

# Calcolo delle Variazioni

## a.a. 2019-2020

Simone Secchi  
simone.secchi@unimib.it

<http://elearning.unimib.it>

# Prerequisiti e strumenti

- Calcolo differenziale in spazi euclidei di dimensione finita
- Teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue
- Principi di Analisi Funzionale Lineare
- Teoria elementare degli spazi di Sobolev (almeno il caso hilbertiano  $p = 2$ )

# Strumenti: il calcolo differenziale in dimensione infinita

**Notazione.** Se  $X$  è uno spazio di Banach (reale), il suo duale topologico sarà denotato con il simbolo  $X^*$ . Se  $A \in X^*$ , il simbolo  $A[v]$  indicherà il valore di  $A$  nel punto  $v$ ; talvolta semplificheremo la notazione e scriveremo  $Av$  al posto di  $A[v]$ .

**Definizione.** Siano  $X$  uno spazio di Banach, e  $U \subset X$  un suo aperto. Un funzionale su  $U$  è un'applicazione  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Si noti che i “nostri” funzionali **non** sono necessariamente **lineari**!

**Definizione.** Sia  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale. Diremo che  $I$  è derivabile secondo Fréchet nel punto  $u \in U$  se esiste un elemento  $A \in X^*$  tale che

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \quad (1)$$

o, equivalentemente, se

$$I(u+v) = I(u) + Av + o(\|v\|) \quad \text{per } v \rightarrow 0.$$

Si osservi che questa è la definizione di funzione differenziabile quando  $X = \mathbb{R}^n$ .

**Lemma.** Se  $I$  è derivabile nel punto  $u \in U$ , allora l'elemento  $A$  che soddisfa (1) è univocamente determinato.

*Dim.* Infatti, supponiamo che  $A$  e  $B$  siano due elementi di  $X^*$  che soddisfano (1). Per sottrazione,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{(A - B)v}{\|v\|} = 0.$$

Fissiamo  $u \in X$  con  $\|u\| = 1$ , e scegliamo  $v = tu$ ,  $t \rightarrow 0^+$ . Allora

$$(A - B)u = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(A - B)u}{t\|u\|} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $u$ , concludiamo che  $A = B$ .

**Definizione.** Se  $I$  è un funzionale derivabile secondo Fréchet nel punto  $u \in U$ , la derivata (talvolta: il differenziale) di Fréchet di  $I$  in  $u$  è l'unico elemento  $I'(u) \in X^*$  (talvolta:  $dI(u)$ ) tale che

$$I(u + v) = I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)$$

per  $v \rightarrow 0$ .

**Definizione.** Se  $I: U \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile secondo Fréchet in ogni punto  $u \in U$ , diremo che  $I$  è Fréchet-derivabile in  $U$ . La derivata di Fréchet di  $I$  è allora la mappa  $I': U \rightarrow X^*$  che ad  $u \in U$  associa  $I'(u) \in X^*$ . Si tratta — in generale — di una mappa *non lineare*.

Se  $I'$  è una mappa continua da  $U$  in  $X^*$ , diremo che  $I \in C^1(U)$ .

# Il caso hilbertiano

Se  $H$  è uno spazio di Hilbert (reale), è noto che gli elementi del duale  $H^*$  sono isometricamente identificati con vettori di  $H$  attraverso l'isomorfismo di Riesz. In particolare, un funzionale  $I$  definito su  $U \subset H$  è derivabile in  $u \in U$  se e solo esiste un vettore, detto d'ora in poi *gradiente* di  $I$  in  $u$  e denotato  $\nabla I(u)$ , tale che

$$I(u + v) = I(u) + \langle \nabla I(u) \mid v \rangle + o(\|v\|)$$

per  $v \rightarrow 0$ .

**Proposizione.** Siano  $I$  e  $J$  due funzionali derivabili nel punto  $u \in X$ . Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri reali, allora  $aI + bJ$  è derivabile in  $u$ , e vale  $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$ .
2. Il prodotto  $IJ$  è derivabile in  $u$ , e vale  $(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$ .
3. Se  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow U$  è una curva derivabile in  $t_0$  e  $u = \gamma(t_0)$ , allora la composizione  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\eta(t) = I(\gamma(t))$  è derivabile in  $t_0$ , e vale  $\eta'(t_0) = I'(u)[\gamma'(t_0)]$ .
4. Se  $A \subset \mathbb{R}$  è un aperto,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $I(u) \in A$ , allora la composizione  $K(u) = f(I(u))$  è definita in un intorno  $V$  di  $u$ , è derivabile in  $u$  e vale  $K'(u) = f'(I(u))I'(u)$ .



*Dim.* La prima affermazione è banale (esercizio!). Per quanto riguarda la seconda, quando  $v \rightarrow 0$  in  $X$ , abbiamo

$$\begin{aligned} I(u+v)J(u+v) &= (I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) (J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= I(u)J(u) + J(u)I'(u)[v] + I(u)J'(u)[v] + I'(u)[v]J'(u)[v] \\ &\quad + o(\|v\|) (I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)). \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che

$$I'(u)[v]J'(u)[v] + o(\|v\|) (I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))$$

è  $o(\|v\|)$  per  $v \rightarrow 0$ . La terza affermazione è simile, infatti per  $h \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(t_0 + h) &= I(\gamma(t_0 + h)) = I(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)h + o(|h|)) \\ &= I(u) + I'(u)[\gamma'(t_0)h + o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|) \\ &= \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + I'(u)[o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|). \end{aligned}$$

Poiché gli ultimi due addendi sono  $o(|h|)$ , otteniamo che

$$\eta(t_0 + h) = \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + o(|h|).$$

Infine, quando  $v \rightarrow 0$  in  $X$ , si verifica come prima che

$$\begin{aligned} K(u + v) &= f(I(u + v)) = f(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))(I'(u)[v] + o(\|v\|)) + o(I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))I'(u)[v] + o(\|v\|). \end{aligned}$$

**Osservazione.** È possibile introdurre il concetto di derivata per applicazioni tra due spazi di Banach  $X$  e  $Y$ . Solo in questo contesto può essere enunciata una formulazione completa della regola di derivazione delle funzioni composte.

