



Performance Modeling of Computer Systems and Networks

Prof. Vittoria de Nitto Personè

Discrete-Event Simulation
examples

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Department of Civil Engineering and Computer Science Engineering

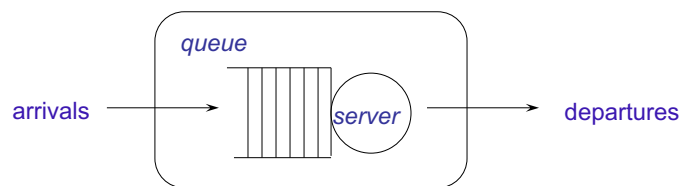
Copyright © Vittoria de Nitto Personè, 2021
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



1

Discrete-Event Simulation
case study ssq

Single Server Queue



Arrival times: a_i

~~15 47 71 111 123 152 166 226 310 320~~

Pseudo-random generators

Service times: s_i

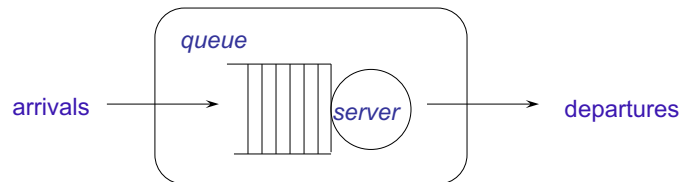
~~43 36 34 30 38 40 31 29 36 30~~

Prof. Vittoria de Nitto Personè

2

2

Single Server Queue



- assume **service times** are between 1.0 and 2.0 minutes
 - The distribution within this range is **unknown** valori tra 1 e 2 equiprobabili
 - Without further knowledge, we assume no time is more likely than any other
- Uniform(1.0, 2.0)

3

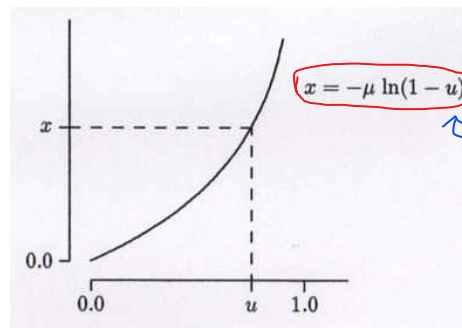
Fino ad ora abbiamo generato Unif(0,1). Nella realtà, l'uniforme non modella bene i casi studiati, perché spesso valori "piccoli" sono più probabili di "valori grandi". Inoltre la Unif va da 0 a 1, mentre vorrei muovermi da 0 a infinito. Per questo introduco la VARIABILE ESPONENZIALE.

Exponential distribution

- In general, it is **unreasonable** to assume that all **possible values are equally likely**
- Frequently, small values are more likely than large values
- We need a non-linear transformation that maps $0.0 \rightarrow 1.0$ to $0.0 \rightarrow \infty$

this is the most frequently used function
 $\mu > 0$ is a parameter that "control" the frequency of large values in respect of the small ones

La funzione "parte" da μ .
 Se μ cresce, la media ($1/\mu$) decresce



"u" è generato da Lehmer.

4

- the transformation is monotone increasing, one-to-one

$$\begin{aligned} 0 < u < 1 &\Leftrightarrow 0 < (1 - u) < 1 \\ &\Leftrightarrow -\infty < \ln(1 - u) < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < -\mu \ln(1 - u) < \infty \\ &\Leftrightarrow 0 < x < \infty \end{aligned}$$

in questo snippet di codice
mu è la media campionaria.

```
double Exponential(double μ)    /* use μ > 0.0 */
{
    return (-μ * log(1.0 - Random()));
}
```

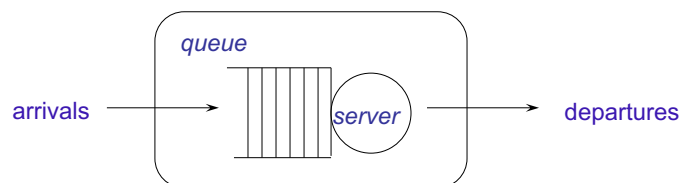
generato da Lehmer

- the parameter μ specifies the sample mean

5

Fino ad ora, dovevamo avere le tracce (quindi tempi scritti),
adesso li generiamo noi.

