Lezione 23 - 06/06/23

> Il prof ha caricato la versione 16.1 delle note, da quello che ha detto, per non perdere troppo tempo, farà riferimento a formule e pagine del libro quando spiega.

Da CPS: Quando abbiamo (Ω, ξ, P) e una informazione ridotta/ $\sigma - algebra$ $\mathcal{F} \subseteq \xi$ $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^M) \to E[X|\mathcal{F}] \in L^2(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathbb{R}^M)$

Se $\mathcal{F} = \sigma((F_n)_{n \in N})$ allora $E[X|\mathcal{F}] = \sum_{n \in N} E[X|F_n] \cdot 1_{F_n}$

Se $\mathcal{F} = \sigma(X_1, ..., X_N)$ ed esiste $f : \mathbb{R}^M \to R$ boreliana, allora $E[X|\mathcal{F}] = E[X|X_1, ..., X_N] = f(X_1, ..., X_N)$

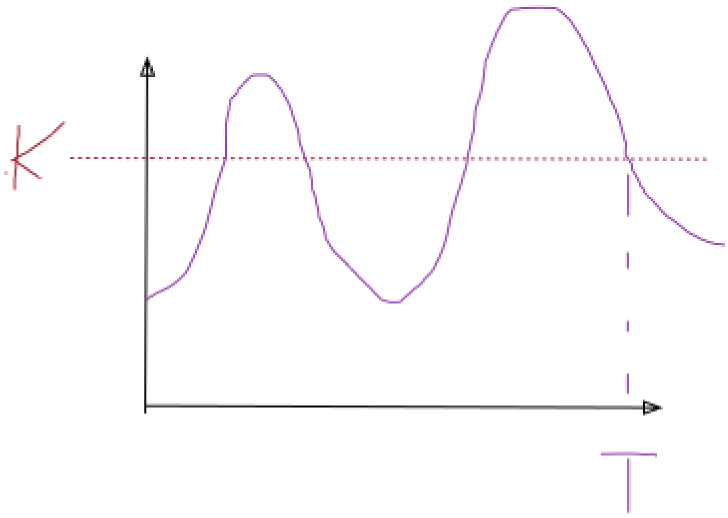
Questi due teoremi sono molto utili. Ricordiamo che $S_n = \beta_n S_{n-1}$ con $\beta_n = u$ con probabilità p oppyre d con probabilità q

Derivato

E' un titolo in cui il payoff al tempo T dipende dagli stati di S. Ne è un esempio il future, opzioni call e put; è una scomessa su una performance di un altro tipo, ovvero dipende da come vanno le cose per il titolo *sottostante*.

Un derivato di questo tipo mi permette di esercitare/riscuotere la scommessa al tempo T, non posso riscuoterlo ad un tempo precedente. (ES: se AS Roma deve fare 60 punti entro fine campionato, devo aspettare la fine del campionato anche se ho già superato i 60 punti). Questi sono detti derivati *europei*. Esistono anche *derivati americani* in cui posso riscuotere ad un tempo $t \leq T$

Esempio: Compro uno strike S con opzione americata al tempo K. Titolo sale, potrei subito esercitare l'opzione per comprare il titolo. Posso anche aspettare, con il rischio che il titolo si abbassi. Al tempo T però devo per forza fare la mia scelta.



Possiamo ulteriormente classificare i derivati in $path - independent$ e $path - dependent$, ovvero dipendenti o meno dalla traiettoria. Ne è un esempio del primo tipo il derivato americano, perchè mi interessa solo il valore al tempo K, quindi hanno un comportamento markoviano, essendo indipendenti dal passato. Un esempio di path-dependent può sfruttare la media dei valori per stabilirne un prezzo. Entrambi sono *titoli europei* comunque.

Questo discorso è importante perchè, se prendo derivato di tipo europeo, il *payoff* è:

- Nel caso *path-indipendent*, $F_D(S_N)$, ovvero funzione dello stato finale.
- Nel caso *path-dipendent* è una funzione di tutto il processo, cioè $F_D(S_1, ..., S_N)$.

