

# Calcolo delle Variazioni

## a.a. 2019-2020

Simone Secchi  
simone.secchi@unimib.it

<http://elearning.unimib.it>

# Prerequisiti e strumenti

- Calcolo differenziale in spazi euclidei di dimensione finita
- Teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue
- Principi di Analisi Funzionale Lineare
- Teoria elementare degli spazi di Sobolev (almeno il caso hilbertiano  $p = 2$ )

# Strumenti: il calcolo differenziale in dimensione infinita

**Notazione.** Se  $X$  è uno spazio di Banach (reale), il suo duale topologico sarà denotato con il simbolo  $X^*$ . Se  $A \in X^*$ , il simbolo  $A[v]$  indicherà il valore di  $A$  nel punto  $v$ ; talvolta semplificheremo la notazione e scriveremo  $Av$  al posto di  $A[v]$ .

**Definizione.** Siano  $X$  uno spazio di Banach, e  $U \subset X$  un suo aperto. Un funzionale su  $U$  è un'applicazione  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Si noti che i “nostri” funzionali **non** sono necessariamente **lineari**!

**Definizione.** Sia  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale. Diremo che  $I$  è derivabile secondo Fréchet nel punto  $u \in U$  se esiste un elemento  $A \in X^*$  tale che

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \quad (1)$$

o, equivalentemente, se

$$I(u+v) = I(u) + Av + o(\|v\|) \quad \text{per } v \rightarrow 0.$$

Si osservi che questa è la definizione di funzione differenziabile quando  $X = \mathbb{R}^n$ .

**Lemma.** Se  $I$  è derivabile nel punto  $u \in U$ , allora l'elemento  $A$  che soddisfa (1) è univocamente determinato.

*Dim.* Infatti, supponiamo che  $A$  e  $B$  siano due elementi di  $X^*$  che soddisfano (1). Per sottrazione,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{(A - B)v}{\|v\|} = 0.$$

Fissiamo  $u \in X$  con  $\|u\| = 1$ , e scegliamo  $v = tu$ ,  $t \rightarrow 0^+$ . Allora

$$(A - B)u = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(A - B)u}{t\|u\|} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $u$ , concludiamo che  $A = B$ .

**Definizione.** Se  $I$  è un funzionale derivabile secondo Fréchet nel punto  $u \in U$ , la derivata (talvolta: il differenziale) di Fréchet di  $I$  in  $u$  è l'unico elemento  $I'(u) \in X^*$  (talvolta:  $dI(u)$ ) tale che

$$I(u + v) = I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)$$

per  $v \rightarrow 0$ .

**Definizione.** Se  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile secondo Fréchet in ogni punto  $u \in U$ , diremo che  $I$  è Fréchet-derivabile in  $U$ . La derivata di Fréchet di  $I$  è allora la mappa  $I': U \rightarrow X^*$  che ad  $u \in U$  associa  $I'(u) \in X^*$ . Si tratta — in generale — di una mappa *non lineare*.

Se  $I'$  è una mappa continua da  $U$  in  $X^*$ , diremo che  $I \in C^1(U)$ .

# Il caso hilbertiano

Se  $H$  è uno spazio di Hilbert (reale), è noto che gli elementi del duale  $H^*$  sono isometricamente identificati con vettori di  $H$  attraverso l'isomorfismo di Riesz. In particolare, un funzionale  $I$  definito su  $U \subset H$  è derivabile in  $u \in U$  se e solo esiste un vettore, detto d'ora in poi *gradiente* di  $I$  in  $u$  e denotato  $\nabla I(u)$ , tale che

$$I(u + v) = I(u) + \langle \nabla I(u) \mid v \rangle + o(\|v\|)$$

per  $v \rightarrow 0$ .

