c'è il sole, è probabile che ci sia anche domani. Non è detto che ci azzecco, però dovrei trovare un predittore migliore. E' un *benchmark* per la costruzione di altri predittori. Se non faccio meglio di questo, allora il predittore che abbiamo trovato non è migliore del **predittore Martingala**. Nello spazio C.R.R. abbiamo tutti i momenti, quindi non esistono altre condizioni da rispettare.

Processo di Markov - def. 175

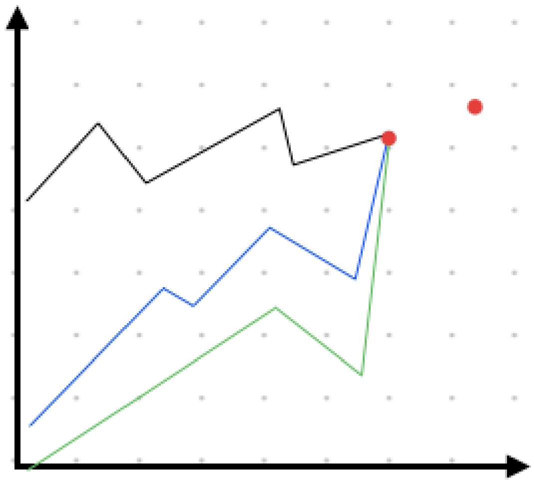
Abbiamo due condizioni:

- $(X_n)_{n=0}^{N}$ è $\mathcal{F}_n - adattato$. Vuol dire che la successione è osservabile.
- $E[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = E[f(X_n)|\sigma(X_{n-1})]$ ovvero la storia del processo non gioca nessun ruolo nelle predizioni future, ciò che mi basta è "il punto precedente". Infatti Markov è *memoryless*, mentre $\sigma(X_{n-1})$ è l'ultima informazione data dal processo, cioè la sigma algebra generata solamente dalla variabile aleatoria X_{n-1}. $\mathcal{F}_{n-1}$ è invece generata da

tutte le $n-1$ successioni, cioè tutta la traiettoria fino a X_{n-1}. Noi stiamo dicendo che non ci serve tutta la traiettoria, ma solo l'ultimo valore assunto dalla traiettoria.

Una formulazione equivalente ma più intuitiva è:

$P(X_n \in B|\mathcal{F}_{n-1}) = P(X_n \in B|\sigma(X_{n-1}))$
In pratica, voglio arrivare al punto B, ho percorso la strada fino ad un certo punto, quale è la probabilità che, da dove sono arrivato, riesco ad arrivare a B? (componente a sinistra dell'equazione). A destra abbiamo invece la probabilità di arrivare in B sapendo solo l'ultimo punto in cui siamo arrivati. **La storia (traiettoria) non ha importanza.**



Proposizioni 176,177,178

Sia $\mathcal{F}_n \doteq \sigma(\beta_1, ..., \beta_n)$ l'informazione che ho osservando le realizzazioni del rumore.
Se avessi i prezzi $S_n = \beta_n S_{n-1}$ allora posso dire (ma non lo dimostriamo)
$\sigma(S_0, ..., S_n) = \mathcal{F}_n \quad \forall n = 1, ...N$ ed $S_0 \in \mathbb{R}_+$, cioè *osservare i rumori è come osservare i prezzi.*

La conseguenza è molto importante, infatti:
$E[X|\mathcal{F}_n] = E[X|\sigma(S_0, S_1, ..., S_n)] = E[X|S_0, S_1, ..., S_n]$

$E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = (up + dq)S_{n-1}$ perchè:
$E[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[\beta_n S_{n-1}|S_0, S_1, ..., S_{n-1}] = S_{n-1}E[\beta_n|S_0, ..., S_{n-1}] = S_{n-1}E[\beta_n] = S_{n-1}(up + dq)$

Se volessi stimare il valore di S_n, vuol dire che sto stimando una traiettoria di prezzo che ho osservato, che mi ha portato a $n-1$, da cui ripartire per arrivare ad n. La stima migliore è la media del rumore per lo stato corrente. In pratica il modo migliore per proseguire è attraverso la media.

Non è una **Martingala**, perchè dovremmo avere solo S_m e non:
$E[S_n|\mathcal{F}_m] = E[\beta_n \cdots \beta_{m+1} S_m|S_0, S_1, ..., S_m] = S_m E[\beta_n \cdots \beta_{m+1}|S_0, ..., S_m] = S_m E[\beta_n \cdots \beta_{m+1}] = S_n(up+dq)^{n-m}$caso generale con $m, n \in \{0, ..., N\} : n > m$

Rendimento

$r_n \doteq \frac{S_n - S_0}{S_0}\ \forall n = 1, ..., N$

$r_{m,n} \doteq \frac{S_n - S_m}{S_m}\ \ \forall\ n, m\ \ : m = 1, ..., N\ n > m$