Single Server Queue



Arrival times: a_i

- use the exponential function for the interarrival times

$$a_i = a_{i-1} + \text{Exponential}(\mu); i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ultimo istante di arrivo

prima c'era " $r(i)$ "
cioè l'interarrivo.

Service times: s_i generato come uniforme (1.0, 2.0)

Uniform(1.0, 2.0)

6 L'esponenziale che produciamo l'andiamo a sommare al tempo di arrivo precedente, per generare il nuovo istante di arrivo, quindi NON GENERO DIRETTAMENTE il nuovo arrivo, ma genero l'interarrivo.

- program ssq2 is an extension of ssq1
 - arrival times are drawn from *Exponential*(2.0)
 - service times are drawn from *Uniform*(1.0, 2.0)

rispetto a prima, adesso non usiamo più la traccia dei file,
bensì distribuzioni di probabilità (quindi li genero).

trace-driven simulation

```
#include <stdio.h>

#define FILENAME "ssq1.dat" /* input data file */
#define START 0.0

double GetArrival(FILE *fp) /* read an arrival time */
{
    double a;
    fscanf(fp, "%lf", &a);
    return (a);}

double GetService(FILE *fp) /* read a service time */
{
    double s;
    fscanf(fp, "%lf\n", &s);
    return (s);}
```

ssq2.c distribution-driven simulation

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "rng.h"
#define LAST      10000L    /* number of jobs processed */
#define START     0.0

double Exponential(double m)          /* -----*
{return (-m * log(1.0 - Random())); }      m > 0.0
                                           -----*/

double Uniform(double a, double b)    /* -----*
{return (a + (b - a) * Random()); }      a < b
                                           * -----*/

double GetArrival(void)
{static double arrival = START;
 arrival += Exponential(2.0);  incremento arrival con tempo di inter-arrivo di media 2
 return (arrival);}

double GetService(void)  uniforme tra 1 e 2
{return (Uniform(1.0, 2.0));}
```

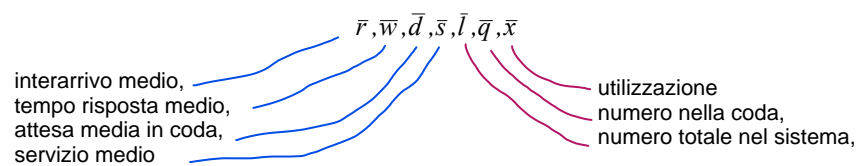
Prof. Vittoria de Nitto Personè

9

9

Discrete-Event Simulation case study ssq

- the program generates all first-order statistics



Prof. Vittoria de Nitto Personè

10

10

trace-driven simulation =

distribution-driven simulation

```
int main(void)
{ FILE *fp; /* input data file */
  long index = 0; /* job index */
  double arrival = START; /* arrival time*/
  double delay; /* delay in queue*/
  double service; /* service time*/
  double wait; /* delay + service*/
  double departure = START; /* departure time*/
  struct { /* sum of... */
    double delay; /*delay times */
    double wait; /*wait times*/
    double service; /*service times */
    double interarrival; /* interarrival times */
  } sum = {0.0, 0.0, 0.0};
```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

11

11

trace-driven simulation

```
fp = fopen(FILENAME, "r");
if (fp == NULL) {
  fprintf(stderr, "Cannot open input file %s\n", FILENAME);
  return (1); }
while (!feof(fp)) {
```

distribution-driven simulation

```
PutSeed(123456789); inizializzo generatore con un valore STATIC
while (index < LAST) {
```

LAST: ultimo job che voglio simulare

Prof. Vittoria de Nitto Personè

12

12

```

                                trace-driven: fp
while (index < LAST) {
    index++;
    arrival      = GetArrival();
    if (arrival < departure)
        delay = departure - arrival; /* delay in queue */
    else delay = 0.0;                /* no delay */
    service = GetService();
    wait = delay + service;
    departure = arrival + wait; /* time of departure */
    sum.delay += delay;
    sum.wait += wait;
    sum.service += service;
}
sum.interarrival = arrival - START;

```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

13

13

