Calcolo delle Variazioni
a.a. 2019-2020

Simone Secchi
simone.secchi@unimib.it

http://elearning.unimib.it

Prerequisiti e strumenti

- Calcolo differenziale in spazi euclidei di dimensione finita
- Teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue
- Principi di Analisi Funzionale Lineare
- Teoria elementare degli spazi di Sobolev (almeno il caso hilbertiano $p = 2$)

Strumenti: il calcolo differenziale in dimensione infinita

Notazione. Se X è uno spazio di Banach (reale), il suo duale topologico sarà denotato con il simbolo X^*. Se $A \in X^*$, il simbolo $A[v]$ indicherà il valore di A nel punto v; talvolta semplificheremo la notazione e scriveremo Av al posto di $A[v]$.

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, e $U \subset X$ un suo aperto. Un funzionale su U è un'applicazione $I \colon U \to \mathbb{R}$. Si noti che i "nostri" funzionali **non** sono necessariamente **lineari**!

Definizione. Sia $I\colon U \to \mathbb{R}$ un funzionale. Diremo che I è derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$ se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \tag{1}$$

o, equivalentemente, se

$$I(u+v) = I(u) + Av + o(\|v\|) \quad \text{per } v \to 0.$$

Si osservi che questa è la definizione di funzione differenziabile quando $X = \mathbb{R}^n$.

Lemma. Se I è derivabile nel punto $u \in U$, allora l'elemento A che soddisfa (1) è univocamente determinato.

Dim. Infatti, supponiamo che A e B siano due elementi di X^* che soddisfano (1). Per sottrazione,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{(A-B)v}{\|v\|} = 0.$$

Fissiamo $u \in X$ con $\|u\| = 1$, e scegliamo $v = tu$, $t \to 0^+$. Allora

$$(A-B)u = \lim_{t \to 0+} \frac{t(A-B)u}{t\|u\|} = 0.$$

Per l'arbitrarietà di u, concludiamo che $A = B$.

Definizione. Se I è un funzionale derivabile secondo Fréchet nel punto $u \in U$, la derivata (talvolta: il differenziale) di Fréchet di I in u è l'unico elemento $I'(u) \in X^*$ (talvolta: $dI(u)$) tale che

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Definizione. Se $I\colon U \to \mathbb{R}$ è derivabile secondo Fréchet in ogni punto $u \in U$, diremo che I è Fréchet-derivabile in U. La derivata di Fréchet di I è allora la mappa $I'\colon U \to X^*$ che ad $u \in U$ associa $I'(u) \in X^*$. Si tratta — in generale — di una mappa *non lineare*.

Se I' è una mappa continua da U in X^*, diremo che $I \in C^1(U)$.

Il caso hilbertiano

Se H è uno spazio di Hilbert (reale), è noto che gli elementi del duale H^* sono isometricamente identificati con vettori di H attraverso l'isomorfismo di Riesz. In particolare, un funzionale I definito su $U \subset H$ è derivabile in $u \in U$ se e solo esiste un vettore, detto d'ora in poi *gradiente* di I in u e denotato $\nabla I(u)$, tale che

$$I(u+v) = I(u) + \langle \nabla I(u) \mid v \rangle + o(\|v\|)$$

per $v \to 0$.

Proposizione. Siano I e J due funzionali derivabili nel punto $u \in X$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. Se a e b sono numeri reali, allora $aI + bJ$ è derivabile in u, e vale $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$.

2. Il prodotto IJ è derivabile in u, e vale $(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u)$.

3. Se $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$ è una curva derivabile in t_0 e $u = \gamma(t_0)$, allora la composizione $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\eta(t) = I(\gamma(t))$ è derivabile in t_0, e vale $\eta'(t_0) = I'(u)[\gamma'(t_0)]$.

4. Se $A \subset \mathbb{R}$ è un aperto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $I(u) \in A$, allora la composizione $K(u) = f(I(u))$ è definita in un intorno V di u, è derivabile in u e vale $K'(u) = f'(I(u))I'(u)$.