Poiché non ne faremo uso in queste lezioni, rimandiamo al testo di Ambrosetti e Prodi per ulteriori approfondimenti.

**Definizione.** Sia  $I$  un funzionale definito nell'aperto  $U$  di  $X$ , e sia  $u \in U$ . Diremo che  $I$  è derivabile secondo Gâteaux in  $u$  se esiste un elemento  $A \in X^*$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Av \quad (2)$$

per ogni  $v \in X$ . In tal caso, l'unico (esercizio!) elemento siffatto prende il nome di derivata secondo Gâteaux di  $I$  in  $u$ , e si denota con  $I'_G(u)$  o con  $d_G I(u)$ .

Osserviamo che questa nuova derivata riprende la cosiddetta *derivata direzionale* già nota nell'ambito del calcolo differenziale in dimensione finita.

In particolare, ricordando i “soliti” esempi in  $\mathbb{R}^2$ , deduciamo che esistono funzionali (non lineari) derivabili secondo Gâteaux ma non derivabili secondo Fréchet.

# Condizione sufficiente per la derivabilità secondo Fréchet

**Proposizione.** Supponiamo che  $U \subset X$  sia un aperto, che  $I$  sia Gâteaux-derivabile in  $U$ , e che  $I'_G$  sia continua in un punto  $u \in U$ . Allora  $I$  è Fréchet-derivabile in  $u$ , e (ovviamente)  $I'(u) = I'_G(u)$ .

Omettiamo la dimostrazione, che è probabilmente stata proposta nel caso  $X = \mathbb{R}^2$  nel corso di Analisi Matematica 2.

# Punti critici

**Definizione.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $U$  un aperto di  $X$ , e  $I$  un funzionale definito su  $U$ . Diremo che  $u \in U$  è un punto critico di  $I$  se  $I$  è derivabile in  $u$  e

$$I'(u) = 0.$$

Più esplicitamente, questo significa che  $I'(u)[v] = 0$  per ogni  $v \in X$ .

Se  $u$  è un punto critico di  $I$  e  $I(u) = c$ , diremo che  $u$  è un punto critico (di  $I$ ) al livello  $c$ . Se, per qualche  $c \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $I^{-1}(\{c\}) \subset X$  contiene almeno un elemento, diremo che  $c$  è un valore critico per  $I$ .

L'equazione  $I'(u) = 0$  è nota come equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) associata al funzionale  $I$ .

# Esempi

**Esempio 1.** Ogni  $A \in X^*$  è derivabile. Infatti, basta scrivere

$$A[u + v] = Au + Av$$

per dedurre che  $A'(u) = A$  per qualsiasi  $u \in X$ .

**Esempio 2.** Sia  $X$  uno spazio di Banach, e sia  $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare continua. Denotiamo con  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$  il funzionale definito da  $J(u) = a(u, u)$  per ogni  $u \in X$ . Allora  $J$  è derivabile in  $X$ . Infatti

$$\begin{aligned} J(u + v) &= a(u + v, u + v) = a(u, u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) \\ &= J(u) + a(u, v) + a(v, u) + a(v, v). \end{aligned}$$

Poiché  $|a(v, v)| \leq M\|v\|^2$  per l'ipotesi di continuità di  $a$  come forma bilineare, deduciamo che  $a(v, v) = o(\|v\|)$  per  $v \rightarrow 0$ , e dunque che

$$J'(u)[v] = a(u, v) + a(v, u).$$

**Esempio 3.** (esercizio) Sia  $H$  uno spazio di Hilbert con norma  $\| \cdot \|$ . Il funzionale  $J(u) = \|u\|$  è derivabile in ogni punto  $u \neq 0$ , e risulta

$$\nabla J(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

**Esempio 4.** Sia  $X$  uno spazio di Banach, e siano  $I, J$  due funzionali derivabili in  $X$ . Definiamo

$$Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$$

sul sottoinsieme (aperto)  $\{u \in X \mid J(u) \neq 0\}$ . Per la Proposizione sulle regole di calcolo dimostrata sopra, possiamo affermare che  $Q$  è derivabile e che

$$Q'(u) = \frac{J(u)I'(u)[v] - I(u)J'(u)[v]}{J(u)^2}$$

per ogni  $u$  in  $X$  tale che  $J(u) \neq 0$ .

## Esempi in spazi concreti

**Esempio 5.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , un insieme aperto e limitato. Definiamo i funzionali

$$I: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

$$J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$K: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$L: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Trattandosi di forme quadratiche associate a forme bilineari continue, sappiamo già che i quattro funzionali sono derivabili.



Esplicitamente, valgono le relazioni

$$\nabla I(u) = 2u$$

$$\nabla L(u) = 2u$$

$$\nabla J(u) = 2u.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$K'(u)[v] = 2 \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$$

per ogni  $u, v \in H^1(\Omega)$ , ma non siamo autorizzati ad affermare che  $\nabla K(u) = 2u$  (perché?)

# Inversione della Convergenza Dominata

**Teorema di Lebesgue.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{u_k\}_k$  una successione in  $L^1(\Omega)$  tale che

1.  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
2. esiste  $v \in L^1(\Omega)$  tale che  $|u_k(x)| \leq v(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$  e ogni  $k$ .

