Indice

1 Investments and Financial Markets **2**

1.0.1 Investment Decision . . . 2

1.0.2 Arbitrage . . . 2

1.0.3 Risk Aversion . . . 3

1.0.4 Dynamics . . . 3

1.1 Financial Markets . . . 3

1.1.1 Bonds . . . 3

1.1.2 Stocks . . . 4

1.1.3 Derivatives . . . 4

2 Single-Period Investment Models **13**

2.1 Cox-Ross-Rubinstein Toy Model (Single-Period Multiplicative Binomial Model) . . . 16

2.1.1 Parameter Calibration . . . 35

Capitolo 1

Investments and Financial Markets

By *investment*, we mean the commitment of current resources to economic or financial activity with the goal of achieving future benefits. If resources and benefits are expressed in terms of money, then the investment is characterized by a cash flow stream, which occurs at some dates from the beginning to the end of the activity. In particular, the values taken by the cash flow at the initial and terminal date of the investment are respectively known as the investment's initial and terminal cash flow. The standard convention is that the parts of the cash flow stream representing a profit [resp. a loss] for the investor are to be considered with positive [resp. negative] sign and more specifically referred to as cash *inflow* [resp. *outflow*].

Esempio 1 *Consider your bank statement in particular, the transactions: the deposits, including direct deposits, checks cashed, payments received, reimbursements, and interest earned, are shown as positive amounts and are part of the inflow; the withdrawals, including purchases, ATM withdrawals, automatic payments, checks issued, bank fees are shown as negative amounts and are part of the outflow.*

Esempio 2 *We take a loan: the amount we receive must be part of our inflow. Our periodic payments to repay the loan must be part of our outflow.*

1.0.1 Investment Decision

Comparison Principle: evaluate an investment by comparing it with other investments which are available in financial markets. Financial assets constitute the reference systems for an economic evaluation of assets.

1.0.2 Arbitrage

We say that an economic or financial activity is an *arbitrage* if it produces a non-negative [resp. positive] cash flow with probability one [resp. with positive probability] without the commitment of initial or intermediate cash flow. We will make this concept more precise in what follows. However, we give here a simple funny example of arbitrage.

Esempio 3 *Assume that, while walking a road, we spot a ticket from the current national lottery lost by a careless buyer on the sidewalk. Assume we bend down to pick the ticket up and store it in the wallet. With this action, we can win money on the draw date at no cost. If we are lucky, we will get the money. If we are not lucky, we don't get the money, but still, we lose no money out of our own pockets. To summarize, by picking up the lost ticket on the sidewalk, we can make money without running the risk of losing money. We have realized an arbitrage.*

1.0.3 Risk Aversion

Risk aversion principle - mean variance analysis - utility functions

1.0.4 Dynamics

The future price of an asset has to be regarded as a stochastic process, that is a time indexed sequence of random variables. An important part of the analysis of investments in financial assets is concerned with the characterization of this process. The predictability problem.

1.1 Financial Markets

Si definiscono *mercati finanziari* i luoghi ideali nei quali vengono scambiati strumenti finanziari di varia natura. Nel contesto economico odierno, i mercati finanziari sono chiamati a svolgere due funzioni base:

- il trasferimento di risorse all'interno dell'economia tra unità in surplus e unità in deficit;
- la mitigazione mediante diversificazione e condivisione dei rischi insiti nelle attività economiche e finanziarie.

I mercati finanziari consentono infatti il trasferimento del risparmio dai soggetti che lo accumulano (prevalentemente le famiglie) ai soggetti che lo richiedono (governi, banche, imprese,...). Questi ultimi sono definiti *soggetti in disavanzo finanziario* ed emettono strumenti finanziari (titoli di stato, depositi bancari, obbligazioni, azioni,...) che cedono ai soggetti in avanzo finanziario in cambio di moneta. Lo scambio tra strumenti finanziari e moneta consente la redistribuzione dei rischi e dei profitti economici, perché vengono assunti in parte dagli acquirenti degli strumenti finanziari. Inoltre questi ultimi possono a loro volta cedere tali strumenti ad altri soggetti economici, scambiandoli in mercati appositi. Esistono quindi varie tipologie di mercati finanziari, ognuno con proprie regole e proprie caratteristiche.

La combinazione trasferimento di risorse-redistribuzione dei rischi e dei profitti costituisce la principale funzione economica dei mercati finanziari, che consentono di realizzare un'efficiente allocazione delle risorse finanziarie ai fini della formazione del capitale produttivo. In un sistema economico, domanda ed offerta di capitale devono tendere all'equilibrio e l'investimento del capitale deve essere efficiente. I mercati finanziari svolgono una funzione essenziale per il raggiungimento di questi due obiettivi.

Occupiamoci adesso di descrivere alcuni dei più comuni strumenti finanziari.

1.1.1 Bonds

I *titoli obbligazionari (bond)* sono contratti in cui l'emittente, in cambio di un prezzo alla sottoscrizione, si obbliga a remunerare l'investitore con il valore nominale del titolo sottoscritto *(principal)* alla maturità del titolo stesso, più un eventuale dividendo sotto forma di interessi pagati periodicamente in corso di maturità, noti come *cedole* (*coupons*). I titoli obbligazionari si dividono generalmente in due tipologie: i titoli a *cedola fissa (fixed coupon)*, in particolare *senza cedola (zero coupon)*, il cui dividendo è noto con certezza al momento della sottoscrizione e i titoli a *cedola variabile (variable coupon)*, il cui dividendo alla sottoscrizione è aleatorio.

In Italia, tra i titoli obbligazionari figurano numerosi Titoli di Stato, emessi dal Ministero del Tesoro per costituire risorse finanziarie da destinare agli investimenti di pubblica utilità. Tra questi ricordiamo i BTP, acronimo per Buoni del Tesoro Poliennali, a cedola fissa, i BOT, Buoni Ordinari del Tesoro, e i CTZ, Certificati del Tesoro Zero Coupon, entrambi senza cedola. Inoltre abbiamo i CCT, Certificati di Credito del Tesoro, a cedola variabile in dipendenza dall'andamento del tasso di interesse di mercato. Sempre con la finalità di raccogliere risorse per gli investimenti, titoli obbligazionari possono essere emessi anche da imprese pubbliche e private, quali ENI, ENEL, FIAT, Telecom, ecc... Inoltre nel mercato obbligazionario italiano possono essere trattate anche obbligazioni di emittenti straniere.

1.1.2 Stocks

Con *titoli azionari* (*stock*) si intendono contratti emessi da imprese pubbliche e private, sempre con lo scopo di costituire risorse per gli investimenti, che, diversamente dai titoli obbligazionari, non impegnano l'emittente alla restituzione del debito contratto con l'investitore, ma offrono all'atto della sottoscrizione una percentuale di proprietà dell'impresa emittente stessa. Ciò comporta tuttavia il diritto dell'investitore, noto come *azionista* (*share holder*), a ricevere una remunerazione periodica costituita da una percentuale dei profitti dell'impresa, proporzionale alla percentuale di proprietà sottoscritta. Tale diritto non è però garantito, potendo essere sospeso qualora l'impresa necessiti, a giudizio della maggioranza degli azionisti, di un reinvestimento degli utili prodotti. Gli investitori che sottoscrivono titoli azionari si trovano a sopportare un rischio assai più elevato rispetto ai sottoscrittori dei titoli obbligazionari, in quanto i flussi di reddito prodotti dagli investimenti azionari sono molto più aleatori rispetto a quelli prodotti dai titoli obbligazionari. Infatti, relativamente a questi ultimi almeno il capitale inizialmente investito è garantito, a meno d'insolvenza (*default*) dell'emittente. Pertanto gli investitori in titoli azionari si attendono rendimenti molto più elevati come premio per il rischio sopportato. Il rapporto che si instaura fra l'azionista e l'impresa è un rapporto partecipativo che dipende dalle caratteristiche del titolo azionario in possesso dell'azionista. Le imprese hanno infatti la possibilità di emettere azioni di tipo diverso: oltre alle azioni ordinarie, esistono anche azioni cosiddette speciali, come le azioni privilegiate e quelle di risparmio:

- le *azioni ordinarie* attribuiscono ai loro possessori pieni diritti amministrativi, consentono quindi la partecipazione alle assemblee, sia ordinarie che straordinarie, e permettono l'esercizio del diritto di voto;

- le *azioni privilegiate* garantiscono all'azionista il diritto a una determinata quota dell'utile distribuibile prima che venga assegnato il dividendo alle azioni ordinarie. Il privilegio può anche riguardare il diritto di priorità al rimborso del capitale all'atto dello scioglimento dell'impresa. Esistono inoltre azioni privilegiate che consentono un dividendo cumulabile e quindi, entro un certo numero di anni, il recupero dei dividendi non corrisposti in precedenza per mancanza o insufficienza di utili.

- le *azioni di risparmio* possono essere emesse solo da società quotate e si differenziano dalle azioni ordinarie per la particolarità che il loro possessore non ha diritto di voto, sia in assemblea ordinaria che straordinaria, ma ha diritto ad un dividendo maggiorato rispetto all'azionista ordinario.

1.1.3 Derivatives

Gli *strumenti finanziari derivati (derivatives)*, sono così denominati perchè il loro valore deriva dal prezzo di *un'attività sottostante (underlying asset)*, che può essere costituita da *un'attività reale (commodity derivative)*, da *un'attività finanziaria (financial derivative)*, o da un *indice* sintetico dei prezzi o dei rendimenti relativo alle precedenti attività *(index derivative)*. I derivati sono distinguibili in quattro grandi famiglie: i *contratti a termine (forwards)*, i *futures*, le *opzioni (options)* e gli *swaps*. Un'ulteriore distinzione rilevante fa riferimento ai mercati nei quali tali derivati sono quotati: si distinguono derivati scambiati in mercati organizzati, *exchange traded derivatives*, e derivati negoziati fuori mercato, *over the counter derivatives*. Un vantaggio chiave delle contrattazioni over the counter è rappresentato dal fatto che le condizioni contrattuali non devono necessariamente corrispondere a quelle fissate dai mercati, ma i contraenti sono liberi di negoziare qualunque tipo di contratto risulti di reciproco interesse. Lo svantaggio maggiore è rappresentato dal rischio di credito, o più precisamente rischio d'insolvenza. C'è infatti una probabilità, per quanto piccola, che il contratto non venga onorato. Al contrario, i mercati organizzati si prefiggono lo scopo di eliminare, o quanto meno di ridurre, il rischio di credito. I contratti forwards e gli swaps sono negoziati fuori mercato, mentre i futures, proprio per le loro caratteristiche intrinseche, sono negoziati in mercati organizzati. Le opzioni sono negoziate sia nei mercati organizzati, sia *over the counter*.

Consideriamo adesso le caratteristiche principali degli strumenti derivati ed il modo in cui vengono negoziati nel mercato.

Forwards

Un *contratto a termine (forward)* è un accordo tramite il quali due contraenti, un acquirente (*buyer*) e un venditore (*seller*), si scambiano un certo sottostante (*underlying*) a una data, detta *maturità* (*maturity*), e a un prezzo, detto *prezzo di consegna (delivery price)*, che vengono concordati alla stipula dell'accordo stesso. In ciò si differenziano dai *contratti a pronti (spot)*, che hanno regolamento immediato. I forward vengono negoziati, di solito fuori mercato, tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria e uno dei suoi clienti. In questi contratti l'acquirente assume una *posizione lunga (long position)* e, alla maturità del contratto, si obbliga a comprare il sottostante dal venditore, al prezzo di consegna concordato alla stipula. Di contro, il venditore assume una *posizione corta (short position)* e, alla maturità, si obbliga a vendere il sottostante all'acquirente al prezzo di consegna. Lo scopo dei contratti forward è garantire sia all'acquirente che al venditore la copertura dal rischio derivante dalla variabilità del prezzo dell'attività sottostante dal momento della sottoscrizione alla maturità del contratto.

Esempio 4 *Supponiamo che in data* 1 *marzo* 2019*. Il tesoriere di una società statunitense sappia che tra* 6 *mesi, ossia in data* 1 *settembre* 2019*, dovrà effettuare un esborso di* £1.00 *milioni e vuole coprirsi dal rischio delle fluttuazioni del tasso di cambio che in data* 1 *marzo* 2019 *è di* 1.31559£/\$*. Il tesoriere si mette in contatto con una banca britannica e appreso che la banca è disposta a vendergli le sterline, con consegna tra* 6 *mesi, al tasso di cambio forward di* 1.32734£/\$*, cioè con la maggiorazione di* 117.5 *punti forward, accetta di entrare in un contratto per l'acquisto a termine di* £1.00 *milioni. La società si trova quindi ad avere una posizione lunga in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data* 1 *marzo* 2019 *ad acquistare in data* 1 *settembre* 2019 *la somma di* £1.00 *milioni dalla banca in cambio di* \$1.32734 *milioni. La banca si trova ad avere una posizione corta in un contratto forward sulle sterline. Si è obbligata in data* 1 *marzo* 2019 *a vendere in data* 1 *settembre* 2019 *la somma di* £1.00 *milioni alla società in cambio di* \$1.32734 *milioni. Entrambe le parti hanno assunto un* impegno vincolante (binding commitment)*. Se nel corso dei* 6 *mesi successivi alla stipula il tasso di cambio spot dovesse salire rispetto al tasso forward a, diciamo,* 1.42734£/\$*, il valore del contratto per la società sarebbe di* \$100,000*, dato che le sterline invece di essere acquistate a* \$1.42734 *milioni, verrebbero pagate* \$1.32734 *milioni. Al contrario, se nel corso dei* 6 *mesi successivi alla stipula del contratto, il tasso di cambio spot dovesse scendere rispetto al tasso forward a, diciamo,*1.22734\$/£*, il valore del contratto per la società sarebbe di* −\$100,000*, dato che il contratto forward la obbligherebbe a pagare* \$100,000 *in più rispetto al prezzo di mercato delle sterline.*

L'esempio esposto illustra un aspetto chiave della copertura mediante i contratti forward, che eliminano l'incertezza circa il costo dell'attività sottostante, o il ricavato derivante dalla vendita, ma non comportano necessariamente un risultato migliore. Dal momento che entrare in un contratto forward non comporta alcun costo, il valore finale del contratto è anche pari al profitto o alla perdita derivante dal contratto.

