Un teorema di convergenza dominata generalizzato

18 marzo 2020

Teorema. *Sia* (Ω, Σ, μ) *uno spazio di misura positiva. Supponiamo che* $\{f_n\}_n$ *e* $\{g_n\}_n$ *siano due successioni in* $L^1(\Omega, \mu)$, *e* f, g *due funzioni di* $L^1(\Omega)$ *tali che* $f_n \to f$, $g_n \to g$ *quasi ovunque in* Ω. *Se* $|f_n| \leq g_n$ *e* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$, *allora* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

Dimostrazione. Per ipotesi, $0 \leq g_n + f_n$ e $0 \leq g_n - f_n$ in Ω. Applicando il Lemma di Fatou otteniamo

$$\int_\Omega (g + f) \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega (g_n + f_n) \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \tag{1}$$

e

$$\int_\Omega (g - f) \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega (g_n - f_n) \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{2}$$

Pertanto

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu.$$