```

printf("\nfor %ld jobs\n", index);
printf("  average interarrival time = %6.2f\n", sum.interarrival / index);
printf("  average wait ..... = %6.2f\n", sum.wait / index);
printf("  average delay ..... = %6.2f\n", sum.delay / index);
printf("  average service time .... = %6.2f\n", sum.service / index);
printf("  average # in the node ... = %6.2f\n", sum.wait / departure);
printf("  average # in the queue .. = %6.2f\n", sum.delay / departure);
printf("  utilization ..... = %6.2f\n", sum.service / departure);
return (0);

```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

14

14

Siamo in un caso a coda infinita, servente singolo, $\lambda = 0.5$ j/s exp, $\mu = 0.67$, vogliamo trovare gli indici. Come?

Da KP: $E[T_q] = \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{c^2+1}{2} \right) \cdot E[S]$ attenzione, perchè media e varianza si riferiscono al servente, che ha tempi UNIFORMI.

Questo vuol dire che: $E[S] = \frac{a+b}{2}$, $\sigma_{(x)}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ NB: posso usare KP solo se $\rho < 1$, altrimenti l'equazione sarebbe negativa.

$\rho = \lambda E[S] = 0.75$ $c^2 = \frac{\sigma^2}{E[S]^2} = \frac{1}{27} = 0.037$ molto più piccolo dell'equivalente esponenziale con stessa media.

$$\begin{aligned} E[T_q] &= 2,3 \\ E[T_s] &= E[T_q] + E[S] \\ &= 2,3 + 1,5 \\ &= 3,83 \end{aligned}$$

Per le popolazioni medie, basta usare Little ricordando che $N = \lambda T$ calcolo $E[N_q]$ in quanto conosco $E[T_q]$ e poi aggiungo l'utilizzazione.

Discrete-Event Simulation
case study ssq

Example 1

- The "theoretical" averages using *Exponential(2.0)* (rate 0.5 j/s) arrivals and *Uniform(1.0, 2.0)* (rate 0.67) service times are

\bar{r}	\bar{w}	\bar{d}	\bar{s}	\bar{l}	\bar{q}	\bar{x}
2.00	3.83	2.33	1.50	1.92	1.17	0.75

exact analytical results,
No simulation!

$$\rho = 0.75$$

- Although the server is busy 75% of the time, on average there are approximately 2 jobs in the service node $E[N_s] = 1.9167$
- A job can expect to spend more time in the queue than in service infatti $E[S] = 1.5$ mentre $E[T_q] = 2.3$
- To achieve these averages, many jobs must pass through node ovvero, per ottenere questi risultati, il numero di job nel centro deve essere molto alto! Infatti, avendo usato KP, queste sono medie asintotiche.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

15

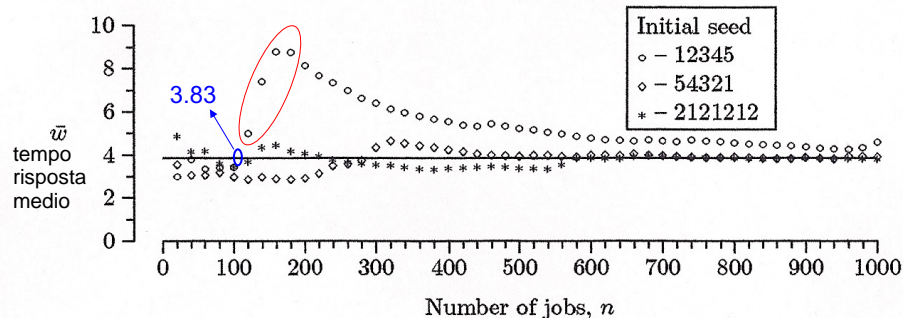
15

server occupato 75%, cioè 1/4 del tempo vuoto.
Il sistema parte da vuoto.

Discrete-Event Simulation
case study ssq

- The accumulated average wait was printed every 20 job

$\rho < 1$, si stabilizza, ma quanto ci vuole? in questo caso servono parecchi job, infatti all'inizio il seme influenza di molto il grafico.



- The convergence of w is slow, erratic, and dependent on the initial seed ogni "punto" è la media calcolata fino a quel determinato punto.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

16

16

bisogna sempre specificare quale comportamento stiamo studiando!

quando diventa stazionario

- the program can be used to study the **steady-state** behavior
 - Will the statistics converge independent of the initial seed?
 - How many jobs does it take to achieve steady-state behavior?

ovvero la fase precedente alla stazionarietà (la fase iniziale), come fatto prima, con varie simulazioni per vederne il comportamento.

- the program can be used to study the **transient** behavior
 - Fix the number of jobs processed and replicate the program with the initial state fixed
 - Each replication uses a different initial rng seed

ovviamente tutte le simulazioni devono avere LO STESSO STATO INIZIALE (es: sistema iniziale vuoto), e SEME DIVERSO (sennò starei copiando le simulazioni).

Prof. Vittoria de Nitto Personè

17

17

Steady-state analysis studio STAZIONARIO

