BEVIS OG ARGUMENTASJON

SIMON FOLDVIK

1. SEPTEMBER 2020
(OPPDATERT 5. NOVEMBER 2020)

SAMMENDRAG. Dette notatet er skrevet som et forelesningsnotat for grublegruppen i emnet MAT1100 og utgjør en introduksjon til grunnleggende logiske emner for begynnerstudenter i matematiske fag ved Universitetet i Oslo. Hensikten er å introdusere begynnerstudenten til korrekt matematisk tankegang og samtidig reise filosofiske spørsmål knyttet til matematikkens grunnlag, som forhåpentligvis vil inspirere til videre undersøkelse.

INNHOLD

1. INNLEDNINGSVIS

Matematikkundervisningen starter *in medias res*. Det er ikke satt av plass til behandling av de grunnleggende logiske emnene som diskuteres i dette notatet i den ordinære matematikkundervisningen før det *frivillige* kurset MAT1140, som er tiltenkt matematikkstudenter i sitt tredje semester. Til tross for dette forventes det allerede i første semester at studentene skal mestre argumentasjon med dobbelt kvantifiserte påstander (ϵ-δ) og andre formelle subtiliteter.

I den forbindelse er det vesentlig å påpeke at det per forfatterens erfaring gjennom åtte semestre som seminarunderviser ved Matematisk institutt er slik at de færreste begynnerstudenter – hvis noen – kan gjøre rede for hva som utgjør korrekt matematisk argumentasjon, skille bevis fra vag synsing eller å konvertere egne matematiske intuisjoner til formelt korrekt matematikk.

Som svømmeinstruktur ved Matematisk institutt ønsker jeg å bidra til å ta skritt i retning av å korrigere den uheldige situasjonen. Man kan jo undre seg over om ikke det finnes bedre måter å bedrive svømmeundervisning på enn å kaste barn på sjøen uten redningsvest?

1.1. **Noen teoremer.** Matematikere har snart i århundrer snakket om Greens teorem for randintegraler av vektorfelt i planet. La oss nå diskutere Grønns teorem.

Matematikeren i meg retter alltid et oppmerksomt øre mot enhver som hevder at de har et teorem. I dette tilfellet er det snakk om Atle Grønn, professor i russisk ved Universitetet i Oslo, som i sin bok *Sjakken eller livet* hevder følgende:[1]

Grønns teorem. *Det er ikke mulig å lære sjakk som treåring.*

Beviset skal visstnok finnes i boken, men det følger at man ikke kan lære treåringer å spille sjakk.

Jeg har også et teorem: man kan ikke lære noen matematikk. Men kanskje kan man legge til rette for læring ved å stille gode spørsmål og lede vei opp det matematiske fjellet?

1.2. **Organisering av notatet.** Som nevnt i sammendraget er notatet ment som en introduksjon til grunnleggende logiske emner for begynnerstudenter i matematiske fag. Det gjøres ingen forsøk på å være altomfattende, og opphavet som forelesningsnotat forklarer mangelen på enkelte definisjoner av konsepter som benyttes fritt.

Hovedfokuset er å belyse visse aspekter ved aksiomatisk-deduktiv metode som viser seg særdeles mangelfull i matematikkundervisningen på lavere nivå. Blant annet diskuteres:

> aksiom/resonneringsantakelse, deduksjonsregel, deduksjonssystem/resonneringskontekst, bevis, tautologi, kvantorer, idiomatiske bevisformer for visse typer påstander, samt noen filosofiske og lingvistiske subtiliteter som oppstår på veien.

1.3. **Forslag til videre arbeid.** Basert på mine åtte semestre som seminarunderviser ved Matematisk institutt, hvor jeg til sammen har rettet mange hundre besvarelser av obligatoriske innleveringsoppgaver skrevet av begynnerstudenter, har jeg enda et teorem: begynnerstudenter kan ikke skrive matematikk. La meg derfor oppfordre til videreutvikling av undervisningstilbudet med å rette fokus mot *skriving i matematiske fag.*

Ikke bare er skriving et verktøy for læring; det er også blant ferdighetene studentenes akademiske og profesjonelle suksess hviler sterkest på.

Det menes ikke med dette å undergrave nytten av emnet Mat2000. Problemet her er at det ikke legges opp til at Mat2000 skal avlegges før studentene er i ferd med å *avslutte* sitt studieløp på bachelornivå, men behovet

[1] Grønn, Atle: *Sjakken eller livet*, s. 74. Cappelen Damm, Oslo, 2017.

for matematisk – og i videre forstand, akademisk – skriving er der allerede fra dag én.

