

Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Batch Means

Università degli studi di Roma Tor Vergata

Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

Copyright © Vittoria de Nitto Personè, 2021 https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/



1

Batch Means

- ♦ Two types of DES models: transient and steady-state
- ♦ For transient, construct interval estimates using *replication*
- ♦ For steady-state, obtain *point* estimate by simulating for a long time
- ♦ Can we obtain interval estimates for steady-state statistics?

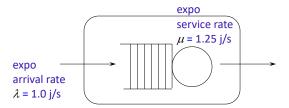
→ use method of batch means

Prof. Vittoria de Nitto Personè

2

Transient vs. Steady-State

Example 8.4.1: Transient vs. Steady-State Estimates



(valore

Analytically, utilization is 0.8 and expected steady-state wait is 4.0 s. teorico)

Can transient estimates be accurate steady-state estimates?

- Eliminate the initial state bias by setting departure to 4.2: the simulation begins in its expected steady-state condition
- Use 16 replications to construct transient interval estimates for 8, 16, 32, ..., 1024 jobs

Prof. Vittoria de Nitto Personè

3

3

ragioniamo su medie:

trova departure a 4.2; 4.2 - 1 = 3.2 tempo attesa

3.2 + 0.8 = 4 tempo

in coda.

risposta.

1/1.25 = 0.8

prendiamo

exponential(0.8)

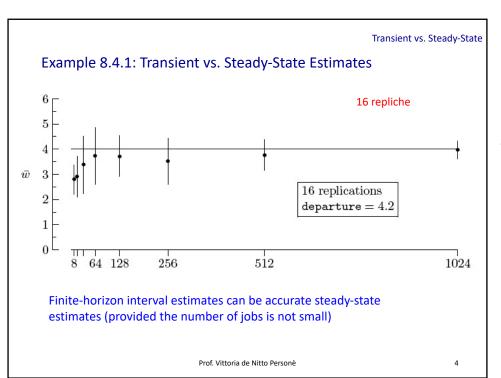
nb:

primo arrivo con media=1,

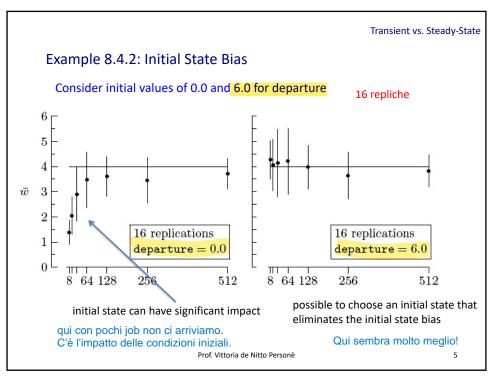
0.8 è il tempo di servizio =

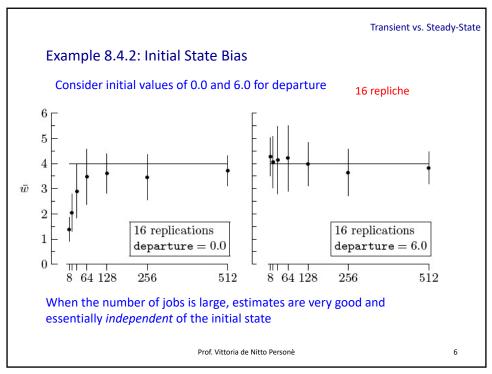
avrà esattamente 0.8, sarà

Non è che il primo che



4 = valore teorico.





Potremmo usare le repliche, ma essendo STAZIONARIO dovrei simulare tempi lunghi. Abbiamo diversi problemi: stato iniziale? Lunghezza tempo simulato? Quante repliche? Sui primi due punti abbiamo già discusso: lo stato iniziale non influenza nell'orizzonte infinito, e il tempo di simulazione deve essere abbastanza lungo. Ma sul numero delle repliche?

Transient vs. Steady-State

Interval Estimates for Steady-State

- Use replication-based transient interval estimates
- Each replication must correspond to a long simulated time period

Three issues:

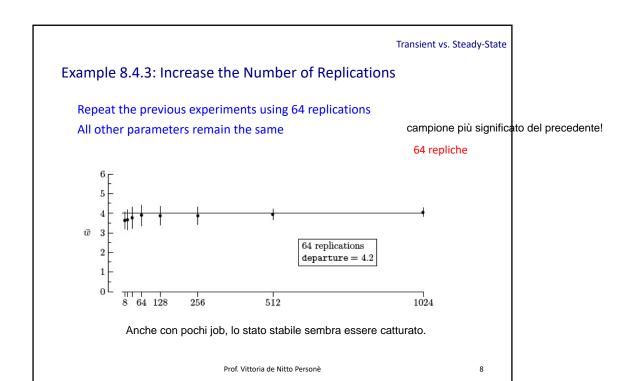
- What is the initial state?
- What is the length of the simulated time?
- How many replications?