a partire da un certo seme, come variano le statistiche all'aumentare del seme.

	\bar{r}	\bar{w}	\bar{d}	\bar{s}	\bar{l}	\bar{q}	\bar{x}
<u>theoretical</u>	2.00	3.83	2.33	1.50	1.92	1.17	0.75
n=10	2.85	1.74	0.39	1.35	0.59	0.13	0.45
n=100	2.06	3.16	1.67	1.48	1.50	0.80	0.71
n=1000	2.03	3.44	1.94	1.50	1.69	0.96	0.74
n=10000	2.02	3.86	2.36	1.50	1.91	1.17	0.74
n=100000	2.00	3.85	2.35	1.50	1.92	1.17	0.75
n=1000000	2.00	3.81	2.31	1.50	1.90	1.15	0.75

seed=123456789

n=1000000 2.00 3.84 2.34 1.50 1.92 1.17 0.75 seed=1

per un milione di jobs il seme diverso sembra portare poca variabilità.
Gli indici scaturiti dai generatori risultano essere quelli meno variabili

n=10	2.13	2.36	0.75	1.62	1.02	0.32	0.69	seed=1
n=10	1.48	2.37	0.87	1.50	1.24	0.46	0.79	seed=987654321
n=10	1.49	1.89	0.49	1.40	1.12	0.29	0.83	seed=21212121

Transient analysis

Nell'analisi transiente (a inizio simulazione) la scelta del seed ha un maggior impatto.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

18

18

Nel progetto vengono richieste entrambe.

governa stato sistema, se = 0 vuol dire che il primo job che arriva trova vuoto.
 se Departure = 3 simulo uno stato stabile, perchè non parte da vuoto.

Simulating an initial steady state

Parto da uno stato stabile, e non vuoto.

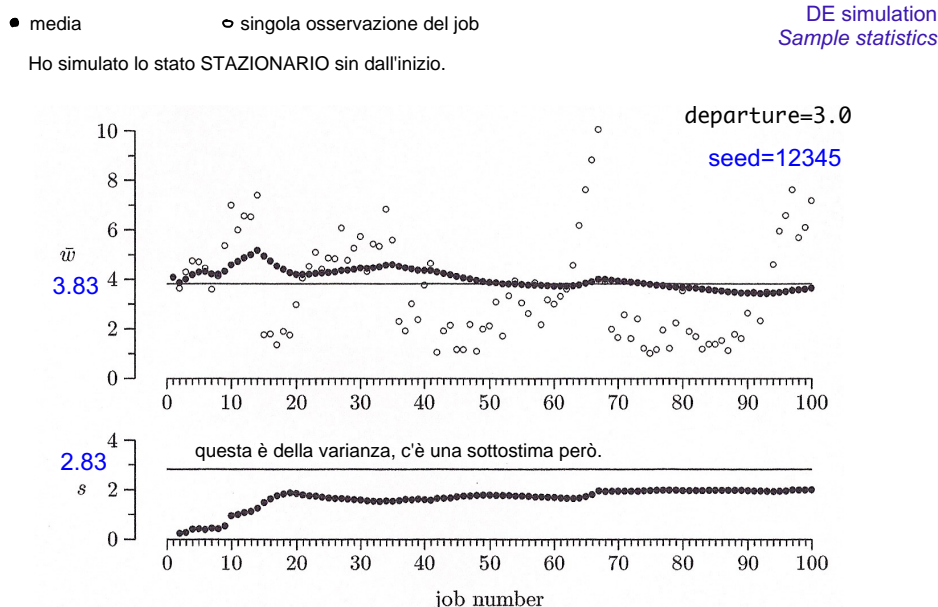
$\bar{d} = 2.33$ delay, tempo attesa in coda, preso dalla KP.
 $b_z (?)$ departure=3 Se = 0 il primo job che arriva trova vuoto, in questo caso simulo uno stato stabile perchè non parte da vuoto, quindi il job1 avrà un altro job davanti e non potrà subito prendere servizio nel servente ma dovrà aspettare in coda.
 $a_1 = a_0 + \text{expo}(2) = 0 + 0.8 = 0.8$ primo interarrivo, cioè primo job arriva a 0.8
 $0.8 < 3$ c'è attesa di 2.2 s primo completamento a 3.
 $d_1 = 3 - 0.8 = 2.2$ attesa in coda, simula abbastanza bene lo stato stabile.
 $s_1 = \text{Uniform}(1,2) = 1.3$ tempo servizio
 $w_1 = 2.2 + 1.3 = 3.5$ tempo di risposta: attesa in coda + tempo servizio
 $c_1 = 0.8 + 3.5 = 4.3$ quando job1 esce dal centro
 $a_1 \quad w_1$

Prof. Vittoria de Nitto Personè

19

19

simulando questo stato, NON VUOTO, ecco come cambia la curva:



Prof. Vittoria de Nitto Personè

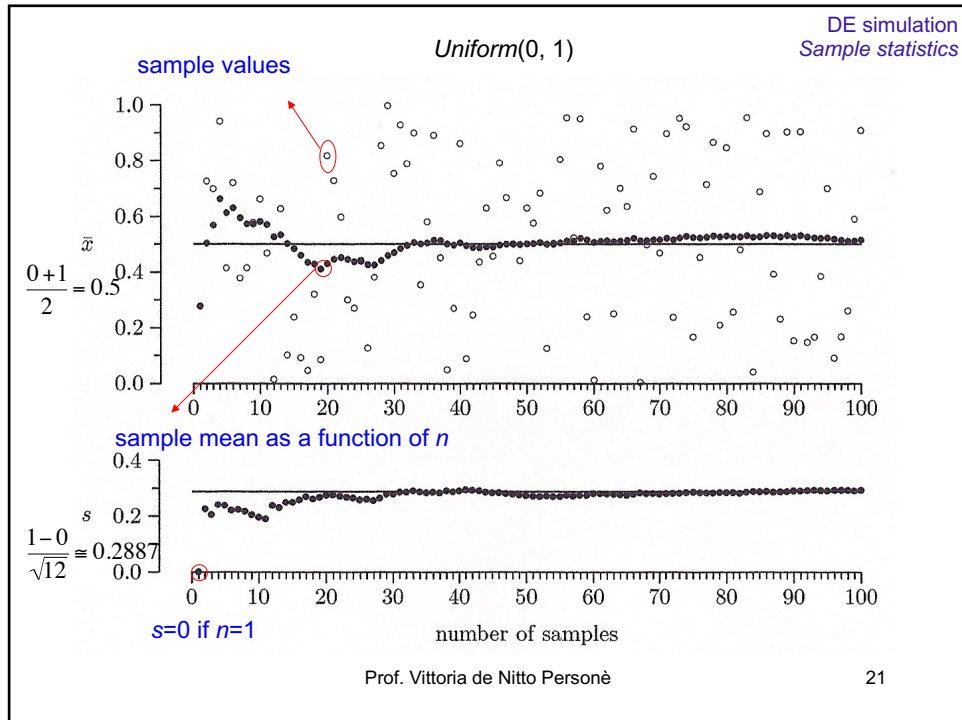
20

20

Se ho tempo di risposta lungo, anche il job che viene dopo di me lo sperimenterà.
 Ovvero se vediamo il primo grafico ho alcuni "gruppi" sopra la media, e altri gruppi sotto la media.
 Questo è il problema della statistica campionaria rispetto la teorica. Cioè statisticamente NON E' INDIPENDENTE,
 anzi c'è una correlazione.

Il primo grafico introduce un BIAS sul secondo grafico, che dovremo correggere.

Generazione di 100 variabili uniformi tra 0 e 1, usando generatore. Sono sparse, conferma la bontà del generatore. Anche nella varianza (secondo grafico) non c'è BIAS, e presto tende al valore teorico, perchè non c'è correlazione tra i pallini bianchi.



21

DE simulation
Sample statistics

Serial correlation

- *Independence*: each x_i value does not depend on any other point
- Time-sequenced DES output is typically not independent (serie storiche)
- E.g.: wait times of consecutive jobs have positive *serial correlation*
- Example: Consider output from ssq2
 - *Exponential(2)* interarrivals, *Uniform(1,2)* service
- wait times w_1, w_2, \dots, w_{100} , have high positive serial correlation
 - The correlation produces a bias in the standard deviation

Prof. Vittoria de Nitto Personè

22

22

Example 2

- assume that jobs arrive at random with a steady-state arrival rate of 0.5 jobs per minute
- assume that Job service times are “composite” with two components:
 - the number of service tasks is $1 + \text{Geometric}(0.9)$ media geometrica: $\frac{1}{0.9}$
 - the time (in minutes) per task is $\text{Uniform}(0.1, 0.2)$ media: $\frac{0.1 + 0.2}{2} = 0.15$