Se volessi sapere il valore del derivato al tempo 0? cioè $F_0(0)$ quanto lo devo pagare?

- $F_D(0) = \frac{E[F_D(S_N)] \mid \mathcal{F}_0]}{(1+r)^N} = \frac{E[F_D(S_N)]}{(1+r)^N}$ nel caso *path-indipendent*. ($\mathcal{F}_0$ è la $\sigma - algebra$ banale, che quindi ometto).
- $F_D(0) = \frac{E[F_D(S1,..,S_N)]}{(1+r)^N}$ nel caso *path-dependent*.

Dal libro

Abbiamo visto cosa sia il derivato, vediamo le definizioni 199 e 200.

Definizione 199 *Chiamiamo* derivato europeo di sottostante S *un titolo* D *il cui* payoff *alla maturità* T *dipende dai possibili accadimenti, positive e negativi, che occorrono al titolo* S.

La caratteristica di un derivato di tipo europeo D è che può essere esercitato solo alla scadenza. Quindi, il suo payoff è computabile solo dopo aver osservato la successione $\omega \equiv (\omega_n)_{n=1}^N$ di tutti gli accadimenti occorsi al titolo S dal tempo t_1 al tempo $t_N \equiv T$. In conseguenza, il payoff del derivato D è rappresentabile come una $\mathcal{E}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ variabile aleatoria $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$. Sulla base di questa considerazione, introduciamo la seguente definizione.

Definizione 200 *Chamiamo* payoff *di un derivato europeo una qualunque* $\mathcal{E}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *variabile aleatoria* $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$.

Nell'osservazione 201 vediamo che w è la successione di elementi "andati bene" ed "andati male", sono 2^N.

Osservazione 201 *Stante l'Equazione 3.55 per ogni derivato di tipo europeo esiste una funzione boreliana* $F_D : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$D_T(\omega) = F_D(S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)) \tag{3.79}$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Nella definizione 202 vediamo i titoli che possiedono l'indipendenza. Vengono evidenziati anche i valori C_T e P_T, nel caso europeo (indipendenti) e asiatici (dipendenti).

Definizione 202 *Diciamo che il payoff di un derivato europeo $D : \Omega \to \mathbb{R}$ è* indipendente dalla storia del titolo rischioso S, *esiste una funzione boreliana $F_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$D_T(\omega) = F_D(S_N(\omega)), \tag{3.80}$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Le opzioni europee d'acquisto e vendita sul titolo S, con strike K alla maturità T, che anche nel modello CRR sono caratterizzate dai rispettivi payoff

$$C_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_T - K, 0\} \qquad \text{e} \qquad P_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K - S_T, 0\},$$

sono derivati europei indipendenti dalla storia di S. Le opzioni asiatiche d'acquisto e vendita sul titolo S, con strike K alla maturità T, che nel modello CRR sono caratterizzate dai rispettivi payoff

$$\bar{C}_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n - K, 0\right\} \qquad \text{e} \qquad \bar{P}_T \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{K - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n, 0\right\},$$

sono derivati europei dipendenti dalla storia di S.

> T e N sono uguali, cambia solo il contesto in cui vengono usati.

Teorema 203

Teorema 203 *In assenza di portafogli d'arbitraggio, ogni derivato europeo del modello CRR è replicabile mediante un portafoglio autofinanziante costituito dal bond B e dallo stock S. Di conseguenza, in assenza di portafogli d'arbitraggio, il modello CRR è un modello di mercato completo.*

Se non ci sono portafogli di arbitraggio, allora ogni derivato europeo è *replicabile* mediante portafoglio autofinanziante composto da bond e stock, sia che si tratti di path indipendent, sia path dependent. Allora il modello CRR è un modello di mercato *completo*, poichè posso replicare con portafoglio autofinanziante. Come si dimostra questo fatto? Esistono due versioni:

