Lezione 9 maggio 2023

Recap da p.94, dopo proposizione 147.

Abbiamo visto che $S_{tn} = S_n = \beta_1\beta_2...\beta_n S_0$, considerando anche il 'reticolo di scenari' con i possibili esiti, così chiamato perchè ci sono nodi uguali per valori/casi diversi. Successivamente abbiamo definito lo spazio (Ω, ξ, P)

$\Omega \doteq \{w \equiv (w_n)_{n=1}^N | w_n = 1 \cup w_n = 0\} = \{0,1\}^N = X_{n=1}^N\{0,1\}$, ovvero il

prodotto cartesiano delle N coppie.

La nostra famiglia di eventi E è composta da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, ovvero $E = P(\Omega)$, con P operatore insieme delle parti. Si ha che $|E| = 2^\Omega = 2^{2^\Omega}$

Per completare lo spazio di probabilità ci manca la probabilità. Se ho uno spazio di probabilità discreto e la relazione $\sum_{w\epsilon\Omega} P(w) = 1$ e $P(E) = \sum_{w\epsilon\Omega} P(w)$ allora la probabilità definita è quella naturale (casi favorevoli su tutto).

Prendo la successione $w = (w_n)_{n=1}^N$, allora $P(w) = p^k q^{n-k}$ con $k = \{n = 1, ..N : w_n = 1\}$

Se N = 4, e la sequenza è $\{0,1,0,1\}$ allora $P(\{0,1,0,1\}) = p^2q^2$, semplicemente conto gli '0' e gli '1'.

E' vero che $\sum_{w\epsilon\Omega} P(w) = 1$?

Il metodo più semplice è fissare il numero di '1', e sommare tutti i possibili numeri di '1', ovvero $\sum_{k=0}^N \sum_{w\epsilon\Omega} p^k q^{n-k}$ l'idea è riportarci alla formula del binomio di Newton che sappiamo fare 1. Si chiama **Probabilità oggettiva**, non dipende dall'osservatore, so solo che se un evento è positivo, allora il titolo si apprezza, sennò si deprezza. (In pratica fisso k=0 e conto, fisso k = 1 e conto...)

Riprendiamo qualche concetto di statistica: (Ω, ξ, P), $X : \Omega \to R^M, M \in N$

Tutte le possibili funzioni a valori in Ω sono $F(\Omega, R^M)$, quando è che X è variabile aleatoria? Dalla teoria, la condizione è che $\{X \in B\} \in \xi$ per ogni B appartenente a $B(R^M)$. Se lo spazio di probabilità è discreta, **qualunque cosa è osservabile**, e quindi qualsiasi cosa è una variabile aleatoria. Allora in F ho tutte le variabili aleatorie, quindi non devo pormi mai il problema. (Per l'esattezza un vettore aleatorio N-dimensionale). E' sempre vero che $\xi = P(\Omega)$.

Ci siamo poi chiesti i momenti finiti delle variabili aleatorie. Esiste $\int_{\Omega} |X|^K dP$ per avere momento di ordine K, ma qui, essendo discreto, ci riconduciamo a:

$\sum_{w\epsilon\Omega} |X(w)|^K P(w)$ **momento di ordine k di una v.a. discreta.**

$|X(u)| = \sqrt{(\sum_{m=1}^{N} X_m(w)^2)}$ con $X = (X_1, .., X_M)$ perchè siamo nel caso M dimensionale, se M=1 allora torniamo al caso monodimensionale col semplice modulo. Per quanto questi oggetti siano enormi, sono sempre finiti, per ogni k il momento di ordine k è sempre finito, perchè lo spazio di probabilità è finito. La somma è finita. Devo calcolarli!

A noi interessa il momento crudo del primo ordine, cioè la media, $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_M])$ cioè la media del vettore aleatorio è data dalla media dei singoli elementi. Vettore delle medie delle componenti.

Siamo interessati anche **il momento crudo del secondo ordine** $E[XX^T]$ con $X = (X_1, .., X_M)^T$, la matrice è data da $(M \times 1) \times (1 \times M)$ (rispettivamente X ed X trasposta), ovvero la matrice di dimensione MxM, simmetrica, contenente tutte le speranze di tutti i possibili prodotti.

$$E[XX^T] = \begin{pmatrix} E[X_1^2] & E[X_1X_2] \\ E[X_1X_2] & E[X_2^2] \end{pmatrix}$$

In realtà, ci interessa il **momento centralizzato di X**, ovvero la **Varianza**, cioè momento crudo di $X - E[X]$: $Var(X) = M_2(X) = M_2'(X - E[X])$, ovvero la matrice varianze (quelle sulla diagonale principale) e covarianze delle componenti di X:

$$\begin{pmatrix} E[(X_1 - E[X_1])^2] & E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] \\ E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] & E[(X_2 - E[X_2])^2] \end{pmatrix}$$

NOTA: è come la matrice di prima, solo che nell'argomento il momento è centrato.