Dim. La prima affermazione è banale (esercizio!). Per quanto riguarda la seconda, quando $v \to 0$ in X, abbiamo

$$\begin{aligned} I(u+v)J(u+v) &= (I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|))\,(J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= I(u)J(u) + J(u)I'(u)[v] + I(u)J'(u)[v] + I'(u)[v]J'(u)[v] \\ &\quad + o(\|v\|)\,(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))\,. \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che

$$I'(u)[v]J'(u)[v] + o(\|v\|)\,(I(u) + I'(u)[v] + J(u) + J'(u)[v] + o(\|v\|))$$

è $o(\|v\|)$ per $v \to 0$. La terza affermazione è simile, infatti per $h \to 0$ in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(t_0+h) &= I(\gamma(t_0+h)) = I(\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)h + o(|h|)) \\ &= I(u) + I'(u)[\gamma'(t_0)h + o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|) \\ &= \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + I'(u)[o(|h|)] + o(\|\gamma'(t_0)h + o(|h|)\|). \end{aligned}$$

Poiché gli ultimi due addendi sono $o(|h|)$, otteniamo che

$$\eta(t_0+h) = \eta(t_0) + I'(u)[\gamma'(t_0)h] + o(|h|).$$

Infine, quando $v \to 0$ in X, si verifica come prima che

$$\begin{aligned} K(u+v) &= f(I(u+v)) = f(I(u) + I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))(I'(u)[v] + o(\|v\|)) + o(I'(u)[v] + o(\|v\|)) \\ &= f(I(u)) + f'(I(u))I'(u)[v] + o(\|v\|). \end{aligned}$$

Osservazione. È possibile introdurre il concetto di derivata per applicazioni tra due spazi di Banach X e Y. Solo in questo contesto può essere enunciata una formulazione completa della regola di derivazione delle funzioni composte.

Poiché non ne faremo uso in queste lezioni, rimandiamo al testo di Ambrosetti e Prodi per ulteriori approfondimenti.

Definizione. Sia I un funzionale definito nell'aperto U di X, e sia $u \in U$. Diremo che I è derivabile secondo Gâteaux in u se esiste un elemento $A \in X^*$ tale che

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av \tag{2}$$

per ogni $v \in X$. In tal caso, l'unico (esercizio!) elemento siffatto prende il nome di derivata secondo Gâteaux di I in u, e si denota con $I'_G(u)$ o con $d_G I(u)$.

Osserviamo che questa nuova derivata riprende la cosiddetta *derivata direzionale* già nota nell'ambito del calcolo differenziale in dimensione finita.

In particolare, ricordando i "soliti" esempi in $\mathbb{R}^2$, deduciamo che esistono funzionali (non lineari) derivabili secondo Gâteaux ma non derivabili secondo Fréchet.

Condizione sufficiente per la derivabilità secondo Fréchet

Proposizione. Supponiamo che $U \subset X$ sia un aperto, che I sia Gâteaux-derivabile in U, e che I'_G sia continua in un punto $u \in U$. Allora I è Fréchet-derivabile in u, e (ovviamente) $I'(u) = I'_G(u)$.

Omettiamo la dimostrazione, che è probabilmente stata proposta nel caso $X = \mathbb{R}^2$ nel corso di Analisi Matematica 2.

Punti critici

Definizione. Siano X uno spazio di Banach, U un aperto di X, e I un funzionale definito su U. Diremo che $u \in U$ è un punto critico di I se I è derivabile in u e

$$I'(u) = 0.$$

Più esplicitamente, questo significa che $I'(u)[v] = 0$ per ogni $v \in X$.

Se u è un punto critico di I e $I(u) = c$, diremo che u è un punto critico (di I) al livello c. Se, per qualche $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $I^{-1}(\{c\}) \subset X$ contiene almeno un elemento, diremo che c è un valore critico per I.

L'equazione $I'(u) = 0$ è nota come equazione di Eulero (o di Eulero-Lagrange) associata al funzionale I.

Esempi

Esempio 1. Ogni $A \in X^*$ è derivabile. Infatti, basta scrivere

$$A[u+v] = Au + Av$$

per dedurre che $A'(u) = A$ per qualsiasi $u \in X$.

Esempio 2. Sia X uno spazio di Banach, e sia $a \colon X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua. Denotiamo con $J \colon X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $J(u) = a(u,u)$ per ogni $u \in X$. Allora J è derivabile in X. Infatti

$$\begin{aligned} J(u+v) &= a(u+v, u+v) = a(u,u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v) \\ &= J(u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v). \end{aligned}$$

Poiché $|a(v,v)| \leq M\|v\|^2$ per l'ipotesi di continuità di a come forma bilineare, deduciamo che $a(v,v) = o(\|v\|)$ per $v \to 0$, e dunque che

$$J'(u)[v] = a(u,v) + a(v,u).$$

Esempio 3. (esercizio) Sia H uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Il funzionale $J(u) = \|u\|$ è derivabile in ogni punto $u \neq 0$, e risulta

$$\nabla J(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

Esempio 4. Sia X uno spazio di Banach, e siano I, J due funzionali derivabili in X. Definiamo

$$Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$$

sul sottoinsieme (aperto) $\{u \in X \mid J(u) \neq 0\}$. Per la Proposizione sulle regole di calcolo dimostrata sopra, possiamo affermare che Q è derivabile e che

$$Q'(u) = \frac{J(u)I'(u)[v] - I(u)J'(u)[v]}{J(u)^2}$$

per ogni $u\ inX$ tale che $J(u) \neq 0$.