```
double GetService(void)
{
    long k;
    double sum = 0.0;
    long tasks = 1 + Geometric(0.9);
    for (k = 0; k < tasks; k++)
        sum += Uniform(0.1, 0.2);
    return (sum);
}
```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

23

23

invece di avere un job che chiede un tempo uniforme, ho job composti da almeno un task dove ogni task ha tempo 0.15 di media. In media 10 task, che corrisponde a $E[S] = 10 \cdot 0.15 = 1.5$ (mi ricollego all'esercizio delle slide prima). Ciò che cambia è la variabilità!

- The theoretical steady-state statistics for this model are

\bar{r}	\bar{w}	\bar{d}	\bar{s}	\bar{l}	\bar{q}	\bar{x}	
2.00	5.77	4.27	1.50	2.89	2.14	0.75	exact analytical results, No simulation!
prodotti da ssq2 →	(3.83)	(2.33)		(1.92)	(1.17)		

- The arrival rate, service rate, and utilization are identical to the previous case (example 1)
- The other four statistics are significantly larger
- performance measures are sensitive to the choice of service time distribution

ciò che è cambiata è la distribuzione dei servizi.

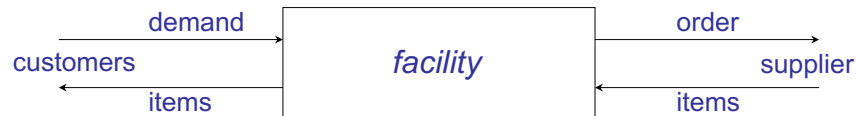
Prof. Vittoria de Nitto Personè

24

24

(rivedo con le nuove conoscenze)

A simple inventory system



- Distributes items from current inventory to customers
- Customer demand is discrete
- Simple: one type of item
- Inventory review is periodic
- Items are ordered, if necessary, only at review times
- (s, S) are the min,max inventory levels, $0 \leq s < S$

variabile, per vedere
come cambia il comportamento

Fisso

Prof. Vittoria de Nitto Personè

25

25

p.102

Simply Inventory System

- Program sis2 has randomly generated demands using an *Equilikely(a, b)* random variate
- Using random data, we can study transient and steady-state behaviors

non realistica, uso la geometrica (la versione discreta dell'esponenziale), anche se pure lei non è perfetta.