- Nella versione "facile" assumo che i titoli siano europei, allora devono soddisfare l'equazione 3.81. Vediamo come sono fatti i bond B_N ed S_N, se li sostituisco alla 3.81 ottengo un sistema a due incognite, risolvibile. Ci dice come prendere le componenti X_N e Y_N subito dopo il temo $N-1$, ovvero prima di N. Vediamo come entrambe siano in funzione di S_{N-1}. Le ipotesi sono $B_0, S_0 > 0$ (bond e stock positivi, banale) e che $u > d$, ovvio anche questo, ed infine il tasso $r > 0$. Sono ipotesi banali, che faccio per via del denominatore che non può essere 0. Posso farlo sempre, senza *ipotesi di arbitraggio*. Mi chiedo allora il portafoglio autofinanziante al tempo $N-1$,
  ovvero cerco $W_{N-1} = X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1}$

  Risolvendo trovo W_{N-1} in funzione delle probabilità neutrali al rischio, (qui applico l'ipotesi di non arbitraggio). Nella 3.86 sviluppiamo ulteriormente, e vediamo che a destra abbiamo il valore neutrale al rischio del derivato calcolato al tempo $N-1$, a sinistra ho il valore del portafoglio autofinanziante W_{N-1}. Successivamente facciamo *backward - induction*, ovvero cerchiamo $W_{N-2}, W_{N-3}, \ldots$, Andando avanti nel calcolo delle altre X_N, Y_N non avremo più il valore del derivato, bensì il valore del portafoglio. In particolare vediamo, nella 3.90, che W_{N-2} è dato dalla speranza condizionata dal valore del derivato al tempo N. Quindi io faccio *backward-induction*, quando arrivo a 0 so come costruire il portafoglio passo dopo passo, e quindi vado avanti, per vedere i valori.

$$X_{N-n} = \frac{\begin{vmatrix} W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right) & uS_{N-(n+1)} \\ W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right) & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & uS_{N-(n+1)} \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}} = \frac{uW_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right) - dW_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right)}{(1+r)\,(u-d)\,B_{N-(n+1)}},$$

$$Y_{N-n} = \frac{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right) \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r)\,B_{N-(n+1)} & uS_{N-(n+1)} \\ (1+r)\,B_{N-(n+1)} & dS_{N-(n+1)} \end{vmatrix}} = \frac{W_{N-n}\left(uS_{N-(n+1)}\right) - W_{N-n}\left(dS_{N-(n+1)}\right)}{(u-d)\,S_{N-(n+1)}}. \tag{3.91}$$

Nella 3.91 si ha il caso generico per n passi indietro. Si ha sempre struttura *binomiale* perchè abbiamo dipendenza solo dallo stato finale del titolo, non del percorso. Per arrivare a 0? Prendo $n = N - 1$, ovvero $W_{N-(N-1)}$, cioè le prime compontenti del portafoglio replicante.

Quindi, uguaglia il valore neutrale al rischio del derivato stesso allo stesso tempo. Inoltre, le componenti X_1 e Y_1 del portafoglio replicante costituite tra il tempo $t = t_0$ e $t = t_1$ sono date da

$$X_1 = \frac{uW_1(dS_0) - dW_1(uS_0)}{(1+r)(u-d)\,B_0}, \qquad Y_1 = \frac{W_1(uS_0) - W_1(dS_0)}{(u-d)\,S_0}, \tag{3.94}$$

dove il valore

$$W_1 \equiv W_1(S_1)$$

del portafoglio replicante al tempo $t = t_1$ è dato da

$$W_1 = \frac{1}{(1+r)^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \tilde{p}^{N-1-k} \tilde{q}^k F_D\left(u^{N-1-k} d^k S_1\right). \tag{3.95}$$