Esempi in spazi concreti

Esempio 5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un insieme aperto e limitato. Definiamo i funzionali

$$I\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad I(u) = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx,$$

$$J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad J(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

$$K\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad K(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

$$L\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad L(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

Trattandosi di forme quadratiche associate a forme bilineari continue, sappiamo già che i quattro funzionali sono derivabili.

Esplicitamente, valgono le relazioni

$$\nabla I(u) = 2u$$
$$\nabla L(u) = 2u$$
$$\nabla J(u) = 2u.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$K'(u)[v] = 2\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

per ogni u, $v \in H^1(\Omega)$, ma non siamo autorizzati ad affermare che $\nabla K(u) = 2u$ (perché?)

Inversione della Convergenza Dominata

Teorema di Lebesgue. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{u_k\}_k$ una successione in $L^1(\Omega)$ tale che

1. $u_k(x) \to u(x)$ per q.o $x \in \Omega$;
2. esiste $v \in L^1(\Omega)$ tale che $|u_k(x)| \le v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni k.

Allora $u \in L^1(\Omega)$ e $u_k \to u$ nella norma di $L^1(\Omega)$.

Questo risultato fondamentale di Teoria della Misura può essere *parzialmente* invertito, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione, rimandiamo al libro di H. Brezis, Analisi funzionale.

Teorema. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\{u_k\}_k$ una successione di $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, tale che $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$. Allora esistono una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_j$ ed una funzione $v \in L^p(\Omega)$ tali che

1. $u_{k_j}(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$;
2. per ogni j, $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Questo teorema mostra che la convergenza forte in L^p implica — a meno di sottosuccessioni — l'esistenza di una funzione dominante.

Operatori di Nemitskii

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che esistano $a > 0$ e $b > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1},$$

dove $2^* = 2N/(N-2)$ è l'esponente critico di Sobolev. Definiamo

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

e consideriamo il funzionale $J\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dato da

$$J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx.$$

Proposizione. Sotto le ipotesi precedenti, J è un funzionale derivabile in $H^1(\Omega)$, e vale

$$J'(u)[v] = \int_\Omega f(u(x))v(x)\, dx$$

per ogni u, $v \in H^1(\Omega)$.

La dimostrazione non è immediata: mostriamo prima che J è Gâteaux-derivabile, e poi che la derivata di Gâteaux è continua. Come abbiamo visto sopra, ciò implica che J è Fréchet-derivabile.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o. $x \in \Omega$, risulta

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste un numero reale θ tale che $|\theta| \leq |t|$ e

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x)+\theta v(x))v(x)| \\
&\leq \left(a + b|u(x)+\theta v(x)|^{2^*-1}\right)|v(x)| \\
&\leq C\left(|v(x)| + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}\right).
\end{aligned}$$

Per Convergenza Dominata,

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u(x)+t(v(x)) - F(u(x))}{t}\, dx = \int_\Omega f(u(x))v(x)\, dx.$$

Poiché $v \mapsto \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx$ è un operatore lineare e continuo in $H^1(\Omega)$ (disuguaglianza di Hölder e di Sobolev), abbiamo individuato la derivata secondo Gâteaux di J:

$$J'_G(u)[v] = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,dx.$$

- Derivata di Fréchet

  Mostriamo che $J'_G\colon H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ è un'applicazione continua. A tal fine, sia $\{u_k\}_k$ una successione che converge a u in $H^1(\Omega)$. Per il teorema di convergenza dominata inversa, possiamo supporre che — a meno di sottosuccessioni —

  - $u_k \to u$ in $L^{2^*}(\Omega)$;
  - $u_k(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$;
  - esiste $w \in L^{2^*}(\Omega)$ tale che $|u_k(x)| \le w(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni k.

Usiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$
\begin{aligned}
|(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\le \int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))||v(x)|\,dx \\
&\le \left(\int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \times \\
&\quad \times \left(\int_\Omega |v(x)|^{2^*}\,dx\right)^{1/2^*}.
\end{aligned}
$$

La continuità di f implica $\lim_{k\to+\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))| = 0$ per q.o. $x \in \Omega$, e inoltre

$$
\begin{aligned}
|f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\le C\left(1 + |u_k(x)|^{2^*-1} + |u(x)|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\le C\left(1 + |w(x)|^{2^*-1} + |w(x)|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\le C\left(1 + |w(x)|^{2^*} + |w(x)|^{2^*}\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Per Convergenza Dominata,

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx = 0.
$$

Perciò

$$\begin{aligned}\|J'_G(u_k) - J'_G(u)\| &= \sup\{(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v] \mid v \in H^1(\Omega),\ \|v\| = 1\} \\ &\le C \left(\int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \to 0.\end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che da ogni successione $\{u_k\}_k$ convergente a u è possibile estrarre una sottosuccessione tale che $J'_G(u_k) \to J'_G(u)$ in $(H^1(\Omega))^*$. È ora un esercizio di Topologia Generale dedurre che l'intera successione $\{u_k\}_k$ gode di questa proprietà (perché il limite è indipendente dalla sottosuccessione scelta).

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

Sia dunque Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale $J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx$ è derivabile in $H^1(\Omega)$.

È possibile estendere quanto dimostrato al caso in cui Ω sia un aperto qualunque, anche illimitato. Il prezzo da pagare è un rafforzamento delle ipotesi sulla funzione f

Sia dunque Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ con frontiera regolare, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*-1}.$$

Dimostriamo che il funzionale $J(u) = \int_\Omega F(u(x))\, dx$ è derivabile in $H^1(\Omega)$.

- Derivata di Gâteaux

Per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $v \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Per il teorema di Lagrange, esiste $\theta = \theta(x)$ tale che $|\theta| \leq |t|$ e

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \right| &= |f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\
&\leq C \left(|u(x) + \theta v(x)| + |u(x) + \theta v(x)|^{2^*} \right) \\
&\leq C \left(|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*} \right) \\
&\in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Per il teorema di Lagrange, esiste $\theta = \theta(x)$ tale che $|\theta| \leq |t|$ e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)+\theta v(x))v(x)| \\
&\leq C\left(|u(x)+\theta v(x)| + |u(x)+\theta v(x)|^{2^*}\right) \\
&\leq C\left(|u(x)||v(x)| + |v(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + |v(x)|^{2^*}\right) \\
&\in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Concludiamo ancora per Convergenza Dominata.

Se poi $\{u_k\}_k$ è una successione che tende a u in $H^1(\Omega)$, a meno di sottosuccessioni possiamo anche supporre che

- $u_k(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$
- $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ e in $L^{2^*}(\Omega)$
- esistono $w_1 \in L^{2^*}(\Omega)$ e $w_2 \in L^2(\Omega)$ tali che $|u_k(x)| \leq w_i(x)$, $i = 1, 2$, per q.o. $x \in \Omega$.

Sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_1\|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2^*-1} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon,$$

dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |x| > R_\varepsilon\}$. Ora,

$$\begin{aligned} |(J'_G(u_k) - J'_G(u))[v]| &\leq \int_\Omega |f(u_k) - f(u)||v|\, dx \\ &= \int_{\Omega \cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k) - f(u)||v|\, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)||v|\, dx. \end{aligned}$$

Trattiamo separatamente gli ultimi due integrali.

Innanzitutto

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_k) - f(u)||v| \, dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|u_k| + |u| + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right) |v| \, dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |w_2||v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u||v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |w_1|^{2^*-1}|v| \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^{2^*-1}|v| \, dx \right) \\
&\leq C\|v\| \left(\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)} + \|w_1\|^{2^*-1}_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)} + \|w_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right) \\
&\leq C\|v\|\varepsilon.
\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)||v|\,dx \le C\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|.$$

Sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$, la funzione f soddisfa una maggiorazione del tipo $|f(t)| \le C(1+|t|^{2^*-1})$, e come sopra concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx = 0.$$

Ricapitolando,

$$\begin{aligned}
\|(J_G'(u_k)-J_G'(u))\| &= \sup\left\{(J_G'(u_k)-J_G'(u))[v] \mid v\in H^1(\Omega),\ \|v\|=1\right\} \\
&\le C\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_\varepsilon)} |f(u_k)-f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} + C\varepsilon \\
&= o(1)+C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$, concludiamo che $J_G'(u_K)\to J_G'(u)$.

Osservazione. La regolarità della frontiera di Ω è stata utilizzata solo *implicitamente* per garantire la validità di tutte le immersioni di Sobolev. Ne consegue che gli stessi risultati sussistono, senza alcuna ipotesi su $\partial\Omega$, se restringiamo il funzionale J al sottospazio $H_0^1(\Omega)$.

Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

dove

- Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$, $h \in C(\Omega)$.

Un problema lineare ellittico

Prenderemo a modello di applicazione un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, avente la forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

dove

- Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
- $q \in C(\Omega)$, $h \in C(\Omega)$.