Vogliamo anche Skewness e Kurtosi. Se io ho variabile aleatoria X, essa ha tutti i momenti di ordine k. $M_3'(X) = (E[X_kX_lX_m])_{k,l,m=1}^M$ ovvero tutti i possibili prodotti 3 a 3, **TENSORE DI ORDINE 3.** $M_4'(X) = (E[X_jX_kX_lX_m])_{j,k,l,m=1}^M$ **TENSORE DI ORDINE 4**. Se ripensiamo a $M_2'(X)$ è un tensore di ordine 2, cioè di dimensione 2, un tensore di ordine 3 è matrice cubica nello spazio di dimensione 3, nell'ordine 4 è un cubo nello spazio di dimensione 4. Generlamente, è matrice di dimensione k.

La cosa interessante è che la 'lista' gli elementi distinti (che vengono moltiplicati) è il numero delle combinazioni con ripetizione di m elementi con classe 3: $C_{M,3}^{(2)} = \begin{pmatrix} M+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{M(M+1)(M+2)}{6}$

$$C^{(2)}_{M,4} = \binom{M+4-1}{4}$$

$$C^{(2)}_{M,2} = \binom{M+2-1}{2}$$

Concentriamoci sul caso M^4: avrò tre indici j, k, l, m: Se fisso j ho $\{1, .., M\}$ scelte, poichè prodotto commutativo posso prendere $k \geq j$, se lo prendessi più piccolo, sarebbe uguale al caso in cui inverto le due cose. Fisso $l \geq k$, fisso $m \geq l$.

Per individuare 4 elementi ho fatto funzione non decrescente: $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, ..., M\}$, ovvero le combinazioni con ripetizioni ordinate (non decrescente) di 4 elementi che si possono ripetere. Ne sono esempi (2,2,3,4) o (2,2,2,4).

Skewness e Kurtosi in funzione di una nuova V.A 'Y'

$$X \rightarrow Y$$

con $\rightarrow \doteq$ "*creo una nuova variabile aleatoria definita come a seguire*"

$Y \doteq Var(X)^{-1/2}(X - E[X])$ Se fosse una variabile aleatoria, e non un vettore, corrisponderebbe a $\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$. Y è così definita per poter *standardizzare* la variabile X, quando essa è un vettore, è matrice varianza covarianza, simmetrica, semidefinita positiva.

- Skew(X) = $M'_3(Y)$
- Kurtosi(X) = $M'_4(Y)$

La skewness di X è il momento crudo di ordine 3 della Y, la kurtosi di X è il momento di sordine 4 di Y.

Questo nostro spazio $F(\Omega, R^M) = L^2(\Omega, R^M)$ spazio di Hillbert, identificato da:

$$< X, Y >= \sum_{w \epsilon \Omega} X(w)^T Y(w) P(w), \forall X, Y \in F(\Omega, \mathbb{R}^M)$$

Torniamo al modello vero e proprio, con $\mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_M$ $\mathrm{B}_n(w) = \mathrm{B}_n((w_k)_{k=1}^N) =$ u se $w_m = 1$ oppure d se $w_m = 0$ $\mathrm{B}_n : \Omega \rightarrow R$ lo ignoro tutte le successioni tranne l'n-esima.

ESEMPIO

N = 5, considero $\mathrm{B}_3(0, 1, 1, 0, 0)$, vedo il terzo elemento, è 1, allora tutto vale 'u'. Se $\mathrm{B}_3(0, 1, 0, 0, 1)$, il terzo elemento è 0, allora vale tutto 'd'.

Quanto vale $P(\mathrm{B}_n = u)$? essa è $P(\{w \in \Omega : w_n = 1\})$, ma questa probabilità dipende da $p^k q^{n-k}$ allora questa probablità è 'p', altrimenti sarebbe 'q'. Intuitivamente abbiamo pensato a

1/2, che sarebbe vero per p = 1/2, ma abbiamo detto che è un p generico.

Si dimostra che, con questa probabilità introdotta, $\mathrm{B}_1, .., \mathrm{B}_M$ sono totalmente indipendenti, per come sono state definite (dimostrazione sulle note).