**Proposizione.** Siano  $I$  e  $J$  due funzionali derivabili nel punto  $u \in X$ . Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri reali, allora  $aI + bJ$  è derivabile in  $u$ , e vale  $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$ .
2. Il prodotto  $IJ$  è derivabile in  $u$ , e vale  $(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$ .
3. Se  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow U$  è una curva derivabile in  $t_0$  e  $u = \gamma(t_0)$ , allora la composizione  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\eta(t) = I(\gamma(t))$  è derivabile in  $t_0$ , e vale  $\eta'(t_0) = I'(u)[\gamma'(t_0)]$ .
4. Se  $A \subset \mathbb{R}$  è un aperto,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $I(u) \in A$ , allora la composizione  $K(u) = f(I(u))$  è definita in un intorno  $V$  di  $u$ , è derivabile in  $u$  e vale  $K'(u) = f'(I(u))I'(u)$ .



*Dim.* La prima affermazione è banale (esercizio!). Per quanto riguarda la seconda, quando  $v \rightarrow 0$  in  $X$ , abbiamo

$$\begin{aligned} I(u+v)J(u+v) &= (I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) (J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= I(u)J(u) + J(u)I'(u)[v] + I(u)J'(u)[v] + I'(u)[v]J'(u)[v] \\ &\quad + o(\|v\|) (I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)). \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che

$$I'(u)[v]J'(u)[v] + o(\|v\|) (I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))$$

è  $o(\|v\|)$  per  $v \rightarrow 0$ . La terza affermazione è simile, infatti per  $h \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(t_0 + h) &= I(\gamma(t_0 + h)) = I(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)h + o(|h|)) \\ &= I(u) + I'(u)[\gamma'(t_0)h + o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|) \\ &= \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + I'(u)[o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|). \end{aligned}$$

Poiché gli ultimi due addendi sono  $o(|h|)$ , otteniamo che

$$\eta(t_0 + h) = \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + o(|h|).$$

Infine, quando  $v \rightarrow 0$  in  $X$ , si verifica come prima che

$$\begin{aligned} K(u + v) &= f(I(u + v)) = f(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))(I'(u)[v] + o(\|v\|)) + o(I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))I'(u)[v] + o(\|v\|). \end{aligned}$$

**Osservazione.** È possibile introdurre il concetto di derivata per applicazioni tra due spazi di Banach  $X$  e  $Y$ . Solo in questo contesto può essere enunciata una formulazione completa della regola di derivazione delle funzioni composte.

Poiché non ne faremo uso in queste lezioni, rimandiamo al testo di Ambrosetti e Prodi per ulteriori approfondimenti.

**Definizione.** Sia  $I$  un funzionale definito nell'aperto  $U$  di  $X$ , e sia  $u \in U$ . Diremo che  $I$  è derivabile secondo Gâteaux in  $u$  se esiste un elemento  $A \in X^*$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Av \quad (2)$$

per ogni  $v \in X$ . In tal caso, l'unico (esercizio!) elemento siffatto prende il nome di derivata secondo Gâteaux di  $I$  in  $u$ , e si denota con  $I'_G(u)$  o con  $d_G I(u)$ .

Osserviamo che questa nuova derivata riprende la cosiddetta *derivata direzionale* già nota nell'ambito del calcolo differenziale in dimensione finita.

In particolare, ricordando i “soliti” esempi in  $\mathbb{R}^2$ , deduciamo che esistono funzionali (non lineari) derivabili secondo Gâteaux ma non derivabili secondo Fréchet.

# Condizione sufficiente per la derivabilità secondo Fréchet

**Proposizione.** Supponiamo che  $U \subset X$  sia un aperto, che  $I$  sia Gâteaux-derivabile in  $U$ , e che  $I'_G$  sia continua in un punto  $u \in U$ . Allora  $I$  è Fréchet-derivabile in  $u$ , e (ovviamente)  $I'(u) = I'_G(u)$ .

Omettiamo la dimostrazione, che è probabilmente stata proposta nel caso  $X = \mathbb{R}^2$  nel corso di Analisi Matematica 2.

# Punti critici

**Definizione.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $U$  un aperto di  $X$ , e  $I$  un funzionale definito su  $U$ . Diremo che  $u \in U$  è un punto critico di  $I$  se  $I$  è derivabile in  $u$  e

$$I'(u) = 0.$$

Più esplicitamente, questo significa che  $I'(u)[v] = 0$  per ogni  $v \in X$ .