Il problema (P) prende il nome di *problema di Dirichlet omogeneo*. L'aggettivo *omogeneo* si riferisce qui alla condizione *al bordo* $u = 0$ su $\partial\Omega$. Osserviamo che il problema è *lineare*.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in $\overline{\Omega}$.

- Una *soluzione classica* di (P) è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che (P) sia soddisfatto puntualmente in $\overline{\Omega}$.

  Fissiamo $v \in C^1_0(\Omega)$ e moltiplichiamo l'equazione in (P) per v. Integrando su Ω con l'ausilio del Teorema di Stokes (versione nota anche come *formula di Gauss-Green*), otteniamo che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) u v \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

  Questa uguaglianza ha senso sotto ipotesi ben più deboli di quelle finora assunte. Ad esempio gli integrali sono finiti quando u, v sono funzioni di $L^2(\Omega)$ tali che $\partial u/\partial x_i$ e $\partial v/\partial x_i$ appartengano ad $L^2(\Omega)$ per ogni indice i. La continuità di q e h è allora eccessiva, e possiamo sostituirla con $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$.

- Siano dunque $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$. Una *soluzione debole* di (P) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Siano dunque $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$. Una *soluzione debole* di (P) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Osservazione. Ogni soluzione classica è anche soluzione debole.

Infatti, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ implica $u \in H^1(\Omega)$. Per una nota proprietà degli spazi di Sobolev, poiché u è continua in $\overline{\Omega}$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$, abbiamo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sappiamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Poiché $C_0^1(\Omega)$ è un sottospazio denso di $H_0^1(\Omega)$, ad ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ facciamo corrispondere una successione $\{v_n\}_n \subset C_0^1(\Omega)$ tale che $v_n \to v$ in $H_0^1(\Omega)$.

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Facendo tendere $n \to +\infty$ nella relazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega h(x) v_n \, dx,$$

deduciamo che u è una soluzione debole di (P).

È ragionevole chiedersi se ogni soluzione debole sia anche una soluzione classica. Vediamo che cosa possiamo dire.

Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (P). *Se* è noto, per qualche motivo, che $u \in C^2(\Omega)$, allora possiamo dedurre che $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega (-\Delta u + q(x)u - h(x)) \, v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega (-\Delta u + q(x)u - h(x)) \, v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Per densità di $C_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, concludiamo che $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$ quasi ovunque, e che $u = 0$ quasi ovunque in $\partial\Omega$.

Scegliendo in particolare $v \in C_0^1(\Omega)$ nella definizione di soluzione debole, otteniamo che, per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega h(x) v \, dx.$$

Usando nel senso contrario la formula di Stokes, arriviamo alla relazione

$$\int_\Omega (-\Delta u + q(x)u - h(x)) \, v \, dx = 0$$

per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$.

Per densità di $C_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, concludiamo che $-\Delta u + q(x)u - h(x) = 0$ quasi ovunque, e che $u = 0$ quasi ovunque in $\partial\Omega$.

- Morale della favola: abbiamo bisogno di una *teoria della regolarità* per le soluzioni deboli di (P).

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x)|u|^2 \, dx - \int_\Omega h(x) u \, dx.$$

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2\,dx - \int_\Omega h(x)u\,dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx - \int_\Omega h(x)v\,dx$$

per ogni u, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x)|u|^2 \, dx - \int_\Omega h(x)u \, dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx - \int_\Omega h(x)v \, dx$$

per ogni u, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale J.

Soluzioni deboli e punti critici

Definiamo il funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)|u|^2\,dx - \int_\Omega h(x)u\,dx.$$

Segue dagli esempi sulla derivabilità che J è derivabile secondo Fréchet e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx - \int_\Omega h(x)v\,dx$$

per ogni u, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Quindi le soluzioni deboli di (P) sono esattamente i punti critici del funzionale J.

Il funzionale J è chiamato *funzionale dell'energia* associato a (P), anche se dovremmo chiamarlo più propriamente funzionale di azione o di Eulero-Lagrange.

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*.
Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*. Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $q \in L^\infty(\Omega)$ e che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Un problema non lineare

Molti modelli della Fisica Moderna conducono ad equazioni *non lineari*. Vediamo come la discussione precedente possa essere estesa ad un prototipo di equazione alle derivate parziali *semilineare*.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $q \in L^\infty(\Omega)$ e che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e tale che

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1}.$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{SP}$$

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$, e definiamo un funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$, e definiamo un funzionale $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Sappiamo che J è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega q(x) uv \, dx - \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definizione. Una soluzione debole di (SP) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sia $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$, e definiamo un funzionale $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) |u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Sappiamo che J è derivabile e che

$$J'(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega q(x) uv \, dx - \int_\Omega f(u) v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

- Ancora una volta, le soluzioni deboli di (SP) corrispondono ai punti critici del funzionale dell'energia J.

