MPSMF_lez16

0:00 / 1:43:55

Cosa facciamo oggi?

...

Modello CRR-Multiperiodale

Questo modello è caratterizzato da un istante iniziale $t_0 = 0$ e uno finale $t_N = T$, ma ora abbiamo anche degli istanti intermedi $t1, t2, \dots, t_{N-1}$.

Quindi abbiamo la solita struttura:

$$X_0 \to X_T$$

$$\frac{X_T - X_0}{X_0} = r$$

Andiamo adesso ad introdurre dei concetti che sono del mondo della matematica finanziaria, i quali ci servono nel corso della descrizione di questo modello.

Supponiamo di avere un investimento al tempo 0 che produce un risultato al tempo T:

$$X_0 \to X_T$$

(un bond sostanzialmente).

Questo Bond promette un **tasso di interesse unitario** r, linearmente nel tempo.
Che significa "unitario"?
Significa che è riferito ad una "quantità temporale": quindi "ogni mese", "ogni giorno", "ogni anno".
Supponiamo che stiamo considerando un tasso di interesse mensile, che cresce linearmente nel tempo (quindi ad esempio se fai un investimento di 100€, noi prendiamo su quei 100€ l'1% mensilmente, quindi significa che il primo mese ci tocca 1€ di interesse, il secondo mese ci fornisce 1€ e così via).
Se noi investiamo una certa somma X_0 su questo Bond, qual'è il rendimento di questo investimento? $R_T = rX_0T$ dove T è la durata dell'investimento (chiaramente T deve essere della stessa unità temporale della cadenza di pagamento mensile. Se ti pagano ogni mese allora T deve essere la durata dell'investimento in termini di "numero di mesi").

> **Esempio**: Investiamo 1000€ in un Bond. Dopo 3 anni qual'è il rendimento del nostro investimento?

$$R_T = 0.01 \cdot 1000 \cdot 36$$

Se ora ci vogliamo calcolare il tasso di rendimento, noi sappiamo dalle precedenti lezioni che:

$$r_T = \frac{R_T}{X_0}$$

Quindi, banalmente sostituendo otteniamo:

$$r_T = rT$$

Noi inoltre sappiamo che:

$$X_T = a_T X_0$$

con $a_T = 1 + r_T$ che nel nostro caso diventa: $a_T = 1 + rT$.

Come trattiamo il fattore di sconto?

$$s_T = \frac{rT}{1 + rT}$$

$$d_T = \frac{1}{1 + rT}$$

Questo caratterizza completamente il caso di tasso di interesse lineare. Tutte le altre formule si mantengono sempre uguali a quanto visto nelle precedenti lezioni.
(Sulle note è presente una tabella riassuntiva).

Cerchiamo di giustificare la necessità di passare a questo regime leggermente diverso. Facciamo sempre il nostro investimento $X_0 \rightarrow X_T$, ma ad un certo punto intermedio voglio ritirare il capitale e reinvestirlo nuovamente con la stessa regola.

Quindi quello che abbiamo è:

$$X_0 \rightarrow X_0 rt \rightarrow X_0 rt \cdot r \cdot (T - t)$$

In termini di capitalizzazione possono scrivere che:

$$X_{t,T} = (1 + rT)(1 + r(T - t))X_0$$

Questo è il payoff che io ottengo dal mio investimento iniziale, quando interrompo e poi reinvesto con la stessa regola.

Ci è convenuto o no fare questa manovra?
Beh sembra di si, perché di fatto nel mezzo ho rieffettuato l'investimento con la stessa regola, ma ho messo "sul piatto" più soldi, quindi la % mensile (ad esempio) sarà più alta.
Ora dal punto di vista ingegneristico potremo chiederci se esiste un tempo t di "mezzo" che è il punto ottimale per effettuare questo giochetto? Certo; calcoliamocelo!
Andiamo a calcolarci la derivata di $a(t)$:

$$a'(t) = r^2(T - 2t)$$

Ci troviamo il punto di massimo.
Quindi di fatto esce fuori che $t = \frac{T}{2}$ è il punto ideale (quindi esattamente nel mezzo .. lol).

Il risultato della mia capitalizzazione è il seguente:

$$X_{t,T} = (1 + r\frac{T}{2})^2 X_0 \geq (1 + rT)X_0$$

Immaginiamo adesso di avere tanti tempi di investimento (e quindi non solo un punto) in cui noi possiamo effettuare il giochetto di "disinvestire e reinvestire".
Questi punti sono $t1, t2, t3, \ldots, t_{N-1}$.