Futures

Un *contratto future (futures)*, al pari di un contratto forward, stabilisce tra due contraenti, un *acquirente* (*buyer*) e un *venditore* (*seller*), l'obbligo di acquistare o vendere un *titolo sottostante* (*underlying asset* o *underlying security*) a una data futura, nota come *data d'esercizio* (*exercise date*) o data di scadenza (*expiration date*) o maturità (*maturity*) e a un prezzo di consegna (*delivery price*), concordati alla stipula del contratto. Il sottostante può essere o un titolo di possesso di un bene reale (*commodity*), per esempio petrolio, oro, rame, grano, caffè, soia, e ci si riferisce a un tale future col termine *commodity futures*, o un titolo di possesso di una valuta (*currency*) denominato *currency futures*, o anche un titolo di possesso di un portafoglio di titoli (*stock portfolio*) del mercato finanziario, per esempio un indice borsistico, e in quest'ultimo caso si parla di *financial futures*. Acquistare [resp. vendere] futures significa impegnarsi ad acquistare [resp. a vendere] alla scadenza e al prezzo prefissati l'attività sottostante indipendentemente dal suo prezzo corrente di mercato (*market spot price*). Sottolineamo che per prezzo del future deve intendersi il prezzo d'esercizio. Le parti contraenti stipulano un contratto future a costo zero. Non c'è alcun esborso di denaro per entrare come acquirente in un contratto future, né tantomeno per entrarvi come venditore. Però alla maturità i contraenti sono obbligati all'acquisto o alla vendita del sottostante al prezzo d'esercizio. Il rispetto di quest'obbligo viene assicurato dall'imposizione di un *deposito di garanzia* (*futures margin*) ad ogni sottoscrittore di un contratto future proporzionale all'entità del contratto sottoscritto. Ovviamente l'acquisto di futures corrisponde ad una aspettativa da parte dell'acquirente di rialzo dell'attività sottostante; la vendita, invece, sottende un'aspettativa del venditore al ribasso. A differenza dei forward, i future sono di norma trattati in un mercato finanziario. Per rendere possibili le negoziazioni, il mercato standardizza certi aspetti del contratto. La standardizzazione consiste nella definizione del taglio unitario, della scadenza contrattuale e delle modalità che regolano i flussi finanziari tra le parti contraenti a garanzia del buon fine del contratto. Non è possibile negoziare futures che non soddisfino questi requisiti. Inoltre, dal momento che nel caso di contratti futures i due contraenti sono generalmente ignoti l'uno all'altro, viene anche fornito un meccanismo che assicura il rispetto del contratto da parte dei due contraenti. Infatti, tutti i contratti vengono stipulati di fatto con la *Cassa di Compensazione e Garanzia (Exchange Clearinghouse)*. Questa è in genere una società per azioni avente un oggetto sociale esclusivo che le impone di assicurare il buon fine dei contratti future e di emanare regolamenti che disciplinano l'operatività del mercato di propria competenza. Quindi il prezzo di consegna dei future non è concordato tra le singole parti, ma è univocamente determinato sul *floor* del mercato organizzato in base alla legge della domanda e dell'offerta. Pertanto, è anche noto come *prezzo del future* (*futures price*). Se ci sono più investitori che vogliono assumere posizioni lunghe rispetto a quelli che vogliono assumere posizioni corte, il prezzo sale. Viceversa, il prezzo scende. La circostanza che i contratti futures rispettino degli standard e vengano stipulati con la Cassa di Compensazione rende possibile il loro annullamento tramite compensazione, ossia stipulando un contratto di segno opposto all'originale. In questo modo verrà evitata la consegna dell'attività sottostante il contratto. Infatti, acquistando un future con intenzioni speculative sarà essenziale effettuarne la vendita prima della scadenza contrattuale; se, invece, le intenzioni fossero di tipo assicurativo,ossia di copertura (*hedge*), per garantirsi un prezzo futuro certo di acquisto o vendita del sottostante, si aspetterà la scadenza prevista per provvedere all'acquisto o vendita del sottostante al prezzo stabilito.

Il mercato dei futures offre agli speculatori un'interessante *leva finanziaria (financial leverage)*. Cerchiamo di chiarire meglio questo concetto mediante l'esempio seguente.

Esempio 5 *Consideriamo uno speculatore che in data* 1 *marzo* 2019 *ritenga che nei prossimi* 6 *mesi la sterlina si rafforzerà rispetto al dollaro ed è pronto a scommettere sulla sua intuizione la somma di* $\$250,000$. *Lo speculatore potrebbe semplicemente comprare l'equivalente in sterline di* $\$250,000$ *al prezzo spot sperando di conseguire un profitto quando le riconvertirà in dollari. Le sterline, una volta acquistate, verrebbero depositate in un conto fruttifero ed eventualmente rivendute tra* 6 *mesi. Ipotizziamo che il tasso di cambio spot in data* 1 *marzo* 2019 *sia* $1.31559£/\$$. *L'acquisto al prezzo spot darebbe allo speculatore il possesso immediato di* $£190,029$, *per cui se tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a, diciamo,* $1.42734£/\$$ *[resp.* $1.22734\$/£$*], lo speculatore avrebbe guadagnato [resp. perso]* $\$21,236$ *[resp.* $\$16.770$*]. Un'altra possibilità è quella di assumere una posizione lunga sulla sterlina con* 4 *contratti futures standard a* 6 *mesi (ogni future standard comporta l'acquisto di* $£62,500$*) sapendo che il tasso futures a* 6 *mesi sia di* $1.32734£/\$$. *Se tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a* $1.42734£/\$$, *i futures consentirebbero allo speculatore di comprare a* $\$1.32734$ *un bene che varrebbe* $\$1.42734$, *con un* *conseguente profitto di* £$25,000$*. Qualora però tra* 6 *mesi il tasso di cambio risultasse pari a* 1.22734£/\$*, lo speculatore, costretto a comprare a* \$$1.32734$ *un bene che varrebbe* \$$1.22734$*, avrebbe perso* £$25,000$*. Le alternative sembrano quindi dare origine a profitti o perdite lievemente differenti, ma questi calcoli non tengono conto degli interessi che si incassano o si pagano. Infatti, quando si considerano gli interessi percepiti sulle sterline depositate nel conto fruttifero e quelli persi sui dollari vincolati nel deposito di garanzia, i profitti o le perdite derivanti dalle due alternative risultano approssimativamente uguali. In definitiva, la differenza tra le due alternative è rappresentata esclusivamente dal fatto che l'acquisto di sterline a pronti richiede un investimento iniziale di* \$$250,000$*, mentre l'acquisto dei futures richiede solo che lo speculatore effettui un deposito di garanzia di circa* \$$30,000$*.*

Options

Il *contratto di opzione* (*option*) è un contratto tra due contraenti, un *titolare (holder)* ed un *garante (writer)*, che sancisce l'acquisizione di un diritto e l'assunzione di un obbligo. Grazie alla stipula di un contratto di opzione il titolare, dietro la corresponsione di un *premio (prime)*, acquisisce il diritto di acquistare dal garante, nel caso di *opzione d'acquisto (call option)*, o di vendere al garante, nel caso di *opzione di vendita (put option)*, un attivo finanziario rischioso, *titolo sottostante (underlying risky asset* o *underlying security)*, entro un *scadenza (maturity* o *expiration)* e a un *prezzo d'esercizio (exercise* o *strike price)* pattuiti all'atto della stipula del contratto. Si dice che il titolare assume una *posizione lunga (long position)* sull'opzione. Il garante, in cambio del premio, si obbliga a soddisfare alla scadenza il titolare del diritto d'opzione. Si dice che il garante assume una *posizione corta (short position)* sull'opzione. Differentemente da un contratto forward o futures in cui le parti contraenti sono entrambe obbligate a onorarlo. Un contratto d'opzione garantisce al titolare il diritto di acquistare o vendere senza obbligo d'esercitarlo. Al contrario il garante è obbligato a farsi carico dell'eventuale esercizio dell'opzione da parte del titolare. Inoltre, mentre la negoziazione di contratti forward o future non implica alcun costo, fatta eccezione per il deposito di garanzia nel caso dei future, l'acquisto di un'opzione richiede un pagamento immediato. Da notare che chi acquista un'opzione call scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sopra del prezzo d'esercizio, ossia assume una *posizione rialzista* (*bullish position*) sul sottostante, mentre chi vende l'opzione call assume una *posizione ribassista* (*bearish position*). Viceversa, chi acquista un'opzione put scommette che entro la scadenza il prezzo spot del sottostante vada al di sotto del prezzo d'esercizio, ossia assume una posizione ribassista sul sottostante, mentre chi vende l'opzione put assume una posizione rialzista. Le opzioni sono negoziabili sia nei mercati over the counter, sia nei mercati organizzati: si tratta in quest'ultimo caso delle cosiddette *listed options*. Il funzionamento dei mercati organizzati è in larga misura simile a quello dei mercati dei future. Le opzioni più comunemente trattate sono le *opzioni americane (american options)* possono essere esercitate in qualsiasi momento antecedente alla data di scadenza. Le opzioni di più semplice modellizzazione matematica sono le *opzioni europee (european options)* che possono essere esercitate solo alla data di scadenza.

Esempio 6 *Consideriamo un contratto di opzione call europea su* 100 *azioni Amazon in data di sottoscrizione* 01 *marzo* 2019*, con scadenza* 21 *giugno* 2019 *e prezzo d'esercizio di* \$$1,700$ *(per azione). Con la titolarità di questo contratto ottieniamo il diritto di acquistare* 100 *azioni Amazon in data* 21 *giugno* 2019 *dal sottoscrittore pagandole* \$$1,700$ *l'una. Ci sono due possibili scenari futuri, secondochè il prezzo spot del titolo Amazon alla scadenza vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno un prezzo spot superiore a* \$$1,700$*, ad esempio* \$$1,896.17$*, allora esercitiamo il diritto di opzione, compramo dal sottoscrittore del contratto le* 100 *azioni, pagandole* \$$170,000$*, e le rivendiamo all'istante sul mercato a* \$$189,617$*. Il guadagno è quindi di* \$$19,617$ *al quale va tuttavia sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto;*
- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno un prezzo spot inferiore a* \$$1,700$ *(o uguale), allora non esercitamo il diritto di opzione, in quanto esercitandolo ci troveremmo a comprare al prezzo*

di $1,700 *delle azioni che sul mercato valgono di meno. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.*

Come si vede dall'esempio, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione call deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio. Da notare anche che mentre l'acquisto di un'opzione call consente, in linea di principio, guadagni illimitati, la vendita di un'opzione call può causare perdite illimitate. Ciò è illustrato dai due grafici seguenti

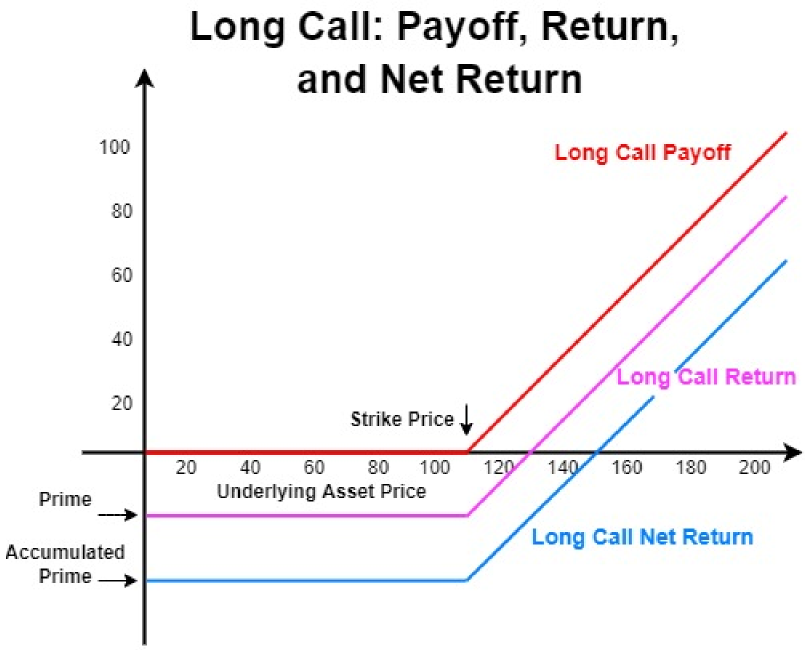

Figura 1.1: Payoff per una posizione lunga su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della call.

Presentiamo adesso un esempio analogo riferito alle opzioni put.

Esempio 7 *Consideriamo un contratto di opzione put europea su* 100 *azioni Amazon in data di sottoscrizione* 05 *marzo* 2019 *con scadenza* 21 *giugno* 2019 *e prezzo d'esercizio* $1,700 *(per azione). Sottoscrivendo questo contratto ottieniamo il diritto di vendere* 100 *azioni Amazon in data* 21 *giugno* 2019 *al prezzo di* $1,700 *l'una. Anche in questo caso ci sono due possibili scenari futuri, secondochè alla scadenza il prezzo spot del titolo Amazon vada sopra oppure sotto il prezzo d'esercizio:*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno, un prezzo spot inferiore a* $1,700*, ad esempio* $1,496.17*, allora compriamo sul mercato le* 100 *azioni pagandole* $149,617 *e, esercitando il diritto di opzione, le rivendiamo all'istante al sottoscrittore del contratto a* $170,000*. Il guadagno è quindi di* $20.383 *ai quali va ancora sottratto il premio pagato inizialmente per entrare nel contratto.*

- *al* 21 *giugno* 2019 *le azioni Amazon hanno, un prezzo spot superiore a* $1,700 *(o uguale), allora rinunciamo a esercitare il diritto di opzione, perchè esercitandolo ci troveremmo a vendere al prezzo di* $1,700 *delle azioni che sul mercato valgono di più. Quindi ci limitiamo a perdere il premio versato per entrare nel contratto.*

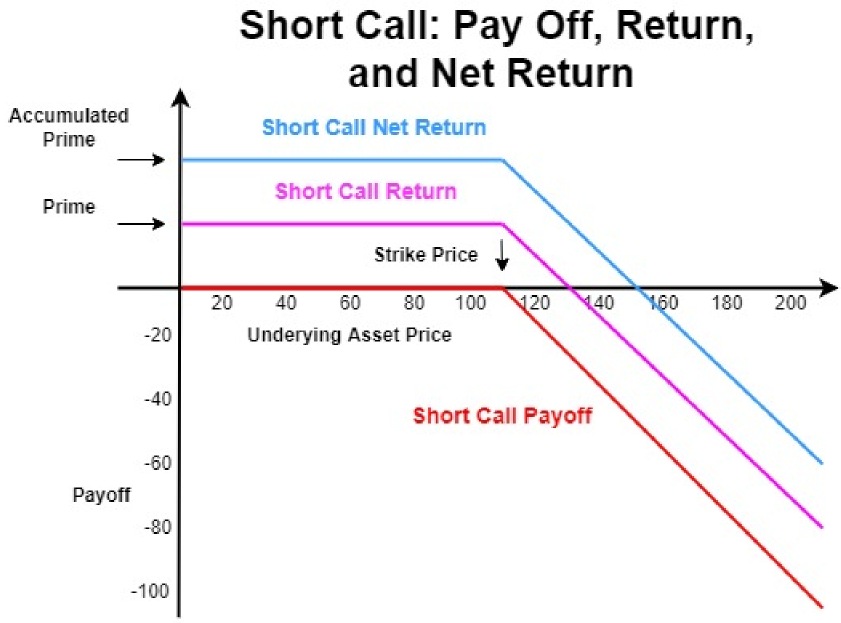

Figura 1.2: Payoff per una posizione corta su una call option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della call. In ordinata i possibili payoff del venditore della call.

Simmetricamente al caso delle call, per ottenere un guadagno, l'acquirente dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sotto del prezzo d'esercizio, mentre il venditore dell'opzione put deve sperare che il prezzo spot alla scadenza si attesti al di sopra del prezzo d'esercizio. Tuttavia, differentemente dalle opzioni call, l'acquisto di un'opzione put non permette guadagni superiori alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il premio e la vendita di un'opzione put non può causare perdite superiori alla differenza tra il premio e il prezzo d'esercizio.

Da notare che i payoff delle opzioni put e call europee o americane dipendono solo dal valore che il sottostante assume alla data d'esercizio e non dal suo andamento fino a tale data. Nei mercati reali, dove si opera prevalentemente in modalità telematica, l'acquisto di un contratto call [resp. put] è del tutto equivalente ad una scommessa: se il prezzo spot alla scadenza e maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio viene pagato subito il guadagno, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si perde il premio. Analogamente in caso di vendita di un contratto call [resp. put]: se il prezzo spot alla scadenza e maggiore [resp. minore] del prezzo d'esercizio si paga subito la perdita, se è minore [resp. maggiore] o uguale al prezzo d'esercizio si guadagna il premio. In genere i prezzi d'esercizio sono vicini alle quotazioni giornaliere dei sottostanti e ci danno quindi un'idea delle aspettative degli operatori sulle possibilità di rialzo o di ribasso degli stessi. In particolare un'opzione call o put è detta *at the money* [resp. *near the money*] quando il prezzo d'esercizio è uguale [resp. vicino] al prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *in the money* quando il prezzo d'esercizio è minore [resp. maggiore] del prezzo corrente del sottostante. Un'opzione call [resp. put] è detta *out of the money* quando il prezzo d'esercizio è maggiore [resp. minore] del prezzo corrente del sottostante.

In base a queste caratteristiche, mentre le opzioni forniscono agli speculatori una vera e propria leva finanziaria che permette di amplificare i rendimenti di un investimento nel mercato finanziario, le stesse opzioni possono realizzare una copertura assicurativa contro il rischio di mercato.

