Calcolo delle Variazioni
a.a. 2019-2020

Simone Secchi
simone.secchi@unimib.it

http://elearning.unimib.it

Prerequisiti e strumenti

- Calcolo differenziale in spazi euclidei di dimensione finita
- Teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue
- Principi di Analisi Funzionale Lineare
- Teoria elementare degli spazi di Sobolev (almeno il caso hilbertiano $p = 2$)

Strumenti: il calcolo differenziale in dimensione infinita

Notazione. Se X è uno spazio di Banach (reale), il suo duale topologico sarà denotato con il simbolo X^*. Se $A \in X^*$, il simbolo $A[v]$ indicherà il valore di A nel punto v; talvolta semplificheremo la notazione e scriveremo Av al posto di $A[v]$.

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, e $U \subset X$ un suo aperto. Un funzionale su U è un'applicazione $I \colon U \to \mathbb{R}$. Si noti che i "nostri" funzionali **non** sono necessariamente **lineari**!

Definizione. Sia $I\colon U \to \mathbb{R}$ un funzionale. Diremo che I è derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$ se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \tag{1}$$

o, equivalentemente, se

$$I(u+v) = I(u) + Av + o(\|v\|) \quad \text{per } v \to 0.$$

Si osservi che questa è la definizione di funzione differenziabile quando $X = \mathbb{R}^n$.

Lemma. Se I è derivabile nel punto $u \in U$, allora l'elemento A che soddisfa (1) è univocamente determinato.

Dim. Infatti, supponiamo che A e B siano due elementi di X^* che soddisfano (1). Per sottrazione,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{(A-B)v}{\|v\|} = 0.$$

Fissiamo $u \in X$ con $\|u\| = 1$, e scegliamo $v = tu$, $t \to 0^+$. Allora

$$(A-B)u = \lim_{t \to 0+} \frac{t(A-B)u}{t\|u\|} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di u, concludiamo che $A = B$.

Definizione. Se I è un funzionale derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$, la derivata (talvolta: il differenziale) di Fréchet di I in u è l'unico elemento $I'(u) \in X^*$ (talvolta: $dI(u)$) tale che

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Definizione. Se $I \colon U \to \mathbb{R}$ è derivabile secondo Fréchet in ogni punto $u \in U$, diremo che I è Fréchet-derivabile in U. La derivata di Fréchet di I è allora la mappa $I' \colon U \to X^*$ che ad $u \in U$ associa $I'(u) \in X^*$. Si tratta — in generale — di una mappa *non lineare*.

Se I' è una mappa continua da U in X^*, diremo che $I \in C^1(U)$.

Il caso hilbertiano

Se H è uno spazio di Hilbert (reale), è noto che gli elementi del duale H^* sono isometricamente identificati con vettori di H attraverso l'isomorfismo di Riesz. In particolare, un funzionale I definito su $U \subset H$ è derivabile in $u \in U$ se e solo esiste un vettore, detto d'ora in poi *gradiente* di I in u e denotato $\nabla I(u)$, tale che

$$I(u+v) = I(u) + \langle \nabla I(u) \mid v \rangle + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Proposizione. Siano I e J due funzionali derivabili nel punto $u \in X$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. Se a e b sono numeri reali, allora $aI + bJ$ è derivabile in u, e vale $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$.
2. Il prodotto IJ è derivabile in u, e vale $(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$.
3. Se $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$ è una curva derivabile in t_0 e $u = \gamma(t_0)$, allora la composizione $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\eta(t) = I(\gamma(t))$ è derivabile in t_0, e vale $\eta'(t_0) = I'(u)[\gamma'(t_0)]$.
4. Se $A \subset \mathbb{R}$ è un aperto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $I(u) \in A$, allora la composizione $K(u) = f(I(u))$ è definita in un intorno V di u, è derivabile in u e vale $K'(u) = f'(I(u))I'(u)$.

Dim. La prima affermazione è banale (esercizio!). Per quanto riguarda la seconda, quando $v \to 0$ in X, abbiamo

$$
\begin{aligned}
I(u+v)J(u+v) &= (I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|))\,(J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)) \\
&= I(u)J(u) + J(u)I'(u)[v] + I(u)J'(u)[v] + I'(u)[v]J'(u)[v] \\
&\quad + o(\|v\|)\,(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))\,.
\end{aligned}
$$

Concludiamo osservando che

$$
I'(u)[v]J'(u)[v] + o(\|v\|)\,(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))
$$

è $o(\|v\|)$ per $v \to 0$. La terza affermazione è simile, infatti per $h \to 0$ in $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\eta(t_0+h) &= I(\gamma(t_0+h)) = I(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)h + o(|h|)) \\
&= I(u) + I'(u)[\gamma'(t_0)h + o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|) \\
&= \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + I'(u)[o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|).
\end{aligned}
$$

Poiché gli ultimi due addendi sono $o(|h|)$, otteniamo che

$$
\eta(t_0+h) = \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + o(|h|).
$$

Infine, quando $v \to 0$ in X, si verifica come prima che

$$\begin{aligned} K(u+v) &= f(I(u+v)) = f(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))(I'(u)[v] + o(\|v\|)) + o(I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))I'(u)[v] + o(\|v\|). \end{aligned}$$

Osservazione. È possibile introdurre il concetto di derivata per applicazioni tra due spazi di Banach X e Y. Solo in questo contesto può essere enunciata una formulazione completa della regola di derivazione delle funzioni composte.

Poiché non ne faremo uso in queste lezioni, rimandiamo al testo di Ambrosetti e Prodi per ulteriori approfondimenti.

Definizione. Sia I un funzionale definito nell'aperto U di X, e sia $u \in U$. Diremo che I è derivabile secondo Gâteaux in u se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Av \tag{2}$$

per ogni $v \in X$. In tal caso, l'unico (esercizio!) elemento siffatto prende il nome di derivata secondo Gâteaux di I in u, e si denota con $I'_G(u)$ o con $d_G I(u)$.

Osserviamo che questa nuova derivata riprende la cosiddetta *derivata direzionale* già nota nell'ambito del calcolo differenziale in dimensione finita.

In particolare, ricordando i "soliti" esempi in $\mathbb{R}^2$, deduciamo che esistono funzionali (non lineari) derivabili secondo Gâteaux ma non derivabili secondo Fréchet.

Condizione sufficiente per la derivabilità secondo Fréchet

Proposizione. Supponiamo che $U \subset X$ sia un aperto, che I sia Gâteaux-derivabile in U, e che I'_G sia continua in un punto $u \in U$. Allora I è Fréchet-derivabile in u, e (ovviamente) $I'(u) = I'_G(u)$.

Omettiamo la dimostrazione, che è probabilmente stata proposta nel caso $X = \mathbb{R}^2$ nel corso di Analisi Matematica 2.

Punti critici

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, U un aperto di X, e I un funzionale definito su U. Diremo che $u \in U$ è un punto critico di I se I è derivabile in u e

$$I'(u) = 0.$$

Più esplicitamente, questo significa che $I'(u)[v] = 0$ per ogni $v \in X$.

Se u è un punto critico di I e $I(u) = c$, diremo che u è un punto critico (di I) al livello c. Se, per qualche $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $I^{-1}(\{c\}) \subset X$ contiene almeno un elemento, diremo che c è un valore critico per I.

L'equazione $I'(u) = 0$ è nota come equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) associata al funzionale I.

Esempi

Esempio 1. Ogni $A \in X^*$ è derivabile. Infatti, basta scrivere

$$A[u+v] = Au + Av$$

per dedurre che $A'(u) = A$ per qualsiasi $u \in X$.

Esempio 2. Sia X uno spazio di Banach, e sia $a \colon X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua. Denotiamo con $J \colon X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $J(u) = a(u,u)$ per ogni $u \in X$. Allora J è derivabile in X. Infatti

$$\begin{aligned} J(u+v) &= a(u+v, u+v) = a(u,u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v) \\ &= J(u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v). \end{aligned}$$

Poiché $|a(v,v)| \leq M\|v\|^2$ per l'ipotesi di continuità di a come forma bilineare, deduciamo che $a(v,v) = o(\|v\|)$ per $v \to 0$, e dunque che

$$J'(u)[v] = a(u,v) + a(v,u).$$

Esempio 3. (esercizio) Sia H uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Il funzionale $J(u) = \|u\|$ è derivabile in ogni punto $u \neq 0$, e risulta

$$\nabla J(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

Esempio 4. Sia X uno spazio di Banach, e siano I, J due funzionali derivabili in X. Definiamo

$$Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$$

sul sottoinsieme (aperto) $\{u \in X \mid J(u) \neq 0\}$. Per la Proposizione sulle regole di calcolo dimostrata sopra, possiamo affermare che Q è derivabile e che

$$Q'(u) = \frac{J(u)I'(u)[v] - I(u)J'(u)[v]}{J(u)^2}$$

per ogni $u\ inX$ tale che $J(u) \neq 0$.

Esempi in spazi concreti

Esempio 5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un insieme aperto e limitato. Definiamo i funzionali

$$I\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad I(u) = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx,$$

$$J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

$$K\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad K(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

$$L\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad L(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

Trattandosi di forme quadratiche associate a forme bilineari continue, sappiamo già che i quattro funzionali sono derivabili.

Esplicitamente, valgono le relazioni

$$\nabla I(u) = 2u$$
$$\nabla L(u) = 2u$$
$$\nabla J(u) = 2u.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$K'(u)[v] = 2 \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

per ogni u, $v \in H^1(\Omega)$, ma non siamo autorizzati ad affermare che $\nabla K(u) = 2u$ (perché?)

Inversione della Convergenza Dominata

Teorema di Lebesgue. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{u_k\}_k$ una successione in $L^1(\Omega)$ tale che

1. $u_k(x) \to u(x)$ per q.o $x \in \Omega$;
2. esiste $v \in L^1(\Omega)$ tale che $|u_k(x)| \leq v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni k.

Allora $u \in L^1(\Omega)$ e $u_k \to u$ nella norma di $L^1(\Omega)$.

Questo risultato fondamentale di Teoria della Misura può essere *parzialmente* invertito, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione, rimandiamo al libro di H. Brezis, Analisi funzionale.

Teorema. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{u_k\}_k$ una successione di $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, tale che $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$. Allora esistono una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_j$ ed una funzione $v \in L^p(\Omega)$ tali che

1. $u_{k_j}(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$;
2. per ogni j, $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Questo teorema mostra che la convergenza forte in L^p implica — a meno di sottosuccessioni — l'esistenza di una funzione dominante.

Operatori di Nemitskii

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che esistano $a > 0$ e $b > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1},$$

dove $2^* = 2N/(N-2)$ è l'esponente critico di Sobolev. Definiamo

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

e consideriamo il funzionale $J\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dato da

$$J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx.$$

Proposizione. Sotto le ipotesi precedenti, J è un funzionale derivabile in $H^1(\Omega)$, e vale

$$J'(u)[v] = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx$$

per ogni u, $v \in H^1(\Omega)$.

La dimostrazione non è immediata: mostriamo prima che J è Gâteaux-derivabile, e poi che la derivata di Gâteaux è continua. Come abbiamo visto sopra, ciò implica che J è Fréchet-derivabile.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o. $x \in \Omega$, risulta

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste un numero reale θ tale che $|\theta| \le |t|$ e

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)+\theta v(x))v(x)| \\ &\le \left(a + b|u(x)+\theta v(x)|^{2^*-1}\right)|v(x)| \\ &\le C\left(|v(x)| + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}\right).\end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t}\,dx = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx.$$

Poiché $v \mapsto \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx$ è un operatore lineare e continuo in $H^1(\Omega)$ (disuguaglianza di Hölder e di Sobolev), abbiamo individuato la derivata secondo Gâteaux di J:

$$J'_G(u)[v] = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx.$$

- Derivata di Fréchet

Mostriamo che $J'_G \colon H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ è un'applicazione continua. A tal fine, sia $\{u_k\}_k$ una successione che converge a u in $H^1(\Omega)$. Per il teorema di convergenza dominata inversa, possiamo supporre che — a meno di sottosuccessioni —

- $u_k \to u$ in $L^{2^*}(\Omega)$;
- $u_k(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$;
- esiste $w \in L^{2^*}(\Omega)$ tale che $|u_k(x)| \leq w(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni k.

Usiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$
\begin{aligned}
|(J_G'(u_k) - J_G'(u))[v]| &\leq \int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))||v(x)|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \times \\
&\quad \times \left(\int_\Omega |v(x)|^{2^*}\,dx \right)^{1/2^*}.
\end{aligned}
$$

La continuità di f implica $\lim_{k\to+\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))| = 0$ per q.o. $x \in \Omega$, e inoltre

$$
\begin{aligned}
|f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq C\left(1 + |u_k(x)|^{2^*-1} + |u(x)|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C\left(1 + |w(x)|^{2^*-1} + |w(x)|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C\left(1 + |w(x)|^{2^*} + |w(x)|^{2^*}\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Per Convergenza Dominata,

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx = 0.
$$

Perciò

$$\begin{aligned}\|J_G'(u_k) - J_G'(u)\| &= \sup\{(J_G'(u_k) - J_G'(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega),\ \|v\| = 1\} \\ &\le C\left(\int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \to 0.\end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che da ogni successione $\{u_k\}_k$ convergente a u è possibile estrarre una sottosuccessione tale che $J_G'(u_k) \to J_G'(u)$ in $(H^1(\Omega))^*$. È ora un esercizio di Topologia Generale dedurre che l'intera successione $\{u_k\}_k$ gode di questa proprietà (perché il limite è indipendente dalla sottosuccessione scelta).

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

Sia dunque Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale $J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx$ è derivabile in $H^1(\Omega)$.

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

Sia dunque Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale $J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx$ è derivabile in $H^1(\Omega)$.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $v \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste $\theta = \theta(x)$ tale che $|\theta| \leq |t|$ e

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\
&\leq C \left(|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1} \right) \\
&\leq C \left(|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*} \right) \\
&\in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Per il teorema di Lagrange, esiste $\theta = \theta(x)$ tale che $|\theta| \leq |t|$ e

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\
&\leq C\left(|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}\right) \\
&\leq C\left(|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}\right) \\
&\in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Se poi $\{u_k\}_k$ è una successione che tende a u in $H^1(\Omega)$, a meno di sottosuccessioni possiamo anche supporre che

- $u_k(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$
- $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ e in $L^{2^*}(\Omega)$
- esistono $w_1 \in L^{2^*}(\Omega)$ e $w_2 \in L^2(\Omega)$ tali che $|u_k(x)| \leq w_i(x)$, $i = 1, 2$, per q.o. $x \in \Omega$.

Sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon,$$

dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |x| > R_\varepsilon\}$. Ora,

$$\begin{aligned} |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_\Omega |f(u_k) - f(u)||v|\, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)||v|\, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)||v|\, dx. \end{aligned}$$

Trattiamo separatamente gli ultimi due integrali.

Innanzitutto

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)||v| \, dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|u_k| + |u| + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right) |v| \, dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |w_2||v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u||v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |w_1|^{2^*-1}|v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^{2^*-1}|v| \, dx \right) \\
&\leq C\|v\| \left(\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)} + \|w_1\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \\
&\leq C\|v\|\varepsilon.
\end{aligned}
$$

D'altra parte,

$$\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)||v|\,dx \leq C\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|.$$

Sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$, la funzione f soddisfa una maggiorazione del tipo $|f(t)| \leq C(1+|t|^{2^*-1})$, e come sopra concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx = 0.$$

Ricapitolando,

$$\begin{aligned}\|(J'_G(u_k)-J'_G(u))\| &= \sup\left\{(J'_G(u_k)-J'_G(u))[v] \mid v\in H^1(\Omega),\ \|v\|=1\right\}\\ &\leq C\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} + C\varepsilon\\ &= o(1)+C\varepsilon.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$, concludiamo che $J'_G(u_K)\to J'_G(u)$.

Osservazione. La regolarità della frontiera di Ω è stata utilizzata solo *implicitamente* per garantire la validità di tutte le immersioni di Sobolev. Ne consegue che gli stessi risultati sussistono, senza alcuna ipotesi su $\partial\Omega$, se restringiamo il funzionale J al sottospazio $H_0^1(\Omega)$.

Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

dove

- Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$, $h \in C(\Omega)$.

Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

dove

- Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$, $h \in C(\Omega)$.

Il problema (P) prende il nome di *problema di Dirichlet omogeneo*. L'aggettivo *omogeneo* si riferisce qui alla condizione *al bordo* $u = 0$ su $\partial\Omega$. Osserviamo che il problema è *lineare*.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in $\overline{\Omega}$.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in $\overline{\Omega}$.

  Fissiamo $v \in C_0^1(\Omega)$ e moltiplichiamo l'equazione in (P) per v. Integrando su Ω con l'ausilio del Teorema di Stokes (versione nota anche come *formula di Gauss-Green*), otteniamo che

  $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

  Questa uguaglianza ha senso sotto ipotesi ben più deboli di quelle finora assunte. Ad esempio gli integrali sono finiti quando u, v sono funzioni di $L^2(\Omega)$ tali che $\partial u / \partial x_i$ e $\partial v / \partial x_i$ appartengano ad $L^2(\Omega)$ per ogni indice i. La continuità di q e h è allora eccessiva, e possiamo sostituirla con $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$.

- Siano dunque $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$. Una *soluzione debole* di (P) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Siano dunque $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$. Una *soluzione debole* di (P) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Osservazione. Ogni soluzione classica è anche soluzione debole.

Infatti, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ implica $u \in H^1(\Omega)$. Per una nota proprietà degli spazi di Sobolev, poiché u è continua in $\overline{\Omega}$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$, abbiamo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sappiamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Poiché $C_0^1(\Omega)$ è un sottospazio denso di $H_0^1(\Omega)$, ad ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ facciamo corrispondere una successione $\{v_n\}_n \subset C_0^1(\Omega)$ tale che $v_n \to v$ in $H_0^1(\Omega)$.

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (P), e supponiamo che $h \in C(\overline{\Omega})$. *Se* è noto, per qualche motivo, che $u \in C^2(\Omega)$, allora possiamo dedurre che $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + q(x)u - h(x)\right) v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega (-\Delta u + q(x)u - h(x)) \, v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Per densità di $C_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, concludiamo che $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$ quasi ovunque, e che $u = 0$ quasi ovunque in $\partial\Omega$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + q(x)u - h(x)\right) v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Per densità di $C_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, concludiamo che $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$ quasi ovunque, e che $u = 0$ quasi ovunque in $\partial\Omega$.

- Morale della favola: abbiamo bisogno di una *teoria della regolarità* per le soluzioni deboli di (P).

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2 \, dx - \int_\Omega h(x)u \, dx.$$

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2\,dx - \int_\Omega h(x)u\,dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx - \int_\Omega h(x)v\,dx$$

per ogni u, $v \in H^1_0(\Omega)$.

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2\,dx - \int_\Omega h(x)u\,dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx - \int_\Omega h(x)v\,dx$$

per ogni $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$.

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale J.

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2\,dx - \int_\Omega h(x)u\,dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx - \int_\Omega h(x)v\,dx$$

per ogni u, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale J.

Il funzionale J è chiamato *funzionale dell'energia* associato a (P), anche se dovremmo chiamarlo più propriamente funzionale di azione o di Eulero-Lagrange.

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.
Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*. Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $q \in L^\infty(\Omega)$ e che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*. Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $q \in L^\infty(\Omega)$ e che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{SP}$$

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$, e definiamo un funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$, e definiamo un funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Sappiamo che J è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega q(x) uv \, dx - \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$, e definiamo un funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Sappiamo che J è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega q(x) uv \, dx - \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Ancora una volta, le soluzioni deboli di (SP) corrispondono ai punti critici del funzionale dell'energia J.

Riassunto

- Abbiamo visto che è possibile estendere il calcolo differenziale elementare (cioè quello delle funzioni di più variabili) alle funzioni di *infinite* variabili.
- Con questo linguaggio, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca opportune soluzioni di equazioni differenziali con gli zeri della derivata di opportuni funzionali (non lineari).

Prospettive

- Ci prefiggiamo ora di... andare a caccia dei punti critici, al fine di *risolvere* equazioni differenziali.
- Per far ciò, vedremo che occorrono strumenti nuovi, e che la *topologia* dello spazio di riferimento avrà un ruolo fondamentale.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Il ruolo della compattezza nel Teorema di Weierstrass è fondamentale, come mostra il seguente controesempio, dovuto anch'esso a Weierstrass.

Esempio. Sia

$$I(u) = \int_{-1}^{1} |xu'(x)|^2 \, dx$$

definito per ogni funzione $u \in C^1([-1,1])$ a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove $X = \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$ non ha soluzioni.

Esempio. Sia

$$I(u) = \int_{-1}^{1} \left| x u'(x) \right|^2 \, dx$$

definito per ogni funzione $u \in C^1([-1,1])$ a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove $X = \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$ non ha soluzioni.

Infatti, la famiglia di funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$$

mostra con un calcolo diretto che $\inf_X I = 0$. È poi evidente che $I(u) = 0$ implica $u' = 0$ in $[-1,1]$, cioè u è costante. Pertanto $u \notin X$.

Weierstrass in astratto

Teorema. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soddisfi la seguente condizione:

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$ è compatto.

Allora I raggiunge il suo estremo inferiore $\inf_M I$.

Dim. Possiamo evidentemente supporre che I non sia identicamente uguale a $+\infty$. Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione $\{\alpha_m\}_m$ strettamente decrescente verso α_0. Poniamo per brevità $K_m = K_{\alpha_m}$.

Weierstrass in astratto

Teorema. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soddisfi la seguente condizione:

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$ è compatto.

Allora I raggiunge il suo estremo inferiore $\inf_M I$.

Dim. Possiamo evidentemente supporre che I non sia identicamente uguale a $+\infty$. Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione $\{\alpha_m\}_m$ strettamente decrescente verso α_0. Poniamo per brevità $K_m = K_{\alpha_m}$. Per ipotesi, ogni K_m è compatto e non-vuoto. Inoltre $K_m \supset K_{m+1}$. Per la proprietà dell'intersezione finita, esiste

$$u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m,$$

cioè $I(u) \leq \alpha_m$ per ogni m. Facendo tendere $m \to +\infty$, concludiamo che $I(u) \leq \alpha_0$, cioè u è un minimo assoluto di I su M.

- Nell'ipotesi del Teorema precedente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

  $$\{u \in M \mid I(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha$$

  è aperto in M. Questo significa, per definizione, che I è una funzione *semicontinua inferiormente* su M.

- Nei casi concreti, la struttura di M può essere più ricca di quella di un mero spazio topologico. Di seguito un caso piuttosto frequente nell'Analisi Variazionale.

Teorema. Sia V uno spazio di Banach riflessivo con norma $\|\cdot\|$, e sia $M \subset V$ un sottospazio debolmente chiuso. Supponiamo che $I \colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia un funzionale tale che

- $I(u) \to +\infty$ se $\|u\| \to +\infty$;
- per ogni $u \in M$ ed ogni successione $\{u_m\}_k$ in M tale che $u_m \rightharpoonup u$, risulta: $I(u) \leq \liminf_{m\to+\infty} I(u_m)$.

Allora I è limitato dal basso, e raggiunge il suo minimo assoluto.

Dim. Sia $\alpha_0 = \inf_M I$ e sia $\{u_m\}_m$ una successione in M tale che $I(u_m) \to \alpha_0$ per $m \to +\infty$. Per la prima ipotesi, $\{u_m\}_m$ è una successione limitata in V (altrimenti...). Il teorema di Eberlein-Smulian garantisce la convergenza debole di tale successione a qualche $u \in V$. Per ipotesi M è debolmente chiuso, sicché $u \in M$. Infine,

$$I(u) \leq \liminf_{m\to+\infty} I(u_m) = \alpha_0.$$

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, K un sottoinsieme convesso e chiuso di X, e I un funzionale convesso s.c.i. su K. Allora I è debolmente s.c.i.

Dim. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme K_α è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi I è debolmente s.c.i.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, K un sottoinsieme convesso e chiuso di X, e I un funzionale convesso s.c.i. su K. Allora I è debolmente s.c.i.

Dim. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme K_α è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi I è debolmente s.c.i.

Notazione. Per rendere più espressiva la simbologia, utilizzeremo anche la scrittura

$$[I \leq \alpha] = \{u \in X \mid I(u) \leq \alpha\} .$$

Punti critici e topologia

Quando X è uno spazio di Banach riflessivo e I è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che I raggiunge il suo minimo assoluto α_0 consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $[I < \alpha_0] = \emptyset$;
- per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, l'insieme $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$ è non-vuoto e debolmente compatto.

Punti critici e topologia

Quando X è uno spazio di Banach riflessivo e I è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che I raggiunge il suo minimo assoluto α_0 consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $[I < \alpha_0] = \emptyset$;
- per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, l'insieme $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$ è non-vuoto e debolmente compatto.

In realtà ciò indica la presenza di punti critici di I è la differenza topologica dei sottolivelli $[I \leq c]$ e $[I \leq c + \varepsilon]$.

