MPSMF_lez13

0:00 / 1:47:28

Cosa facciamo oggi?

Dato un certo numero di titoli $S_0, S1, \dots, S_M$ dove S_0 è un titolo non rischioso (Bond), mentre tutti gli altri sono titoli rischiosi (Stock).

$S_1(0), \dots, S_M(0)$ sono i valori osservati.

Il portafoglio sarà:
$\pi = (y_1, \dots, y_M) \in R^M$

(Per comodità quindi modelliamo tutto ciò con dei valori Reali, anche se avere un valore monetaria pari al numero di nepero non è abbia tutto questo senso).

I pesi dei singoli titoli saranno:
$(w_1, \dots, w_R)$

allora:

$$W_0 = \sum_{m=1}^{M} y_m S_m(0)$$

$$W_m = y_m S_m(0)$$

con $w_M = \frac{W_M}{W}$ e $\sum_{m=1}^{M} w_m = 1$

Il rendimento del titolo al tempo T:

$$\tau_m(T) = \frac{S_m(T) - S_m(0)}{S_m(0)}$$

Il rendimento del portafoglio al tempo T:

$$\tau(T) = \sum_{m=1}^{M} w_m \tau_m(T)$$

Abbiamo definito quindi rischiosità la seguente matrice:

$$\Sigma(\tau(T)) = \dots$$

Abbiamo poi visto la definizione di convesso:
Un insieme è convesso ($ $\subseteq R^M$) se presi due punti qualsiasi, la corda che li congiunge è sempre dentro l'insieme.

A che ci serve? Se noi consideriamo la seguente funzione:

$$f(w_1, \ldots, w_M) = (w_1, \ldots, w_M)\Sigma(w_1, \ldots, w_M)^T$$

allora ci accorgiamo che questa f è sempre convessa ed è strettamente convessa $\iff$ gli autovalori di Σ sono strettamente positivi. (*Teorema di analisi convessa* (Non vedremo dimostrazione)).
Quindi nel paniere di titoli che stiamo considerando non c'è la possibilità di esprimere un titolo come combinazione lineare dell'altro.

Ci chiediamo: "Esiste il minimo di f al variare di $(w_1, \ldots, w_M) \in H$ con $H \triangleq \{(w_1, \ldots, w_M) \in R^M : \sum_{m=1}^{M} w_m = 1\}$"
Dal punto di vista finanziario equivale a chiederci: "esiste il portafoglio di minimo rischio?".

Si ....

min.: 09:49
Vediamo dal punto di vista finanziario: "c'è una soglia minima di rischio che dobbiamo accettare". Se io voglio investire su un paniere di azioni che va a pescare dallo S&P500 devo accettare una soglia di rischio sotto la quale non posso andare.

> **Nota**: l'unica ipotesi che abbiamo è che f sia convessa, per il resto f può essere una funzione qualsiasi. (f è la "rischiosità del portafoglio" ("rischio del rendimento del portafoglio") ("la varianza del portafoglio")).
>
> Rischio in finanza significa varianza ($D[\tau(T)]$). Variabilità è la misura di quanto un certo valore si discosta dal valore medio. Questo discostamento non significa però che debba essere per forza negativo. Il valore potrebbe spostarsi dal valore medio in modo positivo anziché negativo.
>
> Attribuire al rischio quindi una connotazione necessariamente negativa è sbagliato!
>
> Siccome però "la paure che le cose ti vadano male" è molto più grande della "sensazione che le cose vadano bene" allora ci porta in genere ad avere negativi.

Molto spesso si sente parlare del concetto di "Volatilità". Cos'è formalmente? E' la deviazione standard ($D^2[\tau(T)]$).

Supponiamo che sul mercato abbiamo un certo numero di titoli, ciascuno dei quali:

$$r_1(T) = r_2(T) = \ldots = r_M(T)$$

Supponiamo inoltre che $r_1(T), \ldots, r_M(T)$ siano tutti indipendenti.