Allora  $u \in L^1(\Omega)$  e  $u_k \rightarrow u$  nella norma di  $L^1(\Omega)$ .

Questo risultato fondamentale di Teoria della Misura può essere *parzialmente* invertito, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione, rimandiamo al libro di H. Brezis, Analisi funzionale.

**Teorema.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $\{u_k\}_k$  una successione di  $L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , tale che  $u_k \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$ . Allora esistono una sottosuccessione  $\{u_{k_j}\}_j$  ed una funzione  $v \in L^p(\Omega)$  tali che

1.  $u_{k_j}(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
2. per ogni  $j$ ,  $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ .

Questo teorema mostra che la convergenza forte in  $L^p$  implica — a meno di sottosuccessioni — l'esistenza di una funzione dominante.

# Operatori di Nemitskii

Siano  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supponiamo che esistano  $a > 0$  e  $b > 0$  tali che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1},$$

dove  $2^* = 2N/(N - 2)$  è l'esponente critico di Sobolev. Definiamo

$$F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$$

e consideriamo il funzionale  $J: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dato da

$$J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx.$$

**Proposizione.** Sotto le ipotesi precedenti,  $J$  è un funzionale derivabile in  $H^1(\Omega)$ , e vale

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx$$

per ogni  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

La dimostrazione non è immediata: mostriamo prima che  $J$  è Gâteaux-derivabile, e poi che la derivata di Gâteaux è continua. Come abbiamo visto sopra, ciò implica che  $J$  è Fréchet-derivabile.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o.  $x \in \Omega$ , risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste un numero reale  $\theta$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\ &\leq (a + b|u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}) |v(x)| \\ &\leq C (|v(x)| + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}). \end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(u(x) + t(v(x))) - F(u(x))}{t} dx = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) dx.$$

Poiché  $v \mapsto \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx$  è un operatore lineare e continuo in  $H^1(\Omega)$  (disuguaglianza di Hölder e di Sobolev), abbiamo individuato la derivata secondo Gâteaux di  $J$ :

$$J'_G(u)[v] = \int_{\Omega} f(u(x))v(x) \, dx.$$

- Derivata di Fréchet

Mostriamo che  $J'_G: H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$  è un'applicazione continua. A tal fine, sia  $\{u_k\}_k$  una successione che converge a  $u$  in  $H^1(\Omega)$ . Per il teorema di convergenza dominata inversa, possiamo supporre che — a meno di sottosuccessioni —

- $u_k \rightarrow u$  in  $L^{2^*}(\Omega)$ ;
- $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$ ;
- esiste  $w \in L^{2^*}(\Omega)$  tale che  $|u_k(x)| \leq w(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$  e ogni  $k$ .

Usiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}
 |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))| |v(x)| \, dx \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \times \\
 &\quad \times \left( \int_{\Omega} |v(x)|^{2^*} \, dx \right)^{1/2^*}.
 \end{aligned}$$

La continuità di  $f$  implica  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))| = 0$  per q.o.  $x \in \Omega$ , e inoltre

$$\begin{aligned}
 |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq C (1 + |u_k(x)|^{2^*-1} + |u(x)|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
 &\leq C (1 + |w(x)|^{2^*-1} + |w(x)|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
 &\leq C (1 + |w(x)|^{2^*} + |w(x)|^{2^*}) \in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx = 0.$$



Perciò

$$\begin{aligned}\|J'_G(u_k) - J'_G(u)\| &= \sup\{(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega), \|v\| = 1\} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che da ogni successione  $\{u_k\}_k$  convergente a  $u$  è possibile estrarre una sottosuccessione tale che  $J'_G(u_k) \rightarrow J'_G(u)$  in  $(H^1(\Omega))^*$ . È ora un esercizio di Topologia Generale dedurre che l'intera successione  $\{u_k\}_k$  gode di questa proprietà (perché il limite è indipendente dalla sottosuccessione scelta).

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

Sia dunque  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale  $J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx$  è derivabile in  $H^1(\Omega)$ .

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui  $\Omega$  sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione  $f$

Sia dunque  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  con frontiera regolare, e sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale  $J(u) = \int_{\Omega} F(u(x)) \, dx$  è derivabile in  $H^1(\Omega)$ .

- Derivata di Gâteaux

Per q.o.  $x \in \Omega$  e per ogni  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste  $\theta = \theta(x)$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\
 &\leq C (|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}) \\
 &\leq C (|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}) \\
 &\in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Per il teorema di Lagrange, esiste  $\theta = \theta(x)$  tale che  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\ &\leq C (|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}) \\ &\leq C (|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}) \\ &\in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Se poi  $\{u_k\}_k$  è una successione che tende a  $u$  in  $H^1(\Omega)$ , a meno di sottosuccessioni possiamo anche supporre che

- $u_k(x) \rightarrow u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$
- $u_k \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  e in  $L^{2^*}(\Omega)$
- esistono  $w_1 \in L^{2^*}(\Omega)$  e  $w_2 \in L^2(\Omega)$  tali che  $|u_k(x)| \leq w_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , per q.o.  $x \in \Omega$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo  $R_\varepsilon > 0$  tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon,$$

dove  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |x| > R_\varepsilon\}$ . Ora,

$$\begin{aligned} |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_{\Omega} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx. \end{aligned}$$

Trattiamo separatamente gli ultimi due integrali.