Esempi

- Sia $I(x) = x^3 - 3x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La derivata di I si annulla in ± 1, e se poniamo $c_1 = I(1) = -2$, $c_2 = I(-1) = 2$, vediamo che

  1. se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è un intervallo del tipo $(-\infty, \alpha_1]$;
  2. se $c_1 < a_2 < c_2$, risulta $[I \leq a_2] = (-\infty, \alpha_2] \cup [\beta_2, \gamma_2]$ con $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$;
  3. se $a_3 > c_2$, risulta $[I \leq a_3] = (-\infty, \alpha_3]$.

  Nell'attraversare i valori c_1 e c_2, i sottolivelli del funzionale sono topologicamente distinti.

- Sia $I(x, y) = x^2 - y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sappiamo che 0 è l'unico valore critico di I. Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $[I \leq \varepsilon]$ è connesso, mentre $[I \leq -\varepsilon]$ ha due componenti connesse.

- Sia $I(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0,R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

- Sia $I(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0,R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

  Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

- Sia $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0, R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

  Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

  A causa del forte legame con la Topologia Algebrica, questa teoria non rientra nei limiti del nostro corso.

Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica* $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica* $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Con il termine di *principi variazionali* ci si riferisce a teoremi che permettano di costruire *quasi minimi*, cioè tipicamente successioni minimizzanti per funzionali limitati e s.c.i., aventi però ulteriori proprietà.

Il principio di Ekeland

Teorema. Sia M uno spazio metrico completo con metrica d, e sia $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funzionale limitato dal basso, s.c.i. e non identicamente infinito. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $u \in M$ con

$$I(u) \leq \inf_M I + \varepsilon,$$

esiste un elemento $v \in M$ tale che

$$d(u, v) \leq 1, \quad I(v) < I(u),$$

e, per ogni $w \neq v$ in M,

$$I(w) > I(v) - \varepsilon d(v, w).$$

Dim. Definiamo un ordinamento su M ponendo $w \leq v$ se e solo se $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$. Poniamo $u_0 = u$, e supponiamo di aver definito u_n. Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo $u_{n+1} \in S_n$ tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

Dim. Definiamo un ordinamento su M ponendo $w \leq v$ se e solo se $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$. Poniamo $u_0 = u$, e supponiamo di aver definito u_n. Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo $u_{n+1} \in S_n$ tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

È chiaro che $S_{n+1} \subset S_n$ poiché $u_{n+1} \leq u_n$; inoltre S_n è chiuso perché I è s.c.i.

Se $w \in S_{n+1}$, allora $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e dunque

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq I(u_{n+1}) - I(u_n) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} I = \frac{1}{n+1}.$$

Deduciamo che

$$\operatorname{diam} S_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

Poiché M è uno spazio completo, è noto che

$$\bigcap_n S_n = \{v\}$$

per qualche $v \in M$. In particolare $v \in S_0$, cioè $v \leq u_0 = u$. Quindi

$$I(v) \leq I(u) - \varepsilon d(u, v) \leq I(u)$$

e

$$d(u, v) \leq \varepsilon^{-1} (I(u) - I(v)) \leq \varepsilon^{-1} \left(\inf_M I + \varepsilon - \inf_M I \right) = 1.$$

Per concludere, dimostriamo che $w \leq v$ implica $w = v$. Infatti, $w \leq v$ implica $w \in u_n$ per ogni n, e dunque $w \in S_n$ per ogni n. Quindi $w = v$.

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio M e del funzionale I.

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio M e del funzionale I.

  Teorema. Siano X uno spazio di Banach, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e limitata dal basso su X. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $u \in X$ tale che $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$, esiste $v \in X$ tale che $\varphi(v) \leq \varphi(u)$,

$$|v - u| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad |\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per t e prendendo il limite per $t \to 0$, deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di h sulla sfera unitaria di X, deve essere $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Le altre proprietà di v sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per t e prendendo il limite per $t \to 0$, deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di h sulla sfera unitaria di X, deve essere $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Le altre proprietà di v sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

- È ormai spontaneo "discretizzare" il parametro $\varepsilon > 0$, per costruire successioni minimizzanti con derivata "quasi" nulla.

Corollario. Siano X uno spazio di Banach, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ un funzionale limitato dal basso e derivabile in X. Allora, per ogni successione minimizzante $\{u_k\}_k$ di φ, esiste una successione minimizzante $\{v_k\}_k$ di φ tale che $\varphi(v_k) \le \varphi(u_k)$,

$$\lim_{k\to+\infty} |u_k - v_k| = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} \|\varphi'(v_k)\| = 0.$$

Dim. Basta porre

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \\ 1/k & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0. \end{cases}$$

Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti "quasi critici" per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di "vero" punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti "quasi critici" per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di "vero" punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

  Teorema. Supponiamo che $I \in C^1(\mathbb{R}^N)$ sia un funzionale coercivo, e che I possieda due punti distinti di minimo stretto, x_1 e x_2. Allora I possiede un terzo punto critico x_3 che non è un minimo locale, e dunque distinto da x_1 e x_2.

Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti "quasi critici" per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di "vero" punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

  Teorema. Supponiamo che $I \in C^1(\mathbb{R}^N)$ sia un funzionale coercivo, e che I possieda due punti distinti di minimo stretto, x_1 e x_2. Allora I possiede un terzo punto critico x_3 che non è un minimo locale, e dunque distinto da x_1 e x_2.

- Immaginiamo dunque (almeno nel caso $N = 2$) il grafico di I, con due punti di minimo locale stretto. Il teorema afferma, sotto l'ipotesi che I diverga all'infinito per argomenti divergenti all'infinito, che da qualche parte esiste un punto di *sella*.

Dim. Definiamo il valore

$$\beta = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x),$$

dove

$$P = \left\{ p \subset \mathbb{R}^N \mid x_1 \in p,\ x_2 \in p,\ p \text{ è compatto e connesso} \right\}.$$

Prendiamo una successione $\{p_m\}_m \subset P$ minimizzante per β, nel senso che

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta.$$

Poiché I è coercivo, gli insiemi p_m sono uniformemente limitati.

Dim. Definiamo il valore

$$\beta = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x),$$

dove

$$P = \left\{ p \subset \mathbb{R}^N \mid x_1 \in p,\ x_2 \in p,\ p \text{ è compatto e connesso} \right\}.$$

Prendiamo una successione $\{p_m\}_m \subset P$ minimizzante per β, nel senso che

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta.$$

Poiché I è coercivo, gli insiemi p_m sono uniformemente limitati. L'insieme dei punti di accumulazione di $\{p_m\}_m$,

$$p = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l \geq m} p_l},$$

è l'intersezione di una successione decrescente di insiemi compatti e connessi: dunque anch'esso è compatto e connesso. Inoltre $\{x_1, x_2\} \subset p$, poiché $\{x_1, x_2\} \subset p_m$ per ogni m.

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché $\max_{x \in p} I(x) = \beta$.

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché $\max_{x \in p} I(x) = \beta$.

Poiché x_1 e x_2 sono due punti di minimo locale stretto collegati da p, risulta $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$.

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché $\max_{x \in p} I(x) = \beta$.

Poiché x_1 e x_2 sono due punti di minimo locale stretto collegati da p, risulta $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$.

- Dimostriamo che esiste un punto critico $x_3 \in p$ tale che $I(x_3) = \beta$.

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \to +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché $\max_{x \in p} I(x) = \beta$.

Poiché x_1 e x_2 sono due punti di minimo locale stretto collegati da p, risulta $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$.

- Dimostriamo che esiste un punto critico $x_3 \in p$ tale che $I(x_3) = \beta$.

Procediamo per assurdo. Innanzitutto l'insieme

$$K = \{x \in p \mid I(x) = \beta\}$$

è chiuso (perché?) e limitato, dunque compatto. Supponiamo che $I' \neq 0$ in K.

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero $\delta > 0$ tale che $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$ per ogni $x \in K$. Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K \right\}$$

di K tale che $|I'| \geq \delta$ su U_ε. In particolare, $x_i \notin U_\varepsilon$, $i = 1, 2$.

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero $\delta > 0$ tale che $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$ per ogni $x \in K$. Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K \right\}$$

di K tale che $|I'| \geq \delta$ su U_ε. In particolare, $x_i \notin U_\varepsilon$, $i = 1, 2$.

Sia η una funzione continua con supporto contenuto in U_ε, tale che $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ in un intorno di K.

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero $\delta > 0$ tale che $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$ per ogni $x \in K$. Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K \right\}$$

di K tale che $|I'| \geq \delta$ su U_ε. In particolare, $x_i \notin U_\varepsilon$, $i = 1, 2$.

Sia η una funzione continua con supporto contenuto in U_ε, tale che $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ in un intorno di K.

Definiamo $\Phi \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ mediante

$$\Phi(x, t) = x - t\eta(x)\nabla I(x).$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\Phi(x, t)) = -\eta(x)|\nabla I(x)|^2.$$

Inoltre $|\nabla I(x)|^2 \geq \delta^2 > 0$ su $\operatorname{supp} \eta \subset U_\varepsilon$. Per continuità, esiste $T > 0$ tale che

$$\frac{d}{dt} I(\Phi(x,t)) \leq -\frac{\eta(x)}{2} |\nabla I(x)|^2$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, uniformemente rispetto a x.

Inoltre $|\nabla I(x)|^2 \geq \delta^2 > 0$ su $\operatorname{supp} \eta \subset U_\varepsilon$. Per continuità, esiste $T > 0$ tale che

$$\frac{d}{dt} I(\Phi(x, t)) \leq -\frac{\eta(x)}{2} |\nabla I(x)|^2$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, uniformemente rispetto a x.

Sia $p_T = \{\Phi(x, T) \mid x \in p\}$; per ogni $\Phi(x, T) \in p_T$ calcoliamo

$$\begin{aligned} I(\Phi(x, T)) &= I(x) + \int_0^T \frac{d}{dt} I(\Phi(x, t))\, dt \\ &\leq I(x) - \frac{T}{2} \eta(x) |\nabla I(x)|^2, \end{aligned}$$

e l'ultimo termine è $\leq I(x) = \beta$ se $x \notin K$, oppure $\leq \beta - \frac{T}{2}\delta^2 < \beta$ se $x \in K$. In ogni caso,

$$\max_{x \in p_T} I(x) < \beta.$$

Ma:

- p_T è compatto e connesso;
- $x_i = \Phi(x_i, T) \in p_T$, $i = 1, 2$.

Pertanto $p_T \in P$, e questo contraddice la definizione di β.

Se tutti i punti critici u di I in p con $I(u) = \beta$ fossero minimi locali, l'insieme $\tilde{K}$ di tali punti sarebbe aperto in p e — per la continuità di I e di I' — anche chiuso. Ma $\tilde{K} \neq \emptyset$ per la discussione precedente, dunque $p = \tilde{K}$. Ciò contraddice il fatto che $I(x_1) < \beta$, $I(x_2) < \beta$.

Se tutti i punti critici u di I in p con $I(u) = \beta$ fossero minimi locali, l'insieme $\tilde{K}$ di tali punti sarebbe aperto in p e — per la continuità di I e di I' — anche chiuso. Ma $\tilde{K} \neq \emptyset$ per la discussione precedente, dunque $p = \tilde{K}$. Ciò contraddice il fatto che $I(x_1) < \beta$, $I(x_2) < \beta$.

Pertanto almeno un punto critico di I in p al livello β non è un minimo locale. La dimostrazione è completa.

Se tutti i punti critici u di I in p con $I(u) = \beta$ fossero minimi locali, l'insieme $\tilde{K}$ di tali punti sarebbe aperto in p e — per la continuità di I e di I' — anche chiuso. Ma $\tilde{K} \neq \emptyset$ per la discussione precedente, dunque $p = \tilde{K}$. Ciò contraddice il fatto che $I(x_1) < \beta$, $I(x_2) < \beta$.

Pertanto almeno un punto critico di I in p al livello β non è un minimo locale. La dimostrazione è completa.

- L'interpretazione di questo teorema è suggestiva: $I(x)$ misura l'altitudine di un punto x in un panorama. I due minimi x_1 e x_2 corrispondono a due villaggi collocati al fondo di due valli separate da una cresta montagnosa. Se camminiamo lungo un sentiero p che unisce i due villaggi, scelto in modo che la quota massima $I(x)$ raggiunta nei punti $x \in p$ sia minimale tra le quote di tutti i possibili sentieri, il teorema afferma che attraverseremo la cresta in un punto di sella (che i montanari chiamano anche *forcella*).

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.
- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale I.

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.
- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale I.
- Nalla dimostrazione appena vista, la coercività di I garantiva immediatamente la limitatezza — e dunque la *relativa compattezza* — di tutti i (sotto)livelli di I. La compattezza (relativa) della palla unitaria di uno spazio di Banach equivale però all'avere dimensione finita.

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.

- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale I.

- Nalla dimostrazione appena vista, la coercività di I garantiva immediatamente la limitatezza — e dunque la *relativa compattezza* — di tutti i (sotto)livelli di I. La compattezza (relativa) della palla unitaria di uno spazio di Banach equivale però all'avere dimensione finita.