Allora passiamo da:

$$r_M(T) = \sum_{m=1}^{M} r_m(T) w_m$$

a questo:

$$r_1(T) \sum_{m=1}^{M} w_m = r_1(T)$$

Consideriamo ciò:

$$D^2[\sum_{m=1}^{M} w_m r_m(T)] = \sum_{m=1}^{M} D^2[w_m r_m(T)] = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 D^2[r_m(T)]$$

Ora facciamo l'ipotesi che abbiamo costruito questo portafoglio prendendo un peso uguale per tutti i titoli che lo compongono: $w_1 = \ldots = w_M = \frac{1}{M}$.
Allora la relazione precedente diventa:

$$\frac{1}{M^2} \sum_{m=1}^{M} D^2[r_m(T)] = \frac{1}{M^2} \cdot M D^2[r_1(T)]$$

Quindi abbiamo scoperto che se prendiamo dei titoli scorrelati e ognuno con lo stesso peso allora il portafoglio ha lo stesso rendimento, ma il rischio si è abbattuto di un fattore M.
Questo significa dal punto di vista finanziario che, poiché siamo avversi al rischio, dobbiamo diversificare i nostri investimenti.

Supponiamo che io sono un investitore razionale e voglio investire 2000€ che mi avanzano. Speriamo di farci un guadagno. Come mi muovo? Non investo **mai** su unico target, ma diversifico sempre.
Investo sempre in un **ETF** (*Exchanged Traded Found*). Questi fondi replicano passivamente degli indici (ovvero panieri di titoli diversificati).
La diversificazione la garantiscono loro.
Ripeto.
Se io dovessi scegliere da investitore su come investire 2000€ non vanno mai messa su una singola azione, ma li vado a mettere su un ETF. Potresti pensare che questo paniere te lo puoi costruire a mano. NON conviene:

- Primo perché non sei capace;
- Secondo perché pagheresti molto di "tasse bancarie";
  Da piccoli investitori non abbiamo altri strumenti.

> **Nota**: le banche ti contattano quando hai delle piccole liquidità in eccesso. Spesso i fondi proposti dalle banche sono gestiti in maniera onesta, ma spesso questi fondi sono fondi attivi (ovvero si propongono di battere un Benchmark). Come garanzia mostrano che nel passato ci sono già riusciti, ma chiaramente questa non è nessuna dimostrazione.

> A differenza degli ETF, questi fondi attivi hanno dei costi più alti ed è molto più difficile uscirne.
>
> Dal punto di vista di Monte, i fondi attivi in alcuni casi fanno meglio, però il fondo passivo (il quale non si propone di fare meglio, ma solo di seguire l'indice) sono più convenienti:
>
> - immediatamente liquidabili;
> - pochi costi di gestione.

Considerata la varianza del rendimento di portafoglio:

$$D^2[r(T)] = \sum_{m=1}^{M} W_m^2 \sigma_m^2 + \sum_{l,m=1;l\neq m}^{M} W_l W_m \sigma_{l,m}$$

Con $sigma_m^2 = D^2[r_m(T)]$
e $e_{l,m} = E[(r_l(T) - \bar{r_L}(T))(r_l(T) - r_n(T)]))]$ (probabilmente c'è qualche errore qui)

L'equazione sopra proposta spesso ha un termine $\frac{1}{2}$.

Equazione del vincolo:

$$L(W_1, \dots, W_M, \lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2(W_1, \dots, W_M) - \lambda(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1)$$

Questa funzione si chiama **Lagrangiana** (già visto a Machine Learning).
I punti estremali di questa funzione risolve il nostro problema di ottimizzazione.

Come si trovano questi estremi? Banalmente basta porre tutte le derivate parziali uguali a 0.
Otteniamo un sistema di $M+1$ equazioni in $M+1$ incognite. E' inoltre un sistema lineare, quindi la sua risoluzione è immediata.

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial W_2} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial W_M} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Il **problema del Promoter finanziario**: "il minimo rischio per un'investimento assegnato".

Questa: $(W_1^*, \dots, W_M^*)$ è la soluzione del sistema lineare appena presentato (quindi questi sono i pesi che realizzano il portafoglio di minimo rischio).
Qual'è il rendimento del portafoglio di minimo rischio?

$$\tau^*(T) = \sum_{m=1}^{M} w_m^* \tau_m(T)$$

Cerchiamo di capire quindi questo problema del Promoter.
Esiste il portafoglio di minimo rischio per un determinato rendimento atteso (una media di quello che abbiamo visto).