Riassunto

- Abbiamo visto che è possibile estendere il calcolo differenziale elementare (cioè quello delle funzioni di più variabili) alle funzioni di *infinite* variabili.
- Con questo linguaggio, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca opportune soluzioni di equazioni differenziali con gli zeri della derivata di opportuni funzionali (non lineari).

Prospettive

- Ci prefiggiamo ora di... andare a caccia dei punti critici, al fine di *risolvere* equazioni differenziali.
- Per far ciò, vedremo che occorrono strumenti nuovi, e che la *topologia* dello spazio di riferimento avrà un ruolo fondamentale.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Problemi (in tutti i sensi) di minimizzazione

Uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Matematica recita:

Teorema. Ogni funzione reale continua su un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ possiede massimi e minimi assoluti.

Questo enunciato continua a sussistere per funzioni continue definite su spazi metrici compatti, con dimostrazione sostanzialmente identica.

Il ruolo della compattezza nel Teorema di Weierstrass è fondamentale, come mostra il seguente controesempio, dovuto anch'esso a Weierstrass.

Esempio. Sia
$$I(u) = \int_{-1}^{1} \left| x u'(x) \right|^2 \, dx$$
definito per ogni funzione $u \in C^1([-1,1])$ a valori reali. Il problema
$$\min_{u \in X} I(u),$$
dove $X = \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$ non ha soluzioni.

Esempio. Sia

$$I(u) = \int_{-1}^{1} |xu'(x)|^2 \, dx$$

definito per ogni funzione $u \in C^1([-1,1])$ a valori reali. Il problema

$$\min_{u \in X} I(u),$$

dove $X = \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(\pm 1) = \pm 1\}$ non ha soluzioni.

Infatti, la famiglia di funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$$

mostra con un calcolo diretto che $\inf_X I = 0$. È poi evidente che $I(u) = 0$ implica $u' = 0$ in $[-1,1]$, cioè u è costante. Pertanto $u \notin X$.

Weierstrass in astratto

Teorema. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soddisfi la seguente condizione:

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$ è compatto.

Allora I raggiunge il suo estremo inferiore $\inf_M I$.

Dim. Possiamo evidentemente supporre che I non sia identicamente uguale a $+\infty$. Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione $\{\alpha_m\}_m$ strettamente decrescente verso α_0. Poniamo per brevità $K_m = K_{\alpha_m}$.

Weierstrass in astratto

Teorema. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff, e supponiamo che $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soddisfi la seguente condizione:

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $K_\alpha = \{u \in M \mid I(u) \leq \alpha\}$ è compatto.

Allora I raggiunge il suo estremo inferiore $\inf_M I$.

Dim. Possiamo evidentemente supporre che I non sia identicamente uguale a $+\infty$. Poniamo

$$\alpha_0 = \inf_M I \geq -\infty,$$

e consideriamo una successione $\{\alpha_m\}_m$ strettamente decrescente verso α_0. Poniamo per brevità $K_m = K_{\alpha_m}$. Per ipotesi, ogni K_m è compatto e non-vuoto. Inoltre $K_m \supset K_{m+1}$. Per la proprietà dell'intersezione finita, esiste

$$u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m,$$

cioè $I(u) \leq \alpha_m$ per ogni m. Facendo tendere $m \to +\infty$, concludiamo che $I(u) \leq \alpha_0$, cioè u è un minimo assoluto di I su M.

- Nell'ipotesi del Teorema precedente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{u \in M \mid I(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha$$

è aperto in M. Questo significa, per definizione, che I è una funzione *semicontinua inferiormente* su M.

- Nei casi concreti, la struttura di M può essere più ricca di quella di un mero spazio topologico. Di seguito un caso piuttosto frequente nell'Analisi Variazionale.

Teorema. Sia V uno spazio di Banach riflessivo con norma $\|\cdot\|$, e sia $M \subset V$ un sottospazio debolmente chiuso. Supponiamo che $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia un funzionale tale che

- $I(u) \to +\infty$ se $\|u\| \to +\infty$;
- per ogni $u \in M$ ed ogni successione $\{u_m\}_k$ in M tale che $u_m \rightharpoonup u$, risulta: $I(u) \leq \liminf_{m\to+\infty} I(u_m)$.

Allora I è limitato dal basso, e raggiunge il suo minimo assoluto.