- Occorre, nel caso infinito-dimensionale, un surrogato della coercività, che garantisca la necessaria compattezza.

Un lemma di deformazione

Approfondiamo il legame tra l'esistenza di punti critici e la topologia dei sottolivelli.

Lemma di deformazione. Siano $J \in C^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_0 > 0$ tali che

1. l'insieme $[c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$ è compatto;
2. esiste $\lambda > 0$ tale che, per ogni $x \in [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, si abbia $\|J'(x)\| \geq \lambda$.

Allora, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0/2$, esiste un omeomorfismo Φ di $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$, tale che $\Phi([J \leq c + \varepsilon]) \subset [J \leq c - \varepsilon]$.

- L'ipotesi di assenza di punti critici *nella striscia* $[c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$ assicura che il sottolivello $[J \leq c + \varepsilon]$ abbia la stessa topologia del sottolivello $[J \leq c - \varepsilon]$.

Dim. Sia $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. Poniamo $\alpha = 2\varepsilon/\lambda^2$ e

$$A = [J \le c - \varepsilon_0] \cup [J \ge c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \le J \le c + \varepsilon].$$

Sia $f\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ una funzione localmente lipschitziana tale che $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$. Ad esempio possiamo scegliere

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Dim. Sia $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. Poniamo $\alpha = 2\varepsilon/\lambda^2$ e

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon].$$

Sia $f\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ una funzione localmente lipschitziana tale che $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$. Ad esempio possiamo scegliere

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Allora l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha f(x(t)) J'(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possiede un'unica soluzione x che esiste per ogni tempo, dal momento che il secondo membro è un campo vettoriale localmente lipschitziano e uniformemente limitato. Inoltre la soluzione dipende con continuità da x_0. Denotiamo questa soluzione con $\eta(t, x_0)$.

Il funzionale J decresce lungo la soluzione:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(\eta(t,x_0)) &= J'(\eta(t,x_0))\frac{d\eta}{dt} \\ &= -\alpha f(\eta(t,x_0))\|J'(\eta(t,x_0))\|^2 \le 0.\end{aligned}$$

- Definiamo $\Phi(x_0) = \eta(1, x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

  Sia $x_0 \in [J \le c+\varepsilon]$: Se $J(x_0) \le c-\varepsilon$, per la monotonia di $t \mapsto J(\eta(t,x_0))$ si ha $\Phi(x_0) \in [J \le c-\varepsilon]$. Se invece per ogni tempo t risulta che $\eta(t,x_0)$ appartiene a $[c-\varepsilon < J \le c+\varepsilon]$, allora

$$\begin{aligned}J(\eta(1,x_0)) &= J(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}J(\eta(t,x_0))\,dt \\ &= J(x_0) - \alpha\int_0^1 f(\eta(t,x_0))\|J'(\eta(t,x_0))\|^2\,dt \\ &\le J(x_0) - \alpha\lambda^2 \le c-\varepsilon,\end{aligned}$$

  il che significa che la traiettoria di η passante per x_0 esce, al più tardi al tempo $t=1$, dall'insieme $[c-\varepsilon < J \le c+\varepsilon]$ per entrare nell'insieme $[J \le c-\varepsilon]$.

Osservazione. La funzione $\eta(\cdot, x_0)$ è chiamata *flusso* associato a J passante per x_0. Nei fatti abbiamo dimostrato ben più dell'enunciato:

1. per ogni $t \in [0,1]$, $x \mapsto \eta(t,x)$ è un omoemorfismo;
2. per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $\eta(0,x) = x$
3. se $x \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, abbiamo che $\eta(t,x) = x$ per ogni $t \in [0,1]$;
4. se $x \in [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon]$, abbiamo che $\eta(1,x) \in [J \leq c - \varepsilon]$.

Osservazione. La funzione $\eta(\cdot, x_0)$ è chiamata *flusso* associato a J passante per x_0. Nei fatti abbiamo dimostrato ben più dell'enunciato:

1. per ogni $t \in [0,1]$, $x \mapsto \eta(t,x)$ è un omoemorfismo;
2. per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $\eta(0,x) = x$
3. se $x \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, abbiamo che $\eta(t,x) = x$ per ogni $t \in [0,1]$;
4. se $x \in [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon]$, abbiamo che $\eta(1,x) \in [J \leq c - \varepsilon]$.

- Se $[c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$ è limitato e non contiene punti critici di J, allora $\|J'\|$ è minorato su tale insieme da una costante positiva, e il lemma si applica. È questa una conseguenza del teorema di Weierstrass e della compattezza locale di $\mathbb{R}^N$. Ma che succede in dimensione infinita, dove la compattezza locale è (sempre) falsa?

La condizione di Palais-Smale

Definizione. Sia X uno spazio di Banach, e sia $J \in C^1(X)$ un funzionale su X. Se $c \in \mathbb{R}$, diciamo che J soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c, se ogni successione $\{u_n\}_n$ in X tale che

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0$$

contiene una sottosuccessione convergente in X.

La condizione di Palais-Smale

Definizione. Sia X uno spazio di Banach, e sia $J \in C^1(X)$ un funzionale su X. Se $c \in \mathbb{R}$, diciamo che J soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c, se ogni successione $\{u_n\}_n$ in X tale che

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0$$

contiene una sottosuccessione convergente in X.

- Intuitivamente, stiamo pretendendo che le successioni che "puntano" verso valori critici convergano (almeno a meno di sottosuccessioni) effettivamente ad un punto critico.

La condizione di Palais-Smale

Definizione. Sia X uno spazio di Banach, e sia $J \in C^1(X)$ un funzionale su X. Se $c \in \mathbb{R}$, diciamo che J soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c, se ogni successione $\{u_n\}_n$ in X tale che

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0$$

contiene una sottosuccessione convergente in X.

- Intuitivamente, stiamo pretendendo che le successioni che "puntano" verso valori critici convergano (almeno a meno di sottosuccessioni) effettivamente ad un punto critico.
- La condizione non è banale: si pensi alla funzione reale di una variabile reale $f(x) = e^{-x}(2 + \sin(e^{-2x}))$ con $c = 0$.

Corollario. Se J verifica la coondizione (PS) a livello $c \in \mathbb{R}$, allora l'insieme

$$K(c) = \{u \in X \mid J(u) = c, \quad J'(u) = 0\}$$

è compatto.

Corollario. Se J verifica la coondizione (PS) a livello $c \in \mathbb{R}$, allora l'insieme

$$K(c) = \{u \in X \mid J(u) = c, \quad J'(u) = 0\}$$

è compatto.

Dim. Supponiamo che $u_n \in K(c)$ per ogni n. Allora, in particolare, $\{u_n\}_n$ è una successione di Palais-Smale a livello c. Esiste pertanto una sottosuccessione convergente in X ad un limite u, che risulta appartenere a $K(c)$ per continuità di J e di J'.

Un esempio

Sia $(A, D(A))$ l'operatore autoaggiunto a risolvente compatto definito in $L^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato, dalla formula $Au = -\Delta u$ per ogni $u \in D(A)$, essendo

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Sia $\sigma_p(A) = \{\lambda_k\}_k$ l'insieme degli autovalori di A.

Un esempio

Sia $(A, D(A))$ l'operatore autoaggiunto a risolvente compatto definito in $L^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato, dalla formula $Au = -\Delta u$ per ogni $u \in D(A)$, essendo

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Sia $\sigma_p(A) = \{\lambda_k\}_k$ l'insieme degli autovalori di A.

Identificando $L^2(\Omega)$ con il suo duale, risulta $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, con immersioni continue e dense.

Un esempio

Sia $(A, D(A))$ l'operatore autoaggiunto a risolvente compatto definito in $L^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato, dalla formula $Au = -\Delta u$ per ogni $u \in D(A)$, essendo

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Sia $\sigma_p(A) = \{\lambda_k\}_k$ l'insieme degli autovalori di A.

Identificando $L^2(\Omega)$ con il suo duale, risulta $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, con immersioni continue e dense.

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in H^{-1}(\Omega)$ fissati, sia J il funzionale definito su $H_0^1(\Omega)$ come

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \right] \, dx - \langle f, u \rangle,$$

dove $\langle \ , \ \rangle$ denota la dualità tra $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$.

Dimostriamo che, se $\lambda \notin \sigma_p(A)$, allora J soddisfa la condizione (PS) a qualunque livello.

Dimostriamo che, se $\lambda \notin \sigma_p(A)$, allora J soddisfa la condizione (PS) a qualunque livello.

Infatti, denotando con $\tilde{A}$ l'estensione di A a $H_0^1(\Omega)$, risulta

$$J'(u) = \tilde{A}u - \lambda u - f$$

e $\tilde{A} - \lambda I$ è un omeomorfismo di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$.

Dimostriamo che, se $\lambda \notin \sigma_p(A)$, allora J soddisfa la condizione (PS) a qualunque livello.

Infatti, denotando con $\tilde{A}$ l'estensione di A a $H_0^1(\Omega)$, risulta

$$J'(u) = \tilde{A}u - \lambda u - f$$

e $\tilde{A} - \lambda I$ è un omeomorfismo di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$.

Se $\{u_n\}_n$ è una successione di $H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_n) \to c$ e

$$J'(u_n) = \tilde{A}u_n - \lambda u_n - f = \varepsilon_n \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega),$$

allora $u_n = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}[f + \varepsilon_n] \to u = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1} f$ in $H_0^1(\Omega)$ per la compattezza del risolvente di A.

Dimostriamo che, se $\lambda \notin \sigma_p(A)$, allora J soddisfa la condizione (PS) a qualunque livello.

Infatti, denotando con $\tilde{A}$ l'estensione di A a $H_0^1(\Omega)$, risulta

$$J'(u) = \tilde{A}u - \lambda u - f$$

e $\tilde{A} - \lambda I$ è un omeomorfismo di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$.

Se $\{u_n\}_n$ è una successione di $H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_n) \to c$ e

$$J'(u_n) = \tilde{A}u_n - \lambda u_n - f = \varepsilon_n \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega),$$

allora $u_n = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}[f + \varepsilon_n] \to u = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1} f$ in $H_0^1(\Omega)$ per la compattezza del risolvente di A.

Se invece $\lambda = \lambda_k \in \sigma_p(A)$, la condizione (PS) non può essere soddisfatta. Basta considerare la successione $\{n\varphi_k\}_n$, dove φ_k è un'autofunzione associata all'autovalore λ_k. Risulta $J(n\varphi_k) = 0$ e $J'(n\varphi_k) = 0$ per ogni n, sebbene non esistano sottosuccessioni convergenti.

Un esempio semilineare

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ tale che $(N-2)p < N+2$. Per λ reale fissato, consideriamo il funzionale J definito su $H_0^1(\Omega)$ da

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx.$$

Un esempio semilineare

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ tale che $(N-2)p < N+2$. Per λ reale fissato, consideriamo il funzionale J definito su $H_0^1(\Omega)$ da

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx.$$

Sia $\{u_n\}_n$ una successione di Palais-Smale al livello c. Quindi

$$J'(u_n) = -\Delta u_n + \lambda|u_n|^{p-1}u_n \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

Un esempio semilineare

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ tale che $(N-2)p < N+2$. Per λ reale fissato, consideriamo il funzionale J definito su $H_0^1(\Omega)$ da

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx.$$

Sia $\{u_n\}_n$ una successione di Palais-Smale al livello c. Quindi

$$J'(u_n) = -\Delta u_n + \lambda|u_n|^{p-1}u_n \to 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} J'(u_n)[u_n] &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \lambda\int_\Omega |u_n|^{p+1} \\ &= (p+1)J(u_n) - \frac{p-1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2. \end{aligned}$$

Ora, $|J'(u_n)[u_n]| \le \|J'(u_n)\|\|\nabla u_n\|$, e possiamo dedurre che

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|^2 \le (p+1)J(u_n) + \|J'(u_n)\|\|\nabla u_n\|.$$

Poiché $p > 1$, questa disuguaglianza dimostra che la successione $\{u_n\}_n$ è limitata. Possiamo applicare il teorema di compattezza di Rellich, e dedurre che esiste una sottosuccessione $v_i = u_{n_i}$ tale che $v_i \to v$ in $H_0^1(\Omega)$ debole e in $L^{p+1}(\Omega)$ forte.

Poiché $p > 1$, questa disuguaglianza dimostra che la successione $\{u_n\}_n$ è limitata. Possiamo applicare il teorema di compattezza di Rellich, e dedurre che esiste una sottosuccessione $v_i = u_{n_i}$ tale che $v_i \to v$ in $H_0^1(\Omega)$ debole e in $L^{p+1}(\Omega)$ forte.