Filtrazione

$\xi = P(\Omega)$ con P insieme delle parti. La sigma algebra degli eventi, cioè ξ, posso osservarla solo alla maturità T. Io però vorrei fare previsioni, non voglio aspettare. La filtrazione è un modello di informazione che si rileva progressivamente nel tempo. Andando avanti, la nostra informazione aumenta, ma c'è altra informazione che non è stata ancora rivelata. A t=0 osservo S_0, dell'andamento futuro del prezzo non so nulla, non so quale omega tra $(w_1^*, .., w_N^*)$ si rivelerà. A t = 0 la mia sigma algebra iniziale della mia filtrazione è $F_o = \{\Omega, 0\}$, informazione banale di Dirac. Passo a t = 1, sappiamo se è uscito un caso positivo o negativo, cioè se $w_1 = 1$ o $w_1 = 0$. Riesco a vedere $\{w \in \Omega, w_1 = 1\} = E_1$ oppure $\{w \in \Omega, w_1 = 0\} = E_0$ Allora avrò $F_1 = \{\Omega, 0, E_0, E_1\}$, inoltre F_0 è contenuto in F_1, inoltre è σ-algebra.

A t = 2 saprò se $w_1 = 1$, allora $w_2 = 1$ oppure se $w_2 = 0$. Se $w_1 = 0$, allora $w_2 = 1$ oppure $w_2 = 0$

$$E_{0,0} = \{w \in \Omega : w_1 \cap w_2 = 0\}$$

$$E_{0,1} = \{w \in \Omega : w_1 = 0 \cap w_2 = 1\}$$

$$E_{1,0} = \{w \in \Omega : w_1 = 1 \cap w_2 = 0\}$$

$$E_{1,1} = \{w \in \Omega : w_1 \cap w_2 = 1\}$$

Il mio spazio σ-algebra è $\{\Omega, 0, E_{0,0}, E_{0,1}, E_{1,0}, E_{1,1}\}$ ma non basta, ad esempio mancano E_0 ed E_1, visto che F_0 è incluso in F_1). Devo aggiungere anche i complementari. Prendo dunque la più piccola sigma algebra contenente questi elementi. Una filtrazione di Ω è una famiglia $(F_n)_{n=0}^M$ dove Fn è sigma algebra di eventi contenuta in ξ, F_n è contenuto in :

$$F_{n+1}, \forall n = 0, .., M-1$$

Abbiamo visto che ogni $\mathrm{B}_n : \Omega \to R$ è una ξ-variabile aleatoria, rispetto a sigma algebra generale riesco a vedere valori assunti. Posso dire di più, ovvero che è F_n variabile aleatoria. Non devo aspettare la fine del fenomeno, ma basta che arrivi al tempo n. B_n lo saprò al passo n-esimo, non mi servono quelli dopo, e quindi non mi serve l'intero spazio. F_n è la più piccola sigma algebra generata da $B_1, ..., B_n$, cioè $F_n = \sigma(\mathrm{B}_1, .., \mathrm{B}_n)$.

Cosa è un processo stocastico, a fronte delle nuove conoscenze acquisite?

Un processo stocastico su Ω è una qualunque famiglia $(X_n)_{n=0}^N$ di variabili aleatorie X_n : $\Omega \to R^M$. Il processo si dice ADATTATO ad una filtrazione F_n se, $\forall n = 0, 1, .., N$ X_n è osservabile rispetto a F_n. Le v.a. del nostro processo devono essere osservabili rispetto a tutta l'algebra, ma anche rispetto alla filtrazione assegnata, ovvero in maniera progressiva, senza aspettare fino alla fine. Un processo stocastico è *predicibile* rispetto ad una filtrazione se, $\forall n = 0, ..., N$, la v.a. è osservabile rispetto a F_{n-1}, cioè so che valore prenderà la v.a. un tempo prima. Nel modello monoperiodale osservavamo a t=0 S_0 costruendo portafoglio, con quantità X del bond e quantià Y dello stock. A t = T vedevamo S_T, e ottenevamo $xB_T + yS_T$. Adesso ho a $t = 0$ ho portafoglio $(x_1 B_0, y_1 S_0)$, a t=1 $(x_1 B_1, y_1 S_1)$ Il valore che prende è un processo adattato (lo so solo al tempo corrispondente), ma la sua configurazione è predicibile (la forma assunta è sempre la stessa, e l'ho scelta al tempo 0). Gli aggiustamenti sono progessivi nel tempo, devo mettere in piedi strategia modificabile in 'corso d'opera'.