Esempio 8 *Il* 05 *marzo* 2019 *uno speculatore vuole assumere una posizione lunga sulle azioni Amazon*

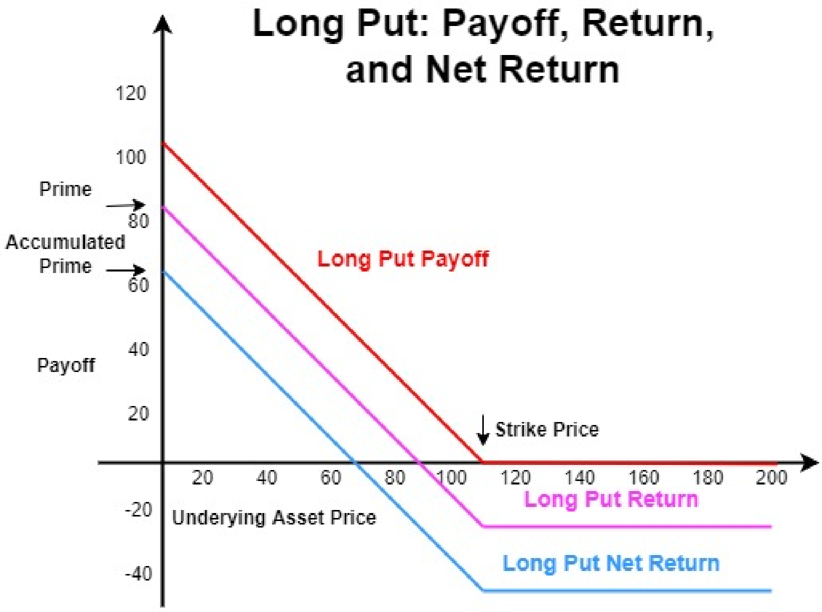

Figura 1.3: Payoff per una posizione lunga su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff dell'acquirente della put.

quotate al prezzo di \$1,696.17*, ritenendo molto probabile che il loro prezzo salga nei successivi mesi. Il* 05 *marzo* 2019 *una call europea con scadenza* 21 *giugno* 2019 *con prezzo d'esercizio di* \$1,700 *è quotata a* \$102,95*. Nell'ipotesi in cui abbia una disponibilità d'investimento pari a* \$169.617*, lo speculatore ha a disposizione due alternative: la prima consiste semplicemente nell'acquisto di* 100 *azioni; la seconda consiste nell'investimento di* \$164.000 *per l'acquisto di* 16 *contratti di* 100 *opzioni l'uno per un totale di* 1,600 *opzioni. Supponiamo che l'intuizione dello speculatore sia corretta e che le azioni Amazon si apprezzino effettivamente, ad esempio, fino a* \$1,896.17 *alla scadenza. La prima alternativa, consistente nel comprare le azioni, comporterebbe un profitto di* $100 \times \$200 = \$20,000$*. La seconda alternativa è molto più redditizia. Un'opzione call sulle Amazon, con prezzo d'esercizio di* \$1,700*, comporterebbe un ricavo di* \$196.17 *a opzione, consentendo di acquistare a* \$1,700 *l'azione che varrebbe sul mercato* \$1,896.17*. Il valore complessivo di tutte le opzioni comprate sarebbe allora pari a* $1,600 \times \$196.17 = \$313,872$*. Pertanto, sottraendo il costo originale sostenuto per l'acquisto delle opzioni, il profitto sarebbe pari a* $\$313,872 - \$164.000 = \$149.872$*. La strategia d'acquisto delle opzioni risulterebbe essere molto più redditizia della strategia consistente nell'acquisto delle azioni. Naturalmente, le opzioni comportano anche maggiori perdite potenziali. Supponiamo che il prezzo dell'azione ribassi, ad esempio sino a* \$1,496.17*, alla scadenza. La prima strategia comporterebbe una perdita di* $100 \times \$200 = \$20,000$*, mentre la strategia mediante opzioni, che scadrebbero senza essere state esercitate, causerebbe una perdita di* \$164.000*, ossia il premio originariamente pagato.*

Esempio 9 *Consideriamo un investitore che il* 05 *marzo* 2019*, scommettendo sul rialzo nei prossimi mesi delle azioni Amazon, decida di comprarne* 100 *al prezzo corrente di* \$1,696.17 *per azione. L'investitore, più prudente dello speculatore, decide di cautelarsi dal rischio che presenta il suo investimento comprando allo stesso tempo* 100 *opzioni put europee sulle azioni Amazon a scadenza* 21 *giugno* 2019 *con prezzo d'esercizio di* \$1,700*. In data il* 05 *marzo* 2019 *il premio per l'opzione put con tale prezzo d'esercizio è di* \$95.94*. Nel caso in cui le azioni Amazon dovessero effettivamente apprezzarsi sul mercato, ad esempio fino a* \$1,896.17*, l'investitore non eserciterà le opzioni ed incasserà il prezzo di mercato delle azioni realizzando così un profitto pari alla differenza tra l'incremento di valore di mercato delle azioni ed il premio pagato per l'acquisto delle opzioni per un totale di* $\$20,000 - \$9,594 = \$10,406$*. Invece, nel caso in cui il titolo dovesse deprezzarsi sul mercato, ad esempio sino a* \$1,496.17*, l'investitore*

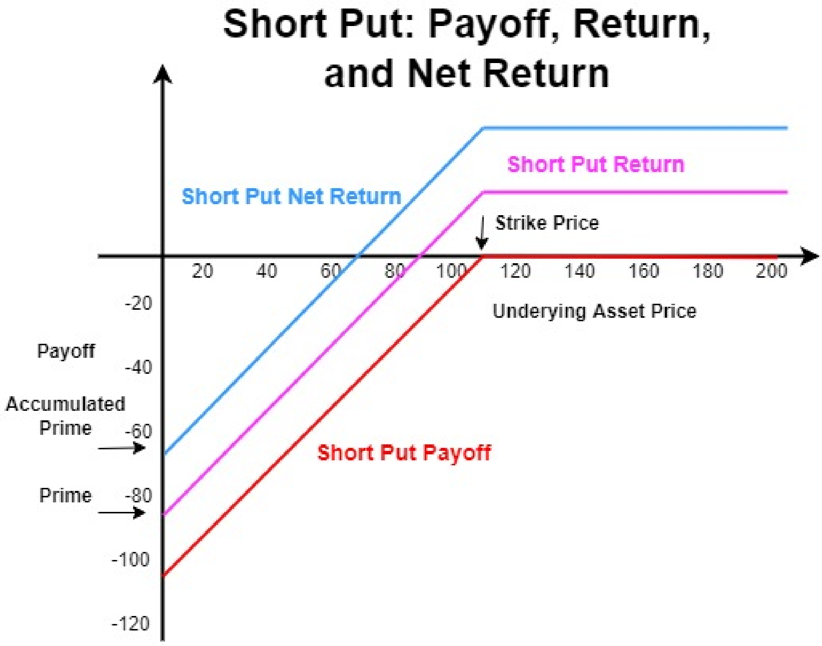

Figura 1.4: Payoff per una posizione corta su una put option. In ascissa i possibili prezzi spot dell'asset al momento d'esercizio della put. In ordinata i possibili payoff del venditore della put.

avrebbe modo di esercitare le sue opzioni put, limitando la sua perdita al costo del premio unitamente all'eventuale differenza tra il prezzo pagato per acquistare le azioni e lo strike delle opzioni per un totale di $\$9,594 - \$383 = \$9,166$*, invece della perdita di* $100 \times \$200 = \$20,000$ *che subirebbe se non avesse comprato le opzioni put.*

Le opzioni call e put sin qui descritte vengono chiamate *plain vanilla* e rappresentano la più semplice tipologia di contratto d'opzione, combinando tra di loro calls e puts si possono definire derivati *non standard* anche molto complicati.

Nelle prossime sezioni entreremo in maggior dettaglio nella presentazione dei contratti d'opzione nell'ambito di semplici modelli matematici di mercato finanziario.

Swaps

I *contratti swaps* sono accordi privati tra una società ed una banca, ma anche tra due società, per scambiarsi dei futuri pagamenti. L'accordo definisce le date in cui i pagamenti vengono scambiati ed il modo in cui devono essere calcolati. Di solito la loro determinazione viene effettuata in base al futuro valore di un tasso d'interesse, un tasso di cambio o qualche altra variabile di mercato.

Il più comune tipo di *swap sul tasso d'interesse (interest rate swap)* è chiamato *plain vanilla*. In questo contratto, una società si impegna a pagare ad un'altra, per un certo numero di anni ed in base a un capitale di riferimento detto *capitale nozionale (notional principal)*, un tasso d'interesse fisso predeterminato. A sua volta, la controparte si impegna a pagare un tasso d'interesse variabile sullo stesso capitale, per lo stesso numero di anni. I pagamenti a tasso variabile vengono calcolati in funzione dell'andamento nel tempo di un prefissato indice di riferimento, che per lo più è rappresentato dal *London InterBank Offer Rate (Libor)*, ovvero il tasso al quale le Banche Centrali offrono fondi ad altre banche nel mercato delle eurovalute.

Esempio 10 *Supponiamo che il* 5 *marzo* 2004 *Microsoft Europe si impegni a pagare per* 3 *anni alla Bank of England un tasso del* 5% *per cento annuo su un capitale nozionale di* £100 *milioni ed in cambio* *la Bank of England si impegni a pagare a Microsoft il Libor a* 6 *mesi sullo stesso capitale nozionale e per la stessa durata triennale. Supponiamo che i pagamenti vengano scambiati ogni* 6 *mesi e che il tasso d'interesse del* 5% *sia composto semestralmente. Il primo scambio di pagamenti ha luogo il* 5 *settembre* 2004*, sei mesi dopo la stipula del contratto. Microsoft paga alla Bank of England* £2, 5 *milioni. Questi sono gli interessi su un capitale di* £100 *milioni al tasso annuo del* 5% *per cento. Di contro la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di* \$100 *milioni al Libor a* 6 *mesi osservato sei mesi prima del* 5 *settembre* 2004*, ossia esattamente il* 5 *marzo* 2004*. Supponiamo che il* 5 *marzo* 2004 *il Libor a* 6 *mesi sia pari al* 4, 2%*. Quindi la Bank of England paga a Microsoft* £2, 1 *milioni. Si noti che non c'è incertezza circa il primo scambio di pagamenti, dato che il pagamento variabile è determinato in base al Libor osservato nel momento in cui il contratto viene stipulato. Il secondo scambio di pagamenti ha luogo il* 5 *marzo* 2005*, un anno dopo la stipula del contratto. Microsoft paga* £2, 5 *milioni alla Bank of England e la Bank of England paga a Microsoft gli interessi su un capitale di* £100 *milioni in base al Libor a* 6 *mesi osservato sei mesi prima del* 5 *marzo* 2004*, ossia il* 5 *settembre* 2004*. Supponiamo che il* 5 *settembre* 2004 *il Libor a* 6 *mesi sia pari al* 4, 8%*, allora la Bank of England paga a Microsoft un importo pari a* £2, 4 *milioni. In totale lo swap comporta sei scambi di pagamenti. I pagamenti fissi sono sempre uguali a* \$2, 5 *milioni. I pagamenti variabili vengono determinati in base al Libor a* 6 *mesi, osservato sei mesi prima di ciascuna scadenza di pagamento. Ovviamente, gli swaps su tassi d'interesse sono strutturati in modo che una delle due parti remuneri l'altra solo la differenza tra i due pagamenti. Nell'esempio in questione, Microsoft paga alla Bank of England* £0, 4 *milioni il* 5 *settembre* 2004 *e* £0, 1 *milioni il* 5 *marzo* 2005*. Si noti che il capitale viene usato solo per determinare l'importo degli interessi, esso non viene scambiato. Questo è il motivo per cui viene chiamato capitale nozionale.*

L'esempio presentato evidenzia come lo swap possa essere considerato a tutti gli effetti lo scambio di un titolo a tasso fisso contro un titolo a tasso variabile. La posizione di Microsoft Europa è lunga su un titolo a tasso variabile ed è corta su un titolo a tasso fisso. La Bank of England è lunga su un titolo a tasso fisso ed è corta su un titolo a tasso variabile. Questa caratterizzazione dei pagamenti previsti dallo swap aiuta a spiegare perché il tasso variabile dello swap venga fissato sei mesi prima del pagamento. Gli interessi pagati sui titoli a tasso variabile sono in genere fissati all'inizio del periodo al quale si riferiscono e vengono pagati alla fine dello stesso. Gli interest rate swaps più comuni vengono pertanto costruiti nel modo illustrato dall'esempio. Chiaramente gli swaps sui tassi d'interesse sono strumenti finanziari che consentono ad uno dei due contraenti di tutelarsi dall'incertezza sulla variabilità del tasso di cambio e all'altro di speculare proprio su questa variabilità.

Capitolo 2

Single-Period Investment Models

By *single-period investment* we mean any investment characterized by a cash flow stream which occurs only at two dates: an *initial* or *present* date and a *terminal* or *future* date. The difference between the terminal and the initial date of an investment is called the *maturity* of the investment.

For simplicty, write $t = 0$ [resp. $t = T$] for the initial [resp. terminal] date of a single-period investment and write X_0 [resp. X_T] for the *initial* or *present* [resp. *terminal* or *future*] cash flow of the investment. In this case the maturity is just the terminal date of the investment. The amount of the initial cash flow, also referred to as *principal* in a single-period investment perspective, is observed at the present date. Hence, with reference to the present date, the initial cash flow is usually considered as certain and may be represented by a real number, that is a Dirac random variable, $X_0 \tilde{} Dir\,(X_0)$, concentrated on the amount of the cash flow. On the contrary, the value of the terminal cash flow, also termed *payoff* in a single-period investment perspective, is observed at the future date. Therefore, at the present date, the terminal cash flow should be considered as uncertain and should be represented by a real random variable X_T, defined on some probability space Ω. Depending on whether the state space $X_T\,(\Omega)$ is countable or continuous, we will speak of *countable* or *continuous space state model.* However, in some cases, it may be convenient to consider also the payoff of an investment as certain. For instance, this is the case of the payoff generated by investments in deposits of several US banks or investments in the US Treasury Bills. In fact, in these cases the uncertainty in the payoff of the investment is only due to a possible default of the depositary bank or the USA. However, the Federal Deposit Insurance Corporation provides deposit insurance that guarantees the deposit of member banks for at least $\$250,000$ per depositor, per bank and the eventuality of defaul of the USA is considered to be rather unlikely.

Esempio 11 *Website cost and banners*

From now on, let us assume that the principal X_0 of the single period investment considered is actually certain and the payoff X_T at maturity T is a real random variable.

Definizione 12 *In a forward-looking perspective, we call the* return *or* interest *of the investment at maturity T the difference betweeen the payoff and the principal, that is the random variable*

$$R_T \overset{def}{=} X_T - X_0. \tag{2.1}$$

An interest may be either positive or negative. Accordingly, when $X_0 > 0$, it is called profit *or* loss.

Definizione 13 *Assume that $X_0 \neq 0$. We call the* rate of return *or* rate of interest *of the investment at maturity T the ratio betweeen the interest and the principal, that is the random variable*

$$r_T \overset{def}{=} \frac{R_T}{X_0}. \tag{2.2}$$

Note that the term *interest* [resp. *rate of interest*] rather than *return* [resp. *rate of return*] is more commonly used with reference to investment in loans such as bank deposit, bonds or even private loans.