Ma allora $|v_i|^{p-1}v_i \to |v|^{p-1}v$ in $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, dunque anche in $H^{-1}(\Omega)$, e infine

$$-\Delta v_i = J'(v_i) - \lambda|v_i|^{p-1}v_i \to -\lambda|v|^{p-1}v$$

in $H^{-1}(\Omega)$.

Poiché $p > 1$, questa disuguaglianza dimostra che la successione $\{u_n\}_n$ è limitata. Possiamo applicare il teorema di compattezza di Rellich, e dedurre che esiste una sottosuccessione $v_i = u_{n_i}$ tale che $v_i \to v$ in $H_0^1(\Omega)$ debole e in $L^{p+1}(\Omega)$ forte.

Ma allora $|v_i|^{p-1}v_i \to |v|^{p-1}v$ in $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, dunque anche in $H^{-1}(\Omega)$, e infine

$$-\Delta v_i = J'(v_i) - \lambda|v_i|^{p-1}v_i \to -\lambda|v|^{p-1}v$$

in $H^{-1}(\Omega)$.

Chiamando B l'operatore che a $f \in H^{-1}(\Omega)$ fa corrispondere la soluzione z di:

$$z \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta z = h,$$

sappiamo che B è un operatore continuo da $H^{-1}(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$. Otteniamo

$$v_i = B(J'(v_i) - \lambda|v_i|^{p-1}v_i) \to B(-\lambda|v|^{p-1}v)$$

in $H_0^1(\Omega)$.

Questo mostra non solo che $\{u_n\}_n$ possiede una sottosuccessione covergente, ma anche che il limite v di tale sottosuccessione è una soluzione di

$$-\Delta v + \lambda |v|^{p-1} v = 0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

La condizione (PS) e il principio di Ekeland

Vediamo un interessante risultato che unisce la condizione di Palais-Smale al principio variazionale di Ekeland.

Proposizione. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X)$ un funzionale su X. Supponiamo che J sia limitato dal basso e verifichi la condizione (PS) al livello $c = \inf_X J$. Allora J raggiunge il suo minimo c.

La condizione (PS) e il principio di Ekeland

Vediamo un interessante risultato che unisce la condizione di Palais-Smale al principio variazionale di Ekeland.

Proposizione. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X)$ un funzionale su X. Supponiamo che J sia limitato dal basso e verifichi la condizione (PS) al livello $c = \inf_X J$. Allora J raggiunge il suo minimo c.

Dim. Per il principio variazionale, esiste una successione $u_n \in X$ tale che

$$c \leq J(u_n) \leq c + \frac{1}{n}$$
$$\forall v \in X : \quad J(v) + \frac{1}{n}\|v - u_n\| \geq J(u_n).$$

Scrivendo

$$J(v) = J(u_n) + J'(u_n)[v - u_n] + o(\|v - u_n\|),$$

deduciamo che

$$\|J'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Poiché J soddisfa la condizione (PS) al livello c, esiste una sottosuccessione convergente a qualche $u \in X$. Per continuità, $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$.

Campi vettoriali pseudo-gradienti

Definizione. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $u \in X$, diciamo che $v \in X$ è un vettore pseudogradiente di J in u se:

$$\|v\| \leq 2\|J'(u)\|, \quad J'(u)[v] \geq \|J'(u)\|^2.$$

Denotato con $X_r = \{u \in X \mid J'(u) \neq 0\}$ l'insieme dei punti regolari di J, un'applicazione $V \colon X_r \to X$ è chiamata campo vettoriale pseudogradiente per J se V è localmente lipschitziana su X_r e per ogni $u \in X_r$, $V(u)$ è un vettore pseudogradiente per J in u.

Campi vettoriali pseudo-gradienti

Definizione. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $u \in X$, diciamo che $v \in X$ è un vettore pseudogradiente di J in u se:

$$\|v\| \leq 2\|J'(u)\|, \quad J'(u)[v] \geq \|J'(u)\|^2.$$

Denotato con $X_r = \{u \in X \mid J'(u) \neq 0\}$ l'insieme dei punti regolari di J, un'applicazione $V\colon X_r \to X$ è chiamata campo vettoriale pseudogradiente per J se V è localmente lipschitziana su X_r e per ogni $u \in X_r$, $V(u)$ è un vettore pseudogradiente per J in u.

- Se X è uno spazio di Hilbert e se $J \in C^1$ è anche localmente lipschitziano, allora ∇J è un c.v.p.g.
- Se J non è localmente lipschitziano, l'esistenza di un c.v.p.g. non è affatto evidente.

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, e $J \in C^1(X)$ un funzionale non costante. Esiste allora un c.v.p.g. per J.

|em Dim. Sia $u \in X_r$ un punto regolare. Per definizione,

$$\|J'(u)\| = \sup_{\|x\|=1} J'(u)[x],$$

e pertanto esiste $x_u \in X$ tale che $\|x_u\| = 1$ e

$$J'(u)[x_u] > \frac{2}{3}\|J'(u)\|.$$

Ponendo $v = v_u = \frac{3}{2}\|J'(u)\|x_u$, abbiamo:

$$\|v_u\| = \frac{3}{2}\|J'(u)\| < 2\|J'(u)\|$$

$$J'(u)[v_u] = \frac{3}{2}J'(u)[x_u] > \|J'(u)\|^2.$$

Abbiamo costruito un vettore pseudogradiente per J in u. Adesso facciamo una tipica operazione di Topologia Differenziale: incolliamo, mediante una partizione dell'unità, questi vettori.

Abbiamo costruito un vettore pseudogradiente per J in u. Adesso facciamo una tipica operazione di Topologia Differenziale: incolliamo, mediante una partizione dell'unità, questi vettori.

- Per continuità di J', esiste un intorno Ω_u di u, contenuto in X_r, tale per ogni $x \in \Omega_u$, v_u sia un vettore pseudogradiente per J in x.
- La famiglia $\{\Omega_u \mid u \in X_r\}$ è un ricoprimento aperto di X_r. Poiché tutti gli spazi metrici sono *paracompatti*, esistono un sottoricoprimento localmente finito $\{\omega_j\}_{j\in I}$ e una partizione dell'unità localmente lipschitziana $\{\theta_j\}_{j\in I}$, subordinata a $\{\omega_j\}_{j\in I}$.

Ponendo

$$V(z) = \sum_{j \in J} \theta_j(z) v_{u_j},$$

basta osservare che la somma è finita: dunque V è un campo vettoriale localmente lipschitziano su X_r a valori in X, che risulta pseudo-gradiente per la scelta di v_{u_j}.

Ponendo

$$V(z) = \sum_{j \in J} \theta_j(z) v_{u_j},$$

basta osservare che la somma è finita: dunque V è un campo vettoriale localmente lipschitziano su X_r a valori in X, che risulta pseudo-gradiente per la scelta di v_{u_j}.

- I risultati topologici utilizzati nel corso della dimostrazione possono essere recuperati in molti manuali di topologia generale e/o differenziale. Ad esempio quelli di Bourbaki o Dieudonné.

Ponendo

$$V(z) = \sum_{j \in J} \theta_j(z) v_{u_j},$$

basta osservare che la somma è finita: dunque V è un campo vettoriale localmente lipschitziano su X_r a valori in X, che risulta pseudo-gradiente per la scelta di v_{u_j}.

- I risultati topologici utilizzati nel corso della dimostrazione possono essere recuperati in molti manuali di topologia generale e/o differenziale. Ad esempio quelli di Bourbaki o Dieudonné.

- Siamo pronti ad enunciare e dimostrare un lemma di deformazione nel contesto degli spazi di Banach di dimensione qualunque.

Un lemma di deformazione

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ un funzionale non costante che soddisfa la condizione (PS) (ad ogni livello), e sia $c \in \mathbb{R}$ un valore regolare di J. Esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un'applicazione $\eta \in C(\mathbb{R} \times X, X)$, chiamata flusso associato a J, che verifica le seguenti condizioni:

1. per ogni $u \in X$, si ha $\eta(0, u) = u$;
2. pe rogni $t \in R$ e $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, si ha $\eta(t, u) = u$;
3. per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ è un omeomorfismo di X in X;
4. per ogni $u \in X$, la funzione $t \mapsto J(\eta(t, x))$ è monotona decrescente;
5. Se $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, allora $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$;

Dim. Poiché J soddisfa la condizione (PS) al valore c, e c non è un valore critico, si verifica immediatamente per contraddizione che esistono $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta \in (0,1]$ tali che

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1] : \quad \|J'(u)\| \geq \delta.$$

Dim. Poiché J soddisfa la condizione (PS) al valore c, e c non è un valore critico, si verifica immediatamente per contraddizione che esistono $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta \in (0, 1]$ tali che

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1] : \quad \|J'(u)\| \geq \delta.$$

Poniamo $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \delta^2/8\}$, e per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon].$$

Poiché $A \cap B = \emptyset$, la funzione

$$\alpha(x) = \frac{d(x, A}{d(x, A) + d(x, B)}$$

è localmente lipschitziana e verifica $\alpha = 0$ su A, $\alpha = 1$ su B.

Dim. Poiché J soddisfa la condizione (PS) al valore c, e c non è un valore critico, si verifica immediatamente per contraddizione che esistono $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta \in (0, 1]$ tali che

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1] : \quad \| J'(u)\| \geq \delta.$$

Poniamo $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \delta^2/8\}$, e per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon].$$

Poiché $A \cap B = \emptyset$, la funzione

$$\alpha(x) = \frac{d(x, A}{d(x, A) + d(x, B)}$$

è localmente lipschitziana e verifica $\alpha = 0$ su A, $\alpha = 1$ su B. Infine, sia V un campo vettoriale pseudogradiente per J su X_r. Sia, per ogni $x \in X$,

$$W(x) = \alpha(x) \min\left\{1, \frac{1}{\| V(x)\|}\right\} V(x).$$

Si verifica direttamente che $\| W(\cdot)\| \leq 1$. Per la teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,x) = -W(\eta(t,x)) \\ \\ \eta(0,x) = x \end{cases}$$

possiede una ed una sola soluzione $\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$, e η è localmente lipschitziana su $\mathbb{R} \times X$.

Si verifica direttamente che $\| W(\cdot)\| \leq 1$. Per la teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,x) = -W(\eta(t,x)) \\ \\ \eta(0,x) = x \end{cases}$$

possiede una ed una sola soluzione $\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$, e η è localmente lipschitziana su $\mathbb{R} \times X$.

Per la proprietà di flusso $\eta(t, \eta(s,x)) = \eta(t+s, x)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\eta(t,\cdot)$ è un omeomorfismo di X in X, la cui inversa è $\eta(-t,\cdot)$.

Si verifica direttamente che $\| W(\cdot)\| \leq 1$. Per la teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,x) = -W(\eta(t,x)) \\ \\ \eta(0,x) = x \end{cases}$$

possiede una ed una sola soluzione $\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, X)$, e η è localmente lipschitziana su $\mathbb{R} \times X$.

Per la proprietà di flusso $\eta(t, \eta(s,x)) = \eta(t+s, x)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\eta(t,\cdot)$ è un omeomorfismo di X in X, la cui inversa è $\eta(-t,\cdot)$.

Le condizioni 1. e 3. sono evidenti per costruzione. Se

$$u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0],$$

allora $W(u) = 0$, e l'unicità della soluzione implica che $\eta(t,u) = u$ per ogni tempo t.

Anche la proprietà 4. si verifica direttamente, calcolando

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} J(\eta(t,u)) &= J'(\eta(t,u)) \left[\frac{d\eta}{dt} \right] \\ &= -\alpha(\eta(t,u)) \min \left\{ 1, \frac{1}{\| V(\eta(t,u)) \|} \right\} J'(\eta(t,u))[V(\eta(t,u))] \\ &\leq -\alpha(\eta(t,u)) \min \left\{ 1, \frac{1}{\| V(\eta(t,u)) \|} \right\} \| J'(\eta(t,u)) \|^2,\end{aligned}$$

ciò che dimostra la monotonia desiderata.

Anche la proprietà 4. si verifica direttamente, calcolando

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(\eta(t,u)) &= J'(\eta(t,u))\left[\frac{d\eta}{dt}\right]\\ &= -\alpha(\eta(t,u))\min\left\{1,\frac{1}{\|V(\eta(t,u))\|}\right\}J'(\eta(t,u))[V(\eta(t,u))]\\ &\leq -\alpha(\eta(t,u))\min\left\{1,\frac{1}{\|V(\eta(t,u))\|}\right\}\|J'(\eta(t,u))\|^2,\end{aligned}$$

ciò che dimostra la monotonia desiderata.