Previous example provides insight into first two issues

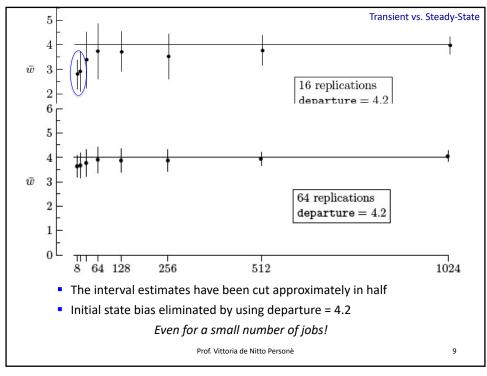
Prof. Vittoria de Nitto Personè

7

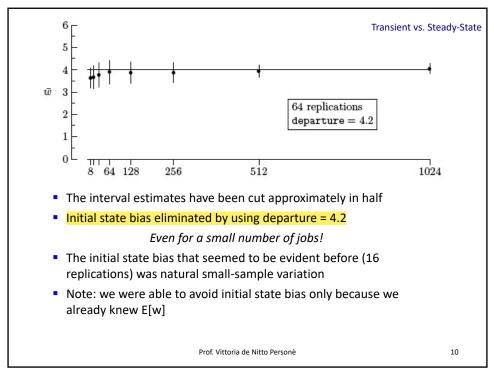
7



Qui vediamo un confronto tra 16 repliche(grafico in alto) e 64 repliche (grafico sotto).

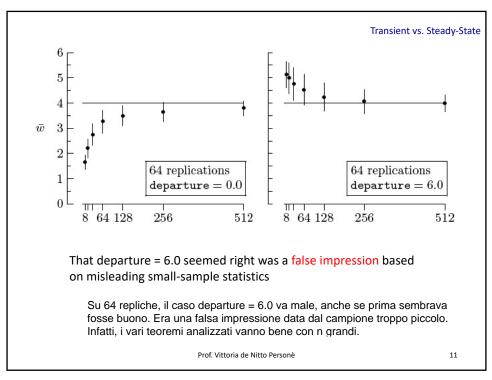


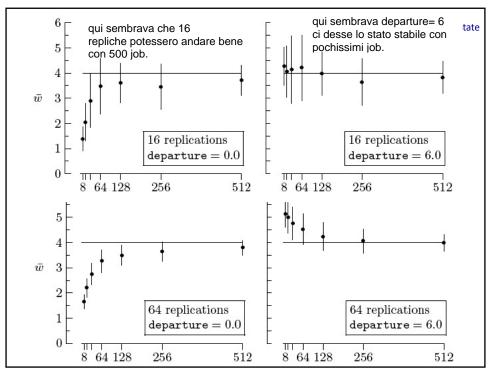
9



10

La dimensione di 16 repliche era troppo piccola, la variabilità pesava troppo. Con 64 repliche, condizioni invariate, l'influenza dello stato iniziale si perde. Abbiamo potuto settare a 4.2 perchè conoscevamo il valore teorico! Altrimenti non posso.





Due run devono partire dallo stesso stato, i generatori usati 1/06/2023 dalle due repliche devono NON sovrapporsi (basta fare un ciclo che esternamente inizializza il generatore, dentro il ciclo, cioè il run, faccio procedere il generatore). Repliche indipendenti. Inoltre, se prendo ad esempio 16 repliche, ho un campione di 16 elementi.

Summary

- Want interval estimates for steady-state
- Replicated transient statistics can be used
- However, initial bias problem
- Need technique that avoids the initial bias problem

Anche qui voglio che la statistica cada in un certo range, cioè intervallo di confidenza.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

13

13

Batch Means

Method of Batch Means (usato nello stazionario, ma in realtà è il più usato)

- Previously, each replication was initialized with same state (inteso come state del sistema)
- Gives initial bias problem

Batch means: prendo 'run' lungo e lo spezzo in 'repliche'

- Make one long run and partition into batches
- Compute an average statistic for each batch
- Construct an interval estimate using the batch means
- Initial state bias is eliminated perchè run lungo, lo stato iniziale è solo a inizio run, e si perde
- State at the beginning of each batch is the state at the end of previous batch

Al massimo il primo batch ne è influenzato.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