Definizione 14 *Assume that $X_0 \neq 0$. We call the* accumulation factor *of the investment at maturity T the ratio betweeen the payoff and the principal, that is the random variable*

$$a_T \stackrel{def}{=} \frac{X_T}{X_0}. \tag{2.3}$$

Osservazione 15 *Assume that $X_0 \neq 0$. We clearly have*

$$X_T = X_0 + R_T, \qquad r_T = \frac{X_T - X_0}{X_0}, \qquad R_T = r_T X_0, \qquad X_T = a_T X_0. \tag{2.4}$$

In addition,

$$a_T = 1 + r_T. \tag{2.5}$$

Proof. To prove (2.5), observe that, combinining (2.3), (2.1), (2.2), and simplifying the term X_0, we obtain

$$a_T = \frac{X_T}{X_0} = \frac{X_0 + R_T}{X_0} = \frac{X_0 + r_T X_0}{X_0} = 1 + r_T,$$

as claimed. □

Definizione 16 *In a backward-looking perspective, we call the* discount *generated by an investment at maturity T again the difference betweeen the payoff and the principal. Despite from a mathematical point of view the discount cannot be distinguished by the interest, from an economic or financial point of view distinguishing between the discount and the interest is rather useful. Therefore, for the discount is commonly used a different notation. We also follow this practice and denote the discount at the terminal date T by S_T. As a consequence,*

$$S_T \stackrel{def}{=} X_T - X_0. \tag{2.6}$$

Definizione 17 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We call the* rate of discount *of an investment at maturity T the ratio betweeen the discount and the payoff, that is the random variable*

$$s_T \stackrel{def}{=} \frac{S_T}{X_T}. \tag{2.7}$$

Definizione 18 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We call the* discount factor *of the investment at maturity T the ratio betweeen the principal and the payoff, that is the random variable*

$$d_T \stackrel{def}{=} \frac{X_0}{X_T}. \tag{2.8}$$

Osservazione 19 *Assume that $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. We clearly have*

$$X_0 = X_T - S_T, \qquad s_T = \frac{X_T - X_0}{X_T}, \qquad S_T = s_T X_T, \qquad X_0 = d_T X_T. \tag{2.9}$$

In addition,

$$d_T = 1 - s_T. \tag{2.10}$$

Proof. To prove (2.10), observe that

$$d_T = \frac{X_0}{X_T} = \frac{X_T - S_T}{X_T} = \frac{X_T - s_T X_T}{X_T} = 1 - s_T,$$

as claimed. □

Osservazione 20 *Assume that* $X_0 \neq 0$ *and* $\mathbf{P}(X_T = 0) = 0$. *We have*

$$a_T d_T = 1. \tag{2.11}$$

Equivalently,

$$(1 + r_T)(1 - s_T) = 1. \tag{2.12}$$

As a consequence

$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}. \tag{2.13}$$

Proof. To prove Equation (2.11), we just apply Equations (2.3) and (2.8). Thus,

$$a_T d_T = \frac{X_T}{X_0}\frac{X_0}{X_T} = 1.$$

Now, combining the latter with (2.10) and (2.10) we obtain Equation (2.12). In the end, Equation (2.13) clearly follows from (2.12). $\square$

$$R_T = X_T - X_0, \qquad r_T = \frac{R_T}{X_0} = \frac{X_T - X_0}{X_0}, \qquad a_T = \frac{X_T}{X_0} = 1 + r_T$$
$$S_T = X_T - X_0, \qquad s_T = \frac{S_T}{X_T} = \frac{X_T - X_0}{X_T}, \qquad d_T = \frac{X_0}{X_T} = 1 - s_T$$

$$R_T = S_T, \qquad a_T d_T = 1, \qquad (1 + r_T)(1 + s_T) = 1,$$
$$s_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \qquad r_T = \frac{s_T}{1 - s_T}$$

2.1 Cox-Ross-Rubinstein Toy Model (Single-Period Multiplicative Binomial Model)

Consideriamo un mercato finanziario uniperiodale dove al tempo $t = 0$ sia possibile investire in un titolo non rischioso, cui ci riferiremo come *bond* e denoteremo con la lettera B, in un titolo rischioso, cui ci riferiremo come *stock* e denoteremo con S, e in titoli derivati di sottostante lo stock, di volta in volta variamente nominati e denotati. A titolo d'esempio possiamo pensare che B ed S corrispondano rispettivamente a un'obbligazione e a un'azione e i derivati a opzioni call o put sull'azione. Assumiamo anche la possibilità di investire in portafogli composti in varie proporzioni mediante il bond, lo stock e i derivati. Al tempo $t = T$, raggiunta la maturità (*maturity*), l'investimento effettuato al tempo $t = 0$ viene liquidato, l'eventuale ricchezza prodotta viene consumata o l'eventuale debito contratto va ripagato. Assumiamo inoltre la validità di alcune ipotesi di natura finanziaria che nella realtà sono solo approssimativamente verificate, senza peraltro grave nocumento alle risultanze del modello. Nello specifico assumiamo che:

1. i tassi di rendimento relativi alle operazioni di prestito e deposito siano gli stessi;

2. gli investimenti possano essere effettuati senza alcuna limitazione quantitativa, in altri termini sia possibile operare su una qualunque frazione di bond, stock e derivati rispetto all'unità di moneta fissata;

3. i costi di transazione siano nulli;

4. le vendite allo scoperto sul bond, sullo stock e sui derivati siano totalmente libere.

Cominciando a focalizzare l'attenzione sul bond e sullo stock, denotiamo con B_0 ed S_0 [resp. B_T ed S_T] i valori di mercato delle unità di bond e di stock al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$] e denotiamo con r_f il tasso di rendimento dell'investimento sul bond alla maturità. In questo caso il valore B_T dell'investimento al tempo $t = T$ sarà semplicemente dato da

$$B_T = (1 + r_f)B_0. \tag{2.14}$$

Di contro il valore S_T prodotto dall'investimento nello stock al tempo $t = T$ è da ritenersi aleatorio, tratteremo quindi S_T quale variabile aleatoria. Come vedremo, la peculiarià del modello "giocattolo" di Cox, Ross e Rubinstein è proprio nella semplice, ma non semplicistica, modellizzazione della variabile aleatoria S_T.

Proposizione 21 *Stante la (2.14), una somma di denaro di valore M_0 al tempo $t = 0$ ha valore*

$$M_T = (1 + r_f)M_0 \tag{2.15}$$

al tempo $t = T$. Viceversa, una somma di denaro di valore M_T al tempo $t = T$ ha valore

$$M_0 = \frac{M_T}{1 + r_f} \tag{2.16}$$

al tempo $t = 0$.
Proof. *La disponibilità di denaro M_0 al tempo $t = 0$ consente l'acquisto di*

$$x = \frac{M_0}{B_0}$$

unità di bond con valore di mercato B_0. La liquidazione di questo investimento alla maturità $t = T$ produce un ammontare M_T secondo la formula

$$M_T = xB_T = \frac{M_0}{B_0}(1 + r_f)B_0 = M_0(1 + r_f).$$

Viceversa, volendo produrre un ammontare M_T al tempo $t = T$, è necessario liquidare

$$x = \frac{M_T}{B_T}$$

unità bond di valore di mercato B_T. D'altra parte l'acquisto di tali unità di bond al tempo $t = 0$ richiede l'investimento di una somma di denaro M_0 pari a

$$M_0 = xB_0 = \frac{M_T}{B_T}B_0 = \frac{M_T}{B_0(1 + r_f)}B_0 = \frac{M_T}{1 + r_f}.$$

□

Da notare che in conseguenza della Proposizione 21, gli acquisti e le vendite allo scoperto del bond diventano del tutto equivalenti a depositi e scoperti su un conto bancario.

Supponiamo adesso che tutta l'incertezza circa il futuro dell'investimento in stock abbia semplicemente carattere bivalente; cioè che in relazione al take investimento si possano realizzare solamente un esito positivo o un esito negativo. In questo caso l'incertezza è rappresentabile da una variabile aleatoria bernoulliana, che denotiamo con β, definita su un opportuno spazio di probabilità Ω, suscettibile di prendere al tempo $t = T$ i due soli valori u (*up*) e d (*down*), con $u > d$, secondoché per l'investimento in stock si realizzi l'esito positivo o quello negativo. In simboli,

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & \mathbf{P}(\beta = u) \equiv p, \\ d, & \mathbf{P}(\beta = d) \equiv q, \end{cases}$$

essendo $\mathbf{P}(\beta = u)$ [risp. $\mathbf{P}(\beta = d)$] la probabilità oggettiva che si realizzi il valore u [risp. d] di β ed essendo $q = 1 - p$. Con questa modellizazione dell'incertezza una delle scelte naturali per la rappresentazione del valore S_T dell'investimento rischioso al tempo T è data da

$$S_T \stackrel{\text{def}}{=} \beta S_0. \tag{2.17}$$

Questa scelta conduce al cosiddetto *modello uniperiodale binomiale moltiplicativo* di Cox, Ross e Rubinstein, noto anche come *CRR Toy Model*, che, come vedremo più avanti, si presta anche a un semplice e ricco sviluppo multiperiodale, persino confrontabile con il celebre modello di Black & Scholes. Come immediata conseguenza della (2.17) abbiamo

$$S_T = \begin{cases} S_T^+ \equiv uS_0, & \mathbf{P}(S_T = S^+) \equiv p, \\ S_T^- \equiv dS_0, & \mathbf{P}(S_T = S^-) \equiv q, \end{cases}.$$

Proposizione 22 *L'attesa e la varianza di S_T sono rispettivamente date da*

$$\mathbf{E}[S_T] = (up + dq)S_0, \tag{2.18}$$

e

$$\mathbf{D}^2[S_T] = (u - d)^2 pq S_0^2, \tag{2.19}$$

essendo $\mathbf{E}[\cdot]$ *e* $\mathbf{D}^2[\cdot]$ *gli operatori di* speranza *e* varianza *relativi alla distribuzione di probabilità* (p, q).
Proof. *Abbiamo infatti*

$$\mathbf{E}[S_T] = S_T^+ p + S_T^- q = uS_0 p + dS_0 q = (up + dq)S_0$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2[S_T] &= \mathbf{E}[S_T^2] - \mathbf{E}[S_T]^2 \\ &= u^2 S_0^2 p + d^2 S_0^2 q - (up + dq)^2 S_0^2 \\ &= (u^2 p(1-p) + d^2 q(1-q) - 2udpq)S_0^2 \\ &= (u^2 + d^2 - 2ud)pqS_0^2 \\ &= (u - d)^2 pq S_0^2.\end{aligned}$$

□

Ricordiamo che la *rischiosità* di S_T è strettamente legata alla sua varianza. Minore la varianza, minore la rischiosità. La relazione tra rischio e varianza viene colta dalla celebre disuguaglianza di Tchebychev, valida per ogni variabile aleatoria X dotata di momento del secondo ordine $\mathbf{E}[X^2]$ finito. Per una tale variabile aleatoria, indipendentemente dalla sua distribuzione, risulta

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}^2[X]}{\varepsilon^2}, \tag{2.20}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Stante la (2.20), minore è $\mathbf{D}^2[X]$ minore è la probabilità di scostamento di X dal suo valore atteso $\mathbf{E}[X]$. In altri termini la variabile aleatoria X è meno rischiosa. Nel caso limite $\mathbf{D}^2[X] = 0$ la probabilità che X prenda valori che si scostano dal suo valore atteso per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ è nulla: la variabile aleatoria assume con certezza il suo valore atteso e non presenta alcun rischio. Si tratta di una cosiddetta variable aleatoria di Dirac concentrata in $\mathbf{E}[X]$. La conoscenza della specifica distribuzione di X conduce ovviamente a stime più precise della probabilità di un suo scostamento dal valore medio. L'importanza della disuguaglianza di Tchebychev è proprio nel non riferirsi alla specifica distribuzione di X che, in questo senso, la connota come universale.

Definizione 23 *Chiamamo* tasso di rendimento *relativo all'investimento in stock al tempo T il rapporto*

$$r_T \stackrel{def}{=} \frac{S_T - S_0}{S_0}. \tag{2.21}$$

Osservazione 24 *Il tasso di rendimento relativo all'investimento in stock è esso stesso una variabile aleatoria. Precisamente,*

$$r_T = \begin{cases} r_T^+ \equiv u - 1, & \mathbf{P}(r_T = r_T^+) \equiv p, \\ r_T^- \equiv d - 1, & \mathbf{P}(r_T = r_T^-) \equiv q, \end{cases}. \tag{2.22}$$

Chiaramente,

$$u > d \Leftrightarrow r_T^+ > r_T^-.$$

Definizione 25 *Chiamamo* tasso di rendimento medio *o* atteso *(*mean *or* expected rate of return*) relativo all'investimento in stock al tempo T il valor medio $\bar{r}_T$ di r_T.*

Osservazione 26 *Abbiamo*

$$\bar{r}_T \equiv \mathbf{E}\left[r_T\right] = up + dq - 1. \tag{2.23}$$

Proof. *Infatti*

$$\mathbf{E}\left[r_T\right] = r_T^+ p + r_T^- q = (u-1)\,p + (d-1)\,q = up + dq - (p+q) = up + dq - 1.$$

□

Osservazione 27 *Abbiamo*

$$S_T = (1 + r_T)\,S_0 \tag{2.24}$$

e

$$S_0 = \frac{1}{1+\bar{r}_T}\mathbf{E}[S_T]. \tag{2.25}$$

Proof. *L'Equazione (2.24) è diretta conseguenza della (2.21) e l'Equazione (2.25) si ottiene immediatamente applicando l'operatore speranza* $\mathbf{E}\left[\cdot\right]$ *alla (2.24).* □

Le Equazioni (2.24) e (2.25) andrebbero rispettivamente comparate con l'Equazione (2.14) per l'evoluzione del titolo non rischioso e con la riscrittura della stessa (2.14) in forma backward come

$$B_0 = \frac{1}{1+r_f}B_T. \tag{2.26}$$

Definizione 28 *Nell'ambito del CCR Toy Model, chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizione rischiosa *nello stock, più sinteticamente* BS-portafoglio*, una coppia* $\pi \equiv (x, y)$ *la cui componente* x *[risp.* y*] sia la quantità di bond [risp. di stock] in cui investiamo al tempo* $t = 0$*. Qualora la posizione non rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* depositiamo *[risp.* prendiamo a prestito*] l'ammontare* $|x|\,B_0$*. Qualora la posizione rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* acquistiamo *[risp.* vendiamo allo scoperto*] lo stock per un ammontare* $|y|\,S_0$*.*

Definizione 29 *Chiamiamo* valore *al tempo* $t = 0$ *[risp. al tempo* $t = T$*] del BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *l'ammontare*

$$W_0 \equiv xB_0 + yS_0, \qquad [\textit{risp. } W_T \equiv xB_T + yS_T].$$

Da notare che mentre l'ammontare W_0 è un numero reale, ovvero una variabile aleatoria di Dirac concentrata in W_0, l'ammontare W_T è una variabile aleatoria bernoulliana, dal momento che S_T lo è. Infatti,

$$W_T = \begin{cases} W_T^+ \equiv (1+r_f)xB_0 + yS_T^+, & \mathbf{P}(W_T = W^+) \equiv p, \\ W_T^- \equiv (1+r_f)xB_0 + yS_T^-, & \mathbf{P}(W_T = W^-) \equiv q, \end{cases}.$$

Definizione 30 *Diciamo che un BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *è un* arbitraggio *se*

1. $W_0 = 0$*;*
2. $\mathbf{P}\left(W_T \geqslant 0\right) = 1$ *e* $\mathbf{P}\left(W_T > 0\right) > 0$.

Un BS-portafoglio é un arbitraggio se a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza un payoff non negativo e con probabilità non nulla un payoff strettamente positivo. Ciò indipendentemente dall'esito dell'investimento nella sua componente rischiosa.

Osservazione 31 *Perchè un BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *sia d'arbitraggio deve soddisfare la condizione*

$$xB_0 = -yS_0. \tag{2.27}$$

Alla luce della Osservazione 31 un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi \equiv (x, y)$ può essere costituito solo in due modi: prendendo a prestito l'ammontare $|x| B_0$ ($x < 0$) e usandolo interamente per acquistare lo stock ($y > 0$) oppure vendendo lo stock allo scoperto per un ammontare $|y| S_0$ ($y < 0$) e investendo interamente questo ammontare nell'acquisto del titolo non rischioso ($x > 0$).