Per verificare 5. consideriamo $u \in [J \leq c+\varepsilon]$ e notiamo che se per qualche $t_0 \in [0,1)$ si ha

$$\eta(t_0,u) \in [J \leq c-\varepsilon],$$

allora $\eta(1,u)$ resta in $[J \leq c-\varepsilon]$ per la monotonia appena dimostrata. Supponiamo dunque che, per ogni $t \in [0,1)$, si abbia $\eta(t,u) \in [c-\varepsilon < J \leq c+\varepsilon]$.

Ricordando che $\| J'(x)\| \leq \| V(x) \leq 2\| J'(x)\|$, risulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} J(\eta(t,u)) &\leq -\frac{1}{4} \min\left\{1, \frac{1}{\| V(\eta(t,u))\|}\right\} \| V(\eta(t,u))\|^2 \\ &\leq \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{se } \| V(\eta(t,u))\| \geq 1, \\ -\frac{\delta^2}{4} & \text{se } \| V(\eta(t,u))\| < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Ricordando che $\| J'(x)\| \leq \| V(x) \leq 2\| J'(x)\|$, risulta

$$\frac{d}{dt} J(\eta(t,u)) \leq -\frac{1}{4} \min\left\{1, \frac{1}{\| V(\eta(t,u))\|}\right\} \| V(\eta(t,u))\|^2$$
$$\leq \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{se } \| V(\eta(t,u))\| \geq 1, \\ -\frac{\delta^2}{4} & \text{se } \| V(\eta(t,u))\| < 1. \end{cases}$$

Poiché $\delta \leq 1$, concludiamo facilmente che

$$J(\eta(1,u)) \leq -\frac{\delta^2}{4} + J(u) \leq -\frac{\delta^2}{4} + c + \varepsilon.$$

Ricordando la scelta di ε_0, otteniamo $J(\eta(1,u)) \leq c - \varepsilon$.

Un teorema di M. Morse

Teorema. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X)$ un funzionale non costante che soddisfa la condizione (PS). Se un valore $c \in \mathbb{R}$ non è critico, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il livello $[J \leq c - \varepsilon]$ è un retratto di deformazione di $[J \leq c + \varepsilon]$.

Dim. Se $\varepsilon_0 > 0$ è il numero del Lemma di Deformazione, con le stesse notazioni è sufficiente definire

$$\varphi(t, u) = \eta\left(\frac{4t}{\delta^2}(J(u) - c + \varepsilon)^+, u\right),$$

avendo indicato con z^+ la parte positiva del numero reale z.

Un teorema di M. Morse

Teorema. Siano X uno spazio di Banach e $J \in C^1(X)$ un funzionale non costante che soddisfa la condizione (PS). Se un valore $c \in \mathbb{R}$ non è critico, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il livello $[J \leq c - \varepsilon]$ è un retratto di deformazione di $[J \leq c + \varepsilon]$.

Dim. Se $\varepsilon_0 > 0$ è il numero del Lemma di Deformazione, con le stesse notazioni è sufficiente definire

$$\varphi(t, u) = \eta\left(\frac{4t}{\delta^2}(J(u) - c + \varepsilon)^+, u\right),$$

avendo indicato con z^+ la parte positiva del numero reale z.

Risulta evidentemente $\varphi(0, \cdot) = I$ e $\varphi(t, u) = u$ se $u \in [J \leq c - \varepsilon]$, sicché $[J \leq c - \varepsilon] \subset \varphi(1, [J \leq c + \varepsilon])$. Per mostrare l'inclusione inversa, siano $u \in [c - \varepsilon < J \leq c + \varepsilon]$ e $\tau > 0$ tali che per $0 \leq t \leq \tau$ si abbia $\eta(t, u) \in [c - \varepsilon < J \leq c + \varepsilon]$.

Come nella dimostrazione del Lemma di Deformazione, risulta

$$c_\varepsilon < J(\eta(\tau, u)) \leq J(u) - \frac{\delta^2}{4}\tau,$$

cioè $\tau < 4(J(u) - c + \varepsilon))/\delta^2$. Di conseguenza per

$$t_0 = \frac{4(J(u) - c + \varepsilon)}{\delta^2},$$

risulta $\varphi(1, u) = \eta(t_0, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$, e la dimostrazione è completa.

Il principio di minimax

Il lemma di deformazione ci permette di enunciare un principio variazionale molto potente, del quale vedremo un caso speciale di utilizzo diffuso nello studio delle equazioni differenziali.

Il principio di minimax

Il lemma di deformazione ci permette di enunciare un principio variazionale molto potente, del quale vedremo un caso speciale di utilizzo diffuso nello studio delle equazioni differenziali.

- Sebbene faremo discendere questo principio variazionale dal Lemma di Deformazione, è possibile utilizzare esclusivamente il principio variazionale di Ekeland.

Il principio di minimax

Il lemma di deformazione ci permette di enunciare un principio variazionale molto potente, del quale vedremo un caso speciale di utilizzo diffuso nello studio delle equazioni differenziali.

- Sebbene faremo discendere questo principio variazionale dal Lemma di Deformazione, è possibile utilizzare esclusivamente il principio variazionale di Ekeland.

Teorema di minimax. Siano X uno spazio di Banach, $J \in C^1(X)$ un funzionale che soddisfa la condizione (PS), e $\mathcal{B}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi non vuoti di X. Supponiamo che per ogni $c \in R$ e $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, il flusso $\eta(1, \cdot)$ costruito nel Lemma di Deformazione preservi $\mathcal{B}$, nel senso che $\eta(1, B) \in \mathcal{B}$ se $B \in \mathcal{B}$. Poniamo

$$\tilde{c} = \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{v \in A} J(v).$$

Se $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, allora $\tilde{c}$ è un valore critico di J.

Dim. La dimostrazione è molto semplice, a questo punto. Sia infatti $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Se non fosse un valore critico, scegliendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo potremmo selezionare un elemento $A \in \mathcal{B}$ tale che $\tilde{c} \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq \tilde{c} + \varepsilon$. Ma per ipotesi l'insieme $B = \eta(1, A)$ da una parte appartiene alla famiglia $\mathcal{B}$; dall'altra soddisfa $B \subset [J \leq \tilde{c} - \varepsilon]$, contraddicendo la definizione di $\tilde{c}$.

Dim. La dimostrazione è molto semplice, a questo punto. Sia infatti $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Se non fosse un valore critico, scegliendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo potremmo selezionare un elemento $A \in \mathcal{B}$ tale che $\tilde{c} \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq \tilde{c} + \varepsilon$. Ma per ipotesi l'insieme $B = \eta(1, A)$ da una parte appartiene alla famiglia $\mathcal{B}$; dall'altra soddisfa $B \subset [J \leq \tilde{c} - \varepsilon]$, contraddicendo la definizione di $\tilde{c}$.

- Ovviamente la parola "minimax" non deve essere presa alla lettera, ma "infisup" non sembra un'alternativa foneticamente gradevole.

Dim. La dimostrazione è molto semplice, a questo punto. Sia infatti $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Se non fosse un valore critico, scegliendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo potremmo selezionare un elemento $A \in \mathcal{B}$ tale che $\tilde{c} \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq \tilde{c} + \varepsilon$. Ma per ipotesi l'insieme $B = \eta(1, A)$ da una parte appartiene alla famiglia $\mathcal{B}$; dall'altra soddisfa $B \subset [J \leq \tilde{c} - \varepsilon]$, contraddicendo la definizione di $\tilde{c}$.

- Ovviamente la parola "minimax" non deve essere presa alla lettera, ma "infisup" non sembra un'alternativa foneticamente gradevole.

- L'enunciato può sembrare poco elegante, poiché le ipotesi fanno uso esplicito del flusso costruito nel Lemma di Deformazione. Vedremo una variante completamente "intrinseca", le cui ipotesi non fanno riferimento ad enti costruiti all'interno di dimostrazioni precedenti.

Esempio. Abbiamo già detto quanto questi risultati siano connessi al principio variazionale di Ekeland. Per convincercene, possiamo scegliere $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Allora

$$\inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{v \in A} J(v) = \inf_{v \in X} J(v),$$

e ritroviamo il corollario del principio di Ekeland già dimostrato.

Esempio. Abbiamo già detto quanto questi risultati siano connessi al principio variazionale di Ekeland. Per convincercene, possiamo scegliere $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Allora

$$\inf_{A\in\mathcal{B}} \sup_{v\in A} J(v) = \inf_{v\in X} J(v),$$

e ritroviamo il corollario del principio di Ekeland già dimostrato.

Similmente, scegliendo $\mathcal{B} = \{X\}$, risulta

$$\inf_{A\in\mathcal{B}} \sup_{v\in A} J(v) = \sup_{v\in X} J(v),$$

che è lo stesso corollario applicato a $-J$.

Il teorema del Passo di Montagna

- Il Teorema del Passo di Montagna fu enunciato e dimostrato da A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz in *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973).
- L'articolo originale si basa su una versione del Lemma di Deformazione già nota in letteratura, e dovuta a Clarke.
- Successivamente sono state proposte molte generalizzazioni del Passo di Montagna, soprattutto mediante strumenti topologici. Sebbene il Passo di Montagna sia un caso particolare di risultati più generali, rimane ancora oggi lo strumento più utilizzato nella risoluzione variazionale delle equazioni semilineari ellittiche.

Teorema. Siano X uno spazio di Banach, e $J \in C^1(X)$ un funzionale che soddisfa la condizione (PS). Supponiamo che $J(0) = 0$ e che:

1. esistano $R > 0$ e $a > 0$ tali che se $\|u\| = R$, allora $J(u) > a$;
2. esista $u_0 \in X$ tale che $\|u_0\| > R$ e e$J(u_0) < a$.

Allora J possiede un valore critico $c \geq a$. Più precisamente,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} J(v),$$

dove

$$\mathcal{B} = \{\varphi([0,1]) \mid \varphi \in C([0,1], X),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}.$$

Teorema. Siano X uno spazio di Banach, e $J \in C^1(X)$ un funzionale che soddisfa la condizione (PS). Supponiamo che $J(0) = 0$ e che:

1. esistano $R > 0$ e $a > 0$ tali che se $\|u\| = R$, allora $J(u) > a$;

2. esista $u_0 \in X$ tale che $\|u_0\| > R$ e e$J(u_0) < a$.

Allora J possiede un valore critico $c \geq a$. Più precisamente,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} J(v),$$

dove

$$\mathcal{B} = \{\varphi([0,1]) \mid \varphi \in C([0,1], X),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}.$$

Dim. Evidentemente $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Per ogni $A \in \mathcal{B}$, l'intersezione $A \cap \{u \in X \mid \|u\| = R\} \neq \emptyset$ per questioni di connessione. Dunque $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ e infine $c \geq a$.

Teorema. Siano X uno spazio di Banach, e $J \in C^1(X)$ un funzionale che soddisfa la condizione (PS). Supponiamo che $J(0) = 0$ e che:

1. esistano $R > 0$ e $a > 0$ tali che se $\|u\| = R$, allora $J(u) > a$;
2. esista $u_0 \in X$ tale che $\|u_0\| > R$ e e$J(u_0) < a$.

Allora J possiede un valore critico $c \geq a$. Più precisamente,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} J(v),$$

dove

$$\mathcal{B} = \{\varphi([0,1]) \mid \varphi \in C([0,1], X),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}\,.$$

Dim. Evidentemente $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Per ogni $A \in \mathcal{B}$, l'intersezione $A \cap \{u \in X \mid \|u\| = R\} \neq \emptyset$ per questioni di connessione. Dunque $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ e infine $c \geq a$.

Se c non fosse un valore critico, con le stesse notazioni del Lemma di Deformazione e con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ sarebbe possibile trovare $A \in \mathcal{B}$ tale che

$$A = \varphi([0,1]), \quad c \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c + \varepsilon.$$

Ponendo $\psi(\tau) = \eta(1, \varphi(\tau))$ e $B = \psi([0,1])$, risulta $B \in \mathcal{B}$. Ma allora $B \subset [J \leq c - \varepsilon]$, in contraddizione con il fatto che $\max_{v \in B} J(v) \geq c$.

Ponendo $\psi(\tau) = \eta(1, \varphi(\tau))$ e $B = \psi([0,1])$, risulta $B \in \mathcal{B}$. Ma allora $B \subset [J \leq c - \varepsilon]$, in contraddizione con il fatto che $\max_{v \in B} J(v) \geq c$.

- Si osservi che $\mathcal{B}$ è costituito dalle immagini dei cammini che uniscono in X l'origine con il punto u_0. In altri termini, stiamo facendo un minimax del funzionale J sui cammini che partono dal punto di origine, e terminano nel punto u_0 esterno alla "montagna" $\{u \in X \mid \|u\| = R\}$.

Strumenti per applicazioni (non banali)

- Per poter apprezzare la portata della Teoria dei Punti Critici nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, dobbiamo raccogliere alcuni risultati fondamentali sugli operatori differenziali.
- Per la maggior parte di essi non daremo la dimostrazione, perché non fa uso di tecniche inerenti al nostro corso.
- Un riferimento insuperabile, per quanto in lingua francese, è il libro di O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques, edito da Springer.