Innanzitutto

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \\ & \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} (|u_k| + |u| + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}) |v| \, dx \\ & \leq C \left( \int_{\Omega_\varepsilon} |w_2| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u| |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |w_1|^{2^*-1} |v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^{2^*-1} |v| \, dx \right) \\ & \leq C \|v\| \left( \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \\ & \leq C \|v\| \varepsilon. \end{aligned}$$



D'altra parte,

$$\int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)| |v| \, dx \leq C \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|.$$

Sui sottoinsiemi limitati di  $\mathbb{R}$ , la funzione  $f$  soddisfa una maggiorazione del tipo  $|f(t)| \leq C(1 + |t|^{2^*-1})$ , e come sopra concludiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx = 0.$$

Ricapitolando,

$$\begin{aligned} \|(J'_G(u_k) - J'_G(u))\| &= \sup \{ (J'_G(u_k) - J'_G(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega), \|v\| = 1 \} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} + C\varepsilon \\ &= o(1) + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , concludiamo che  $J'_G(u_K) \rightarrow J'_G(u)$ .

**Osservazione.** La regolarità della frontiera di  $\Omega$  è stata utilizzata solo *implicitamente* per garantire la validità di tutte le immersioni di Sobolev. Ne consegue che gli stessi risultati sussistono, senza alcuna ipotesi su  $\partial\Omega$ , se restringiamo il funzionale  $J$  al sottospazio  $H_0^1(\Omega)$ .

# Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

dove

- $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$ ,  $h \in C(\Omega)$ .

# Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

dove

- $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$ ,  $h \in C(\Omega)$ .

Il problema (P) prende il nome di *problema di Dirichlet omogeneo*. L'aggettivo *omogeneo* si riferisce qui alla condizione *al bordo*  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ . Osserviamo che il problema è *lineare*.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in  $\overline{\Omega}$ .

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in  $\overline{\Omega}$ .

Fissiamo  $v \in C_0^1(\Omega)$  e moltiplichiamo l'equazione in (P) per  $v$ . Integrando su  $\Omega$  con l'ausilio del Teorema di Stokes (versione nota anche come *formula di Gauss-Green*), otteniamo che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Questa uguaglianza ha senso sotto ipotesi ben più deboli di quelle finora assunte. Ad esempio gli integrali sono finiti quando  $u, v$  sono funzioni di  $L^2(\Omega)$  tali che  $\partial u / \partial x_i$  e  $\partial v / \partial x_i$  appartengano ad  $L^2(\Omega)$  per ogni indice  $i$ . La continuità di  $q$  e  $h$  è allora eccessiva, e possiamo sostituirla con  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ .

- Siano dunque  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ . Una *soluzione debole* di (P) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

- Siano dunque  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $h \in L^2(\Omega)$ . Una *soluzione debole* di (P) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Osservazione.** Ogni soluzione classica è anche soluzione debole.

Infatti,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  implica  $u \in H^1(\Omega)$ . Per una nota proprietà degli spazi di Sobolev, poiché  $u$  è continua in  $\overline{\Omega}$  e  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ , abbiamo  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Sappiamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Poiché  $C_0^1(\Omega)$  è un sottospazio denso di  $H_0^1(\Omega)$ , ad ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$  facciamo corrispondere una successione  $\{v_n\}_n \subset C_0^1(\Omega)$  tale che  $v_n \rightarrow v$  in  $H_0^1(\Omega)$ .



Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  nella relazione

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) u v_n \, dx = \int_{\Omega} h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che  $u$  è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  una soluzione debole di (P). Se è noto, per qualche motivo, che  $u \in C^2(\Omega)$ , allora possiamo dedurre che  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x) uv \, dx = \int_{\Omega} h(x) v \, dx.$$

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Per densità di  $C_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$  quasi ovunque, e che  $u = 0$  quasi ovunque in  $\partial\Omega$ .

Scegliendo in particolare  $v \in C_0^1(\Omega)$  nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} h(x)v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + q(x)u - h(x)) v \, dx = 0$$

per ogni  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

Per densità di  $C_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$  quasi ovunque, e che  $u = 0$  quasi ovunque in  $\partial\Omega$ .

- Morale della favola: abbiamo bisogno di una *teoria della regolarità* per le soluzioni deboli di (P).

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x) |u|^2 \, dx - \int_{\Omega} h(x) u \, dx.$$



# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale  $J$ .

# Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 dx - \int_{\Omega} h(x)u dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che  $J$  è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} h(x)v dx$$

per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale  $J$ .

Il funzionale  $J$  è chiamato *funzionale dell'energia* associato a (P), anche se dovremmo chiamarlo più propriamente funzionale di azione o di Eulero-Lagrange.

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ . Supponiamo che  $q \in L^\infty(\Omega)$  e che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

# Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.

Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ . Supponiamo che  $q \in L^\infty(\Omega)$  e che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (SP)$$

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$



**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$

Sappiamo che  $J$  è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} q(x)uv \, dx - \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione.** Una soluzione debole di (SP) è una funzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} q(x)uv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Sia  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$ , e definiamo un funzionale  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)|u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx.$$

Sappiamo che  $J$  è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} q(x)uv \, dx - \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

- Ancora una volta, le soluzioni deboli di (SP) corrispondono ai punti critici del funzionale dell'energia  $J$ .

# Riassunto

- Abbiamo visto che è possibile estendere il calcolo differenziale elementare (cioè quello delle funzioni di più variabili) alle funzioni di *infinite* variabili.
- Con questo linguaggio, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca opportune soluzioni di equazioni differenziali con gli zeri della derivata di opportuni funzionali (non lineari).

# Prospettive

- Ci prefiggiamo ora di... andare a caccia dei punti critici, al fine di *risolvere* equazioni differenziali.
- Per far ciò, vedremo che occorrono strumenti nuovi, e che la *topologia* dello spazio di riferimento avrà un ruolo fondamentale.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

# Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

**Teorema.** Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di  $\mathbb{R}^N$  possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Il ruolo della compattezza nel Teorema di Weierstrass è fondamentale, come mostra il seguente controesempio, dovuto anch'esso a Weierstrass.