Proposizione 32 *Nell'ambito del CRR Toy Model l'assenza di un BS-portafoglio d'arbitraggio comporta che necessariamente si abbia*

$$r_T^+ > r_f > r_T^-. \tag{2.28}$$

Equivalentemente,

$$u > 1 + r_f > d. \tag{2.29}$$

Proof. *Infatti, se fosse*

$$r_T^+ > r_T^- \geqslant r_f, \tag{2.30}$$

potremmo costituire un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ prendendo a prestito un ammontare $|x| B_0$ (vendendo allo scoperto $|x|$ unità di bond) e con questo ammontare acquistare $y = |x| B_0/S_0$ unità di stock. Al tempo $t = 0$ il valore di tale portafoglio sarebbe

$$W_0 = xB_0 + yS_0 = -|x| B_0 + \frac{|x| B_0}{S_0} S_0 = 0.$$

D'altra parte, con riferimento all'investimento in stock, a termine del periodo d'investimento, nel peggiore dei casi si realizzerebbe l'ammontare

$$yS_T^- = ydS_0 = \frac{|x| B_0}{S_0} dS_0 = |x| dB_0 = |x| (r_T^- + 1)B_0.$$

Pertanto, stante l'ipotesi (2.30), si potrebbe ripianare il debito, nel frattempo incrementatosi a $|x| (r_f + 1)B_0$ a causa degli interessi maturati dovuti, senza perdere alcunché. Se però a termine del periodo d'investimento si verificasse il migliore dei casi, si realizzerebbe un ammontare

$$yS_T^+ = yuS_0 = \frac{|x| B_0}{S_0} uS_0 = |x| uB_0 = |x| (r_T^+ + 1)B_0.$$

Quindi, sempre nell'ipotesi (2.30), si potrebbe ripianare il debito di $|x| (r+1)B_0$ e realizzare un guadagno pari a

$$|x| (r_T^+ + 1)B_0 - |x| (r_f + 1)B_0 = |x| (r_T^+ - r_f)B_0 > 0.$$

Avremmo quindi $W_T \geqslant 0$, con $\mathbf{P}(W_T > 0) = p > 0$. Se altresì fosse

$$r_f \geqslant r_T^+ > r_T^-, \tag{2.31}$$

allora potremmo costituire un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$ vendendo allo scoperto un'ammontare $|y| S_0$ di stock (vendendo allo scoperto $|y|$ unità di stock) e con questo ammontare acquistare $x = |y| S_0/B_0$ unità di bond. Al tempo $t = 0$ il valore di tale portafoglio sarebbe

$$W_0 = xB_0 + yS_0 = |y| \frac{S_0}{B_0} B_0 - |y| S_0 = 0.$$

A termine del periodo d'investimento, ci si ritroverebbe in ogni caso con un ammontare pari a

$$x(1 + r_f)B_0 = \frac{|y| S_0}{B_0} B_0(1 + r_f) = |y| (1 + r_f)S_0,$$

dovuto al maturare degli interessi prodotti dall'investimento in bond. D'altra parte, rispetto alla vendita allo scoperto dello stock, il peggiore dei casi per l'investitore è che lo stock realizzi il valore di mercato S_T^+. In questo caso per ripianare la vendita allo scoperto sarebbe necessario un ammontare pari a

$$|y| S_T^+ = |y| uS_0 = |y| (r_T^+ + 1)S_0$$

che, stante l'ipotesi (2.31), è disponibile grazie all'investimento in bond. Se poi lo stock realizzasse il valore di mercato S_T^-, per ripianare lo scoperto sarebbe sufficiente un ammontare pari a

$$|y|\, S_T^- = |y|\, uS_0 = |y|\, (r_T^- + 1)S_0,$$

che, sempre nell'ipotesi (2.31), l'investitore avrebbe disponibile grazie all'investimento in bond e che in più gli consentirebbe un guadagno pari a

$$|y|\, (1+r)S_0 - |y|\, (r_T^- + 1)S_0 = |y| \left(r_f - r_T^-\right) S_0 > 0$$

Avremmo quindi $W_T \geqslant 0$, con $\mathbf{P}(W_T > 0) = q > 0$. In definitiva, in entrambe le ipotesi (2.30) e (2.31), sarebbe possibile costituire un un BS-portafoglio d'arbitraggio. Non resta che concludere che in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio deve valere la (2.28). □

Siano $\theta \equiv (u, v)$ e $\pi \equiv (x, y)$ BS-portafogli di valore $uB_0 + vS_0$ e $xB_0 + yS_0$ [resp. $uB_T + vS_T$ e $xB_T + yS_T$] al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$].

Proposizione 33 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio, la condizione*

$$uB_T + vS_T = xB_T + yS_T \tag{2.32}$$

comporta necessariamente che

$$u = x \quad \text{e} \quad v = y. \tag{2.33}$$

In particolare,

$$uB_0 + vS_0 = xB_0 + yS_0 \tag{2.34}$$

Proof. L'Equazione (2.32) comporta che si abbia

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T. \tag{2.35}$$

L'Equazione (2.35), a sua volta, implica

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T^+ \tag{2.36}$$

e

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, S_T^- \tag{2.37}$$

Dalle (2.36) e (2.37) si ricava

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, uS_0$$

e

$$(u - x)\, B_T = (y - v)\, dS_0.$$

Queste ultime combinate tra loro comportano

$$(y - v)\, uS_0 = (y - v)\, dS_0. \tag{2.38}$$

D'altra parte in assenza di BS-portafogli d'arbitraggio si ha $u > d$ (cfr. Equazione (2.29)). Pertanto, dalla (2.38), otteniamo

$$y = v. \tag{2.39}$$

Stante la (2.39), l'Equazione (2.36) implica che

$$(u - x)\, B_T = (u - x)\, (1 + r)\, B_0 = 0,$$

da cui

$$x = u. \tag{2.40}$$

Le Equazioni (2.39) e (2.40) costituiscono la (2.33). □

Definizione 34 *Chiamiamo* probabilità neutrale al rischio *(*risk neutral probability*) una probabilità* $\tilde{\mathbf{P}}$ *su* Ω *avente distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$*, con*

$$\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^+), \quad \tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^-), \tag{2.41}$$

per la quale risulti

$$S_0 = \frac{1}{1 + r_f} \tilde{\mathbf{E}}[S_T], \tag{2.42}$$

essendo $\tilde{\mathbf{E}}[\cdot]$ *l'operatore speranza rispetto a* $\tilde{\mathbf{P}}$*.*

L'Equazione (2.42) andrebbe comparata con le Equazioni (2.25) e (2.26). Si nota allora che una probabilità neutrale al rischio consente di ottenere il prezzo del titolo rischioso al tempo $t = 0$, scontando il valor medio del prezzo al tempo $t = T$ mediante lo stesso tasso di rendimento del titolo non rischioso. In altri termini, rispetto a una probabilità neutrale al rischio il titolo rischioso ha rendimento medio pari a quello del titolo non rischioso.

Proposizione 35 *Se esiste una probabilità neutrale al rischio essa è unica.*
Proof. *Spponiamo che esistano due probabilità* $\tilde{\mathbf{P}}$ *e* $\mathring{\mathbf{P}}$ *su* Ω *aventi distribuzioni* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *e* $(\mathring{p}, \mathring{q})$*, dove*

$$\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^+), \quad \tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^-)$$

e

$$\mathring{p} \equiv \mathring{\mathbf{P}}(S_T = S_T^+), \quad \mathring{q} \equiv \mathring{\mathbf{P}}(S_T = S_T^-),$$

per entrambe le quali valga la (2.42), si dovrebbe allora avere

$$\tilde{\mathbf{E}}[S_T] = \mathring{\mathbf{E}}[S_T].$$

Ossia,

$$S_T^+ \tilde{p} + S_T^- \tilde{q} = S_T^+ \mathring{p} + S_T^- \mathring{q}.$$

Quest'ultima, tenuto conto delle relazioni $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$*,* $\mathring{q} = 1 - \mathring{p}$*, comporterebbe*

$$\left(S_T^+ - S_T^-\right) \tilde{p} + S_T^- = \left(S_T^+ - S_T^-\right) \mathring{p} + S_T^-.$$

Quindi

$$\tilde{p} = \mathring{p}.$$

Da quest'ultima segue immediatamente l'asserto. □

Proposizione 36 *In assenza di BS-portafogli d'arbitraggio esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *di distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *caratterizzata da*

$$\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S^+) \stackrel{def}{=} \frac{1 + r_f - d}{u - d}, \quad \tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S^-) \stackrel{def}{=} \frac{u - (1 + r_f)}{u - d}. \tag{2.43}$$

Proof. *In assenza di portafogli d'arbitraggio, la validità della (2.29) garantisce che la coppia* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *data dalla (2.43) soddisfa le condizioni*

$$\tilde{p}, \tilde{q} \geqslant 0 \quad e \quad \tilde{q} = 1 - \tilde{p}.$$

Pertanto $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *è effettivamente una distribuzione di probabilità. Si ha inoltre*

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}[S_T] &= S_T^+ \tilde{p} + S_T^- \tilde{q} \\
&= (u\tilde{p} + d\tilde{q}) S_0 \\
&= \left(u \frac{(1 + r_f) - d}{u - d} + d \frac{u - (1 + r_f)}{u - d} \right) S_0 \\
&= \frac{(u - d)(1 + r_f)}{u - d} S_0 \\
&= (1 + r_f) S_0,
\end{aligned}$$

cioè la (2.42). □

Proposizione 37 *Se esiste una (unica) probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *di distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$, *dove* $\tilde{p} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^+)$ *e* $\tilde{q} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(S_T = S_T^-)$, *allora non esistono di BS-portafogli d'arbitraggio.*

Proof. *Stanti le Proposizioni 36 e 35 la distribuzione* $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *della probabilità neutrale al rischio* $\tilde{\mathbf{P}}$ *è necessariamente data da*

$$\tilde{p} = \frac{1 + r_f - d}{u - d} \quad e \quad \tilde{q} = \frac{u - (1 + r_f)}{u - d}.$$

D'altra parte, se esistesse anche un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi \equiv (x, y)$ *dovrebbe risultare*

$$xB_0 + yS_0 = 0 \quad e \quad xB_T + yS_T \geqslant 0.$$

La prima di queste due condizioni comporterebbe

$$xB_0 = -yS_0, \tag{2.44}$$

la seconda per l'aleatorietà di S_T *si tradurrebbe nel sistema di disuguaglianze*

$$xB_T + yS_T^+ = x(1 + r_f)B_0 + yuS_0 \geqslant 0, \tag{2.45}$$

$$xB_T + yS_T^- = x(1 + r_f)B_0 + ydS_0 \geqslant 0. \tag{2.46}$$

Ma allora, sostituendo la (2.44) nelle (2.45) e (2.46), otterremmo

$$\begin{aligned} -y(1 + r)S_0 + yuS_0 &\geqslant 0 \\ -y(1 + r)S_0 + ydS_0 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

da cui

$$u \geqslant 1 + r_f \quad e \quad d \geqslant 1 + r_f$$

che impedirebbero a $(\tilde{p}, \tilde{q})$ *di essere un'effettiva distribuzione di probabilità.* □

Alla luce delle Proposizioni 35-37 possiamo enunciare il seguente fondamentale risultato

Teorema 38 (Assenza d'Arbitraggio ed Esistenza di una Probabilità Neutrale al Rischio.) *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio è equivalente all'esistenza di un'unica probabilità neutrale al rischio.*

Consideriamo adesso la possibilità d'investire in derivati di sottostante lo stock. In particolare, opzioni di acquisto e vendita e portafogli variamente composti con il bond, lo stock e i suoi derivati. In un contesto monoperiodale, non c'è chiaramente differenza tra ozioni europee e americane. Più in generale, ogni derivato è di tipo europeo in quanto il modello monoperiodale in sè prevede che ogni investimento arrivi a scadenza a termine del periodo senza che ci siano possibilità intermedie d'intervento. Ricordiamo che

Definizione 39 *Si definisce* opzione europea d'acquisto *(*european call option*) [risp.* opzione europea di vendita *(*european put option*)] un contratto di compravendita a termine tra due contraenti, con il quale l'acquirente dell'opzione,* titolare *(*holder*), dietro la corresponsione di un premio (*premium*) al venditore,* garante *(*writer*), acquisisce il diritto, senza obbligo, di acquistare dal garante[resp. vendere al garante] un attivo finanziario rischioso, per una quantità determinata, a una scadenza (*exercise date *or* maturity*) e a un prezzo d'esercizio (*exercise *or* strike price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto.*

Nel caso di un'opzione europea d'acquisto, indicati con K il suo prezzo d'esercizio e con S_T il prezzo dell'attivo rischioso alla maturità T, il titolare sarà interessato ad esercitare il diritto d'acquisto solo se risulterà

$$S_T - K > 0.$$

Infatti, solo in questo caso, acquistando dal garante l'attivo al prezzo d'esercizio K e riscuotendo immediatamente sul mercato il valore S_T, egli potrà realizzare un utile. Al contrario, nel caso di un'opzione europea di vendita, il titolare sarà interessato al suo esercizio solo se si avrà

$$K - S_T > 0,$$

dal momento che stavolta potrà realizzare un utile acquistando sul mercato lo stock al prezzo S_T e rivendendolo immediatamente al garante al prezzo d'esercizio K. Pertanto, i payoff di un'opzione europea d'acquisto o di vendita sono rispettivamente

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} \equiv (S_T - K)^+ \quad \text{e} \quad P_T = \max\{K - S_T, 0\} \equiv (K - S_T)^+.$$

Considerato il differimento temporale del valore del denaro, il detentore di una opzione call [resp. put] avrà quindi un *rendimento netto (net pay off)* alla scadenza pari a

$$C_T - (1 + r_f)\, C_0 \qquad \text{[resp. } P_T - (1 + r_f)\, P_0\text{]}.$$

Da notare che essendo S_T una variabile aleatoria anche i payoff C_T e P_T lo sono. Pertanto, alla scadenza gli stessi payoff dipenderanno dall'occorrenza dell'esito aleatorio $\omega \in \Omega$ che determina la realizzazione del valore $S_T(\omega)$. In particolare, nell'ambito del CRR Toy Model un'opzione europea d'acquisto sul titolo rischioso, di premio C_0, prezzo d'esercizio K e maturità T ha valore alla maturità dato da

$$C_T(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{S_T(\omega) - K, 0\} = \begin{cases} \max\{S_T^+ - K, 0\} \equiv C_T^+, & \mathbf{P}\{C_T = C_T^+\} = p, \\ \max\{S_T^- - K, 0\} \equiv C_T^-, & \mathbf{P}\{C_T = C_T^-\} = q. \end{cases} \tag{2.47}$$

Un'opzione europea di vendita sul titolo rischioso, di premio P_0, prezzo d'esercizio K e maturità T ha altresì valore alla maturità dato da

$$P_T(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K - S_T(\omega), 0\} = \begin{cases} \max\{K - S_T^+, 0\} \equiv P_T^+, & \mathbf{P}\{P_T = P_T^+\} = p, \\ \max\{K - S_T^-, 0\} \equiv P_T^-, & \mathbf{P}\{P_T = P_T^-\} = q. \end{cases} \tag{2.48}$$

Ricordiamo che $S_T^+ \equiv uS_0$ e $S_T^- \equiv dS_0$.

Proposizione 40 *In riferimento a una call C e una put P su uno stesso sottostante rischioso S, con stesso prezzo d'esercizio K e stesso tempo d'esercizio T risulta*

$$C_T - P_T = S_T - K, \tag{2.49}$$

dove C_T [resp. P_T] è il payoff della call [resp. put] al tempo T ed S_T è il prezzo dello stock a T.
Proof. *Ricordando che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta*

$$\max\{x, 0\} = \frac{|x| + x}{2},$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} C_T - P_T &= \max\{S_T - K, 0\} - \max\{K - S_T, 0\} \\ &= \frac{|S_T - K| + S_T - K}{2} - \frac{|K - S_T| + K - S_T}{2} \\ &= \frac{|S_T - K| + S_T - K - |K - S_T| - (K - S_T)}{2} \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

□

Da notare che l'Equazione (2.49) dipende solo dalla struttura dei payoff delle opzioni call e put di sottostante un comune titolo rischioso con stesso prezzo d'esercizio e dalla circostanza che tali opzioni siano esercitate allo stesso tempo. Si tratta pertanto di una relazione indipendente dal particolare modello di mercato considerato e anche dalla specifica che si tratti di opzioni europee o americane.