```
#include <stdio.h>
```

sis1.c

```
#define FILENAME "sis1.dat"
```

```
#define MINIMUM 20
```

```
#define MAXIMUM 80
```

```
#define STOP 100
```

```
#define sqr(x) ((x) * (x))
```

```
long GetDemand(FILE *fp)
```

```
{
```

```
    long d;
```

```
    fscanf(fp, "%ld\n", &d);
```

```
    return (d);}
```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

26

26

sis2.c

unico input: domanda di articoli in una settimana. in sis1 da traccia,
qui è una Equilikely equivalente discreta della uniform.

```
#include <stdio.h>
#include "rng.h"

#define MINIMUM 20
#define MAXIMUM 80
#define STOP 100 /* 100 weeks = about 2 years*/
#define sqr(x) ((x) * (x))

long Equilikely(long a, long b)
{ return (a + (long) ((b - a + 1) * Random()));}

long GetDemand(void)
{
    return (Equilikely(10, 50)); }

    i : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
    di : 30 15 25 15 45 30 25 15 20 35 20 30
```

27

```
int main(void)
{
    long index = 0;
    long inventory = MAXIMUM;
    long demand;
    long order;
    struct {
        double setup;
        double holding; /*inventory hold (+) */
        double shortage; /*inventory short (-) */
        double order;
        double demand;
    } sum = { 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 };

    PutSeed(123456789);
```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

28

28