Se  $u$  è un punto critico di  $I$  e  $I(u) = c$ , diremo che  $u$  è un punto critico (di  $I$ ) al livello  $c$ . Se, per qualche  $c \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $I^{-1}(\{c\}) \subset X$  contiene almeno un elemento, diremo che  $c$  è un valore critico per  $I$ .

L'equazione  $I'(u) = 0$  è nota come equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) associata al funzionale  $I$ .

# Esempi

**Esempio 1.** Ogni  $A \in X^*$  è derivabile. Infatti, basta scrivere

$$A[u + v] = Au + Av$$

per dedurre che  $A'(u) = A$  per qualsiasi  $u \in X$ .

**Esempio 2.** Sia  $X$  uno spazio di Banach, e sia  $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare continua. Denotiamo con  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$  il funzionale definito da  $J(u) = a(u, u)$  per ogni  $u \in X$ . Allora  $J$  è derivabile in  $X$ . Infatti

$$\begin{aligned} J(u + v) &= a(u + v, u + v) = a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) \\ &= J(u) + a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v). \end{aligned}$$

Poiché  $|a(v, v)| \leq M\|v\|^2$  per l'ipotesi di continuità di  $a$  come forma bilineare, deduciamo che  $a(v, v) = o(\|v\|)$  per  $v \rightarrow 0$ , e dunque che

$$J'(u)[v] = a(u, v) + a(v, u).$$

**Esempio 3.** (esercizio) Sia  $H$  uno spazio di Hilbert con norma  $\| \cdot \|$ . Il funzionale  $J(u) = \|u\|$  è derivabile in ogni punto  $u \neq 0$ , e risulta

$$\nabla J(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

**Esempio 4.** Sia  $X$  uno spazio di Banach, e siano  $I, J$  due funzionali derivabili in  $X$ . Definiamo

$$Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$$

sul sottoinsieme (aperto)  $\{u \in X \mid J(u) \neq 0\}$ . Per la Proposizione sulle regole di calcolo dimostrata sopra, possiamo affermare che  $Q$  è derivabile e che

$$Q'(u) = \frac{J(u)I'(u)[v] - I(u)J'(u)[v]}{J(u)^2}$$

per ogni  $u$  in  $X$  tale che  $J(u) \neq 0$ .

## Esempi in spazi concreti

**Esempio 5.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , un insieme aperto e limitato. Definiamo i funzionali

$$I: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

$$J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$K: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$L: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Trattandosi di forme quadratiche associate a forme bilineari continue, sappiamo già che i quattro funzionali sono derivabili.



Esplicitamente, valgono le relazioni

$$\nabla I(u) = 2u$$

$$\nabla L(u) = 2u$$

$$\nabla J(u) = 2u.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$K'(u)[v] = 2 \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$$

per ogni  $u, v \in H^1(\Omega)$ , ma non siamo autorizzati ad affermare che  $\nabla K(u) = 2u$  (perché?)

# Inversione della Convergenza Dominata

**Teorema di Lebesgue.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{u_k\}_k$  una successione in  $L^1(\Omega)$  tale che

1.  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
2. esiste  $v \in L^1(\Omega)$  tale che  $|u_k(x)| \leq v(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$  e ogni  $k$ .

Allora  $u \in L^1(\Omega)$  e  $u_k \rightarrow u$  nella norma di  $L^1(\Omega)$ .

Questo risultato fondamentale di Teoria della Misura può essere *parzialmente* invertito, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione, rimandiamo al libro di H. Brezis, Analisi funzionale.

**Teorema.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{u_k\}_k$  una successione di  $L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , tale che  $u_k \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$ . Allora esistono una sottosuccessione  $\{u_{k_j}\}_j$  ed una funzione  $v \in L^p(\Omega)$  tali che

1.  $u_{k_j}(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
2. per ogni  $j$ ,  $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ .

Questo teorema mostra che la convergenza forte in  $L^p$  implica — a meno di sottosuccessioni — l'esistenza di una funzione dominante.