De senere årene har undertegnede i samarbeid med førstelektor i matematikk, Inger Christin Borge, utviklet foredrag om skriving i matematiske fag for begynnerstudenter. Disse foredragene har vi holdt for begynnerstudenter i emnene MAT1100U og MAT1110, og mener å observere at dette har positiv effekt. Vi stiller oss åpne til å videreutvikle dette.

1.4. **Takk.** Jeg ønsker å utrette en takk til Snorre H. Christiansen for stimulerende samtaler om matematikk og filosofi, og for hans deling av LaTeX-koden som ligger til grunne for

den typografiske fremstillingen av opprettede resonneringskontekster

som benyttes rundt om i notatet.

Som videre lesning anbefales hans påbegynte bok *Spill i grenseland*, som endelig ser ut til å nå massene. Måtte den lykkes i å spre rasjonalitet, matematikkglede og inspirasjon.

2. Bevis og Resonneringskontekst

2.1. **Bevis.** La Q være en påstand. Noe forenklet kan man si at et *bevis* for Q er en sekvens $P_1, P_2, \ldots, P_n$ av påstander slik at $P_n = Q$, og at for hver påstand P_k i denne sekvensen har vi at:

(1) P_k er et *aksiom*,[2] eller
(2) P_k er en *tautologi*,[3] eller
(3) P_k følger ved å anvende et *deduksjonsprinsipp* på noen av de foregående påstandene $P_1, \ldots, P_{k-1}$.

Med andre ord, et bevis for Q er en sekvens $P_1, P_2, \ldots, P_n$ av påstander som ender med Q som konklusjon ($P_n = Q$), og hvor hver påstand enten er et aksiom, en tautologi, eller følger ved å anvende et deduksjonsprinsipp på noen av de foregående leddene $P_1, \ldots, P_{k-1}$ i argumentasjonskjeden.

Det er viktig at vi er enige om hvilke deduksjonsprinsipper vi tillater oss å bruke og hva aksiomene våre er. Til sammen kan vi si at disse komponentene utgjør en *resonneringskontekst.*

Det er filosofisk problematisk å tenke seg at det finnes en ytre kilde av sannhet man kan vise til for å validere eller forkaste et gitt aksiom som henholdsvis sant eller usant, men det er heller ikke nødvendig. Det vesentlige ved aksiomatisk-deduktiv metode er å undersøke hvilke slutninger som kan trekkes når en samling aksiomer først er adoptert (som sanne), og ikke om aksiomene skulle besitte en form for «absolutt sannhet», hva enn det skulle innebære.

[2] Et synonym for aksiom kan være *resonneringsantakelse.*

[3] En tautologi er en påstand som er sann kun i kraft av sin logiske struktur. Eksempelvis er $P \vee (\neg P)$ en tautologi for alle påstander P, da denne påstanden er sann kun i kraft av sin logiske struktur, og uavhengig av sannhetsverdien til P.

Eksempel 1. *Modus ponens* er et eksempel på et deduksjonsprinsipp. Det sier at dersom P og Q er påstander, kan man konkludere Q dersom man vet

(1) P,

(2) $P \implies Q$.

Man kan oppsummere et slikt deduksjonsprinsipp ved å skrive

$$\{P, P \implies Q\} \models Q.$$

Denne skrivemåten er rent typografisk, hvor tanken er at $\{P, P \implies Q\}$ er en mengde[a] bestående av antakelser, og symbolet '$\models$' betyr hva vi kan kalle «semantisk konklusjon»: fra det som står på venstre side kan vi konkludere det som står på høyre side.

[a]Her benyttes ordet «mengde» i en annen forstand en mengdene det er snakk om i mengdelære. I mengdelære viser ordet mengde til et objekt i «universet» som er under diskurs, og en påstand er typisk ikke et objekt i dette universet, men heller en *språklig konstruksjon* som har til hensikt å si noe om objektene som er under diskurs. I matematisk logikk tukler man tilsynelatende med denne distinksjonen ved at man tenker seg at universet under diskurs består av påstander, og at man derfor kan ha mengder bestående av slike. Hensikten med dette er å kunne anvende matematisk metode på påstander betraktet som objekter, for å eksempelvis kunne si noe om eksistens av bevis, nå betraktet som et objekt.

Det er viktig å merke seg at en *antakelse* også kan være å betrakte som et aksiom. Ved å innføre en antakelse, oppretter man en ny resonneringskontekst hvor denne antakelsen er å betrakte som et aksiom som kan benyttes fritt.

Eksempel 2. La oss ta følgende som aksiomer:

(A1) Alle katter er svarte.

(A2) Rusken er en katt.