Troviamo W_0 e ricaviamo, dalla 3.94, X_1 e Y_1, però sono in funzione di W_1, non dovevano non dipendere dagli step intermedi? Se sostituisco la 3.95, vediamo che X_1, Y_1 dipendono solo da S_0 e altre componenti che sono note. Se combinassi X_1, Y_1 con B_1, S_1 dovrei poter ricostruire esattamente W_1. Ottengo due casi, associati ai valori d ed u, che ci riportano a W_1. Quando vendo il derivato al tempo 0 al prezzo detto da W_0, so che componenti mettere al mio portafoglio al tempo 0, ma anche ai tempi successivi, vedendo se mi ha detto bene o mi ha detto male. *Ho costruito la mia strategia al tempo 0.*

- Se ci fosse dipendenza dal path? Ho aleatorietà su Sn, a seconda se assume valore d o u. Cioè rispetto al passo successivo ho solo questi due casi (ragiono passo per passo, non sul path completo). Le formule sono più lunghe, ma la metodologia è quella. Vediamo come X_N, Y_N dipendono da tutta la storia del processo, ma il meccanismo di progressione è sempre *bernoulliano*.

$$
\begin{aligned}
W_{N-1} = {} & X_N B_{N-1} + Y_N S_{N-1} \\
= {} & \frac{u F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}\right) - d F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}\right)}{(1+r)(u-d) B_{N-1}} B_{N-1} \\
+ {} & \frac{F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}\right) - F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}\right)}{(u-d) S_{N-1}} S_{N-1} \\
= {} & \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}\right) + \frac{u-(1+r)}{u-d} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}\right)\right) \\
= {} & \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, u S_{N-1}\right) + \tilde{q} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, d S_{N-1}\right)\right) \\
= {} & \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbf{E}}\left[F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, S_N\right) \mid S_1, \ldots, S_{N-1}\right] \\
= {} & \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbf{E}}_{N-1}\left[F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-1}, S_N\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

Nella 3.100, W_{N-1} dipende dalla speranza condizionata di tutti i precedenti S_i. Procedendo con la ricostruzione in avanti, abbiamo qualche difficoltà tecnica in più, ma comunque alla fine ci si riesce, ottendendo la 3.102. (la riga finale è sbagliata, mancano le componenti $F_D[S_1, ...]$ Nella quart'ultima riga, vediamo come $\tilde{p}\tilde{q}$ viene 'capovolto' in $\tilde{q}\tilde{p}$, che non è così scontato, qui possiamo perchè ci sono dietro le proprietà del reticolo. Anche questi sono *replicabili*!

$$
\begin{aligned}
& W_{N-2} \\
& = X_{N-1} B_{N-2} + Y_{N-1} S_{N-2} \\
& = \frac{u W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}\right) - d W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}\right)}{(1+r)(u-d) B_{N-2}} B_{N-2} \\
& + \frac{W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}\right) - W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}\right)}{(u-d) S_{N-2}} S_{N-2} \\
& = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d} W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}\right) + \frac{u-(1+r)}{u-d} W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}\right)\right) \\
& = \frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}\right) + \tilde{q} W_{N-1}\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}\right)\right) \\
& = \frac{1}{1+r} \tilde{p}\left(\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}\right) + \tilde{q} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, d S_{N-1}\right)\right)\right) \\
& + \frac{1}{1+r} \tilde{q}\left(\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1}\right) + \tilde{q} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1}\right)\right)\right) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2}\left(\tilde{p}^2 F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}\right) + \tilde{p}\tilde{q} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, d S_{N-1}\right)\right) \\
& + \frac{1}{(1+r)^2} \tilde{q}\tilde{p} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1}\right) + \tilde{q}^2 F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1}\right) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2}\left(\tilde{p}^2 F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, u S_{N-2}, u S_{N-1}\right) + 2\tilde{p}\tilde{q} F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, u S_{N-1}\right)\right. \\
& \left. + \tilde{q}^2 F_D\left(S_1, \ldots, S_{N-2}, d S_{N-2}, d S_{N-1}\right)\right) \\
& = \frac{1}{(1+r)^2} \tilde{\mathbf{E}}_{N-2}\left[F_D\left(S_N\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.102}
$$

Opzioni europee 3.5.2

Sono caratterizzate da $C_N = C_T \doteq max\{S_T - K, 0\}$, con payoff $u^n d^{N-n} S_0$ Possiamo introdurre le probabilità neutrali al rischio. **Def 204**, definizione di portafoglio autofinanziante rispetto alle *call*. **Def 205** saltabile, perchè agiamo in un mercato completo e privo di portafogli arbitraggio.