Definizione 41 *Chiamiamo* portafoglio replicante *(*replicating portfolio*) dell'opzione call un BS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y)$ *tale che al tempo* $t = T$ *si abbia*

$$xB_T + yS_T = C_T. \tag{2.50}$$

Proposizione 42 *Esiste un unico BS-portafoglio replicante* $\pi \equiv (x, y)$ *dato da*

$$x = \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r)B_0(u-d)}, \quad y = \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}. \tag{2.51}$$

Proof. Sia $\pi \equiv (x, y)$ un ipotetico BS-portafoglio replicante. Dalla (2.50), deve allora aversi

$$x(1+r_f)B_0 + yuS_0 = C_T^+, \quad \text{e} \quad x(1+r_f)B_0 + ydS_0 = C_T^-.$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione (x, y) data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_T^+ & uS_0 \\ C_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)},$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & C_T^+ \\ (1+r_f)B_0 & C_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}.$$

Da qui l'asserto. □

Definizione 43 *Chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *(*no arbitrage price*) dell'opzione call il valore del BS-portafoglio replicante* $\pi \equiv (x, y)$ *al tempo* $t = 0$.

$$C_0 = xB_0 + yS_0. \tag{2.52}$$

Proposizione 44 *Risulta*

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}C_T^- + \frac{(1+r_f)-d}{u-d}C_T^+\right) = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbf{E}}[C_T]. \tag{2.53}$$

Proof. *Infatti, per la (2.51) e la (2.43), risulta*

$$\begin{aligned}
C_0 &= xB_0 + yS_0 \\
&= \frac{uC_T^- - dC_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)}B_0 + \frac{C_T^+ - C_T^-}{(u-d)S_0}S_0 \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{uC_T^- - dC_T^+}{u-d} + \frac{(1+r_f)(C_T^+ - C_T^-)}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{(u-(1+r_f))C_T^- + ((1+r_f)-d)C_T^+}{u-d}\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}C_T^- + \frac{(1+r_f)-d}{u-d}C_T^+\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\tilde{q}C_T^- + \tilde{p}C_T^+\right) \\
&= \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}[C_T].
\end{aligned}$$

□

Il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call europea risponde alla seguente necessità: immaginiamo un operatore finanziario che al tempo $t = 0$ venda a un acquirente un'opzione call europea sul titolo rischioso con prezzo d'esercizio K e maturità al tempo $t = T$. L'agente realizza l'incasso C_0 ma si espone al rischio d'esercizio dell'opzione al tempo T per un ammontare pari a $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$, potenzialmente illimitato. Per eliminare il rischio dovuto a tale esposizione, sfruttando la sola disponibilità C_0 prodotta dalla vendita dell'opzione, l'operatore finanziario costituisce un portafoglio depositando x unità di conto nel bond e acquistando y azioni dello stock al prezzo S_0 (con l'abituale convenzione che valori negativi di x ed y significhino vendite allo scoperto). A fine del periodo di contrattazione, con la sola ricchezza generata dal proprio portafoglio, l'operatore finanziario deve essere in grado di *coprire* (*hedge*[1]) il valore dell'opzione che deve rifondere al compratore. In definitiva, si devono realizzare sia la seguente condizione di autofinanziamento del portafoglio

$$xB_0 + yS_0 = C_0 \tag{2.54}$$

sia la condizione di copertura dal rischio d'esercizio dell'opzione

$$xB_T + yS_T = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{2.55}$$

La condizione di copertura (2.55) consente quindi di determinare x ed y, mentre la condizione di autofinanziamento (2.54) permette di ricavare il prezzo C_0 che l'operatore finanziario deve richiedere per la vendita dell'opzione.

Corollary 45 *Si ha*

$$C_0 = \begin{cases} S_0 - \frac{1}{1+r_f}K, & \textit{se } K < dS_0, \\ \frac{(1+r_f)-d}{(u-d)(1+r_f)}\left(uS_0 - K\right), & \textit{se } dS_0 \leqslant K < uS_0, \\ 0, & \textit{se } K \geqslant uS_0. \end{cases} \tag{2.56}$$

Proof. *Stante l'Equazione (2.47) possiamo scrivere*

$$C_T^- = \frac{|dS_0 - K| + dS_0 - K}{2} \qquad e \qquad C_T^+ = \frac{|uS_0 - K| + uS_0 - K}{2}.$$

[1] *To hedge* means to set up a trading strategy with the goal of reducing the risk of adverse price movements in some asset. Such an asset is said to be *hedged*.

Combinando quest'ultima con la (2.53), otteniamo

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\frac{|dS_0-K|+dS_0-K}{2}+\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\frac{|uS_0-K|+uS_0-K}{2}\right)\\
&= \frac{1}{(u-d)(1+r_f)}\left(u\frac{|dS_0-K|+dS_0-K}{2}-d\frac{|uS_0-K|+uS_0-K}{2}\right)\\
&- \frac{1}{u-d}\left(\frac{|dS_0-K|-|uS_0-K|}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0.
\end{aligned}$$

Quindi, nel caso $K<dS_0$ risulta

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{(u-d)(1+r_f)}\left(u\left(dS_0-K\right)-d\left(uS_0-K\right)\right)-\frac{1}{u-d}\left(\frac{dS_0-K-(uS_0-K)}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0\\
&= S_0-\frac{1}{1+r_f}K.
\end{aligned}$$

Nel caso $dS_0\leqslant K<uS_0$ si ha invece

$$\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{1}{(u-d)(1+r_f)}d\left(uS_0-K\right)-\frac{1}{u-d}\left(\frac{(K-dS_0)-(uS_0-K)}{2}\right)+\frac{1}{2}S_0\\
&= -\frac{1}{(u-d)(1+r_f)}d\left(uS_0-K\right)-\frac{1}{u-d}K+\frac{1}{2}\frac{u+d}{u-d}S_0+\frac{1}{2}S_0\\
&= \frac{(1+r_f)-d}{(u-d)(1+r_f)}uS_0-\frac{d+(1+r_f)}{(u-d)(1+r_f)}K\\
&= \frac{(1+r_f)-d}{(u-d)(1+r_f)}\left(uS_0-K\right)
\end{aligned}$$

Infine nel caso $uS_0\leqslant K$ otteniamo chiaramente

$$C_0=0.$$

Ciò prova completamente l'Equazione (2.56). $\square$

Da notare che nel caso $K\geqslant uS_0$ il prezzo del S_T del titolo alla maturità T è certamente inferiore al prezzo strike K. Quindi un'opzione che sancisce il diritto a comprare un stock a un valore superiore al suo valore massimo alla maturità T non può che avere costo nullo.

Sempre nell'ambito del CRR Toy Model, cosideriamo due generici titoli rischiosi, Y e Z di valori Y_0 e Z_0 al tempo $t=0$ e di valori Y_T e Z_T al tempo $t=T$ tali che

$$Y_T=\begin{cases} Y_T^+, & \mathbf{P}\left(Y_T=Y_T^+\right)=p,\\ Y_T^-, & \mathbf{P}\left(Y_T=Y_T^-\right)=q,\end{cases}\quad \text{e} \quad Z_T=\begin{cases} Z_T^+, & \mathbf{P}\left(Z_T=Z_T^+\right)=p,\\ Z_T^-, & \mathbf{P}\left(Z_T=Z_T^-\right)=q,\end{cases}.$$

Definizione 46 *Chiamiamo* portafoglio *con* posizione non rischiosa *nel bond e* posizioni rischiose *nei titoli Y e Z, più sinteticamente* BSS-portafoglio, *una terna $\pi\equiv(x,y,z)$ la cui componente x [resp. y, resp. z] sia la quantità di bond [resp. di titolo rischioso Y, resp. di titolo rischioso Z] in cui investiamo al tempo $t=0$. Qualora la posizione non rischiosa sia positiva [risp. negativa] diciamo che* depositiamo *[risp.* prendiamo a prestito*] l'ammontare $|x|\,B_0$. Qualora la posizione sul titolo rischioso Y o Z sia positiva [risp. negativa] diciamo che* acquistiamo *[risp.* vendiamo allo scoperto*] il titolo rischioso Y o Z per un ammontare $|y|\,Y_0$ o $|z|\,Z_0$.*

Chiaramente un BS-portafoglio $\pi\equiv(x,y)$ può essere pensato come un BSS-portafoglio $\pi\equiv(x,y,z)$ con componente $z=0$.

Definizione 47 *Chiamiamo* valore *al tempo* $t = 0$ *[risp. al tempo* $t = T$*] del BSS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *l'ammontare*

$$W_0 \equiv xB_0 + yY_0 + zZ_0, \qquad \text{[risp. } W_T \equiv xB_T + yY_T + zZ_T\text{].}$$

Da notare che mentre l'ammontare W_0 è un numero reale, ovvero una variabile aleatoria di Dirac concentrata in W_0, l'ammontare W_T è una variabile aleatoria dal momento che Y_T e Z_T lo sono. Infatti,

$$W_T = \begin{cases} W_T^+ \equiv (1+r)xB_0 + yY_T^+ + zZ_T^+, & \mathbf{P}(W_T = W^+) \equiv p, \\ W_T^- \equiv (1+r)xB_0 + yY_T^- + zZ_T^-, & \mathbf{P}(W_T = W^-) \equiv q. \end{cases}$$

Definizione 48 *Diciamo che un BSS-portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *è un* arbitraggio *se*

1. $W_0 = 0$;
2. $W_T \geqslant 0$ *con* $\mathbf{P}(W_T > 0) > 0$.

Analogamente al caso di un BS-portafoglio, un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ é un arbitraggio se a fronte di un investimento iniziale nullo assicura con certezza un payoff non negativo e con probabilità non nulla un payoff strettamente positivo. Ciò indipendentemente dall'esito dell'investimento nelle sue componenti rischiose.

Lemma 49 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, il sussistere dell'uguaglianza*

$$Y_T = Z_T \tag{2.57}$$

comporta necessariamente che

$$Y_0 = Z_0. \tag{2.58}$$

Proof. *Consideriamo un BSS portafoglio* $\pi \equiv (x, y, z)$ *con posizione* x *nel titolo non rischioso e posizione* y *[resp.* z*] nel titolo* Y *[resp.* Z*] e supponiamo che si realizzi l'uguaglianza*

$$Y_T = Z_T.$$

Se al tempo $t = 0$ *risultasse*

$$Y_0 > Z_0,$$

allora vendute allo scoperto y *unita di titolo* Y*, con il ricavato* $|y| Y_0$ *si potrebbero acquistare* $z \equiv |y|$ *unità di titolo* Z *con un esborso pari a* $|y| Z_0$ *ed investire il surplus* $|y|(Y_0 - Z_0)$ *nell'acquisto di* $x \equiv |y|(Y_0 - Z_0)/B_0$ *unità di titolo non rischioso con esborso pari a* $|y|(Y_0 - Z_0)$*. Infatti, si ha chiaramente*

$$|y| Y_0 = |y|(Y_0 - Z_0) + |y| Z_0.$$

Al tempo $t = T$ *la liquidazione del BSS-portafoglio* π *in merito alla posizione* z *nel titolo* Z *produrrebbe un introito aleatorio* zZ_T *tale da garantire in ogni caso la possibilità di ripianare lo scoperto della posizione su* Y*, nel frattempo maturato a* uY_T*, e al contempo la liquidazione della posizione* x *nel titolo non rischioso garantirebbe un introito certo pari a*

$$xB_T = \frac{|u|(Y_0 - Z_0)}{B_0} B_T = \frac{|u|(Y_0 - Z_0) B_0(1+r)}{B_0} = |u|(Y_0 - Z_0)(1+r) > 0.$$

Pertanto π *risulterebbe essere un BSS-portafoglio d'arbitraggio. Un BSS-portafoglio d'arbitraggio del tutto analogo si potrebbe costituire se al tempo* $t = 0$ *fosse* $Y_0 < Z_0$*. Non rimane che concludere circa la veridicità della tesi del Lemma.* $\square$

Proposizione 50 *In assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, sussiste necessariamente la relazione di parità put-call*

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r_f}. \tag{2.59}$$

Proof. *Si consideri un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ costituito al tempo $t = 0$ da un titolo rischioso Y rappresentato dall'acquisto di una call e dalla vendita di una put sullo stesso sottostante, entrambe di strike K alla maturità T e rispettivi prezzi C_0 e P_0, e si consideri un titolo Z costituito prendendo a prestito l'ammontare $K/(1+r_f)$ ed acquistando il titolo rischioso sottostante alle opzioni al prezzo S_0. Stante le Osservazioni 21 e 40 alla maturità T risulta*

$$Y_T = C_T - P_T = S_T - K = Z_T.$$

Allora, per il Lemma 49 deve necessariamente aversi

$$X_0 = Y_0,$$

che è l'Equazione (2.59) desiderata. □

Corollary 51 *Si ha*

$$P_0 = \begin{cases} 0, & se\ K < dS_0, \\ \frac{u-(1+r_f)}{(u-d)(1+r_f)}\left(K - dS_0\right), & se\ dS_0 \leqslant K < uS_0, \\ \frac{K}{1+r_f} - S_0, & se\ K \geqslant uS_0. \end{cases} \tag{2.60}$$

Proof. *Dalla (2.59) si ha chiaramente*

$$P_0 = C_0 - S_0 + \frac{K}{1+r_f}.$$

Tenuto allora conto dell'Equazione (2.56) segue immediatamente la (2.60). □

Da notare che nel caso $K < dS_0$ il prezzo del S_T del titolo alla maturità T è certamente superiore al prezzo strike K. Quindi un'opzione che sancisce il diritto a vendere un titolo a un valore inferiore al suo valore minimo alla maturità T non può che avere costo nullo.

Abbiamo visto che nell'ambito del CRR Toy Model il prezzo di un'opzione call europea può essere coperto mediante un unico portafoglio replicante. Chiaramente, in conseguenza della parità put-call anche il prezzo di un'opzione put europea può essere coperto mediante un unico portafoglio replicante. Queste osservazioni offrono lo spunto per introdurre l'importante nozione di completezza di mercato.