Dim. Sia $\alpha_0 = \inf_M I$ e sia $\{u_m\}_m$ una successione in M tale che $I(u_m) \to \alpha_0$ per $m \to +\infty$. Per la prima ipotesi, $\{u_m\}_m$ è una successione limitata in V (altrimenti...). Il teorema di Eberlein-Smulian garantisce la convergenza debole di tale successione a qualche $u \in V$. Per ipotesi M è debolmente chiuso, sicché $u \in M$. Infine,

$$I(u) \leq \liminf_{m\to+\infty} I(u_m) = \alpha_0.$$

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, K un sottoinsieme convesso e chiuso di X, e I un funzionale convesso s.c.i. su K. Allora I è debolmente s.c.i.

Dim. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme K_α è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi I è debolmente s.c.i.

- La semicontinuità inferiore debole del precedente teorema è sovente garantita dalla *convessità* del funzionale.

Lemma. Siano X uno spazio di Banach, K un sottoinsieme convesso e chiuso di X, e I un funzionale convesso s.c.i. su K. Allora I è debolmente s.c.i.

Dim. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme K_α è convesso e chiuso. Per un noto risultato di Analisi Funzionale Lineare, tale insieme è anche debolmente chiuso, quindi I è debolmente s.c.i.

Notazione. Per rendere più espressiva la simbologia, utilizzeremo anche la scrittura

$$[I \leq \alpha] = \{u \in X \mid I(u) \leq \alpha\} \, .$$

Punti critici e topologia

Quando X è uno spazio di Banach riflessivo e I è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che I raggiunge il suo minimo assoluto α_0 consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $[I < \alpha_0] = \emptyset$;
- per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, l'insieme $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$ è non-vuoto e debolmente compatto.

Punti critici e topologia

Quando X è uno spazio di Banach riflessivo e I è un funzionale convesso, la strategia per dimostrare che I raggiunge il suo minimo assoluto α_0 consiste in due passi:

- $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $[I < \alpha_0] = \emptyset$;
- per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, l'insieme $[I \leq \alpha_0 + \varepsilon]$ è non-vuoto e debolmente compatto.

In realtà ciò indica la presenza di punti critici di I è la differenza topologica dei sottolivelli $[I \leq c]$ e $[I \leq c + \varepsilon]$.

Esempi

- Sia $I(x) = x^3 - 3x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La derivata di I si annulla in ± 1, e se poniamo $c_1 = I(1) = -2$, $c_2 = I(-1) = 2$, vediamo che

   1. se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è un intervallo del tipo $(-\infty, \alpha_1]$;
   2. se $c_1 < a_2 < c_2$, risulta $[I \leq a_2] = (-\infty, \alpha_2] \cup [\beta_2, \gamma_2]$ con $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$;
   3. se $a_3 > c_2$, risulta $[I \leq a_3] = (-\infty, \alpha_3]$.

   Nell'attraversare i valori c_1 e c_2, i sottolivelli del funzionale sono topologicamente distinti.

- Sia $I(x, y) = x^2 - y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sappiamo che 0 è l'unico valore critico di I. Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $[I \leq \varepsilon]$ è connesso, mentre $[I \leq -\varepsilon]$ ha due componenti connesse.

- Sia $I(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0,R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

- Sia $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0, R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

- Sia $I(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esistono due valori critici $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$. Si vede facilmente (tutta la geometria del funzionale è radiale!) che se $a_1 < c_1$, l'insieme $[I \leq a_1]$ è vuoto, che se $c_1 < a_2 < c_2$ l'insieme $[I \leq a_2]$ è un anello del tipo $r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2$, e infine che se $a_3 > c_2$ l'insieme $[I \leq a_3]$ è una palla $B(0,R)$. Quindi il numero di componenti connesse non cambia nell'attraversare il livello $c_2 = 0$, e tuttavia anello e palla hanno invarianti topologici diversi.

Questa idea di collegare la topologia dei sottolivelli all'esistenza di punti critici si rivela vincente, e da essa si sviluppa la cosiddetta *Teoria di Morse*.

A causa del forte legame con la Topologia Algebrica, questa teoria non rientra nei limiti del nostro corso.

Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica* $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Principi variazionali

- Come osservato, non è chiaro che una funzione limitata e semicontinua inferiormente debba raggiungere il suo minimo assoluto: si pensi alla funzione *analitica* $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Con il termine di *principi variazionali* ci si riferisce a teoremi che permettano di costruire *quasi minimi*, cioè tipicamente successioni minimizzanti per funzionali limitati e s.c.i., aventi però ulteriori proprietà.