# Operatori di Nemitskii

Siano  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supponiamo che esistano  $a > 0$  e  $b > 0$  tali che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1},$$

dove  $2^* = 2N/(N-2)$  è l'esponente critico di Sobolev. Definiamo

$$F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$$

e consideriamo il funzionale  $J: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dato da

$$J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx.$$

**Proposizione.** Sotto le ipotesi precedenti,  $J$  è un funzionale derivabile in  $H^1(\Omega)$ , e vale

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx$$

per ogni  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

La dimostrazione non è immediata: mostriamo prima che  $J$  è Gâteaux-derivabile, e poi che la derivata di Gâteaux è continua. Come abbiamo visto sopra, ciò implica che  $J$  è Fréchet-derivabile.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o.  $x \in \Omega$ , risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste un numero reale  $\theta$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\ &\leq (a + b|u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}) |v(x)| \\ &\leq C (|v(x)| + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}). \end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} dx = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) dx.$$

Poiché  $v \mapsto \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx$  è un operatore lineare e continuo in  $H^1(\Omega)$  (disuguaglianza di Hölder e di Sobolev), abbiamo individuato la derivata secondo Gâteaux di  $J$ :

$$J'_G(u)[v] = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx.$$

- Derivata di Fréchet

Mostriamo che  $J'_G: H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$  è un'applicazione continua. A tal fine, sia  $\{u_k\}_k$  una successione che converge a  $u$  in  $H^1(\Omega)$ . Per il teorema di convergenza dominata inversa, possiamo supporre che — a meno di sottosuccessioni —

- $u_k \rightarrow u$  in  $L^{2^*}(\Omega)$ ;
- $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
- esiste  $w \in L^{2^*}(\Omega)$  tale che  $|u_k(x)| \leq w(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$  e ogni  $k$ .

Usiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}
 |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))| |v(x)| \, dx \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \times \\
 &\quad \times \left( \int_{\Omega} |v(x)|^{2^*} \, dx \right)^{1/2^*}.
 \end{aligned}$$

La continuità di  $f$  implica  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))| = 0$  per q.o.  $x \in \Omega$ , e inoltre

$$\begin{aligned}
 |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq C (1 + |u_k(x)|^{2^*-1} + |u(x)|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
 &\leq C (1 + |w(x)|^{2^*-1} + |w(x)|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
 &\leq C (1 + |w(x)|^{2^*} + |w(x)|^{2^*}) \in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx = 0.$$



Perciò

$$\begin{aligned}\|J'_G(u_k) - J'_G(u)\| &= \sup\{(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega), \|v\| = 1\} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che da ogni successione  $\{u_k\}_k$  convergente a  $u$  è possibile estrarre una sottosuccessione tale che  $J'_G(u_k) \rightarrow J'_G(u)$  in  $(H^1(\Omega))^*$ . È ora un esercizio di Topologia Generale dedurre che l'intera successione  $\{u_k\}_k$  gode di questa proprietà (perché il limite è indipendente dalla sottosuccessione scelta).

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

Sia dunque  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale  $J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx$  è derivabile in  $H^1(\Omega)$ .

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

Sia dunque  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale  $J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx$  è derivabile in  $H^1(\Omega)$ .

- Derivata di Gâteaux

Per q.o.  $x \in \Omega$  e per ogni  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste  $\theta = \theta(x)$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\
 &\leq C (|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*}) \\
 &\leq C (|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}) \\
 &\in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Per il teorema di Lagrange, esiste  $\theta = \theta(x)$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\ &\leq C (|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*}) \\ &\leq C (|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}) \\ &\in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Se poi  $\{u_k\}_k$  è una successione che tende a  $u$  in  $H^1(\Omega)$ , a meno di sottosuccessioni possiamo anche supporre che

- $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$
- $u_k \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  e in  $L^{2^*}(\Omega)$
- esistono  $w_1 \in L^{2^*}(\Omega)$  e  $w_2 \in L^2(\Omega)$  tali che  $|u_k(x)| \leq w_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , per q.o.  $x \in \Omega$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo  $R_\varepsilon > 0$  tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon,$$

dove  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |x| > R_\varepsilon\}$ . Ora,

$$\begin{aligned} |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_{\Omega} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx. \end{aligned}$$

Trattiamo separatamente gli ultimi due integrali.