Definizione 52 *Nell'ambito del CRR Toy Model, chiamiamo* derivato *una qualunque variabile aleatoria reale D_T su Ω.*

Osservazione 53 *Un derivato $D_T : \Omega \to \mathbb{R}$ dipende solo dal valore finale del sottostante S, cioè risulta*

$$D_T = F_D(S_T),$$

per un'opportuna funzione $F_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Più specificatamente si ha

$$D_T = \begin{cases} D_T^+ = F_D(S_T^+), & \mathbf{P}\left(D_T = D_T^+\right) = p, \\ D_T^- = F_D(S_T^-), & \mathbf{P}\left(D_T = D_T^-\right) = q. \end{cases}$$

Osservazione 54 *Il titolo non rischioso e il titolo rischioso sono essi stessi derivati.*
Proof. *Per il titolo non rischioso B possiamo scrivere*

$$B_T = F_B(S_T),$$

dove $F_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione costante data da

$$F_B(x) \overset{def}{=} (1 + r_f) B_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il titolo rischioso S possiamo scrivere

$$S_T = F_S(S_T),$$

dove $F_S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione identica data da

$$F_B(x) \overset{def}{=} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Osservazione 55 *Il titolo $B + S$ è un derivato.*
Proof. *Per il titolo $B + S$ possiamo scrivere*

$$B_T + S_T = F_{B+S}(S_T),$$

dove $F_{B+S} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione data da

$$F_{B+S}(x) \overset{def}{=} (1 + r_f) B_0 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Definizione 56 *Chiamiamo* portafoglio *di* copertura *o* replicante *(*hedging *or* replicating portfolio*) del derivato D un BS-portafoglio $\pi \equiv (x, y)$, le cui componenti x ed y siano tali che alla maturità T si abbia*

$$D_T = xB_T + yS_T. \tag{2.61}$$

Definizione 57 *Diciamo che un mercato è* completo *se ogni derivato è replicabile da un BS-portafoglio.*

Teorema 58 *Il CRR Toy Model è un modello di mercato completo.*
Proof. *Dobbiamo provare che nell'ambito del CRR Toy Model ogni derivato è replicabile da un BS-portafoglio. Abbiamo già provato che le opzioni call e put sono replicabili da un BS-portafoglio (cfr Proposizione 42) e questa dimostrazione può essere facilmente estesa ad ogni derivato. Infatti, sia D un derivato con prezzo alla maturità $D_T \equiv \left(D_T^+, D_T^-\right)$ con distribuzione di provabilità (p, q) e sia $\pi \equiv (x, y)$ un BS-portafoglio replicante. L'Equazione (2.61) comporta*

$$x(1 + r_f)B_0 + yuS_0 = D_T^+, \quad e \quad x(1 + r_f)B_0 + ydS_0 = D_T^-.$$

Questo sistema ammette amcora un'unica soluzione (x, y) data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_T^+ & uS_0 \\ D_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & uS_0 \\ (1 + r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uD_T^- - dD_T^+}{(1 + r_f)B_0(u - d)},$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & D_T^+ \\ (1 + r_f)B_0 & D_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + r_f)B_0 & uS_0 \\ (1 + r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{D_T^+ - D_T^-}{(u - d)S_0}.$$

L'asserto è così provato. □

Osservazione 59 *Il valore del BS-portafoglio replicante del derivato D al tempo $t=0$ è dato da*

$$xB_0 + yS_0 = \frac{1}{(u-d)(1+r_f)}\left((u-(1+r_f))\,D_T^- + ((1+r_f)-d)\,D_T^+\right).$$

Il CRR Toy Model è quindi un modello di mercato completo. Sempre in questo modello la non esistenza di portafogli d'arbitraggio è equivalente alll'esistenza di una (unica) probabilità neutrale al rischio. Peraltro, la non esistenza di portafogli d'arbitraggio non è scontata, ma va garantita imponendo la condizione

$$u > 1 + r_f > d.$$

Ci si può allora legittimamente chiedere cosa comporterebbe una violazione della condizione di non arbitraggio. La risposta a questa domanda è il seguente teorema

Teorema 60 *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'esistenza di portafogli d'arbitraggio comporta la possibile negatività dei prezzi dei derivati al tempo $t=0$.*

Proof. *Se nell'ambito del CRR Toy Model ammettessimo l'esistenza di un BS-portafoglio d'arbitraggio $\pi^* \equiv (x^*, y^*)$ dalla condizione $W_0 = 0$ dovrebbe aversi*

$$x^* B_0 = -y^* S_0 \tag{2.62}$$

e dalla condizione $W_T \geqslant 0$

$$x^* B_T + y^* S_T \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^*(1+r_f)\,B_0 + y^* u S_0 \geqslant 0, \\ x^*(1+r_f)\,B_0 + y^* d S_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Non potendo essere $x^* = 0$, il che comporterebbe $y^* = 0$ e $W_T = 0$ con certezza, assumiamo $x^* > 0$. Combinando le (2.62) e (2.63), avremmo

$$x^*(1+r_f-u)\,B_0 \geqslant 0 \quad e \quad x^*(1+r_f-d)\,B_0 \geqslant 0,$$

quindi necessariamente

$$1 + r_f \geqslant u \quad e \quad 1 + r_f \geqslant d,$$

sempre con la convenzione $u > d$. Pertanto, volendo replicare una put sullo stock con strike K tale che $uS_0 > K > dS_0$ con un BS portafoglio $\pi \equiv (x, y)$, dalla condizione

$$P_T = xB_T + yS_T \Leftrightarrow \begin{cases} P_T^+ = x(1+r_f)\,B_0 + yuS_0, \\ P_T^- = x(1+r_f)\,B_0 + ydS_0, \end{cases}$$

avremmo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} P_T^+ & uS_0 \\ P_T^- & dS_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{uP_T^- - dP_T^+}{(1+r_f)B_0(u-d)}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (1+r_f)\,B_0 & P_T^+ \\ (1+r_f)\,B_0 & P_T^- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+r_f)B_0 & uS_0 \\ (1+r_f)B_0 & dS_0 \end{vmatrix}} = \frac{P_T^+ - P_T^-}{(u-d)S_0}.$$

D'altra parte, essendo $uS_0 > K > dS_0$, sarebbe

$$P_T = \frac{|K - S_T| + K - S_T}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_T^+ = 0, \\ P_T^- = K - dS_0. \end{cases}$$

Quindi

$$x = \frac{u\,(K - dS_0)}{(1 + r_f)B_0(u - d)} \quad e \quad y = \frac{-\,(K - dS_0)}{(u - d)S_0}.$$

Otterremo allora il seguente prezzo della put al tempo $t = 0$

$$P_0 = xB_0 + yS_0 = \frac{u\,(K - dS_0)\,B_0}{(1 + r_f)B_0(u - d)} - \frac{-\,(K - dS_0)\,S_0}{(u - d)S_0} = \frac{u - (1 + r_f)}{(u - d)\,(1 + r_f)}\,(K - dS_0) < 0,$$

Similmente, assumendo $x^* < 0$ *avremmo*

$$y^*\,(u - (1 + r_f))\,S_0 \geqslant 0 \quad e \quad y^*\,(d - (1 + r_f))\,S_0 \geqslant 0,$$

quindi necessariamente

$$u \geqslant 1 + r_f \quad e \quad d \geqslant 1 + r_f.$$

Allora, volendo replicare una call sullo stock con strike K *take che* $uS_0 \geqslant K \geqslant dS_0$*, con calcoli analoghi a quelli sopra presentati, otterremo il seguente prezzo della call al tempo* $t = 0$

$$C_0 = \frac{(1 + r_f) - d}{(u - d)\,(1 + r_f)}\,(uS_0 - K) < 0.$$

In definitiva, nell'ambito del CRR Toy Model, l'esistenza di portafogli d'arbitraggio comporta la possibile negatività dei prezzi dei derivati al tempo $t = 0$. □

Essendo il CRR Toy Model un modello di mercato completo. Può sembrare non legittimo porsi la questione di cosa comporterebbe la non completezzza del mercato in caso assenza di portafogli d'arbitraggio. Tuttavia l'analisi di questa questione in questo contesto elementare porta a interessanti considerazioni facilmente replicabili in contesti più complessi in cui la completezza del modello di mercato non è garantita. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 61 *Nell'ambito del CRR Toy Model, l'assenza di portafogli d'arbitraggio, equivalente all'esistenza e unicità di una probabilità neutrale al rischio (cfr Teorema 38), e un'ipotetica assenza di completezza comporterebbero la non unicità della probabilità neutrale al rischio.*

Proof. Ricordiamo che l'assenza di BS-portafogli d'arbitraggio comporta l'esistenza di una probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ su Ω di distribuzione $(\tilde{p}, \tilde{q})$ (cfr Definizione 34 e Teorema 38). Inoltre, stante l'Osservazione (53), sappiamo che per ogni ogni derivato D sono possibili solo due realizzazioni al tempo $t = T$. Più precisamente, denotato con D_T il valore del derivato D al tempo $t = T$, possiamo scrivere

$$D_T = F_D\,(S_T) \equiv \left(D_T^+, D_T^-\right)$$

essendo D_T^+ [resp. D_T^-] la realizzazione del derivato all'occorrenza della realizzazione S_T^+ [resp. S_T^-] del titolo rischioso. Quindi, l'insieme di tutti i possibili derivati si presta a essere rappresentato come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\Delta\,(\pi)$ il sottoinsieme dei derivati che possono essere replicati da BS-portafogli del tipo $\pi \equiv (x, y)$ dove x [resp. y] è la componente non rischiosa [resp. rischiosa] del portafoglio replicante. Notiamo che $\Delta\,(\pi)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, dal momento che se due derivati possono essere replicati anche la loro combinazione lineare può esserlo, e che, stante l'Osservazione (55), i derivati (B_T, B_T) e $\left(S_T^+, S_T^-\right)$ sono in $\Delta\,(\pi)$, essendo rispettivamente replicati dai portafogli $(1, 0)$ e $(0, 1)$. D'altra parte, se qualche derivato non potesse essere replicato da un opportuno BS-portafoglio si avrebbe necessariamente $\Delta\,(\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Considerato allora il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{\mathbf{P}}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\tilde{\mathbf{P}}} \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 \tilde{p} + u_2 v_2 \tilde{q}, \quad \forall \mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)\,, \mathbf{v} \equiv (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

sarebbe possibile determinare $\xi \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ ortogonale a $\Delta(\pi)$. In termini delle componenti di $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2)$ avremmo allora

$$\xi_1 u\tilde{p} + \xi_2 v\tilde{q} = 0,$$

per ogni $(u, v) \in \Delta(\pi)$. In particolare, poichè (B_T, B_T) e $\left(S_T^+, S_T^-\right)$ sono in $\Delta(\pi)$, si dovrebbe avere

$$\xi_1 B_T \tilde{p} + \xi_2 B_T \tilde{q} = 0,$$

da cui

$$\xi_1 \tilde{p} + \xi_2 \tilde{q} = 0, \tag{2.64}$$

e

$$\xi_1 S_T^+ \tilde{p} + \xi_2 S_T^- \tilde{q} = 0. \tag{2.65}$$

Fissato $\lambda > 1$ definiamo

$$\mathbf{P}_{\xi,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda}) = \left(\left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p}, \left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q}\right)$$

dove

$$\|\xi\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

Chiaramente,

$$\left|\frac{\xi_k}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right| = \frac{|\xi_k|}{\lambda \|\xi\|_\infty} \leqslant \frac{1}{\lambda} < 1,$$

per $k = 1, 2$. Si ha quindi

$$p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda} > 0.$$

Inoltre, stante la (2.64),

$$p_{\xi,\lambda} + q_{\xi,\lambda} = \left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p} + \left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q} = \tilde{p} + \tilde{q} + \frac{1}{\lambda \|\xi\|_\infty}(\xi_1 \tilde{p} + \xi_2 \tilde{q}) = 1.$$

In definitiva, la coppia $(p_{\xi,\lambda}, q_{\xi,\lambda})$ individuerebbe una distribuzione di probabilità caratterizzante una certa $\mathbf{P}_{\xi,\lambda} \neq \tilde{\mathbf{P}}$. Ma, tenendo conto della (2.65), per tale $\mathbf{P}_{\xi,\lambda}$ avremmo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + r_f}\mathbf{E}^{\mathbf{P}_{\xi,\lambda}}[S_T] &= \frac{1}{1 + r_f}\left(S_T^+ p_{\xi,\lambda} + S_T^- q_{\xi,\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{1 + r_f}\left(S_T^+\left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{p} + S_T^-\left(1 + \frac{\xi_2}{\lambda \|\xi\|_\infty}\right)\tilde{q}\right) \\
&= \frac{1}{1 + r_f}\left(S_T^+\tilde{p} + S_T^-\tilde{q} + \frac{1}{\lambda \|\xi\|_\infty}\left(\xi_1 S_T^+\tilde{p} + \xi_2 S_T^-\tilde{q}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1 + r_f}\left(S_T^+\tilde{p} + S_T^-\tilde{q}\right) \\
&= S_0
\end{aligned}$$

Pertanto $\mathbf{P}_{\xi,\lambda}$ sarebbe essa stessa una probabilità neutrale al rischio. □

Alla luce di quanto osservato introduciamo la seguente definizione.

Definizione 62 *Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di portafogli d'arbitraggio, chiamiamo* prezzo di non arbitraggio *di un derivato D al tempo $t = 0$ il valore D_0 del BS-portafoglio replicante al tempo $t = 0$. Preciamente*

$$D_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{1 + r_f}\left(\frac{u - (1 + r_f)}{u - d}D_T^- + \frac{(1 + r_f) - d}{u - d}D_T^+\right).$$

Chiamiamo prezzo neutrale al rischio *di un di un derivato D al tempo $t = 0$ il valore atteso del derivato al tempo $t = T$ secondo la probabilità neutrale al rischio scontato al tempo $t = 0$. Precisamente,*

$$D_0 \overset{def}{=} \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}\left[D_T\right].$$

Osservazione 63 *Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di portafogli d'arbitraggio, il prezzo di non arbitraggio e il prezzo neutrale al rischio coincidono.*

Per concludere questa sezione consideriamo anche la possibilità d'investire in futures di sottostante lo stock. A tale proposito ricordiamo che

Definizione 64 *Si definisce* future *un contratto di compravendita a termine tra due contraenti, con il quale l'acquirente del future (*buyer*), sottoscrive l'obbligo di acquistare dal venditore (*seller) *un attivo finanziario rischioso, per una quantità determinata, a una scadenza (*exercise date *or* expiration date *or* maturity*) e a un prezzo (*exercise *or* delivery price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto. Di contro il venditore assume l'obbligo di vendere all'acquirente il titolo finanziario in questione nelle modalità previste dal contratto.*

A differenza del contratto d'opzione nessuna delle parti contraenti paga un premio per entrare nel contratto. Tuttavia il contratto va onorato indipendentemente dal valore di mercato che possa assumere il sottostante alla data d'esercizio. Per cui denotato con F_0 [resp. F_T] il valore del future al tempo $t = 0$ [resp. $t = T$] e con K il prezzo d'esercizio di un contratto future F di sottostante lo stock S, abbiamo

$$F_0 = 0 \quad \text{e} \quad F_T = S_T - K, \tag{2.66}$$

L'aquirente del future realizzerà un profitto [resp. una perdita] se $S_T - K > 0$ [resp. $S_T - K < 0$].

Nell'ambito del CRR Toy Model, stante l'ipotesi di assenza di BSS portafogli d'arbitraggio, sempre a differenza del contratto d'opzione, il prezzo d'esercizio K del future è univocamente determinato. Si ha infatti

Proposizione 65 (Spot-Futures Parity Theorem) *In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio risulta*

$$K = \tilde{\mathbf{E}}\left[S_T\right]. \tag{2.67}$$

Equivalently

$$K = (1+r)\,S_0. \tag{2.68}$$

Proof. In assenza di BSS-portafogli d'arbitraggio esiste un'unica probabilità neutrale al rischio $\tilde{\mathbf{P}}$ tale che, considerato l'operatore speranza $\tilde{\mathbf{E}}\left[\cdot\right]$ ad essa associato, risulti

$$F_0 = \frac{1}{1+r_f}\tilde{\mathbf{E}}\left[F_T\right]$$

Dalla (2.66) otteniamo allora

$$\frac{1}{1+r_f}\left(\tilde{\mathbf{E}}\left[S_T\right] - K\right) = 0.$$

Peranto, considerata l'Equazione (2.42) segue immediatamente la (2.67).

Possiamo dare anche un'altra prova mostrando concretamente come la violazione dell'Equazione (2.68) renda possibile la costruzione di un BSS-portafoglio d'arbitraggio.

Supponiamo che al tempo $t = 0$ risulti $K > (1+r_f)\,S_0$. Allora prendendo a prestito una somma di denaro S_0 sarebbe possibile comprare un'unità di stock S al prezzo S_0 e vendere a costo $F_0 = 0$ un future sull'unità di stock al prezzo d'esercizio K. Costituiremmo così un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$

di posizione nel bond $x \equiv -S_0/B_0$ di posizione nello stock $y \equiv 1$ e di posizione nel future $z = 1$. Un tale portafoglio ha chiaramente valore

$$W_0 = xB_0 + yS_0 + zF_0 = -S_0 + S_0 + 0 = 0.$$

Al tempo $t = T$ la posizione debitoria avrà valore incrementato a $xB_T = -(1+r)\,S_0$, la posizione nello stock si porterà a valore S_T e la posizione nel future garantira l'introito $K - S_T$ derivante dall'incasso K e dalla contemporanea cessione dello stock di valore S_T. Il payoff del portafoglio sarà quindi

$$W_T = xB_T + yS_T + zF_T = -(1+r)\,S_0 + S_T + K - S_T = K - (1+r)\,S_0 > 0,$$

indipendentemente dalla realizzazione del prezzo S_T del sottostante. Avremmo pertanto costituito un portafoglio d'arbitraggio.