Otteniamo una funzione:

$$X_{t1,t2,t3,\ldots,t_{N-1}} = (1 + rt_1)(1 + r(t_2 - t_1))(1 + r(t_3 - t_2)) \cdot \ldots \cdot (1 + r(t_N - t_{N-1}))$$

Ora andiamo direttamente ad ottimizzare questa roba.
Quanto otteniamo è che l'ottimo è raggiunto quando vai a dividere l'intervallo in N parti e considerare questi valori:

$$t_1 = \frac{T}{N}, t_2 = 2\frac{T}{N}, \ldots$$

Ora andiamoci a calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r\frac{T}{n})^n X_0$$

Andiamo a vedere nel mercato cosa succede usando questo modello.

Nel mercato ci sono dei periodi fissi t in cui vengono pagati gli interessi degli investimenti (cedola semestrale).
L'interesse composto consiste nell'avere un certo tasso di interesse:

$$r_p =$$

....

$$a_p = (1 + r_p)$$

$$a_{2p} = (1 + r_p)^2$$

$$a_{3p} = (1 + r_p)^3$$

$$a_{np} = (1 + r_p)^n$$

Questo tasso composto è importante nel nostro caso (CRR).
Noi abbiamo un periodo di investimento $[0, T]$. Questo viene diviso in tanti sotto

periodi.
In ciascuno di questi sotto-periodi, il Bond accresce di valore nella seguente maniera.

$$B_{t_1} = (1 + r_p)B_0$$
$$\dots$$
$$B_{t_N} = (1 + r_p)^N$$

Cosa c'è di simile e diverso rispetto al caso lineare?
Di simile c'è che ad un certo punto avevamo una formula simile a quella appena scritta per B_{t_N}.
Di diverso c'è che di fatto prima eravamo noi a scegliere i tempi in cui reinvestire, invece qui i tempi sono fissi.
I tempi nel modello comunque vengono scelti in modo tale che siano tutti equidistanti.

Con questo tipo di modello non è più conveniente interrompere l'investimento e reinvestire.
Arrivati, ad esempio, ad un tempo $t = T_3$ e decido di ritirare tutti i soldi e reinvestirli nella stessa maniera.
Quando ritiriamo abbiamo:

$$B_{t_3} = (1 + r_p)^3 B_0$$

Reinvestendo ottengo:

$$B_{t_5} = (1 + r_p)^3 B_0 (1 + r_p)^2 = (1 + r_p)^5 B_0$$

Non è cambiato nulla rispetto al caso in cui non facevo il "giochetto".

Dopo n periodi di investimento qual'è il mio payoff?

$$B_{t_n} = (1 + r_p)^n B_0$$

Posso chiedermi qual'è il tasso d'interesse.
Effettuiamo la seguente operazione:

$$r_{n,p} = \frac{B_{t_n} - B_0}{B_0} = (1 + r_p)^n - 1$$

$r_{n,p}$ è quindi il tasso d'investimento per n periodi.

Ovviamente possiamo anche invertire le formule e ottenere:

$$r_p = (1 + r_{n-p})^{\frac{1}{n}} - 1$$

Quando noi abbiamo un certo numero di periodi di investimento noi sappiamo da queste formule che il tasso $r(T)$, si può andare a scrivere nella seguente maniera:

$$r(T) = (1 + r_p)^T = e^{T \ln(1+r_p)}$$

Generalmente usiamo questa scrittura:

$$\rho_p \triangleq \ln(1 + r_p)$$

quindi abbiamo: $e^{T\rho_p}$ e quindi:

$$B_T = B_0 e^{\rho_p T}$$

Questo modello CRR, che è molto semplice, è tutt'ora utilizzato dagli operatori finanziari per valutare i prezzi delle azioni. E' quindi di fatto uno strumento operativo. In base a questo modello gli operatori decidono se comprare o vendere delle azioni. Cosa succede? Succede l'effetto "gatto nero": "tutti credono nel modello e quindi il modello diventa vero".

Prendiamo un intervallo $[0, T]$ e dividiamo in N sotto-periodi: $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$.
L'ampiezza dei periodi è uguale per tutti i periodi e sarà quindi pari a:

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

e quindi: $t_{n+1} - t_n = \Delta t$.
Segniamo con B il titolo non rischioso e con S il titolo rischioso.

Il Bond B cosa fa? Il Bond paga un tasso d'interesse r_p (che da adesso in poi indicheremo solo con r, perché tanto il periodo è fisso), quindi abbiamo:

$$B_{t_n} = (1 + r)^n B_0$$

$$S_n = B_n S_{n-1}$$

$B_1, \ldots, B_n$ sono V.A. Bernoulliane.

Anche in questo modello il valore del denaro è dato dal valore del Bond (se uno ha della liquidità dovrebbe, per quanto possibile, tenerla investita nel Bond).

$$M_T = (1 + r) M_0$$

$$M_n = (1 + r)^n M_0 = \frac{M_T}{(1 + r)^{N-n}}$$

$\forall n = 1, \ldots, N$

Se c'è una violazione di questa legge allora ci sono violazioni della "mancanza di arbitraggio".