**Esempio.** Sia

$$I(u) = \int_{-1}^1 |xu'(x)|^2 \, dx$$

definito per ogni funzione  $u \in C^1([-1, 1])$  a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove  $X = \{u \in C^1([-1, 1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$  non ha soluzioni.



**Esempio.** Sia

$$I(u) = \int_{-1}^1 |xu'(x)|^2 dx$$

definito per ogni funzione  $u \in C^1([-1, 1])$  a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove  $X = \{u \in C^1([-1, 1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$  non ha soluzioni.

Infatti, la famiglia di funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$$

mostra con un calcolo diretto che  $\inf_X I = 0$ . È poi evidente che  $I(u) = 0$  implica  $u' = 0$  in  $[-1, 1]$ , cioè  $u$  è costante. Pertanto  $u \notin X$ .

# Weierstrass in astratto

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  soddisfi la seguente condizione:

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$  è compatto.

Allora  $I$  raggiunge il suo estremo inferiore  $\inf_M I$ .

*Dim.* Possiamo evidentemente supporre che  $I$  non sia identicamente uguale a  $+\infty$ . Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione  $\{\alpha_m\}_m$  strettamente decrescente verso  $\alpha_0$ . Poniamo per brevità  $K_m = K_{\alpha_m}$ .

# Weierstrass in astratto

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  soddisfi la seguente condizione:

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$  è compatto.

Allora  $I$  raggiunge il suo estremo inferiore  $\inf_M I$ .

*Dim.* Possiamo evidentemente supporre che  $I$  non sia identicamente uguale a  $+\infty$ . Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione  $\{\alpha_m\}_m$  strettamente decrescente verso  $\alpha_0$ . Poniamo per brevità  $K_m = K_{\alpha_m}$ . Per ipotesi, ogni  $K_m$  è compatto e non-vuoto. Inoltre  $K_m \supset K_{m+1}$ . Per la proprietà dell'intersezione finita, esiste

$$u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m,$$

cioè  $I(u) \leq \alpha_m$  per ogni  $m$ . Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$ , concludiamo che  $I(u) \leq \alpha_0$ , cioè  $u$  è un minimo assoluto di  $I$  su  $M$ .

- Nell'ipotesi del Teorema precedente, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$\{u \in M \mid I(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha$$

è aperto in  $M$ . Questo significa, per definizione, che  $I$  è una funzione *semicontinua inferiormente* su  $M$ .

- Nei casi concreti, la struttura di  $M$  può essere più ricca di quella di un mero spazio topologico. Di seguito un caso piuttosto frequente nell'Analisi Variazionale.

**Teorema.** Sia  $V$  uno spazio di Banach riflessivo con norma  $\|\cdot\|$ , e sia  $M \subset V$  un sottospazio debolmente chiuso. Supponiamo che  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sia un funzionale tale che

- $I(u) \rightarrow +\infty$  se  $\|u\| \rightarrow +\infty$ ;
- per ogni  $u \in M$  ed ogni successione  $\{u_m\}_k$  in  $M$  tale che  $u_m \rightharpoonup u$ , risulta:  
 $I(u) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} I(u_m)$ .

Allora  $I$  è limitato dal basso, e raggiunge il suo minimo assoluto.

*Dim.* Sia  $\alpha_0 = \inf_M I$  e sia  $\{u_m\}_m$  una successione in  $M$  tale che  $I(u_m) \rightarrow \alpha_0$  per  $m \rightarrow +\infty$ . Per la prima ipotesi,  $\{u_m\}_m$  è una successione limitata in  $V$  (altrimenti...). Il teorema di Eberlein-Smulian garantisce la convergenza debole di tale successione a qualche  $u \in V$ . Per ipotesi  $M$  è debolmente chiuso, sicché  $u \in M$ . Infine,

$$I(u) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} I(u_m) = \alpha_0.$$

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

**Lemma.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $K$  un sottoinsieme convesso e chiuso di  $X$ , e  $I$  un funzionale convesso s.c.i. su  $K$ . Allora  $I$  è debolmente s.c.i.

*Dim.* Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha$  è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi  $I$  è debolmente s.c.i.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

**Lemma.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $K$  un sottoinsieme convesso e chiuso di  $X$ , e  $I$  un funzionale convesso s.c.i. su  $K$ . Allora  $I$  è debolmente s.c.i.

*Dim.* Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $K_\alpha$  è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi  $I$  è debolmente s.c.i.

**Notazione.** Per rendere più espressiva la simbologia, utilizzeremo anche la scrittura

$$[I \leq \alpha] = \{u \in X \mid I(u) \leq \alpha\}.$$



# Punti critici e topologia

Quando  $X$  è uno spazio di Banach riflessivo e  $I$  è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che  $I$  raggiunge il suo minimo assoluto  $\alpha_0$  consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  è tale che  $[I < \alpha_0] = \emptyset$ ;
- per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, l'insieme  $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$  è non-vuoto e debolmente compatto.

# Punti critici e topologia

Quando  $X$  è uno spazio di Banach riflessivo e  $I$  è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che  $I$  raggiunge il suo minimo assoluto  $\alpha_0$  consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  è tale che  $[I < \alpha_0] = \emptyset$ ;
- per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo, l'insieme  $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$  è non-vuoto e debolmente compatto.

In realtà ciò indica la presenza di punti critici di  $I$  è la differenza topologica dei sottolivelli  $[I \leq c]$  e  $[I \leq c + \varepsilon]$ .