Operatori ellittici del secondo ordine

- Siano E, F due spazi di Banach. Un operatore lineare su E a valori in F è una coppia $(A, D(A))$ in cui $D(A)$ è un sottospazio vettoriale di E e A è un'applicazione lineare di $D(A)$ in F.
- $D(A)$ è il dominio dell'operatore A. Il grafico di A è l'insieme
$$G(A) = \{(u, Au) \mid u \in D(A)\} \subset E \times F.$$
- Se $(A, D(A))$ e $(B, D(B))$ sono due operatori di E in F, scriveremo $A \subset B$ per indicare che $D(A) \subset D(B)$ e che $Au = Bu$ per ogni $u \in D(A)$. Quindi $A = B$ significa che $A \subset B$ e $B \subset A$.
- L'operatore $(A, D(A))$ è chiuso se $G(A)$ è chiuso in $E \times F$. Quando ciò accade, è possibile introdurre in $D(A)$ la norma
$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_A = \|u\|_E + \|Au\|_F,$$
detta appunto *norma del grafico*.

Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $[a_{ij}]$ una matrice quadrata $N \times N$ definita quasi ovunque in Ω e tale che:

esiste $\alpha > 0$, tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, q.o. in Ω, si abbia
$a(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$.

Questa condizione è detta *coercività* della matrice $[a_{ij}]$.

Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $[a_{ij}]$ una matrice quadrata $N \times N$ definita quasi ovunque in Ω e tale che:

esiste $\alpha > 0$, tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, q.o. in Ω, si abbia
$a(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$.

Questa condizione è detta *coercività* della matrice $[a_{ij}]$.

Supporremo inoltre che $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ per ogni i, j tra 1 e N.

Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $[a_{ij}]$ una matrice quadrata $N \times N$ definita quasi ovunque in Ω e tale che:

esiste $\alpha > 0$, tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, q.o. in Ω, si abbia $a(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$.

Questa condizione è detta *coercività* della matrice $[a_{ij}]$.

Supporremo inoltre che $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ per ogni i, j tra 1 e N.

Definiamo allora

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \sum_{i,j=1}^N \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) \in L^2(\Omega) \right\}$$

e

$$Au = -\sum_{i,j=1}^N \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) = -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u).$$

- Operatori di questo tipo sono chiamati *operatori ellittici del secondo ordine in forma di divergenza.*
- Si verifica che tali operatori sono, nelle ipotesi suddette, chiusi.
- Nella definizione del dominio, è richiesto che la somma degli addendi $\partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right)$ appartenga a $L^2(\Omega)$, e non che ciascun addendo abbia questa proprietà.
- Il prossimo risultato raccoglie alcune proprietà utili di questi operatori, la cui dimostrazione deriva dal teorema di Lax-Milgram e da principi generali di analisi funzionale lineare. Indicheremo con $\|\cdot\|$ e con $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ la norma e il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$.

Lemma. Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $(A, D(A))$ un operatore ellittico del secondo ordine in forma di divergenza (con le stesse ipotesi della definizione). Allora:

1. per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unico $u \in D(A)$ tale che: $u + Au = f$. Inoltre $(A + I)^{-1}$ è un operatore continuo di $L^2(\Omega)$ in sé stesso e si ha $\|u\| \leq \|f\|$. Se Ω è limitato, $(A + I)^{-1}$ è un operatore compatto di $L^2(\Omega)$ in sé stesso.

2. L'operatore $(A, D(A))$ è chiuso.

3. $D(A)$ è denso in $L^2(\Omega)$.

- Più in generale, è possibile costruire operatori (differenziali) ellittici del secondo ordine in forma generale.
- Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $a = [a_{ij}]$ una matrice $N \times N$, $b = (b_i)$ e $\beta = (\beta_i)$ due vettori a N componenti, e c una funzione.
- Definiamo due operatori del secondo ordine:

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j (\beta_j u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \partial_{ij} u + b \cdot \nabla u + cu.$$

- Il secondo operatore non è in forma di divergenza, ed è più generale del primo.

Teoria spettrale

Per un operatore A come sopra, supponiamo che a_{ij}, β_j, b_j, c siano funzioni di $L^\infty(\Omega)$. Supporremo sempre che la matrice $[a_{ij}]$ sia coerciva con costante $\alpha > 0$.

- Supponendo che Ω sia un aperto limitato e che

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega) \right\},$$

si dimostra che esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ e ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ si abbia (disuguaglianza di Gårding)

$$\langle Au + \lambda u \mid u \rangle \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2.$$

- Dunque l'operatore $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ è continuo da $L^2(\Omega)$ in sé, e la sua immagine è $D(A)$.

- Per il teorema di compattezza di Rellich, $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ è un operatore compatto da $L^2(\Omega)$ in sé.
- Poiché 0 non è un autovalore di $(A + \lambda_0 I)^{-1}$, esiste una successione $\{\mu_n\}_n$ si numeri complessi non nulli, tale che $\mu_n \to 0$, ogni μ_n è un autovalore di molteplicità finita, e lo spettro di $(A + \lambda_0 I)^{-1}$ è $\{0\} \cup \{\mu_n \mid n \geq 1\}$.
- Deduciamo infine che lo spettro di A è costituito dai numeri λ_n, $n \geq 1$, definiti da

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - \lambda_0.$$

Un'applicazione del passo di montagna

Definizione. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Una funzione $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, s) \mapsto f(x, s)$, è una *funzione di Carathéodory*, se:

- per ogni $s \in \mathbb{R}$, la funzione $f(\cdot, s)$ è misurabile su Ω;
- per quasi ogni $x \in \Omega$, la funzione $f(x, \cdot)$ è continua su $\mathbb{R}$.

Un'applicazione del passo di montagna

Definizione. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Una funzione $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, s) \mapsto f(x, s)$, è una *funzione di Carathéodory*, se:

- per ogni $s \in \mathbb{R}$, la funzione $f(\cdot, s)$ è misurabile su Ω;
- per quasi ogni $x \in \Omega$, la funzione $f(x, \cdot)$ è continua su $\mathbb{R}$.

- Siano Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, g una funzione di Carathéodory e $Au = -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u)$ un operatore ellittico, come visto nelle slide precedenti.

Un'applicazione del passo di montagna

Definizione. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Una funzione $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, s) \mapsto f(x, s)$, è una *funzione di Carathéodory*, se:

- per ogni $s \in \mathbb{R}$, la funzione $f(\cdot, s)$ è misurabile su Ω;
- per quasi ogni $x \in \Omega$, la funzione $f(x, \cdot)$ è continua su $\mathbb{R}$.

- Siano Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, g una funzione di Carathéodory e $Au = -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u)$ un operatore ellittico, come visto nelle slide precedenti.
- Ricordiamo che il primo autovalore di A è caratterizzato da

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \inf\left\{\int_\Omega a\nabla v\cdot\nabla v \mid v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_2 = 1\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\int_\Omega a\nabla v\cdot\nabla v}{\int_\Omega |v|^2} \mid v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}\end{aligned}$$

Sia $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)\,d\sigma$, e definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ come

$$\begin{aligned} J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[a\nabla u \cdot \nabla u + \lambda |u|^2 \right] dx \\ + \mu \int_\Omega G(x,u)\,dx - \langle f, u \rangle, \end{aligned}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, e $f \in H^{-1}(\Omega)$ sono fissati.

Sia $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma$, e definiamo il funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ come

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[a\nabla u \cdot \nabla u + \lambda |u|^2 \right] dx + \mu \int_\Omega G(x,u)\, dx - \langle f, u \rangle,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, e $f \in H^{-1}(\Omega)$ sono fissati.

- Vogliamo dimostrare che, sotto opportune ipotesi, J soddisfa la condizione di Palais-Smale.

Lemma. Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $m\colon \Omega \to [0,+\infty)$ tale che $m > 0$ quasi ovunque in Ω. Supponiamo che esistano $b_1 \geq 0$ e $b_0 \in L^{p_0}(\Omega)$ con $p_0 > 2N/(N+2)$ se $N \geq 2$ e $p_0 = 1$ se $N = 1$, e infine θ, $p \geq 1$ tali che $(N-2)p < N+2$, con la proprietà che

$$m(x)|s|^\theta \leq b_0(x)|s| + b_1(1+|s|^{p+1})$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in \Omega$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante $C(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + C(\varepsilon) \left(\int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx \right)^{2/\theta}.$$

Dim. La disuguaglianza da dimostrare è omogenea di grado due. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq 1$, esista $u_n \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\int_\Omega |u_n|^2 = 1$ e

$$1 > \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + n \left(\int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx \right) .$$

Dim. La disuguaglianza da dimostrare è omogenea di grado due. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq 1$, esista $u_n \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\int_\Omega |u_n|^2 = 1$ e

$$1 > \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + n \left(\int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx \right).$$

La successione $\{u_n\}_n$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$, e passando ad una sottosuccessione possiamo d'ora in poi immaginare che $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ e puntualmente quasi ovunque.

Ne deduciamo che $\int_\Omega |u|^2 = 1$. L'ipotesi assurda garantisce che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx = 0.$$

Per $N \geq 2$ abbiamo $p_0 > 2N/(N+2)$, sicché $p_0' = p_0/(p_0 - 1) < 2^*$; per il teorema di compattezza di Rellich, u_n tende a u in $L^{p_0'}(\Omega)$. Inoltre

$$\|b_0(u - u_n)\|_{L^1} \leq \|b_0\|_{L^{p_0}} \|u - u_n\|_{L^{p_0'}},$$

e dunque $b_0|u_n|$ tende a $b_0|u|$ in $L^1(\Omega)$ e puntualmente quasi ovunque. Allo stesso modo, $|u_n|^{p+1}$ tende a $|u|^{p+1}$ in $L^1(\Omega)$.

Per $N \geq 2$ abbiamo $p_0 > 2N/(N+2)$, sicché $p_0' = p_0/(p_0 - 1) < 2^*$; per il teorema di compattezza di Rellich, u_n tende a u in $L^{p_0'}(\Omega)$. Inoltre

$$\|b_0(u - u_n)\|_{L^1} \leq \|b_0\|_{L^{p_0}} \|u - u_n\|_{L^{p_0'}},$$

e dunque $b_0|u_n|$ tende a $b_0|u|$ in $L^1(\Omega)$ e puntualmente quasi ovunque. Allo stesso modo, $|u_n|^{p+1}$ tende a $|u|^{p+1}$ in $L^1(\Omega)$.

Se

$$Z_n(x) = b_0(x)|u_n(x)| + b_1(1 + |u_n(x)|^{p+1})$$
$$Z(x) = b_0(x)|u(x)| + b_1(1 + |u(x)|^{p+1}),$$

deduciamo che Z_n tende a Z in $L^1(\Omega)$ e puntualmente quasi ovunque. Essendo $m|u_n| \leq Z_n$, da una versione generalizzata della convergenza dominata deduciamo che $m|u_n|^\theta$ converge a $m|u|^\theta$ in $L^1(\Omega)$ e che:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega m(x)|u_n|^\theta \, dx = \int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx.$$

Concludiamo che $\int_\Omega m(x)|u|^\theta \, dx = 0$, cioè $u = 0$ q.o. contro l'ipotesi di normalizzazione $\int_\Omega |u|^2 = 1$.

Concludiamo che $\int_\Omega m(x)|u|^\theta\, dx = 0$, cioè $u = 0$ q.o. contro l'ipotesi di normalizzazione $\int_\Omega |u|^2 = 1$.

Proposizione. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Se $N \geq 2$, sia $p_0 = \varepsilon + N/2$ per $\varepsilon > 0$, e $p_0 = 1$ se $N = 1$. Sia $p > 1$ tale che $(N-2)p < N+2$; supponiamo che g soddisfi le condizioni

- esistono $b_0 \in L^{p_0}(\Omega)$, $b_1 \geq 0$, tali che $|g(x,s)| \leq b_0(x) + b_1|s|^p$;
- esistono $\theta > 2$, $R > 0$ tali che se $|s| \geq R$, $0 < \theta G(x,s) \leq sg(x,s)$.

Allora se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, il funzionale J soddisfa la condizione (PS) su $H_0^1(\Omega)$. Se Ω è un aperto di classe C^1 e $f \in L^q(\Omega)$ con $q \geq 2N/(N+2)$, il funzionale J soddisfa la condizione (PS) su $H^1(\Omega)$.