Cos'è questo S_n?

$$S_n = \beta_n Sn - 1 = \ldots = \beta_n \cdot \beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_1 \cdot S_0$$

Quanto appena mostrato è un **Processo Stocastico**.

Ricordandoci quanto visto in CPS, avevano un Random Simple Sample.
Il **Processo Stocastico** generalizza l'idea del RSS, quindi invece di avere una famiglia di V.A. identicamente distribuite, avremo una famiglia di V.A. che non sappiamo come sono distribuite e che sono funzione del tempo.
(Se misuriamo l'altezza di una persona a intervalli di 1 anno da quando nasce non possiamo dire che il tempo non sia determinante).
Il processo stocastico è una famiglia di V.A.: $(X_t)_{t \in \pi}$
dove ogni X_i è una V.A. definita su Ω e a valori in R^M.

Se $\pi \subset Z$ allora stiamo modellando una casistica in cui consideriamo anche fatti del passato (valori negativi).

Chi è Ω? Dal punto di vista formale, avere a che fare con un unico Ω per tutte le V.A. è una questione di semplicità. La scelta di Ω deve essere frutto di una ricerca tale per cui riusciamo a "ficcare" tutte le V.A. li dentro.

L'artificio che si usa è molto semplice.
Noi prendiamo questo $\Omega \triangleq \{(\omega_n)_{n=1}^T \omega_n = 1 \cup \omega_n = 0\}$
(E' una sorta di binomio di Newton).

Con questa costruzione io dico che la mia β_n come V.A., la posso scrivere come segue:

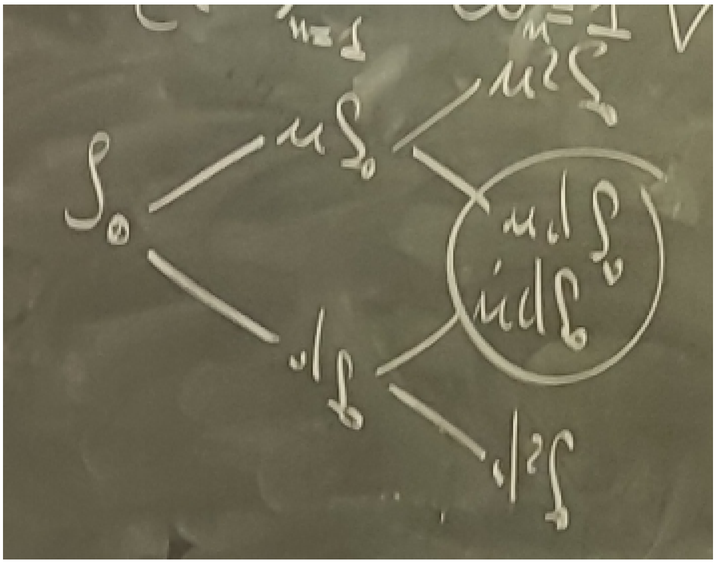
$$\beta_n(\omega) = \beta_n((\omega_m)_{m=1}^T)$$

Che è u se $\omega_n = 1$;
mentre è dd se $\omega_n = 0$.

Quando si valuta un processo stocastico io sto cercando di costruire un modello di qualcosa che è causale ma che si sviluppa nel tempo, quindi io oggi non posso considerare tutto quello che succederà.

La costruzione rappresenta questa idea "1" per "m'ha detto bene", "0" per "m'ha detto male".
Quindi dal punto di vista modellistico sta roba "1101" significa: "t'ha detto bene, t'ha detto bene, t'ha detto male, t'ha detto bene".

Il futuro è quindi un reticolo (o diagramma ad albero).
Il mio futuro è rappresentato quindi da una struttura di questo tipo (vedere foto):



Tutto questa costruzione serve quindi per trasformare un problema dinamico in un problema statico.

Fino ad ora abbiamo considerato la casistica con tempo discreto.

Cosa succede se il tempo è continuo? Non considereremo più il reticolo, ma andremo a considerare tutti i possibili accadimenti.

(Il futuro sono tutte le possibili traiettorie).
(Citazione ad Avengers EnD gAmE LOL - Prossima volta ci fa vedere un pezzo del film. Non mancare! (Ottima mimica di Dr. Strange da parte di Monte)).
(Dr. Strange quando vede tutti i futuri sta costruendo il processo stocastico. Loro vincono in un solo futuro. Convergono a quella traiettoria con un "controllo stocastic" (simulazione e controllo stocastico))).
("Quelli di Hollywood le cose le sanno fare". Cit. mio zio).
("Ste cose almeno a qualcosa servono ... servono a fare trame dei film" Cit. sempre mio zio).

(min: 1:41:00 - Discorso Economia)
(L'inflazione si sta mangiato i lavoratori. Le armi adottate al contrasto dell'evasione sono state quelle di adottare di diminuire il valore del denaro....)

(Anche ad alti livelli c'è mancanza di capacità tecnica per gestire problemi complessi)