Innanzitutto

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \\
& \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_k| + |u| + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}) |v| \, dx \\
& \leq C \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |w_2| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |w_1|^{2^*-1} |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^{2^*-1} |v| \, dx \right) \\
& \leq C \|v\| \left( \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \\
& \leq C \|v\| \varepsilon.
\end{aligned}$$



D'altra parte,

$$\int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \leq C \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|.$$

Sui sottoinsiemi limitati di  $\mathbb{R}$ , la funzione  $f$  soddisfa una maggiorazione del tipo  $|f(t)| \leq C(1 + |t|^{2^*-1})$ , e come sopra concludiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx = 0.$$

Ricapitolando,

$$\begin{aligned} \|(J'_G(u_k) - J'_G(u))\| &= \sup \{ (J'_G(u_k) - J'_G(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega), \|v\| = 1 \} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} + C\varepsilon \\ &= o(1) + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , concludiamo che  $J'_G(u_K) \rightarrow J'_G(u)$ .

**Osservazione.** La regolarità della frontiera di  $\Omega$  è stata utilizzata solo *implicitamente* per garantire la validità di tutte le immersioni di Sobolev. Ne consegue che gli stessi risultati sussistono, senza alcuna ipotesi su  $\partial\Omega$ , se restringiamo il funzionale  $J$  al sottospazio  $H_0^1(\Omega)$ .

# Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

dove

- $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$ ,  $h \in C(\Omega)$ .

# Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

dove

- $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$ ,  $h \in C(\Omega)$ .

Il problema (P) prende il nome di *problema di Dirichlet omogeneo*. L'aggettivo *omogeneo* si riferisce qui alla condizione *al bordo*  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ . Osserviamo che il problema è *lineare*.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in  $\overline{\Omega}$ .

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in  $\overline{\Omega}$ .

Fissiamo  $v \in C_0^1(\Omega)$  e moltiplichiamo l'equazione in (P) per  $v$ . Integrando su  $\Omega$  con l'ausilio del Teorema di Stokes (versione nota anche come *formula di Gauss-Green*), otteniamo che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Questa uguaglianza ha senso sotto ipotesi ben più deboli di quelle finora assunte. Ad esempio gli integrali sono finiti quando  $u, v$  sono funzioni di  $L^2(\Omega)$  tali che  $\partial u/\partial x_i$  e  $\partial v/\partial x_i$  appartengano ad  $L^2(\Omega)$  per ogni indice  $i$ . La continuità di  $q$  e  $h$  è allora eccessiva, e possiamo sostituirla con  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ .

- Siano dunque  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ . Una *soluzione debole* di (P) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

- Siano dunque  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ . Una *soluzione debole* di (P) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Osservazione.** Ogni soluzione classica è anche soluzione debole.

Infatti,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  implica  $u \in H^1(\Omega)$ . Per una nota proprietà degli spazi di Sobolev, poiché  $u$  è continua in  $\overline{\Omega}$  e  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ , abbiamo  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Sappiamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Poiché  $C_0^1(\Omega)$  è un sottospazio denso di  $H_0^1(\Omega)$ , ad ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$  facciamo corrispondere una successione  $\{v_n\}_n \subset C_0^1(\Omega)$  tale che  $v_n \rightarrow v$  in  $H_0^1(\Omega)$ .



Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  una soluzione debole di (P). Se è noto, per qualche motivo, che  $u \in C^2(\Omega)$ , allora possiamo dedurre che  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x) uv \, dx = \int_{\Omega} h(x) v \, dx.$$

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Per densità di  $C_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$  quasi ovunque, e che  $u = 0$  quasi ovunque in  $\partial\Omega$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Per densità di  $C_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$  quasi ovunque, e che  $u = 0$  quasi ovunque in  $\partial\Omega$ .

