

2.7 Criteri di stabilità (Con le Matrici)

Nel capitolo precedente si è visto che per determinare la stabilità di un sistema lineare basta studiare la sua evoluzione libera (si riveda l'equazione 1.25). Ebbene, avendo ora dimostrato che la risposta nello stato in evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi di evoluzione, si è in grado di enunciare i seguenti criteri di stabilità:

Criterio di stabilità - Un sistema lineare è stabile se e solo se tutti gli autovalori della sua matrice dinamica sono a parte reale non positiva e gli eventuali autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria.

Criterio di asintotica stabilità - Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della sua matrice dinamica sono a parte reale negativa.

Attraverso l'utilizzo di un calcolatore è oggi semplice calcolare gli autovalori di una matrice,

Polinomi

anche di dimensioni elevate. Tuttavia, visto che per applicare i criteri non è necessario conoscere gli autovalori ma solo il segno della loro parte reale, vengono in aiuto dei criteri sui polinomi che sono applicabili direttamente al polinomio caratteristico.

Criterio dei coefficienti - Condizione solo necessaria affinché un polinomio abbia tutte le radici a parte reale negativa è che tutti i suoi coefficienti siano non nulli ed abbiano lo stesso segno.

Criterio per polinomi di secondo grado - Per un polinomio di secondo grado il criterio dei coefficienti è anche condizione sufficiente per avere tutte le radici a parte reale negativa.

Criterio per polinomi di terzo grado - Per i polinomi di terzo grado $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, per cui vale il criterio dei coefficienti, la condizione sufficiente è che valga la diseguaglianza $a_1a_2 > a_3a_0$.

Criterio di Routh - Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio di grado n abbia tutte le radici a parte reale negativa è che gli elementi della prima colonna della tabella di Routh, costruita con l'algoritmo sotto presentato, siano non nulli e abbiano tutti lo stesso segno.

Algoritmo per la costruzione della tabella di Routh:

- Si definisca una matrice $ROUTH$ di reali, inizializzata a valori nulli, di $n + 1$ righe e un numero di colonne n_c pari a $\frac{n+1}{2} + 1$ se n è dispari e pari a $\frac{n}{2} + 1$ se n è pari (n è il grado del polinomio).
- Le prime due righe della matrice vanno riempite in maniera alternata con i coefficienti del polinomio, anche quelli nulli, a partire da quello della potenza maggiore. Se ad esempio il polinomio è $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \dots$, si avrà:

$$ROUTH = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- Per ogni riga i , per $i = 3 \dots n + 1$
 - Se $ROUTH(i-1, 1) = 0$ il criterio non è soddisfatto.
 - Altrimenti, per la colonna $j = 1 \dots n_c - i + 2$

$$ROUTH(i, j) = -\frac{\begin{vmatrix} ROUTH(i-2, 1) & ROUTH(i-2, j+1) \\ ROUTH(i-1, 1) & ROUTH(i-1, j+1) \end{vmatrix}}{ROUTH(i-1, 1)}.$$

Nella parte esercitativa sono presentati esempi di applicazione del criterio di Routh.

Trasformate notevoli

- Impulso (ricavabile direttamente dalla definizione):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (2.11)$$

- Gradino (può essere visto come integrale dell'impulso):

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}. \quad (2.12)$$

- Rampa lineare (può essere vista come integrale del gradino):

$$\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}. \quad (2.13)$$

- Esponenziale (traslazione in s della trasformata del gradino):

$$\mathcal{L}[e^{at}1(t)] = \frac{1}{s - a}. \quad (2.14)$$

- Seno:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.15)$$

- Coseno:

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.16)$$

Transitori

Per i sistemi del primo ordine dopo un intervallo pari a 5 volte la costante di tempo, si può ritenere il transitorio esaurito.

$$G(s) = \frac{k}{1+s\tau}, \quad Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{k}{s(1+s\tau)} = \frac{k}{s} - \frac{k}{s+\frac{1}{\tau}},$$

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot 1(t).$$

Esercizio grafico

a)

1) Tempo di assettamento all' x %

2) Tempo di salita: Tempo che impiega per passare dal (10 al 90) %

3) tempo dell' emivolone \Rightarrow l'istante di tempo nel quale arriva al 50%

4) tempo della sovralungazionne percentuale: il distanza in percentuale del picco max all' uscita

$$\frac{\text{PICCO-USCITA}}{2} \cdot 100$$

b) Determinare quale sistema possa aver generato una certa risposta X:

1) Controllore che l'uscita corrisponda

esempio: $u(t) = 1 \cdot \Gamma(t)$

Dal grafico ho che $y(t) = 3$

allora $G(0) \cdot \bar{u} = y = 3$

2) Controllore che il tempo di assettamento e il periodo corrispondano ai valori del grafico

a) Prendo il denominatore e ricavo la Δ

b) Trovare gli autovetori, le radici del denominatore

$$\lambda = \alpha \pm j\omega$$

TEMPO DI ASSESTAMENTO

$t.a. = |\alpha| \cdot 5$

PERIODO (OGNI QUANTO SI RIFRE
UN DATO NEL GRAFICO)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

BODE

$$G(j\omega) = \frac{\frac{K}{j\omega}}{\frac{\prod_p (1 + \frac{j\omega}{\omega_p})}{\prod_z (1 + \frac{j\omega}{\omega_z})}} \cdot \frac{\prod_z (1 + \sum_{m=1}^z \frac{j\omega}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_m^2} \omega^2)}{\prod_p (1 + \sum_{m=1}^p \frac{j\omega}{\omega_m} + \frac{1}{\omega_m^2} \omega^2)}$$

Termino monomio

$$\begin{aligned} \frac{K}{j\omega} &\rightarrow \text{Pendente iniziale: } -20 \text{ dB} \\ &\rightarrow \text{Fase iniziale: } -9 \frac{\pi}{2} \\ &\rightarrow \text{Intersezione: } \sqrt[3]{K} \end{aligned}$$

quando non ho intersezione il || parte da $20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(K)$

e la L costante da 0

Termino Binomio

$$1 + \frac{j\omega}{\omega_z}$$

- $\nearrow \omega_z > 0$ ||: ↑
- $\searrow \omega_z < 0$ L: ↑↓
- L: ↓↑

$$1 + \frac{j\omega}{\omega_p}$$

- $\nearrow \omega_p > 0$ ||: ↓
- $\searrow \omega_p < 0$ L: ↓↑
- L: ↑↓

Diagramma polare

- Studio i limiti guardando il diagramma polare per trovare un diagramma qualitativo dello $G(j\omega)$

- $\lim_{w \rightarrow 0^+} |G(j\omega)|$

- $\lim_{w \rightarrow +\infty} |G(j\omega)|$

- $\lim_{w \rightarrow 0} \angle G(j\omega)$

- $\lim_{w \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega)$

Del diagramma polare dobbiamo convertire i dB in numeri reali

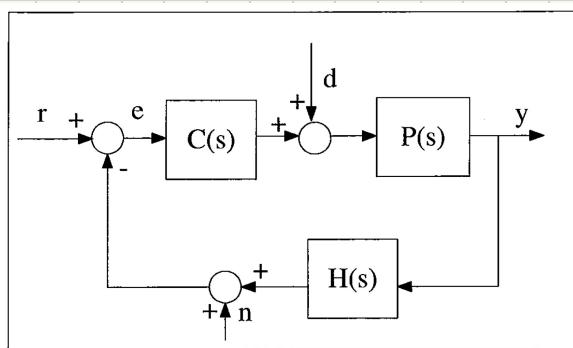
$$+\infty \text{ im } \text{dB} = +\infty \text{ im } \mathbb{R}$$

$$-\infty \text{ im } \text{dB} = 0 \text{ im } \mathbb{R}$$

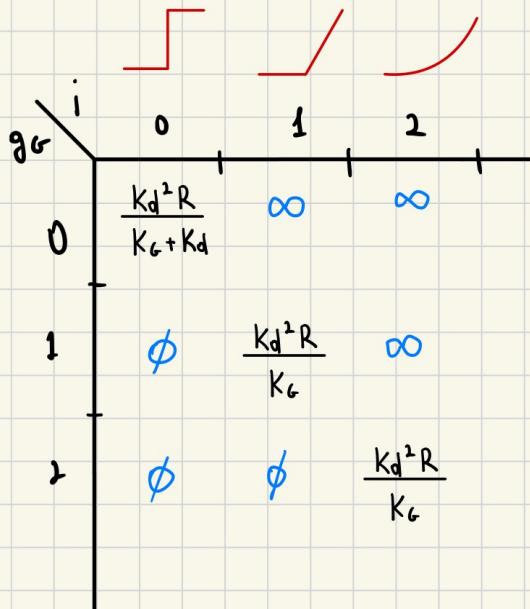
Controllo digitale

- f.d.t. della catena di andata $G(s) = C(s)P(s)$;
- f.d.t. di anello (aperto) $F(s) = C(s)P(s)H(s) = G(s)H(s)$;
- f.d.t. a ciclo chiuso $W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+F(s)}$;
- f.d.t. rispetto al disturbo d $W_d(s) = \frac{P(s)}{1+F(s)}$;

$$W_m(\omega) = -W(\omega)$$

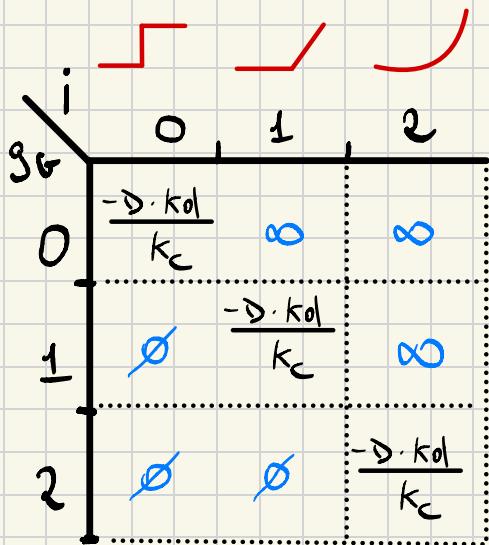


INGRESSO RISPETTO AL RIFERIMENTO



$i \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \text{gradino} \\ 1 \rightarrow \text{rampa lineare} \\ 2 \rightarrow \text{rampa parabolica} \end{array} \right.$