# Esempi

- Sia  $I(x) = x^3 - 3x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . La derivata di  $I$  si annulla in  $\pm 1$ , e se poniamo  $c_1 = I(1) = -2$ ,  $c_2 = I(-1) = 2$ , vediamo che

1. se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è un intervallo del tipo  $(-\infty, \alpha_1]$ ;
2. se  $c_1 < a_2 < c_2$ , risulta  $[I \leq a_2] = (-\infty, \alpha_2] \cup [\beta_2, \gamma_2]$  con  $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$ ;
3. se  $a_3 > c_2$ , risulta  $[I \leq a_3] = (-\infty, \alpha_3]$ .

Nell'attraversare i valori  $c_1$  e  $c_2$ , i sottolivelli del funzionale sono topologicamente distinti.

- Sia  $I(x, y) = x^2 - y^2$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sappiamo che 0 è l'unico valore critico di  $I$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$ , l'insieme  $[I \leq \varepsilon]$  è connesso, mentre  $[I \leq -\varepsilon]$  ha due componenti connesse.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

- Sia  $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esistono due valori critici  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ . Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se  $a_1 < c_1$ , l'insieme  $[I \leq a_1]$  è vuoto, che se  $c_1 < a_2 < c_2$  l'insieme  $[I \leq a_2]$  è un anello del tipo  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , e infine che se  $a_3 > c_2$  l'insieme  $[I \leq a_3]$  è una palla  $B(0, R)$ . Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello  $c_2 = 0$ , e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

A causa del forte legame con la Topologia Algebrica, questa teoria non rientra nei limiti del nostro corso.

# Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica*  $f(x) = \arctan x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

# Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica*  $f(x) = \arctan x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- Con il termine di *principi variazionali* ci si riferisce a teoremi che permettano di costruire *quasi minimi*, cioè tipicamente successioni minimizzanti per funzionali limitati e s.c.i., aventi però ulteriori proprietà.



# Il principio di Ekeland

**Teorema.** Sia  $M$  uno spazio metrico completo con metrica  $d$ , e sia  $I: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funzionale limitato dal basso, s.c.i. e non identicamente infinito. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  e ogni  $u \in M$  con

$$I(u) \leq \inf_M I + \varepsilon,$$

esiste un elemento  $v \in M$  tale che

$$d(u, v) \leq 1, \quad I(v) < I(u),$$

e, per ogni  $w \neq v$  in  $M$ ,

$$I(w) > I(v) - \varepsilon d(v, w).$$

*Dim.* Definiamo un ordinamento su  $M$  ponendo  $w \leq v$  se e solo se  $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$ . Poniamo  $u_0 = u$ , e supponiamo di aver definito  $u_n$ . Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo  $u_{n+1} \in S_n$  tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

*Dim.* Definiamo un ordinamento su  $M$  ponendo  $w \leq v$  se e solo se  $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$ . Poniamo  $u_0 = u$ , e supponiamo di aver definito  $u_n$ . Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo  $u_{n+1} \in S_n$  tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

È chiaro che  $S_{n+1} \subset S_n$  poiché  $u_{n+1} \leq u_n$ ; inoltre  $S_n$  è chiuso perché  $I$  è s.c.i.

Se  $w \in S_{n+1}$ , allora  $w \leq u_{n+1} \leq u_n$  e dunque

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq I(u_{n+1}) - I(u_n) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} I = \frac{1}{n+1}.$$

Deduciamo che

$$\text{diam } S_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

Poiché  $M$  è uno spazio completo, è noto che

$$\bigcap_n S_n = \{v\}$$

per qualche  $v \in M$ . In particolare  $v \in S_0$ , cioè  $v \leq u_0 = u$ . Quindi

$$I(v) \leq I(u) - \varepsilon d(u, v) \leq I(u)$$

e

$$d(u, v) \leq \varepsilon^{-1} (I(u) - I(v)) \leq \varepsilon^{-1} \left( \inf_M I + \varepsilon - \inf_M I \right) = 1.$$

Per concludere, dimostriamo che  $w \leq v$  implica  $w = v$ . Infatti,  $w \leq v$  implica  $w \in u_n$  per ogni  $n$ , e dunque  $w \in S_n$  per ogni  $n$ . Quindi  $w = v$ .

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio  $M$  e del funzionale  $I$ .

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge “quasi” il minimo, è possibile associare un punto ancora “migliore”, che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio  $M$  e del funzionale  $I$ .

**Teorema.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile e limitata dal basso su  $X$ . Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $u \in X$  tale che  $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$ , esiste  $v \in X$  tale che  $\varphi(v) \leq \varphi(u)$ ,

$$|v - u| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad |\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$



*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per  $t$  e prendendo il limite per  $t \rightarrow 0$ , deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di  $h$  sulla sfera unitaria di  $X$ , deve essere  $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

Le altre proprietà di  $v$  sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

*Dim.* Scegliamo  $M = X$ ,  $I = \varphi$  e, per  $\varepsilon > 0$  dato, scegliamo  $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$  nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento  $v \in X$  tale che  $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$  per ogni  $w \neq v$ .

Scriviamo  $w = v + th$  con  $t > 0$ ,  $h \in X$ ,  $|h| = 1$ , per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per  $t$  e prendendo il limite per  $t \rightarrow 0$ , deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di  $h$  sulla sfera unitaria di  $X$ , deve essere  $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

Le altre proprietà di  $v$  sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

- È ormai spontaneo “discretizzare” il parametro  $\varepsilon > 0$ , per costruire successioni minimizzanti con derivata “quasi” nulla.