- Morale della favola: abbiamo bisogno di una *teoria della regolarità* per le soluzioni deboli di (P).

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x) |u|^2 \, dx - \int_{\Omega} h(x) u \, dx.$$



# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale  $J$ .

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale  $J$ .

Il funzionale  $J$  è chiamato *funzionale dell'energia* associato a (P), anche se dovremmo chiamarlo più propriamente funzionale di azione o di Eulero-Lagrange.

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ . Supponiamo che  $q \in L^\infty(\Omega)$  e che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ . Supponiamo che  $q \in L^\infty(\Omega)$  e che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (SP)$$

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$



**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$

Sappiamo che  $J$  è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} q(x)uv \, dx - \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$

Sappiamo che  $J$  è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} q(x)uv \, dx - \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

- Ancora una volta, le soluzioni deboli di (SP) corrispondono ai punti critici del funzionale dell'energia  $J$ .

# Riassunto

- Abbiamo visto che è possibile estendere il calcolo differenziale elementare (cioè quello delle funzioni di più variabili) alle funzioni di *infinite* variabili.
- Con questo linguaggio, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca opportune soluzioni di equazioni differenziali con gli zeri della derivata di opportuni funzionali (non lineari).

# Prospettive

- Ci prefiggiamo ora di... andare a caccia dei punti critici, al fine di *risolvere* equazioni differenziali.
- Per far ciò, vedremo che occorrono strumenti nuovi, e che la *topologia* dello spazio di riferimento avrà un ruolo fondamentale.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Il ruolo della compattezza nel Teorema di Weierstrass è fondamentale, come mostra il seguente controesempio, dovuto anch'esso a Weierstrass.

**Esempio.** Sia

$$I(u) = \int_{-1}^1 |xu'(x)|^2 \, dx$$

definito per ogni funzione  $u \in C^1([-1, 1])$  a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove  $X = \{u \in C^1([-1, 1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$  non ha soluzioni.



**Esempio.** Sia

$$I(u) = \int_{-1}^1 |xu'(x)|^2 dx$$

definito per ogni funzione  $u \in C^1([-1, 1])$  a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove  $X = \{u \in C^1([-1, 1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$  non ha soluzioni.

Infatti, la famiglia di funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$$

mostra con un calcolo diretto che  $\inf_X I = 0$ . È poi evidente che  $I(u) = 0$  implica  $u' = 0$  in  $[-1, 1]$ , cioè  $u$  è costante. Pertanto  $u \notin X$ .

# Weierstrass in astratto

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  soddisfi la seguente condizione:

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$  è compatto.

Allora  $I$  raggiunge il suo estremo inferiore  $\inf_M I$ .

*Dim.* Possiamo evidentemente supporre che  $I$  non sia identicamente uguale a  $+\infty$ . Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione  $\{\alpha_m\}_m$  strettamente decrescente verso  $\alpha_0$ . Poniamo per brevità  $K_m = K_{\alpha_m}$ .

# Weierstrass in astratto

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  soddisfi la seguente condizione:

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$  è compatto.

Allora  $I$  raggiunge il suo estremo inferiore  $\inf_M I$ .

*Dim.* Possiamo evidentemente supporre che  $I$  non sia identicamente uguale a  $+\infty$ . Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione  $\{\alpha_m\}_m$  strettamente decrescente verso  $\alpha_0$ . Poniamo per brevità  $K_m = K_{\alpha_m}$ . Per ipotesi, ogni  $K_m$  è compatto e non-vuoto. Inoltre  $K_m \supset K_{m+1}$ . Per la proprietà dell'intersezione finita, esiste

$$u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m,$$

cioè  $I(u) \leq \alpha_m$  per ogni  $m$ . Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$ , concludiamo che  $I(u) \leq \alpha_0$ , cioè  $u$  è un minimo assoluto di  $I$  su  $M$ .

- Nell'ipotesi del Teorema precedente, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$\{u \in M \mid I(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha$$

è aperto in  $M$ . Questo significa, per definizione, che  $I$  è una funzione *semicontinua inferiormente* su  $M$ .