```

while (index < STOP) {
    index++;
    if (inventory < MINIMUM) {
        order = MAXIMUM - inventory;
        sum.setup++;
        sum.order += order;
    }
    else order = 0;
    inventory += order;    /* there is no delivery lag */    demand =
    GetDemand();
    sum.demand += demand;
    if (inventory > demand)
        sum.holding += (inventory - 0.5 * demand);
    else {
        sum.holding += sqr(inventory) / (2.0 * demand);
        sum.shortage += sqr(demand - inventory) / (2.0 * demand);
    }
    inventory -= demand;
}

```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

29

29

```

if (inventory < MAXIMUM) {
    order = MAXIMUM - inventory;
    sum.setup++;
    sum.order += order;
    inventory += order;
}

...

```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

30

30

for 100 time intervals with an average demand of 27.68
and policy parameters (s, S) = (20, 80)

average order = 27.68
setup frequency = 0.36
average holding level = 44.81
average shortage level ... = 0.14

- trace file sis1.dat contains data for n=100 time intervals
- with (s, S)=(20, 80)

$$\bar{o} = \bar{d} = 29.29 \quad \bar{u} = 0.39 \quad \bar{l}^+ = 42.40 \quad \bar{l}^- = 0.25$$

Prof. Vittoria de Nitto Personè

31

31

```
int main(void)
{ long seed;
  long index      = 0;
  long inventory = MAXIMUM;
  long demand;
  long order;
  struct {
    double setup;
    double holding; /*inventory held (+) */
    double shortage; /*  inventory short (-)  */
    double order;
    double demand;
  } sum = { 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 };