$g_G \left\{ \begin{array}{l} \text{numeri di poli} \\ \text{nell'origine} \\ (\text{CATENA D'ANDATA}) \end{array} \right.$



INGRESSO ASIETTO AL DISTURBO

$i \begin{cases} 0 \rightarrow \text{gradino} \\ 1 \rightarrow \text{rampa lineare} \\ 2 \rightarrow \text{rampa parabolica} \end{cases}$

$g_G \begin{cases} \text{numero di poli} \\ \text{nella origine} \\ (\text{corona di ondole}) \end{cases}$

Criterio di Nyquist

- Traccia il diagramma polare di $F(j\omega)$
- Se passa per il punto critico $(-1, 0)$, $|W(s)| \neq \text{as. stabile}$

1) Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità a ciclo chiuso per sistemi in retroazione negativa:

il numero di giri im senso antiorario deve essere uguale al numero di poli a parte reale positiva

$$\text{N} = P_p$$

Criterio di Bode

Si noti che, essendo il diagramma polare una rappresentazione della $F(j\omega)$, il criterio di Nyquist può essere applicato, in linea di principio, anche direttamente ai diagrammi di Bode. Ciò è certamente conveniente se ci si trova in una situazione abbastanza comune:

- la $F(s)$ non ha poli a parte reale positiva;
- il suo guadagno è positivo;
- il diagramma dei moduli attraversa una sola volta, dall'alto verso il basso, l'asse delle ascisse (0dB).

In questo caso il criterio di Bode afferma che per la stabilità asintotica a ciclo chiuso basta verificare che, quando $|F(j\omega)| = 1$ (0dB), il ritardo di fase sia inferiore a π .

- $F(j\omega)$ non ha P_p

- $K_F > 0$

- $W_C = 1$

Allora :

$$\angle F(j\omega) > -\pi$$

oppure

$$-W_{\pi} = 1, |F(j\omega_{\pi})|_{dB} < 0_{dB}$$

Margine di ampiezza e di fase

Il margine di ampiezza è definito come

$$m_a = \frac{1}{|F(j\omega_n)|_{dB}} = -|F(j\omega_n)|_{dB} \quad (6.22)$$

dove ω_n è la pulsazione in cui $|F| = -\pi$. È facile verificare che per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso il margine di ampiezza dev'essere positivo.

Il margine di fase è definito come

$$m_\phi = \pi + |F(j\omega_c)| \quad (6.23)$$

dove ω_c è la già definita *pulsazione critica* o *pulsazione di attraversamento* o di crossover, per cui $|F| = 1 = 0dB$. È facile verificare che per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso il margine di fase dev'essere positivo.

1) Dato il sistema dinamico a tempo continuo non lineare (si omette la dipendenza dal tempo per compattezza di notazione)

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + x_1 + x_2 + u + 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u$$

$$y = \frac{1}{x_1} + \ln(x_2 + 1) + u^2$$

linearizzarlo intorno ai punti di equilibrio per $u = -1$.

1) Ricercare i punti di equilibrio sotto impresso u

Impongo le derivate = 0 e sostituisco $u = -1$

2) Linearizzo il sistema: calcolo le derivate parziali di x e u per le funzioni g e g'

3) Sostituisco i punti di equilibrio e la u , unisco le funzioni

Trasformate notevoli

- Impulso discreto:

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$

- Gradino discreto:

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}$$

- Rampa lineare discreta:

$$\mathcal{Z}[k1(k)] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- Esponenziale discreto:

$$\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \frac{z}{z-a}$$

- Seno discreto:

$$\mathcal{Z}[\sin(\theta k)1(k)] = \frac{z \sin(\theta)}{z^2 - 2 \cos(\theta)z + 1}$$

- Coseno discreto:

$$\mathcal{Z}[\cos(\theta k)1(k)] = \frac{z[z - \cos(\theta)]}{z^2 - 2 \cos(\theta)z + 1}$$

Sia data, quindi, una funzione di traferimento espressa come rapporto di polinomi, con polinomio monico al denominatore:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^\nu + a_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (3.20)$$

Una possibile rappresentazione nello spazio di stato, nota come *forma canonica di controllo*, è la seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{\nu-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [b_0 - a_0 b_\nu \ b_1 - a_1 b_\nu \ b_2 - a_2 b_\nu \ \dots \ b_{\nu-1} - a_{\nu-1} b_\nu] x(t) + [b_\nu] u(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$