- Nei casi concreti, la struttura di  $M$  può essere più ricca di quella di un mero spazio topologico. Di seguito un caso piuttosto frequente nell'Analisi Variazionale.

**Teorema.** Sia  $V$  uno spazio di Banach riflessivo con norma  $\|\cdot\|$ , e sia  $M \subset V$  un sottospazio debolmente chiuso. Supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sia un funzionale tale che

- $I(u) \rightarrow +\infty$  se  $\|u\| \rightarrow +\infty$ ;
- per ogni  $u \in M$  ed ogni successione  $\{u_m\}_k$  in  $M$  tale che  $u_m \rightharpoonup u$ , risulta:  
 $I(u) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} I(u_m)$ .

Allora  $I$  è limitato dal basso, e raggiunge il suo minimo assoluto.

*Dim.* Sia  $\alpha_0 = \inf_M I$  e sia  $\{u_m\}_m$  una successione in  $M$  tale che  $I(u_m) \rightarrow \alpha_0$  per  $m \rightarrow +\infty$ . Per la prima ipotesi,  $\{u_m\}_m$  è una successione limitata in  $V$  (altrimenti...). Il teorema di Eberlein-Smulian garantisce la convergenza debole di tale successione a qualche  $u \in V$ . Per ipotesi  $M$  è debolmente chiuso, sicché  $u \in M$ . Infine,

$$I(u) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} I(u_m) = \alpha_0.$$

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

**Lemma.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $K$  un sottoinsieme convesso e chiuso di  $X$ , e  $I$  un funzionale convesso s.c.i. su  $K$ . Allora  $I$  è debolmente s.c.i.

*Dim.* Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha$  è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi  $I$  è debolmente s.c.i.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

**Lemma.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $K$  un sottoinsieme convesso e chiuso di  $X$ , e  $I$  un funzionale convesso s.c.i. su  $K$ . Allora  $I$  è debolmente s.c.i.

*Dim.* Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha$  è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi  $I$  è debolmente s.c.i.

**Notazione.** Per rendere più espressiva la simbologia, utilizzeremo anche la scrittura

$$[I \leq \alpha] = \{u \in X \mid I(u) \leq \alpha\}.$$



# Punti critici e topologia

Quando  $X$  è uno spazio di Banach riflessivo e  $I$  è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che  $I$  raggiunge il suo minimo assoluto  $\alpha_0$  consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  è tale che  $[I < \alpha_0] = \emptyset$ ;
- per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, l'insieme  $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$  è non-vuoto e debolmente compatto.

# Punti critici e topologia

Quando  $X$  è uno spazio di Banach riflessivo e  $I$  è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che  $I$  raggiunge il suo minimo assoluto  $\alpha_0$  consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  è tale che  $[I < \alpha_0] = \emptyset$ ;
- per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, l'insieme  $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$  è non-vuoto e debolmente compatto.

In realtà ciò indica la presenza di punti critici di  $I$  è la differenza topologica dei sottolivelli  $[I \leq c]$  e  $[I \leq c + \varepsilon]$ .

# Esempi

- Sia  $I(x) = x^3 - 3x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . La derivata di  $I$  si annulla in  $\pm 1$ , e se poniamo  $c_1 = I(1) = -2$ ,  $c_2 = I(-1) = 2$ , vediamo che

1. se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è un intervallo del tipo  $(-\infty, \alpha_1]$ ;
2. se  $c_1 < a_2 < c_2$ , risulta  $[I \leq a_2] = (-\infty, \alpha_2] \cup [\beta_2, \gamma_2]$  con  $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$ ;
3. se  $a_3 > c_2$ , risulta  $[I \leq a_3] = (-\infty, \alpha_3]$ .

Nell'attraversare i valori  $c_1$  e  $c_2$ , i sottolivelli del funzionale sono topologicamente distinti.

- Sia  $I(x, y) = x^2 - y^2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sappiamo che 0 è l'unico valore critico di  $I$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$ , l'insieme  $[I \leq \varepsilon]$  è connesso, mentre  $[I \leq -\varepsilon]$  ha due componenti connesse.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

A causa del forte legame con la Topologia Algebrica, questa teoria non rientra nei limiti del nostro corso.

# Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica*  $f(x) = \arctan x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

# Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica*  $f(x) = \arctan x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- Con il termine di *principi variazionali* ci si riferisce a teoremi che permettano di costruire *quasi minimi*, cioè tipicamente successioni minimizzanti per funzionali limitati e s.c.i., aventi però ulteriori proprietà.



# Il principio di Ekeland

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio metrico completo con metrica  $d$ , e sia  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funzionale limitato dal basso, s.c.i. e non identicamente infinito. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  e ogni  $u \in M$  con

$$I(u) \leq \inf_M I + \varepsilon,$$

esiste un elemento  $v \in M$  tale che

$$d(u, v) \leq 1, \quad I(v) < I(u),$$

e, per ogni  $w \neq v$  in  $M$ ,

$$I(w) > I(v) - \varepsilon d(v, w).$$

*Dim.* Definiamo un ordinamento su  $M$  ponendo  $w \leq v$  se e solo se  $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$ . Poniamo  $u_0 = u$ , e supponiamo di aver definito  $u_n$ . Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo  $u_{n+1} \in S_n$  tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

*Dim.* Definiamo un ordinamento su  $M$  ponendo  $w \leq v$  se e solo se  $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$ . Poniamo  $u_0 = u$ , e supponiamo di aver definito  $u_n$ . Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo  $u_{n+1} \in S_n$  tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

È chiaro che  $S_{n+1} \subset S_n$  poiché  $u_{n+1} \leq u_n$ ; inoltre  $S_n$  è chiuso perché  $I$  è s.c.i.

Se  $w \in S_{n+1}$ , allora  $w \leq u_{n+1} \leq u_n$  e dunque

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq I(u_{n+1}) - I(u_n) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} I = \frac{1}{n+1}.$$

Deduciamo che

$$\text{diam } S_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

Poiché  $M$  è uno spazio completo, è noto che

$$\bigcap_n S_n = \{v\}$$

per qualche  $v \in M$ . In particolare  $v \in S_0$ , cioè  $v \leq u_0 = u$ . Quindi

$$I(v) \leq I(u) - \varepsilon d(u, v) \leq I(u)$$

e

$$d(u, v) \leq \varepsilon^{-1} (I(u) - I(v)) \leq \varepsilon^{-1} \left( \inf_M I + \varepsilon - \inf_M I \right) = 1.$$

Per concludere, dimostriamo che  $w \leq v$  implica  $w = v$ . Infatti,  $w \leq v$  implica  $w \in u_n$  per ogni  $n$ , e dunque  $w \in S_n$  per ogni  $n$ . Quindi  $w = v$ .

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio  $M$  e del funzionale  $I$ .

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio  $M$  e del funzionale  $I$ .

**Teorema.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile e limitata dal basso su  $X$ . Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $u \in X$  tale che  $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$ , esiste  $v \in X$  tale che  $\varphi(v) \leq \varphi(u)$ ,

$$|v - u| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad |\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$



*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per  $t$  e prendendo il limite per  $t \rightarrow 0$ , deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di  $h$  sulla sfera unitaria di  $X$ , deve essere  $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

Le altre proprietà di  $v$  sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per  $t$  e prendendo il limite per  $t \rightarrow 0$ , deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di  $h$  sulla sfera unitaria di  $X$ , deve essere  $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

Le altre proprietà di  $v$  sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

- È ormai spontaneo “discretizzare” il parametro  $\varepsilon > 0$ , per costruire successioni minimizzanti con derivata “quasi” nulla.

**Corollario.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale limitato dal basso e derivabile in  $X$ . Allora, per ogni successione minimizzante  $\{u_k\}_k$  di  $\varphi$ , esiste una successione minimizzante  $\{v_k\}_k$  di  $\varphi$  tale che  $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k - v_k| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi'(v_k)\| = 0.$$

*Dim.* Basta porre

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \\ 1/k & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0. \end{cases}$$