Supponiamo che noi muore una vecchia zia e ci lascia 10.000€. Dato che non ci servono subito, possiamo investirli così tra qualche anno possiamo dare un anticipo per un mutuo per una casa.
Questi 10.000€ su che investimento devo metterli per trasformarli tra 5 anni in 50.000€.
Per cui il rendimento dovrà essere:

$$\frac{50.000 - 40.000}{5}(errato)$$

...
Insomma deve venire fuori un rendimento del 400%.

Qual'è il rischio che mi devo accollare se voglio questo rendimento?
Questa domanda è esattamente il **problema del Promoter finanziario**.

Noi prima andavamo a cercare:

$$min_{(W1,\dots,W_M)\in H}\ (\frac{1}{2}\sigma^2(W_1,\dots,W_M))$$

$$\bar{\tau}(T) = \sum_{m=1}^{M} W_m \bar{\tau}_m(T) = \Sigma$$

$$K_{\bar{\tau}} = \{(W_1,\dots,W_M) \in R^M : \sum_{m=1}^{M} W_m \bar{\tau}_m(T) = \bar{\tau}\}$$

Abbiamo due vincoli, per cui la Lagrangiana dobbiamo scriverla così:

$$L(W_1,\dots,W_M,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}\sigma^2(W_1,\dots,W_M) - \lambda_1(\sum_{m=1}^{M} w_m - 1) - \lambda_2(\sum_{m=1}^{M} W_m \bar{\tau}_m(T) - \bar{\tau})$$

Sistema lineare di $M+2$ equazioni e $M+2$ incognite.
Si può dimostrare che le ipotesi di non singolarità (cioè nessun titolo può essere espresso come combinazione lineare di altri titoli) dei titoli consente di poter trovare un'unica soluzione di questo problema.
Quindi riusciamo a trovare il portafoglio di minimo rischio per un dato rendimento segnato.

Abbiamo quindi risolto due problemi di minimizzazione.

L'investitore può inoltre richiedere che il portafoglio venga formato richiedendo la condizione che "compro tutti i titoli ma nessuno lo vendo allo scoperto".
"Prendere posizioni corte" è una cosa che capita molto spesso.

In questo caso bisogna introdurre quelli che si chiamano **vincoli di non negatività**. Qui abbiamo il fatto che questo portafoglio di cui cerchiamo la soluzioni, lo andiamo ad intersecare ulteriormente con il seguente insieme:

$$R^M \triangleq \{(W_1, \dots, W_M) \in R^M : W_m \geq 0\}$$

Si utilizza la tecnica di "Kuntager" (Scritto sicuramente male).
La dimostrazione del teorema di Kuntager è molto complessa (non la vederemo).

Se uno volesse affrontare un problema un po' diverso tipo: "qual'è il massimo rendimento che possiamo raggiungere all'interno di un portafoglio".

Questo problema diventa molto complesso dal punto di vista concettuale. Diventa un problema di massimizzazione:

$$\bar{\tau}(W_1, \dots, W_M) = \sum_{m=1}^{M} \bar{\tau}_m(T) W_m$$

Il rischio è sempre questo: $\sigma^2(W_1, \dots, W_m) = \frac{1}{2}(\sum_{m=1}^{M} \sigma_m^2 w_m + \dots)$

Allora abbiamo:

$$max\{\bar{\tau}(W_1, \dots, W_M)\}$$

con $(W_1, \dots, W_M) \in H \cap K_{\sigma^2}$

(Siamo costretti ad affrontare il problema da un punto di vista computazionale. Questo tipo di problemi capita molto spesso, quindi problemi dove il vincolo non è lineare).

Consideriamo tutte le coppie $(\sigma^2, \bar{r}) \in R^2$
E consideriamo "portafogli fattibili".

Per ogni n-upla $(W_1, \dots, W_M) \in H$ ....

.... esce fuori un convesso di R^2.
.... Il rischio minimo sarà "il fianco sinistro di questo convesso". (Curva frontiera efficiente). (FOTO)

(DA RIVEDERE).

(Tutte le Tau scritte in questa lezione erano in realtà delle "R" minuscole).
(NON MALE).