Calcolo delle Variazioni
a.a. 2019-2020

Simone Secchi
simone.secchi@unimib.it

http://elearning.unimib.it

Prerequisiti e strumenti

- Calcolo differenziale in spazi euclidei di dimensione finita
- Teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue
- Principi di Analisi Funzionale Lineare
- Teoria elementare degli spazi di Sobolev (almeno il caso hilbertiano $p = 2$)

Strumenti: il calcolo differenziale in dimensione infinita

Notazione. Se X è uno spazio di Banach (reale), il suo duale topologico sarà denotato con il simbolo X^*. Se $A \in X^*$, il simbolo $A[v]$ indicherà il valore di A nel punto v; talvolta semplificheremo la notazione e scriveremo Av al posto di $A[v]$.

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, e $U \subset X$ un suo aperto. Un funzionale su U è un'applicazione $I\colon U \to \mathbb{R}$. Si noti che i "nostri" funzionali **non** sono necessariamente **lineari**!

Definizione. Sia $I\colon U \to \mathbb{R}$ un funzionale. Diremo che I è derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$ se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \tag{1}$$

o, equivalentemente, se

$$I(u+v) = I(u) + Av + o(\|v\|) \quad \text{per } v \to 0.$$

Si osservi che questa è la definizione di funzione differenziabile quando $X = \mathbb{R}^n$.

Lemma. Se I è derivabile nel punto $u \in U$, allora l'elemento A che soddisfa (1) è univocamente determinato.

Dim. Infatti, supponiamo che A e B siano due elementi di X^* che soddisfano (1). Per sottrazione,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{(A-B)v}{\|v\|} = 0.$$

Fissiamo $u \in X$ con $\|u\| = 1$, e scegliamo $v = tu$, $t \to 0^+$. Allora

$$(A-B)u = \lim_{t \to 0+} \frac{t(A-B)u}{t\|u\|} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di u, concludiamo che $A = B$.

Definizione. Se I è un funzionale derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$, la derivata (talvolta: il differenziale) di Fréchet di I in u è l'unico elemento $I'(u) \in X^*$ (talvolta: $dI(u)$) tale che

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Definizione. Se $I\colon U \to \mathbb{R}$ è derivabile secondo Fréchet in ogni punto $u \in U$, diremo che I è Fréchet-derivabile in U. La derivata di Fréchet di I è allora la mappa $I'\colon U \to X^*$ che ad $u \in U$ associa $I'(u) \in X^*$. Si tratta — in generale — di una mappa *non lineare*.

Se I' è una mappa continua da U in X^*, diremo che $I \in C^1(U)$.

Il caso hilbertiano

Se H è uno spazio di Hilbert (reale), è noto che gli elementi del duale H^* sono isometricamente identificati con vettori di H attraverso l'isomorfismo di Riesz. In particolare, un funzionale I definito su $U \subset H$ è derivabile in $u \in U$ se e solo esiste un vettore, detto d'ora in poi *gradiente* di I in u e denotato $\nabla I(u)$, tale che

$$I(u+v) = I(u) + \langle \nabla I(u) \mid v \rangle + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Proposizione. Siano I e J due funzionali derivabili nel punto $u \in X$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. Se a e b sono numeri reali, allora $aI + bJ$ è derivabile in u, e vale $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$.

2. Il prodotto IJ è derivabile in u, e vale $(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$.

3. Se $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$ è una curva derivabile in t_0 e $u = \gamma(t_0)$, allora la composizione $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\eta(t) = I(\gamma(t))$ è derivabile in t_0, e vale $\eta'(t_0) = I'(u)[\gamma'(t_0)]$.

4. Se $A \subset R$ è un aperto, $f\colon A \to R$ è derivabile in $I(u) \in A$, allora la composizione $K(u) = f(I(u))$ è definita in un intorno V di u, è derivabile in u e vale $K'(u) = f'(I(u))I'(u)$.

Dim. La prima affermazione è banale (esercizio!). Per quanto riguarda la seconda, quando $v \to 0$ in X, abbiamo

$$\begin{aligned} I(u+v)J(u+v) &= \left(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)\right)\left(J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)\right) \\ &= I(u)J(u) + J(u)I'(u)[v] + I(u)J'(u)[v] + I'(u)[v]J'(u)[v] \\ &\quad + o(\|v\|)\left(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)\right). \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che

$$I'(u)[v]J'(u)[v] + o(\|v\|)\left(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)\right)$$

è $o(\|v\|)$ per $v \to 0$. La terza affermazione è simile, infatti per $h \to 0$ in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(t_0 + h) &= I(\gamma(t_0 + h)) = I(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)h + o(|h|)) \\ &= I(u) + I'(u)[\gamma'(t_0)h + o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|) \\ &= \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + I'(u)[o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|). \end{aligned}$$

Poiché gli ultimi due addendi sono $o(|h|)$, otteniamo che

$$\eta(t_0 + h) = \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + o(|h|).$$

Infine, quando $v \to 0$ in X, si verifica come prima che

$$
\begin{aligned}
K(u+v) = f(I(u+v)) &= f(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\
&= f(I(u)) + f'(I(u))(I'(u)[v] + o(\|v\|)) + o(I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\
&= f(I(u)) + f'(I(u))I'(u)[v] + o(\|v\|).
\end{aligned}
$$

Osservazione. È possibile introdurre il concetto di derivata per applicazioni tra due spazi di Banach X e Y. Solo in questo contesto può essere enunciata una formulazione completa della regola di derivazione delle funzioni composte.

Poiché non ne faremo uso in queste lezioni, rimandiamo al testo di Ambrosetti e Prodi per ulteriori approfondimenti.

Definizione. Sia I un funzionale definito nell'aperto U di X, e sia $u \in U$. Diremo che I è derivabile secondo Gâteaux in u se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Av \tag{2}$$

per ogni $v \in X$. In tal caso, l'unico (esercizio!) elemento siffatto prende il nome di derivata secondo Gâteaux di I in u, e si denota con $I'_G(u)$ o con $d_G I(u)$.

Osserviamo che questa nuova derivata riprende la cosiddetta *derivata direzionale* già nota nell'ambito del calcolo differenziale in dimensione finita.

In particolare, ricordando i "soliti" esempi in $\mathbb{R}^2$, deduciamo che esistono funzionali (non lineari) derivabili secondo Gâteaux ma non derivabili secondo Fréchet.

Condizione sufficiente per la derivabilità secondo Fréchet

Proposizione. Supponiamo che $U \subset X$ sia un aperto, che I sia Gâteaux-derivabile in U, e che I'_G sia continua in un punto $u \in U$. Allora I è Fréchet-derivabile in u, e (ovviamente) $I'(u) = I'_G(u)$.

Omettiamo la dimostrazione, che è probabilmente stata proposta nel caso $X = \mathbb{R}^2$ nel corso di Analisi Matematica 2.

Punti critici

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, U un aperto di X, e I un funzionale definito su U. Diremo che $u \in U$ è un punto critico di I se I è derivabile in u e

$$I'(u) = 0.$$

Più esplicitamente, questo significa che $I'(u)[v] = 0$ per ogni $v \in X$.

Se u è un punto critico di I e $I(u) = c$, diremo che u è un punto critico (di I) al livello c. Se, per qualche $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $I^{-1}(\{c\}) \subset X$ contiene almeno un elemento, diremo che c è un valore critico per I.

L'equazione $I'(u) = 0$ è nota come equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) associata al funzionale I.