Dim. Cominciamo da una conseguenza della seconda ipotesi su g. Se $s \geq R$ allora $\theta s^{-1} \leq g(x,s)/G(x,s)$ e di conseguenza $G(x,s) \geq G(x,R)R^{-\theta}s^{\theta}$ sull'intervallo $[R,+\infty)$. Deduciamo che per qualche funzione $c_1 \in L^{p_0}(\Omega)$, per ogni $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$:

$$G(x,s) \geq \min\{G(x,-R),\, G(x,R)\}\, R^{-\theta}|s|^{\theta} - c_1(x). \tag{1}$$

Dim. Cominciamo da una conseguenza della seconda ipotesi su g. Se $s \geq R$ allora $\theta s^{-1} \leq g(x,s)/G(x,s)$ e di conseguenza $G(x,s) \geq G(x,R)R^{-\theta}s^{\theta}$ sull'intervallo $[R,+\infty)$. Deduciamo che per qualche funzione $c_1 \in L^{p_0}(\Omega)$, per ogni $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$:

$$G(x,s) \geq \min\{G(x,-R), G(x,R)\} R^{-\theta}|s|^{\theta} - c_1(x). \tag{1}$$

La prima condizione su g implica ormai $\theta < 2^*$. Consideriamo ora una successione $\{u_n\}_n$ in $H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$.

Dim. Cominciamo da una conseguenza della seconda ipotesi su g. Se $s \geq R$ allora $\theta s^{-1} \leq g(x,s)/G(x,s)$ e di conseguenza $G(x,s) \geq G(x,R)R^{-\theta}s^{\theta}$ sull'intervallo $[R,+\infty)$. Deduciamo che per qualche funzione $c_1 \in L^{p_0}(\Omega)$, per ogni $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$:

$$G(x,s) \geq \min\{G(x,-R),\, G(x,R)\}\, R^{-\theta}|s|^{\theta} - c_1(x). \tag{1}$$

La prima condizione su g implica ormai $\theta < 2^*$. Consideriamo ora una successione $\{u_n\}_n$ in $H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$. Riscriviamo quest'ultima condizione nella forma

$$h_n = J'(u_n) = Au_n + \lambda u_n + \mu g(\cdot, u_n) - f \to 0$$

in $H^{-1}(\Omega)$.

- Mostriamo che la successione $\{u_n\}_n$ è limitata. Infatti, da $\theta > 2$ e usando il fatto che esiste $c_2 \in L^{p_0}(\Omega)$ tale che $\theta G(x,s) \leq sg(x,s) + c_2(x)$, per una costante $C > 0$ indipendente da n otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, u_n(x))\, dx &\leq \frac{1}{\theta - 2} \int_\Omega [u_n(x) g(x, u_n(x)) - 2G(x, u_n(x))]\, dx + C \\
&= \frac{1}{\mu(\theta - 2)} [\langle h_n - f, u_n \rangle - 2J(u_n)] + C \\
&\leq C(1 + \|\nabla u_n\|).
\end{aligned}$$

- Mostriamo che la successione $\{u_n\}_n$ è limitata. Infatti, da $\theta > 2$ e usando il fatto che esiste $c_2 \in L^{p_0}(\Omega)$ tale che $\theta G(x,s) \leq sg(x,s) + c_2(x)$, per una costante $C > 0$ indipendente da n otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x,u_n(x))\,dx &\leq \frac{1}{\theta-2}\int_\Omega [u_n(x)g(x,u_n(x)) - 2G(x,u_n(x))]\,dx + C \\ &= \frac{1}{\mu(\theta-2)}[\langle h_n - f, u_n\rangle - 2J(u_n)] + C \\ &\leq C(1+\|\nabla u_n\|).\end{aligned}$$

D'altronde, ponendo $m(x) = R^{-\theta}\min\{1, G(x,R), G(x,-R)\}$, il Lemma precedente e l'equazione (1) garantiscono che

$$\int_\Omega |u_n|^2 \leq \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1+\|\nabla u_n\|)^{2\theta}.$$

Poiché $a(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ con $\alpha > 0$, e poiché $J(u_n)$ resta limitata, se $\mu < 0$

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla u_n\|^2 &\leq 2J(u_n) + \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla u_n\| + |\lambda|\|u_n\|^2 \\ &\quad - \mu \int_\Omega G(x, u_n) \\ &\leq C + \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1 + \|\nabla u_n\|)^{2/\theta}.\end{aligned}$$

Poiché $a(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$ con $\alpha > 0$, e poiché $J(u_n)$ resta limitata, se $\mu < 0$

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla u_n\|^2 &\leq 2J(u_n) + \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla u_n\| + |\lambda|\|u_n\|^2 \\ &\quad - \mu\int_\Omega G(x,u_n) \\ &\leq C + \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1+\|\nabla u_n\|)^{2/\theta}.\end{aligned}$$

Se $\mu > 0$, ricordiamo che (1) implica $\int_\Omega G(x,u_n)\,dx \geq -C$, e verifichiamo facilmente che l'ultima disuguaglianza continua ad essere soddisfatta. A questo punto, la scelta di $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (ad esempio $\varepsilon = \alpha/2$) garantisce che $\{u_n\}_n$ è una successione limitata in $H_0^1(\Omega)$.

Poiché $a(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ con $\alpha > 0$, e poiché $J(u_n)$ resta limitata, se $\mu < 0$

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla u_n\|^2 &\leq 2J(u_n) + \|f\|_{H^{-1}}\|\nabla u_n\| + |\lambda|\|u_n\|^2 \\ &\quad - \mu\int_\Omega G(x, u_n) \\ &\leq C + \varepsilon\|\nabla u_n\|^2 + C(\varepsilon)(1 + \|\nabla u_n\|)^{2/\theta}.\end{aligned}$$

Se $\mu > 0$, ricordiamo che (1) implica $\int_\Omega G(x, u_n)\, dx \geq -C$, e verifichiamo facilmente che l'ultima disuguaglianza continua ad essere soddisfatta. A questo punto, la scelta di $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (ad esempio $\varepsilon = \alpha/2$) garantisce che $\{u_n\}_n$ è una successione limitata in $H_0^1(\Omega)$.

- Esiste pertanto una sottosuccessione $\{u_{n_j}\}_j$ convergente verso u in senso debole in $H_0^1(\Omega)$, in senso forte in ogni $L^r(\Omega)$ con $(N-2)r < N+2$, e puntualmente quasi ovunque.

Come nella dimostrazione del precedente Lemma, se $r_0 = \min\{p_0, (p+1)/p\}$, allora $g(\cdot, u_{n_j})$ converge q.o. e in $L^{r_0}(\Omega)$ verso $g(\cdot, u)$. Per interpolazione, lo stesso accade in $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, dunque a maggior ragione in $H^{-1}(\Omega)$.

Come nella dimostrazione del precedente Lemma, se $r_0 = \min\{p_0, (p+1)/p\}$, allora $g(\cdot, u_{n_j})$ converge q.o. e in $L^{r_0}(\Omega)$ verso $g(\cdot, u)$. Per interpolazione, lo stesso accade in $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, dunque a maggior ragione in $H^{-1}(\Omega)$.

Come visto sopra, denotando con $\tilde{A}$ l'estensione di A a $H_0^1(\Omega)$, $\tilde{A}$ risulta essere un isomorfismo di $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$, e pertanto:

$$\begin{aligned} u_{n_j} &= \tilde{A}^{-1}[\varepsilon_{n_j} + f + \lambda u_{n_j} + \mu g(\cdot, u_{n_j})] \\ &\to \tilde{A}^{-1}[f + \lambda u + \mu g(\cdot, u)]. \end{aligned}$$

La dimostrazione è ormai conclusa.

Il passo di montagna e l'esistenza di soluzioni.

Per semplicità, rafforziamo leggermente le ipotesi sulla funzione di Carathéodory g:

- esistono $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $b_1 \geq 0$, tali che $|g(x,s)| \leq b_0(x) + b_1|s|^p$;
- esistono $\theta > 2$, $R > 0$ tali che se $|s| \geq R$, $0 < \theta G(x,s) \leq sg(x,s)$.

Supponiamo inoltre che per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\delta > 0$ tale che $|G(\cdot, s)| \leq \varepsilon |s|^2$ per ogni $|s| \leq \delta$.

Il passo di montagna e l'esistenza di soluzioni.

Per semplicità, rafforziamo leggermente le ipotesi sulla funzione di Carathéodory g:

- esistono $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $b_1 \geq 0$, tali che $|g(x,s)| \leq b_0(x) + b_1|s|^p$;
- esistono $\theta > 2$, $R > 0$ tali che se $|s| \geq R$, $0 < \theta G(x,s) \leq sg(x,s)$.

Supponiamo inoltre che per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\delta > 0$ tale che $|G(\cdot,s)| \leq \varepsilon|s|^2$ per ogni $|s| \leq \delta$.

Teorema. se $\lambda < \lambda_1$, allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Au = \lambda u + g(\cdot,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

possiede una soluzione non identicamente nulla.

Dim. Consideriamo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda \|u\|^2\right] - \int_\Omega G(x, u(x))\, dx,$$

funzionale dell'energia associato al nostro problema di Dirichlet in $H_0^1(\Omega)$. Dimostriamo che il teorema del passo di montagna è applicabile.

Dim. Consideriamo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda\|u\|^2\right] - \int_\Omega G(x, u(x))\,dx,$$

funzionale dell'energia associato al nostro problema di Dirichlet in $H_0^1(\Omega)$. Dimostriamo che il teorema del passo di montagna è applicabile.

Per le ipotesi su g, dato $\varepsilon > 0$ esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega G(x, u(x))\,dx\right| &\leq \int_\Omega |G(x, u(x))|\,dx \\ &\leq \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon \int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx \\ &\leq \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1}.\end{aligned}$$

Non appena $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$,

$$
\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda\|u\|^2\right] - \varepsilon\|u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1} \\
&\geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Non appena $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda\|u\|^2\right] - \varepsilon\|u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1} \\ &\geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1}. \end{aligned}$$

Scegliendo $R_0^{p-1} = \alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)/(2\lambda_1 C_\varepsilon)$, se $\|\nabla u\| = R < R_0$, allora esiste $b = b(R) > 0$ tale che $J(u) \geq b$. L'origine è pertanto un minimo locale di J su $H_0^1(\Omega)$.

Non appena $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda\|u\|^2\right] - \varepsilon\|u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1} \\ &\geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1}. \end{aligned}$$

Scegliendo $R_0^{p-1} = \alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)/(2\lambda_1 C_\varepsilon)$, se $\|\nabla u\| = R < R_0$, allora esiste $b = b(R) > 0$ tale che $J(u) \geq b$. L'origine è pertanto un minimo locale di J su $H_0^1(\Omega)$.

Per trovare un punto $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_0) < 0$, ricordiamo innanzitutto che $G(x,s) \geq m(x)|s|^\theta - C_1$ per qualche funzione $m \in L^\infty(\Omega)$ con $m > 0$ q.o., e $\theta > 2$.

Non appena $\lambda + 2\varepsilon < \lambda_1$,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\left[\langle Au \mid u\rangle - \lambda\|u\|^2\right] - \varepsilon\|u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1} \\ &\geq \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2 - C_\varepsilon\|\nabla u\|^{p+1}. \end{aligned}$$

Scegliendo $R_0^{p-1} = \alpha(\lambda_1 - \lambda - 2\varepsilon)/(2\lambda_1 C_\varepsilon)$, se $\|\nabla u\| = R < R_0$, allora esiste $b = b(R) > 0$ tale che $J(u) \geq b$. L'origine è pertanto un minimo locale di J su $H_0^1(\Omega)$.

Per trovare un punto $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tale che $J(u_0) < 0$, ricordiamo innanzitutto che $G(x, s) \geq m(x)|s|^\theta - C_1$ per qualche funzione $m \in L^\infty(\Omega)$ con $m > 0$ q.o., e $\theta > 2$.

Sia $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ (con $\|\varphi_1\|_2 = 1$) un'autofunzione associata all'autovalore λ_1 di A.

Per ogni $t > 0$ otteniamo

$$J(t\varphi_1) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)t^2 + C_2 - t^\theta \int_\Omega m(x)|\varphi_1(x)|^\theta \, dx.$$

Essendo $\theta > 2$, è sufficiente scegliere $t > 0$ abbastanza grande per dedurre che $J(t\varphi_1) < 0$.

Per ogni $t > 0$ otteniamo

$$J(t\varphi_1) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)t^2 + C_2 - t^\theta \int_\Omega m(x)|\varphi_1(x)|^\theta \, dx.$$

Essendo $\theta > 2$, è sufficiente scegliere $t > 0$ abbastanza grande per dedurre che $J(t\varphi_1) < 0$.

Sappiamo già (anche sotto ipotesi più deboli) che J soddisfa la condizione (PS) su $H_0^1(\Omega)$. Quindi un'applicazione del Teorema del Passo di Montagna fornisce un punto critico di J a livello $c \geq b > 0$. In particolare, questo punto critico è una soluzione non identicamente nulla del nostro problema di Dirichlet.