  PutSeed(-1); uso clock del sistema, per la ripetitività mi serve però conoscerlo.
  GetSeed(&seed); lo prelevo con getSeed
  printf("\nwith an initial seed of %ld", seed);
```

Prof. Vittoria de Nitto Personè

32

32

for 100 time intervals with an average demand of 27.68
and policy parameters (s, S) = (20, 80)

average order = 27.68
setup frequency = 0.36
average holding level = 44.81
average shortage level ... = 0.14

with an initial seed of 1333437895 estratto dal clock
for 100 time intervals with an average demand of 31.00
and policy parameters (s, S) = (20, 80)

average order = 31.00
setup frequency = 0.40
average holding level = 43.39
average shortage level ... = 0.37

i risultati cambiano, perchè è come se stessimo vedendo scenari diversi.

Prof. Vittoria de Nitto Personè

33

33

Discrete-Event Simulation
case study sis

Simply Inventory System

media: $\frac{a+b}{2} = 30$

if (a, b) = (10, 50) and (s, S) = (20, 80), then the approximate
steady-state statistics are

\bar{d}	\bar{o}	\bar{u}	\bar{l}^+	\bar{l}^-	valore teorico prodotto da sis2.
30.00	30.00	0.39	42.86	0.26	

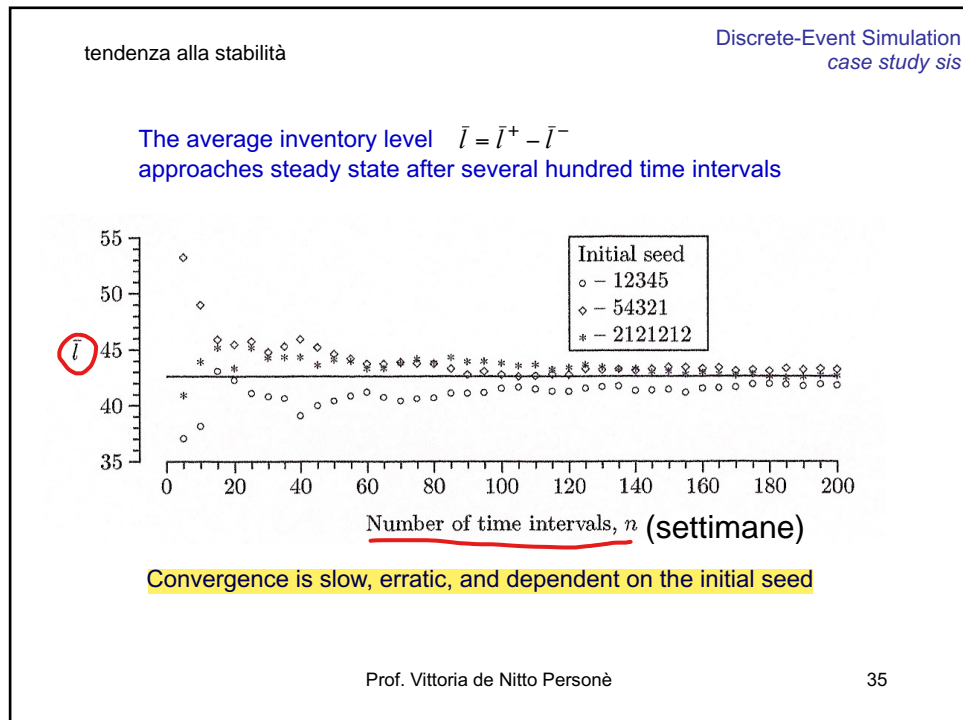
(trace-driven) prodotto con l'uso di una traccia, quindi dati presi da file.

$\bar{o} = \bar{d} = 29.29$ $\bar{u} = 0.39$ $\bar{l}^+ = 42.40$ $\bar{l}^- = 0.25$)

Prof. Vittoria de Nitto Personè

34

34



35

Se uso lo stesso seme, cambiando solo 's' (che è ciò che studiamo, ovvero livello minimo scorte). Non avrebbe senso cambiare 's' & 'seme'.

Discrete-Event Simulation
case study sis

- using a fixed initial seed guarantees the exact same demand sequence (in the example 12345)
- any changes to the system are caused solely by the change of s
- a steady state study of this system is unreasonable:
 - all parameters would have to remain fixed for many years
 - when $n=100$, we simulate approximately 2 years
 - when $n=10000$, we simulate approximately 192 years

Se dovessi analizzare la variabilità, dovrei farlo a parità di traccia, non avrebbe senso vederla in uno scenario diverso.

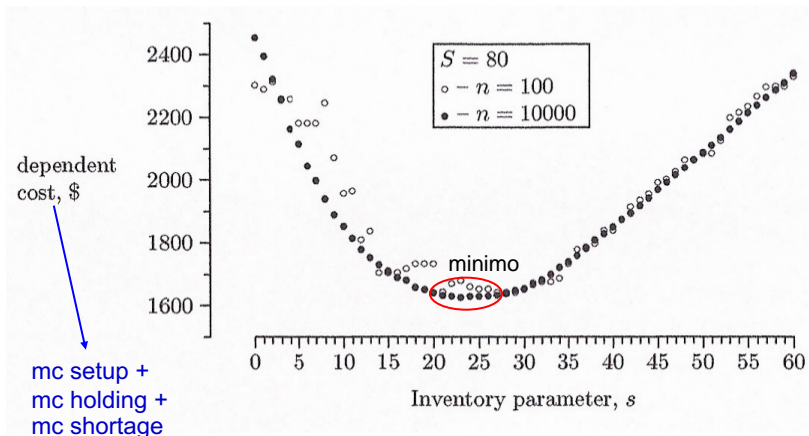
Prof. Vittoria de Nitto Personè

36

36

Nell'esempio, l'unità di misura sono le settimane. Con $n = 100$, simuliamo due anni, ma chi mi dice che in due anni i costi non cambino? per $n = 100000$ sono quasi due secoli.

- if we fix S , we can find the optimal cost by varying s
- recall that the dependent cost ignores the fixed cost of each item



Prof. Vittoria de Nitto Personè

37

37

Se ' s ' = 23, ovviamente dobbiamo valutare se questo ' s ' sia accettabile dalle condizioni di contorno.

p.104 discrete

Statistical Considerations (sect. 3.1.3)

- *variance reduction:*
(intuitive approach) use the same random numbers
(We kept the same initial seed and changed only s)

NOTE:

transient behavior will always have some inherent uncertainty

- *Robust Estimation:*
when a data point is not sensitive to small changes in assumptions

- values of s close to 23 have essentially the same cost
- Would the cost be more sensitive to changes in S or other assumed values?

Ovvero, se cambiassi leggermente S (ad esempio da 80 a 78), o magari introduco un piccolo delivery lag, mi aspetto che $s = 23$ sia ancora ideale se lo stimatore è robusto. Se trovassi $s = 45$ sarebbe troppo sensibile!

Prof. Vittoria de Nitto Personè

38

38

Exercises

- derive analytical results on p.12
- study program ssq2.c; run it and compare output with the results on p.12
- Exercises: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6