**Corollario.** Siano  $X$  uno spazio di Banach,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale limitato dal basso e derivabile in  $X$ . Allora, per ogni successione minimizzante  $\{u_k\}_k$  di  $\varphi$ , esiste una successione minimizzante  $\{v_k\}_k$  di  $\varphi$  tale che  $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k - v_k| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi'(v_k)\| = 0.$$

*Dim.* Basta porre

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \\ 1/k & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0. \end{cases}$$

# Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti “quasi critici” per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di “vero” punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

# Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti “quasi critici” per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di “vero” punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

**Teorema.** Supponiamo che  $I \in C^1(\mathbb{R}^N)$  sia un funzionale coercivo, e che  $I$  possieda due punti distinti di minimo stretto,  $x_1$  e  $x_2$ . Allora  $I$  possiede un terzo punto critico  $x_3$  che non è un minimo locale, e dunque distinto da  $x_1$  e  $x_2$ .

# Passi di montagna: il caso finito-dimensionale

- L'idea di costruire punti “quasi critici” per un funzionale si rivela essere un approccio molto utile nello sviluppo di teoremi di “vero” punto critico. Cominciamo con un caso in dimensione finita.

**Teorema.** Supponiamo che  $I \in C^1(\mathbb{R}^N)$  sia un funzionale coercivo, e che  $I$  possieda due punti distinti di minimo stretto,  $x_1$  e  $x_2$ . Allora  $I$  possiede un terzo punto critico  $x_3$  che non è un minimo locale, e dunque distinto da  $x_1$  e  $x_2$ .

- Immaginiamo dunque (almeno nel caso  $N = 2$ ) il grafico di  $I$ , con due punti di minimo locale stretto. Il teorema afferma, sotto l'ipotesi che  $I$  diverga all'infinito per argomenti divergenti all'infinito, che da qualche parte esiste un punto di *sella*.

*Dim.* Definiamo il valore

$$\beta = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x),$$

dove

$$P = \{p \subset \mathbb{R}^N \mid x_1 \in p, x_2 \in p, p \text{ è compatto e connesso}\}.$$

Prendiamo una successione  $\{p_m\}_m \subset P$  minimizzante per  $\beta$ , nel senso che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta.$$

Poiché  $I$  è coercivo, gli insiemi  $p_m$  sono uniformemente limitati.

*Dim.* Definiamo il valore

$$\beta = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} I(x),$$

dove

$$P = \{p \subset \mathbb{R}^N \mid x_1 \in p, x_2 \in p, p \text{ è compatto e connesso}\}.$$

Prendiamo una successione  $\{p_m\}_m \subset P$  minimizzante per  $\beta$ , nel senso che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta.$$

Poiché  $I$  è coercivo, gli insiemi  $p_m$  sono uniformemente limitati. L'insieme dei punti di accumulazione di  $\{p_m\}_m$ ,

$$p = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l \geq m} p_l},$$

è l'intersezione di una successione decrescente di insiemi compatti e connessi: dunque anch'esso è compatto e connesso. Inoltre  $\{x_1, x_2\} \subset p$ , poiché  $\{x_1, x_2\} \subset p_m$  per ogni  $m$ .



Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché  $\max_{x \in p} I(x) = \beta$ .

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché  $\max_{x \in p} I(x) = \beta$ .

Poiché  $x_1$  e  $x_2$  sono due punti di minimo locale stretto collegati da  $p$ , risulta  $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$ .

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicché  $\max_{x \in p} I(x) = \beta$ .

Poiché  $x_1$  e  $x_2$  sono due punti di minimo locale stretto collegati da  $p$ , risulta  $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$ .

- Dimostriamo che esiste un punto critico  $x_3 \in p$  tale che  $I(x_3) = \beta$ .

Deduciamo che

$$\max_{x \in p} I(x) \geq \inf_{p' \in P} \max_{x \in p'} I(x) = \beta.$$

D'altra parte, per continuità,

$$\max_{x \in p} I(x) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \max_{x \in p_m} I(x) = \beta,$$

sicch   $\max_{x \in p} I(x) = \beta$ .

Poich   $x_1$  e  $x_2$  sono due punti di minimo locale stretto collegati da  $p$ , risulta  $\beta > \max\{I(x_1), I(x_2)\}$ .

- Dimostriamo che esiste un punto critico  $x_3 \in p$  tale che  $I(x_3) = \beta$ .

Procediamo per assurdo. Innanzitutto l'insieme

$$K = \{x \in p \mid I(x) = \beta\}$$

  chiuso (perch ?) e limitato, dunque compatto. Supponiamo che  $I' \neq 0$  in  $K$ .

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero  $\delta > 0$  tale che  $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$  per ogni  $x \in K$ . Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K\}$$

di  $K$  tale che  $|I'| \geq \delta$  su  $U_\varepsilon$ . In particolare,  $x_i \notin U_\varepsilon$ ,  $i = 1, 2$ .

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero  $\delta > 0$  tale che  $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$  per ogni  $x \in K$ . Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K\}$$

di  $K$  tale che  $|I'| \geq \delta$  su  $U_\varepsilon$ . In particolare,  $x_i \notin U_\varepsilon$ ,  $i = 1, 2$ .

Sia  $\eta$  una funzione continua con supporto contenuto in  $U_\varepsilon$ , tale che  $0 \leq \eta \leq 1$  e  $\eta \equiv 1$  in un intorno di  $K$ .

L'ipotesi assurda garantisce l'esistenza di un numero  $\delta > 0$  tale che  $|I'(x)| \geq 2\delta > 0$  per ogni  $x \in K$ . Per continuità, esiste un intorno

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < \varepsilon \text{ per qualche } y \in K\}$$

di  $K$  tale che  $|I'| \geq \delta$  su  $U_\varepsilon$ . In particolare,  $x_i \notin U_\varepsilon$ ,  $i = 1, 2$ .