Il principio di Ekeland

Teorema. Sia M uno spazio metrico completo con metrica d, e sia $I\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funzionale limitato dal basso, s.c.i. e non identicamente infinito. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $u \in M$ con

$$I(u) \leq \inf_M I + \varepsilon,$$

esiste un elemento $v \in M$ tale che

$$d(u, v) \leq 1, \quad I(v) < I(u),$$

e, per ogni $w \neq v$ in M,

$$I(w) > I(v) - \varepsilon d(v, w).$$

Dim. Definiamo un ordinamento su M ponendo $w \leq v$ se e solo se $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$. Poniamo $u_0 = u$, e supponiamo di aver definito u_n. Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo $u_{n+1} \in S_n$ tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

Dim. Definiamo un ordinamento su M ponendo $w \leq v$ se e solo se $I(w) + \varepsilon d(v, w) \leq I(v)$. Poniamo $u_0 = u$, e supponiamo di aver definito u_n. Sia

$$S_n = \{w \in M \mid w \leq u_n\},$$

e scegliamo $u_{n+1} \in S_n$ tale che

$$I(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1}.$$

È chiaro che $S_{n+1} \subset S_n$ poiché $u_{n+1} \leq u_n$; inoltre S_n è chiuso perché I è s.c.i.

Se $w \in S_{n+1}$, allora $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e dunque

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq I(u_{n+1}) - I(u_n) \leq \inf_{S_n} I + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} I = \frac{1}{n+1}.$$

Deduciamo che

$$\operatorname{diam} S_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}.$$

Poiché M è uno spazio completo, è noto che

$$\bigcap_n S_n = \{v\}$$

per qualche $v \in M$. In particolare $v \in S_0$, cioè $v \leq u_0 = u$. Quindi

$$I(v) \leq I(u) - \varepsilon d(u, v) \leq I(u)$$

e

$$d(u, v) \leq \varepsilon^{-1} \left(I(u) - I(v)\right) \leq \varepsilon^{-1} \left(\inf_M I + \varepsilon - \inf_M I\right) = 1.$$

Per concludere, dimostriamo che $w \leq v$ implica $w = v$. Infatti, $w \leq v$ implica $w \in u_n$ per ogni n, e dunque $w \in S_n$ per ogni n. Quindi $w = v$.

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge "quasi" il minimo, è possibile associare un punto ancora "migliore", che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge "quasi" il minimo, è possibile associare un punto ancora "migliore", che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio M e del funzionale I.

- Il senso del principio di Ekeland è che ad ogni punto in cui il funzionale raggiunge "quasi" il minimo, è possibile associare un punto ancora "migliore", che realizza anche il minimo assoluto *proprio* di

$$w \mapsto I(w) + \varepsilon d(v, w).$$

- Questo principio diventa ancora più suggestivo se si arricchisce la struttura dello spazio M e del funzionale I.

  Teorema. Siano X uno spazio di Banach, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e limitata dal basso su X. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $u \in X$ tale che $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$, esiste $v \in X$ tale che $\varphi(v) \leq \varphi(u)$,

$$|v - u| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad |\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per t e prendendo il limite per $t \to 0$, deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di h sulla sfera unitaria di X, deve essere $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Le altre proprietà di v sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

Dim. Scegliamo $M = X$, $I = \varphi$ e, per $\varepsilon > 0$ dato, scegliamo $d(x, y) = \varepsilon^{-1/2}|x - y|$ nel Teorema di Ekeland. Otteniamo un elemento $v \in X$ tale che $\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\varepsilon}|w - v|$ per ogni $w \neq v$.

Scriviamo $w = v + th$ con $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, per ottenere

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\sqrt{\varepsilon}t.$$

Dividendo per t e prendendo il limite per $t \to 0$, deduciamo

$$-\sqrt{\varepsilon} \leq \varphi'(v)[h].$$

Per l'arbitrarietà di h sulla sfera unitaria di X, deve essere $|\varphi'(v)| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Le altre proprietà di v sono ovvia conseguenza del Teorema di Ekeland.

- È ormai spontaneo "discretizzare" il parametro $\varepsilon > 0$, per costruire successioni minimizzanti con derivata "quasi" nulla.

Corollario. Siano X uno spazio di Banach, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ un funzionale limitato dal basso e derivabile in X. Allora, per ogni successione minimizzante $\{u_k\}_k$ di φ, esiste una successione minimizzante $\{v_k\}_k$ di φ tale che $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$,

$$\lim_{k\to+\infty} |u_k - v_k| = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} \|\varphi'(v_k)\| = 0.$$

Dim. Basta porre

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \\ 1/k & \text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0. \end{cases}$$