14

Batch Means

Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

Consider a sequence of samples x_1, x_2, \ldots, x_n il nostro campione

- 1. Select a batch size b > 1 (dopo vedremo delle linee guida)
- 2. Group the sequence into k batches ho sezionato in k gruppi questo "run lungo"

$$\underbrace{x_1, x_2, \cdots, x_b}_{\text{batch 1}}, \underbrace{x_{b+1}, x_{b+2}, \dots, x_{2b}}_{\text{batch 2}}, \underbrace{x_{2b+1}, x_{2b+2}, \dots, x_{3b}}_{\text{batch 3}}, \dots$$

and for each calculate the batch mean questa media è l'elemento del mio campione

$$\bar{x}_j = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \bar{x}_{(j-1)b+i}$$
 $j = 1, 2, ..., k$

3. Compute \bar{x} and s of batch means

 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$

calcolo media e dev std

il mio campione di lunghezza k, indipendente ed identicamente distribuito Prof. Vittoria de Nitto Personè

15

Batch Means

Algorithm 8.4.1: Method of Batch Means

il calcolo dell'intervallo di confidenza viene calcolato come abbiamo visto in altri casi.

- **4.** Pick a *level of confidence* 1 α (typically α = 0.05)
- 5. Calculate the critical value t^* = idfStudent(k 1, 1 α /2)
- $\overline{x} \pm t^* s / \sqrt{k-1}$ 6. Calculate the interval endpoints
- (1 α) × 100% confident that the true unknown steady-state mean lies in the interval
- Provided b is large, true even if the sample is autocorrelated (quello originario)

NB: è importante specificare se lavoro nel transiente o nello stazionario, e quale sia l'intervallo di confidenza.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Batch Means

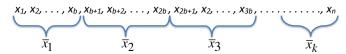
Effect of Batch Parameters

(non scarto nulla)
Provided no points are discarded:

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(se ho 100 numeri, li sommo e divido per 100.

E' uguale se sommo i primi 20 e divido per 20, e poi sommo i primi 80 e divido per 80. Non posso scartare, sennò altero, anche se poco. la media.



- Choice of (b, k) has no impact on the point estimate
- Only the width of the interval estimate is affected

Prof. Vittoria de Nitto Personè

17

Batch Means

17

Example 8.4.5: Effect of (b, k)

expo service rate μ = 1.25 j/s expo arrival rate λ = 1.0 j/s

Consider the queue is initially idle, use ssq2 to generate n = 32768 consecutive waits (utilizzazione: 0.8)

Using batch means with different (b, k): 'k' batch di lunghezza 'b'

$$(b,k)$$
 (8,4096) (64,512) (512,64) (4096,8) \bar{w} 3.94 \pm 0.11 3.94 \pm 0.25 3.94 \pm 0.29 3.94 \pm 0.48

- Note that 3.94 is independent of (b, k)
- Width of the interval estimate is not

cambia l'ampiezza dell'intervallo, con campione piccolo questo

intervallo è più grande (vedi ultimo caso)

18

Prof. Vittoria de Nitto Personè

18

Non devo però forzare un campione troppo grande, potrei non rappresentare più la media teorica

Batch Means

Is the Method of Batch Means Valid?

For interval estimation, the batch means must be iid Normal

1. Are the batch means Normal?

As b increases, mean of b RVs tends to Normal

2. Is the data actually independent?

Autocorrelation (Section 4.4) becomes zero if b is large

Therefore, as *b* increases, method of batch means becomes increasingly more valid

Prof. Vittoria de Nitto Personè

19

19

Batch Means

Guidelines for Choosing (b, k)

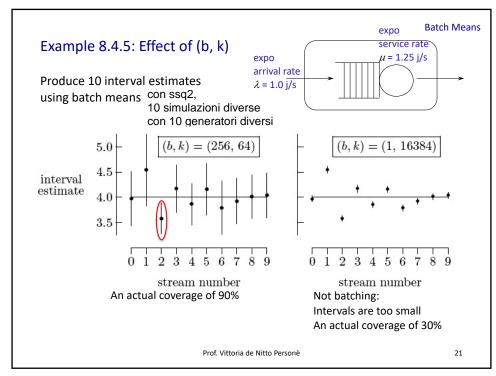
- Note: If b is too large, k will be small giving wide interval estimates
- Number of batches k:
 - Avoid small-sample variation
 - o $k \ge 32$; k = 64 is recommended
- Batch size b:
 - o Want to ensure (approximate) independence
 - b should be at least twice the autocorrelation "cut-off" lag (Section 4.4)
 (non difficile day

(See example 8.4.6)

(non difficile da calcolare, spesso lo possiamo calcolare per avere info sulla dimensione di 'b')

Prof. Vittoria de Nitto Personè

20



nel grafico a sinistra gli intervalli di confidenza sono piccoli. (sono dei punti più che delle linee). Se non so il valore teorico non posso dire con certezza quale tra quei "puntini" sia il valore medio giusto.

21

Nel primo grafico catturiamo meglio il valore teorico, nel secondo no! Devo usare questo metodo sopratutto con analisi stazionaria.

Run singolo ha senso col transiente.