Definizione 204 *Chiamiamo* portafoglio replicante *o* strategia di copertura *(*hedging strategy*) dell'opzione call un BS-portafoglio autofinanziante* $\Pi \equiv ((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N)$ *tale che all'istante terminale* $t_N = T$ *si abbia*

$$W_T(\Pi) = X_T B_T + Y_T S_T = C_T. \tag{3.112}$$

Definizione 205 *Chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizioni rischiose *nei titoli* U *e* V, *più sinteticamente* BSS-portafoglio, *una processo stocastico* $\Pi \equiv (\Pi_n)_{n=0}^N \equiv \left((X_n)_{n=0}^N, (Y_n)_{n=0}^N, (Z_n)_{n=0}^N\right)$ *le cui componenti* $(X_n)_{n=0}^N$ *[resp.* $(Y_n)_{n=0}^N$, *resp.* $(Z_n)_{n=0}^N$*] siano processi stocastici reali rappresentanti la quantità di bond [resp. titolo rischioso* U, *resp. titolo rischioso* V*] in cui investiamo al tempo* $t = t_n$.

Vediamo **Lemma 210**.

Lemma 210 *Siano* U *e* V *due titoli del mercato multiperiodale di valori* $(U_n)_{n=0}^N$ *ed* $(V_n)_{n=0}^N$. *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio, il sussistere dell'uguaglianza*

$$U_N = V_N$$

comporta necessariamente che

$$U_n = V_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

$$C_T \doteq max\{S_T - K, 0\} = \frac{|S_T - K| + S_T - K}{2}$$

$$P_T \doteq max\{-S_T + K, 0\} = \frac{|K - S_t| - S_T + K}{2}$$

$$C_T(w) - P_T(w) = \frac{S_T - K - (K - S_T)}{2} = S_T(w) - k$$

$$C_n = \frac{\tilde{E_n}[C_N]}{(1+r)^n}$$

$$P_n = \frac{\tilde{E_n}[P_N]}{(1+r)^n}$$

$$S_n = \frac{\tilde{E_n}[S_N]}{(1+r)^n}$$

$$C_n = X_n^C B_n + Y_n^c S_n$$

$$P_n = X_n^P B_n + Y_n^P S_n$$

Li sottraggo ed esce $S_N - K$, sfruttando il fatto che il mercato sia completo, e quindi la parte sui BSS portafogli non serve.

Digressione sui progetti

Le domande sono del tipo:

- Definizione di arbitraggio
- Cosa è portafoglio di Markowitz,...,etc

Non ci sono delle dimostrazioni 'ferree'. Per il progetto possiamo fare dei lucidi, markdown etc a seconda di ciò che riteniamo più congeniale per il progetto. Il prof dovrebbe lasciare una lista di alternative, ma se siamo interessati a qualcosa di specifico possiamo dirglielo. Possiamo vedere cose del tipo: titolo vale X, secondo il mio modello quanto si discosta? Non è per forza in singolo, se due persone fanno stesso progetto è possibile vederne le differenze. Ovviamente se uno una formula X nel progetto devo sapere che cosa sto facendo, ma non devo dimostrarle o altro.

Esempio caso studio Progetto

Voglio studiare il titolo di Amazon. So che è un titolo americano, quindi devo spiegare cosa voglia dire questo. Suppongo di usare il modello binomiale, devo calibrare il modello (ancora non fatto), ho necessità di avere dati, giorni, 'u' e 'd', per confrontare i prezzi teorici con quelli reali. Posso anche trovare un portafoglio ottimo.