$r_n(w) = u^k d^{\ n-k} - 1\ \ \ \forall n = 1, ..., N\ e\ k = 1, ..., n$

$P(r_n = u^k d^{;n-k} - 1) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Parte finanziaria - BS PORTAFOGLIO - def 181-183

$\pi = (\pi_n)_{n=1}^N = ((X_n)_{n=1}^N, (Y_n)_{n=1}^N)$ è un BS portafoglio, la prima quantità indica l'investimento in *bond*, la seconda l'investimento in *stock*. Poniamoci al tempo 0, e osserviamo il bond B_0 e lo stock S_0. Compriamo una certa quantità X_1 di Bond e Y_1 di stock. Il nostro portafoglio prende valore $X_1 B_0 + Y_1 S_0 = W_0$ al tempo t=0, perchè X_1, Y_1 le scegliamo al tempo 0, sono delle "false variabili aleatorie", in quanto sono la scelta dell'investimento, sono $\mathcal{F}_0 - \beta(\mathbb{R})$ variabili aleatorie. Al tempo t=1 abbiamo $W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1$, posso riconfigurare il portafoglio. Modifichiamo le quantità, costituendo un nuovo portafoglio $X_2 B_1 + Y_2 S_1$, cioè prima ho osservato e poi aggiustato. Questi oggetti sono sempre $\mathcal{F}_{n-1} - \beta(\mathbb{R})$ variabili aleatorie, quindi il processo è *predicibile*. Perchè allora non diciamo che sono deterministiche, visto che lo facciamo passo passo? Perchè il primo portafoglio è costituito al tempo 0, sto costruendo la strategia, ed X_1 e Y_1 sono deterministiche, però andando avanti io dovrò considerare scelte diverse a seconda dei valori futuri. (esempio: litigo co a piskella, devo preventivare ogni sua possibile risposta, devo avere un *ventaglio* di scuse. Non so cosa accade nel futuro, ma devo essere pronto). Noi scegliamo di volta in volta osservando lo stock, ma la **pianificazione** fatta al tempo 0 non è deterministica, quello che faremo dipenderà dalla vera realizzazione dello stock. Se lo stock va su due volte, allora prendo un certo X_1, se va su e giù farò altro, li *pianifico* nel reticolo, non è che li so. Se li vedo nel reticolo, sono tutti determistici. Ma al tempo 0 sono probabilistici. È naturale ipotizzare che nei vari intervalli l'operatore finanziario scelga le componenti X_n e Y_n del proprio portafoglio in funzione dei valori che si attende possano realizzarsi per *bond* e *stock*. L'evoluzione del bond è *deterministica*, quindi B_n è sempre prevedibile. Il miglior predittore del prezzo dello stock S_n è $(up + dq)S_{n-1}$. Possiamo quindi dire che la riconfigurazione del portafoglio (leggasi come la scelta delle quantità X_n e Y_n) dipende **solo** da S_{n-1}, cioè saranno in sua funzione.

Portaglio autofinanziante - def 185

E' un portafoglio che, nelle riconfigurazioni, non richiede inserimento o prelievo di ricchezza. Parto da ricchezza iniziale $W_0 = 0$ e creo portafoglio $X_1 B_0 + Y_1 S_0 = 0$, ho due alternative:

- Prendere a prestito l'ammontare del bond (quindi vado "in negativo", perchè lo chiedo in prestito), ed usarlo interamente per acquistare lo stock (qui vado "in positivo", perchè acquisto quantità).

- Vendere allo scoperto sullo stock (vado in "negativo" sulla quantità di stock posseduti) e depositare sul bond. (acquisto quantità "positive" di titolo non rischioso).

Osservo il valore $W_1 = X_1 B_1 + Y_1 S_1$, riconfiguro $X_2 B_1 + Y_2 S_1 = W_1$

Cioè la riconfigurazione deve avere stesso valore del valore osservato, ma non vuol dire che $W_0 = W_1 = ...$
La condizione di *autofinanziamento* è:
$X_n B_n + Y_n S_n = X_{n+1} B_n + Y_{n+1} S_n \quad \forall n = 1, ..., N-1$
Un portafoglio autofinanziante è sia adattato che predicibile.

BS Portafoglio autofinanziante d'arbitraggio - 186

Le condizioni che dobbiamo avere per trovarci in *arbitraggio* è:

- $W_0 = 0,\ P(W_N \geq 0) = 1\ , P(W_N > 0) > 0$

Anche nel caso multiperiodale, un arbitraggio è un portafoglio che a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con *certezza*, cioè indipendentementemente dagli esiti di mercato che si possano verificare, che *non si subiscano perdite*, con probabilità di guadagno **strettamente positiva**. Qui assumo che il portafoglio possa cambiare, mentre nel monoperiodale dovevo rispettare queste cose al tempo 0. La condizione non deve valere neanche ai tempi intermedi, non solo a quello finale. La condizione non deve valere mai, altrimenti ho arbitraggio.