Con ragionamento analogo, ipotizzare che al tempo $t = 0$ risulti $K < (1+r)\,S_0$ dà modo di costituire un altro portafoglio d'arbitraggio. Infatti, potremmo vendere allo scoperto un'unità di stock S al prezzo S_0, depositare la somma realizzata nel bond B, comprando S_0/B_0 unità di Bond, e comprare a costo zero un future sullo stock al prezzo d'esercizio K. Costituiremmo così un BSS-portafoglio $\pi \equiv (x, y, z)$ di posizione nel bond $x \equiv S_0/B_0$ di posizione nello stock $y_0 \equiv -1$ e di posizione nel future $z = 1$. Anche un tale portafoglio ha valore

$$W_0 = xB_0 + yS_0 + zF_0 = S_0 - S_0 + 0 = 0.$$

Al tempo $t = T$ il valore della la posizione nel bond sarà incrementato a $xB_T = S_0\,(1+r)$, la posizione nello stock darà luogo a uno scoperto pari a $-S_T$ e la posizione nel future garantira l'introito $S_T - K$ derivante dall'acquisto del titolo di valore di mercato S_T al prezzo K. Il payoff portafoglio sarà quindi

$$W_T = xB_T + yS_T + zF_T = (1+r)\,S_0 - S_T + S_T - K = (1+r)\,S_0 - K > 0$$

indipendentemente dalla realizzazione del prezzo S_T del sottostante. Anche in questo caso avremmo costituito un portafoglio d'arbitraggio.

In definitiva l'ipotizzata assenza di portafogli d'arbitraggio conduce ad accettare la veridicità dell'Equazione (2.68). □

2.1.1 Parameter Calibration

I parametri del CRR Toy model sono:

1. il tasso di rendimento non rischioso r_f del bond B;
2. le realizzazioni u e d della variabile aleatoria di Bernoulli introdotta per rappresentare l'incertezza;
3. le componenti $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ della distribuzione di probabilità neutrale al rischio $(\tilde{p}, \tilde{q})$.

Dall'Equazione (2.43) sappiamo che

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{e} \quad \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}. \tag{2.69}$$

Inoltre, denotata con σ la volatilità del tasso di rendimento r_T dello stock S, definito dall'Equazione (2.21), con gli stessi calcoli impiegati per l'Equazione (2.19), abbiamo

$$\sigma^2 = \tilde{\mathbf{D}}^2\left[r_T\right] = \frac{\tilde{\mathbf{D}}^2\left[S_T\right]}{S_0^2} = (u-d)^2\,\tilde{p}\tilde{q}. \tag{2.70}$$

Le Equazioni (2.69) e (2.70) consentono di determinare i parametri interni del modello $u, d, \tilde{p}, \tilde{q}$ una volta disponibili le stime del tasso di rendimento privo di rischio r_f e della volatilità del tasso di rendimento dello stock σ. Tuttavia va notato che abbiamo a disposizione tre equazioni per i quattro parametri. Pertanto per poterli determinare dobbiamo introdurre un'ulteriore equazione che caratterizza una delle possibili versioni del modello. L'equazione proposta da Cox, Ross e Rubinstein è

$$d = \frac{1}{u}. \tag{2.71}$$

Un'altra equazione proposta da Jarrow e Rudd è

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}. \tag{2.72}$$

Combinando le Equazioni (2.69) segue

$$\tilde{p}\tilde{q} = \frac{(1 + r_f - d)(u - (1 + r_f))}{(u - d)^2}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (2.70) otteniamo

$$\sigma^2 = (u - d)^2 \tilde{p}\tilde{q} = (1 + r_f - d)(u - (1 + r_f)) = (1 + r_f)(u + d) - (1 + r_f)^2 - du.$$

Ora, stante l'Equazione (2.71), risulta

$$\frac{(1 + r_f)^2 + 1 + \sigma^2}{1 + r_f} = \frac{u^2 + 1}{u}$$

ossia

$$u^2 - \frac{(1 + r_f)^2 + 1 + \sigma^2}{1 + r_f} u + 1 = 0. \tag{2.73}$$

Risolvendo la (2.73) otteniamo la determinazione di Cox, Ross e Rubinstein dei parametri u e d

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\frac{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2}{1 + r_f} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2}{1 + r_f}\right)^2 - 4} \\ &= \frac{1}{2(r+1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2\right)^2 - 4(1 + r_f)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2(r+1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right) \end{aligned} \tag{2.74}$$

e

$$\begin{aligned} d &= \frac{2(r_f + 1)}{1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 + \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}} \\ &= \frac{2(r_f + 1)\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 - \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right)}{\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2\right)^2 - \left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)} \\ &= \frac{1}{2(r_f + 1)}\left(1 + \sigma^2 + (1 + r_f)^2 - \sqrt{\left(r_f^2 + \sigma^2\right)\left(r_f^2 + 4r_f + \sigma^2 + 4\right)}\right). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Invece, stante la (2.72), dall'Equazione (2.70) otteniamo

$$4\sigma^2 = (u-d)^2$$

ossia

$$2\sigma = u - d$$

Sostituendo quest'ultima nelle Equazioni (2.69) si ottiene allora

$$\frac{1+r_f-d}{2\sigma} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{u-(1+r_f)}{2\sigma} = \frac{1}{2}$$

da cui

$$d = 1 + r_f - \sigma \quad \text{e} \quad u = 1 + r_f + \sigma$$

Alla luce di quanto osservato ci rimangono da stimare il tasso di rendimento non rischioso r_f del bond B e la volatilità σ del tasso di rendimento r_T dello stock S. Per questi parametri dobbiamo ricorrere ai dati del mercato.

Per stimare la volatilità σ del tasso di rendimento r_T dello stock S, dobbiamo ricorrere ai dati storici sullo stock. Supponiamo di avere a disposizione i prezzi di chiusura giornalieri dello stock per un ampio intervallo di tempo passato, ad esempio un anno. Denotiamo con

$$S_1, S_2 \ldots, S_N, S_{N+1},$$

convenendo che

$$S_{N+1} \equiv S_0,$$

le variabili aleatorie la cui realizzazione ha dato luogo al prezzo di chiusura dello stock nell'n-simo giorno di contrattazione per $n = 1, \ldots, N+1$, dove $N+1$ è il numero di giorni di mercato del trascorso anno di riferimento. Scriviamo anche

$$\Delta t = 1/(N+1),$$

per indicare la frazione dell'anno relativa a una giornata di mercato. Formalmente il tasso di rendimento dello stock a termine dell'$n+1$-simo giorno di contrattazione, inteso come variabile aleatoria, è definito come

$$r_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}, \quad \forall n = 1, \ldots, N,$$

avendo assunto che il prezzo di apertura dello stock nell'$n+1$-simo giorno di contrattazione coincida con il prezzo di chusura dell'n-esimo giorno. Tuttavia, per varie ragioni che esporremo, si preferisce considerare il rendimento logaritmo dello stock a termine dell'$n+1$-simo giorno di contrattazione definito come

$$\rho_n \stackrel{\text{def}}{=} \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right), \quad \forall n = 1, \ldots, N.$$

Per il momento ci limitiamo a notare che quando $S_{n+1}/S_n \approx 1$ abbiamo $S_{n+1}/S_n - 1 \approx 0$ e pertanto

$$\rho_n = \log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{S_{n+1}}{S_n} - 1\right)\right) \approx \frac{S_{n+1}}{S_n} - 1 = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} = r_n.$$

Uno degli assunti portanti della teoria classica dei mercati finanziari è che i prezzi dei titoli rischiosi siano modellabili in tempo continuo mediante un moto browniano geometrico. Quindi, si assume che la dinamica del titolo rischioso sia modellata in tempo continuo dalla seguente equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \tag{2.76}$$

per $t \geqslant 0$, dove μ [resp. σ^2] è il tasso di rendimento medio [resp. la varianza] del titolo su base annua e $(w_t)_{t\geqslant 0}$ è un processo di Wiener. Questa assunzione, suffragata dalle recenti analisi dei dati di mercato solo come una approssimazione molto grossolana, comporta che i rendimenti logaritmici siano indipendenti e normalmente distribuiti con media $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ e varianza $\sigma^2 \Delta t$. Quindi, che per i rendimenti logaritmici si possa scrivere[2]

$$\rho_n \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right). \tag{2.77}$$

A sua volta l'Equazione (2.77) comporta che la variabile aleatoria S_n/S_{n-1} sia lognormalmente distribuita, ossia

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_n\right), \quad Z_n \sim N(0,1).$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. In conseguenza, per le propretà delle variabili aleatorie lognormalmente distri-

---

[2] Grazie al Lemma di Ito, possiamo scrivere

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} \langle dS_t, dS_t \rangle,$$

dove dS_t è dato dall'equazione (2.76), e $\langle dS_t, dS_t \rangle$ è la variazione quadratica di S_t, che, sempre per la (2.76) è data da

$$\langle dS_t, dS_t \rangle = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Otteniamo allora

$$d \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dw_t,$$

che è l'equazione di un moto browniano. Dalla discretizzazione di quest'ultima segue

$$\ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma(w_{t+\Delta t} - w_t),$$

ossia

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma(w_{t+\Delta t} - w_t)$$

che comporta la (2.77).

buite[3], otteniamo

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = \exp\left(\mu\Delta t\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] = \exp\left(2\mu\Delta t\right)\exp\left(\sigma^2\Delta t - 1\right),$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$. L'ulteriore ipotesi dell'indipendenza delle variabili aleatorie $\rho_1 \equiv \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right), \ldots, \rho_n \equiv \ln\left(\frac{S_{N+1}}{S_N}\right)$ comporta

$$\rho_1 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_1, \ldots, \rho_n = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{N-1},$$

con $Z_1, \ldots, Z_{N-1}$ indipendenti. Abbiamo allora[4]

$$\bar{\rho}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_n \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \frac{\sigma^2\Delta t}{N}\right),$$

con

$$\mathbf{E}\left[\bar{\rho}_n\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[\bar{\rho}_n\right] = \frac{\sigma^2\Delta t}{N}.$$

---

[3]Se X è una variabile aleatoria log-normalmente distribuita, allora, posto $\mathbf{E}\left[\ln(X)\right] \equiv \mu$ e $\mathbf{D}^2\left[\ln(X)\right] \equiv \sigma^2$, possiamo scrivere

$$X = \exp\left(\mu + \sigma Z\right), \quad Z \sim N(0,1).$$

In conseguenza,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[e^{\mu+\sigma Z}\right] = \mathbf{E}\left[e^{\mu}e^{\sigma Z}\right] = e^{\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2[X] &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}\left[e^{2(\mu+\sigma Z)}\right] - e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 \\ &= e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] - e^{2\mu}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 = e^{2\mu}\left(\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] - \mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2\right).\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma z}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}e^{\sigma z-\frac{1}{2}z^2}dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2+\sigma z-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}}dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}.\end{aligned}$$

Segue chiaramente che

$$\mathbf{E}\left[e^{2\sigma Z}\right] = e^{2\sigma^2} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}\left[e^{\sigma Z}\right]^2 = e^{\sigma^2}$$

In definitiva,

$$\mathbf{E}[X] = e^{\mu}e^{\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2[X] &= e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right) = e^{2\mu}e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).\end{aligned}$$

Applicando quanto mostrato alla variabile aleatoria

$$Y = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, +\sigma\sqrt{\Delta t}Z\right)$$

si ottengono le equazioni desiderate.

[4]Tenere presente che $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X}_N \sim N\left(\mu, \sigma^2/N\right)$.

Inoltre, posto

$$S_{\rho,N}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\rho_n - \bar{\rho}_n)^2,$$

abbiamo[5]

$$\frac{(N-1)\,S_{\rho,N}^2}{\sigma^2\Delta t} \sim \chi_{N-1}^2,$$

con[6]

$$\mathbf{E}\left[S_{\rho,N}^2\right] = \sigma^2\Delta t \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^2\left[S_{\rho,N}^2\right] = \frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2.$$

Pertanto possiamo usare $\bar{\rho}_n$ come stimatore di $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{\sigma^2\Delta t}{N}$ e possiamo usare $S_{\rho,N}^2$ come stimatore di $\sigma^2\Delta t$ con un errore quadratico pari a $\frac{2}{N-1}\sigma^4\Delta t^2$.

Per quanto riguarda il tasso non rischioso r_f consideriamo i dati presenti nel sito del U.S. Department of the Treasure (see `https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billRatesYear&year=2021`). Nella sezione "Data" accediamo alla sotto-sezione "Interest Rates" (see `https://home.treasury.gov/policy-issues/financing-the-government/interest-rate-statistics`). Qui abbiamo vari insiemi di dati che forniscono informazioni sul tasso di rendimento di uno zero coupon bond B con differenti maturità. In particolare la Daily Treasury Yield Curve Rates (see `https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield`). Un'altra rilevante fonte di dati è il sito TreasuryDirect (see `https://www.treasurydirect.gov/GA-FI/FedInvest/selectSecurityPriceDate`) in cui si può trovare una raccolta dei tassi di rendimento con maturità piuttosto dettagliate sotto forma dei prezzi di varie tipologie di bond, disponibili anche in formato csv. Inoltre non si può non menzionare il sito della Federal Reserve Bank of St. Louis (see `https://fred.stlouisfed.org/`).

L'indice Standard & Poor's 500, brevemente S&P 500 (solitamente codificato come SPX), è un indice azionario che comprende le 500 compagnie a maggior capitalizzazione con azioni ordinarie publicamente scambiate al New York Stock Exchange (NYSE). Con *capitalizzazione* si intende il valore della singola azione moltiplicato per il numero di azioni presenti sul mercato, numero questo noto come *flottante*. L'SPX in quanto tale non è scambiabile sul mercato. Tuttavia esiste un fondo azionario scambiato sul NYSE Arca noto come Standard & Poor's Depositary Receipts, brevemente SPDR S&P 500 Trurst (solitamente codificato come SPY), che si pone l'obiettivo di replicare passivamente l'indice S&P 500. Il fondo SPDR S&P 500 Trurst rientra nella categoria degli exchange-traded funds (ETF) che sono fondi, a partecipazione azionaria scambiabile sul mercato, la cui politica è replicare l'andamento di taluni indici di riferimento. Nel Chicago Board Option Exchange (CBOE) (see `https://www.cboe.com`) è possibile scambiare opzioni di acquisto e vendita con sottostante SPX (see `https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/`). Nel National Association of Security Dealers Automated Quotation (NASDAQ) (see `https://www.nasdaq.com`) è possibile scambiare opzioni di acquisto e vendita con sottostante SPY (see `https://www.nasdaq.com/market-activity/funds-and-etfs/spy/option-chain`). Le opzioni su SPX sono opzioni europee e possono essere esercitate solo alla data di scadenza (see `https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/specifications/`). Le opzioni su SPY sono opzioni americane e possono essere esercitate a una qualunque data tra quella di acquisto e la scadenza. Altre differenze sono che le opzioni su SPX sono regolate in contanti dal momento che il sottostante non è scambiabile e non pagano dividendi, mentre le opzioni su SPY sono regolate in azioni dal momento che il sottostante è scambiabile e pagano potenzialmente dividendi. Come riferimento relativamente semplice per ulteriori informazioni consigliamo `https://www.thebalance.com/spx-options-vs-spy-options-2536632`.

[5]Tenere presente che $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow (N-1)\,S_N^2(X)/\sigma^2 \sim \chi_{N-1}^2$.

[6]Tenere presente che $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \mathbf{D}^2\left[S_N^2(r)\right] = \frac{2\sigma^4}{N-1}$.