Sia  $\eta$  una funzione continua con supporto contenuto in  $U_\varepsilon$ , tale che  $0 \leq \eta \leq 1$  e  $\eta \equiv 1$  in un intorno di  $K$ .

Definiamo  $\Phi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  mediante

$$\Phi(x, t) = x - t\eta(x)\nabla I(x).$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\Phi(x, t)) = -\eta(x)|\nabla I(x)|^2.$$

Inoltre  $|\nabla I(x)|^2 \geq \delta^2 > 0$  su  $\text{supp } \eta \subset U_\varepsilon$ . Per continuità, esiste  $T > 0$  tale che

$$\frac{d}{dt} I(\Phi(x, t)) \leq -\frac{\eta(x)}{2} |\nabla I(x)|^2$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ , uniformemente rispetto a  $x$ .



Inoltre  $|\nabla I(x)|^2 \geq \delta^2 > 0$  su  $\text{supp } \eta \subset U_\varepsilon$ . Per continuità, esiste  $T > 0$  tale che

$$\frac{d}{dt} I(\Phi(x, t)) \leq -\frac{\eta(x)}{2} |\nabla I(x)|^2$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ , uniformemente rispetto a  $x$ .

Sia  $p_T = \{\Phi(x, T) \mid x \in p\}$ ; per ogni  $\Phi(x, T) \in p_T$  calcoliamo

$$\begin{aligned} I(\Phi(x, T)) &= I(x) + \int_0^T \frac{d}{dt} I(\Phi(x, t)) dt \\ &\leq I(x) - \frac{T}{2} \eta(x) |\nabla I(x)|^2, \end{aligned}$$

e l'ultimo termine è  $\leq I(x) = \beta$  se  $x \notin K$ , oppure  $\leq \beta - \frac{T}{2} \delta^2 < \beta$  se  $x \in K$ . In ogni caso,

$$\max_{x \in p_T} I(x) < \beta.$$

Ma:

- $p_T$  è compatto e connesso;
- $x_i = \Phi(x_i, T) \in p_T$ ,  $i = 1, 2$ .

Pertanto  $p_T \in P$ , e questo contraddice la definizione di  $\beta$ .

Se tutti i punti critici  $u$  di  $I$  in  $p$  con  $I(u) = \beta$  fossero minimi locali, l'insieme  $\tilde{K}$  di tali punti sarebbe aperto in  $p$  e — per la continuità di  $I$  e di  $I'$  — anche chiuso. Ma  $\tilde{K} \neq \emptyset$  per la discussione precedente, dunque  $p = \tilde{K}$ . Ciò contraddice il fatto che  $I(x_1) < \beta$ ,  $I(x_2) < \beta$ .

Se tutti i punti critici  $u$  di  $I$  in  $p$  con  $I(u) = \beta$  fossero minimi locali, l'insieme  $\tilde{K}$  di tali punti sarebbe aperto in  $p$  e — per la continuità di  $I$  e di  $I'$  — anche chiuso. Ma  $\tilde{K} \neq \emptyset$  per la discussione precedente, dunque  $p = \tilde{K}$ . Ciò contraddice il fatto che  $I(x_1) < \beta$ ,  $I(x_2) < \beta$ .

Pertanto almeno un punto critico di  $I$  in  $p$  al livello  $\beta$  non è un minimo locale. La dimostrazione è completa.

Se tutti i punti critici  $u$  di  $I$  in  $p$  con  $I(u) = \beta$  fossero minimi locali, l'insieme  $\tilde{K}$  di tali punti sarebbe aperto in  $p$  e — per la continuità di  $I$  e di  $I'$  — anche chiuso. Ma  $\tilde{K} \neq \emptyset$  per la discussione precedente, dunque  $p = \tilde{K}$ . Ciò contraddice il fatto che  $I(x_1) < \beta$ ,  $I(x_2) < \beta$ .

Pertanto almeno un punto critico di  $I$  in  $p$  al livello  $\beta$  non è un minimo locale. La dimostrazione è completa.

- L'interpretazione di questo teorema è suggestiva:  $I(x)$  misura l'altitudine di un punto  $x$  in un panorama. I due minimi  $x_1$  e  $x_2$  corrispondono a due villaggi collocati al fondo di due valli separate da una cresta montagnosa. Se camminiamo lungo un sentiero  $p$  che unisce i due villaggi, scelto in modo che la quota massima  $I(x)$  raggiunta nei punti  $x \in p$  sia minimale tra le quote di tutti i possibili sentieri, il teorema afferma che attraverseremo la cresta in un punto di sella (che i montanari chiamano anche *forcella*).

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.
- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale  $I$ .

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.
- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale  $I$ .
- Nella dimostrazione appena vista, la coercività di  $I$  garantiva immediatamente la limitatezza — e dunque la *relativa compattezza* — di tutti i (sotto)livelli di  $I$ . La compattezza (relativa) della palla unitaria di uno spazio di Banach equivale però all'avere dimensione finita.

- Il teorema precedente è la versione finito-dimensionale del *teorema del passo di montagna*, dimostrato nel 1972 da A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz.
- La versione ambientata in uno spazio normato di dimensione (eventualmente) infinita è generalmente falsa senza ulteriori ipotesi sul funzionale  $I$ .
- Nella dimostrazione appena vista, la coercività di  $I$  garantiva immediatamente la limitatezza — e dunque la *relativa compattezza* — di tutti i (sotto)livelli di  $I$ . La compattezza (relativa) della palla unitaria di uno spazio di Banach equivale però all'avere dimensione finita.
- Occorre, nel caso infinito-dimensionale, un surrogato della coercività, che garantisca la necessaria compattezza.