Da vil følgende argumentkjede utgjøre et bevis for at Rusken er svart:

(P_1) Alle katter er svarte. (A1)

(P_2) Rusken er en katt. (A2)

(P_3) Rusken er svart. (*Universell instansiering* på P_1 og P_2.)

Se Seksjon 2.4 for mer om universell instansiering, men vær klar på at konklusjonen om at Rusken er svart kun lar seg trekke innenfor resonneringskonteksten utspent av aksiomene (A1) og (A2) sammen med deduksjonsprinsippet universell instansiering. Innenfor en resonneringskontekst hvor universell instansiering ikke er tillat, kan man altså ikke innføre påstanden P_3 i beviset ovenfor, og innenfor en slik kontekst kan man derfor ikke slutte at Rusken er svart ut ifra de oppstilte aksiomene.

2.2. **Implikasjon.** La P og Q være påstander. Da kan vi danne oss en påstand $P \implies Q$ med *sannhetsverditabell* gitt ved Tabell 1.

P	Q	$P \implies Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

TABELL 1. Sannhetsverditabell for implikasjon.

Et bevis for påstander av typen $P \implies Q$ strukturerers som regel som følger:

(1) Man antar P. Dette innebærer at man danner seg en ny resonneringskontekst med P som aksiom (resonneringsantakelse), og tillater seg innenfor denne konteksten å resonnere som om P er sann.

Det er viktig å merke seg at det er kun inne i denne «nøstede» resonneringskonteksten at vi kan behandle P som en sann påstand, og at så fort vi trer ut av denne konteksten ikke lenger kan si noe om P.

(2) Med P som aksiom/antakelse produserer man innenfor den nye resonneringskonteksten et bevis for Q.

(3) Man trer ut av den ovenfornevnte resonneringskonteksten, hvor P er et aksiom, og konkluderer i den opprinnelige resonneringskonteksten med påstanden $P \implies Q$.

Å danne seg nye resonneringskontekster med midlertidig adoptering av nye aksiomer kan skisseres som følger:

Anta P: vi danner her en ny resonneringskontekst hvor P er et aksiom.
Vi produserer innenfor denne konteksten et bevis for Q:
P_1,
P_2,
$\ldots$,
Q.

Vi trer ut av resonneringskonteksten og konkluderer $P \implies Q$.

Eksempel 3. La n være et heltall. La P være påstanden om at n er et partall. La Q være påstanden om at n^2 er et partall. Vi skal vise (at) $P \implies Q$.

Bevis. Vi følger bevismønsteret skissert ovenfor.

Anta at n er et partall.	Anta P.
La k være et heltall slik at $n = 2k$.	Definisjon av partall.
Da er $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et partall.	Q.

Vi konkluderer $P \implies Q$. ■

Hvordan viser man så *negasjonen* $\neg(P \implies Q)$ av $P \implies Q$? Korrekt intuisjon dikterer at P *ikke* impliserer Q dersom P kan være sann uten at Q er det, altså hvis og bare hvis $P \wedge (\neg Q)$, som bekreftes ved følgende sannhetsverditabell:

P	Q	$\neg(P \implies Q)$	$P \wedge (\neg Q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

TABELL 2. Påstandene $\neg(P \implies Q)$ og $P \wedge (\neg Q)$ er *logisk ekvivalente.*

I praksis betyr den logiske ekvivalensen mellom påstandene $\neg(P \implies Q)$ og $P \wedge (\neg Q)$ at for å vise at P *ikke* impliserer Q, er det tilstrekkelig å vise at P er oppfylt uten at Q er det.

Avslutningsvis er det verdt å merke seg at $\neg(P \wedge (\neg Q))$ er logisk ekvivalent med påstanden $(\neg P) \vee Q$ (hvorfor?). Det følger at $P \implies Q$ er logisk ekvivalent med $(\neg P) \vee Q$. Nå er det lettere å overbevise seg om hva sannhetsverditabellen til sistnevnte skal være, og i lys av dette kan Tabell 1 opptre noe mer fornuftig.

2.3. **Kvantorer.** Påstander som sier noe om *alle* eller om *eksistens* av objekter sies å være *kvantifiserte* påstander. Vi har to *kvantorer*:

($\forall$) Den *universelle* kvantoren $\forall$: denne kvantifiserer over alle objekter i universet under diskurs og betegnes med symbolet '$\forall$'.

Dersom man eksempelvis for hvert objekt x har en påstand $P(x)$ om x,[4] kan man danne påstanden[5]

$$\forall x \; P(x),$$

som leses «for alle x er det slik at $P(x)$».

($\exists$) Den *eksistensielle* kvantoren $\exists$: denne uttrykker eksistens av et objekt med en gitt egenskap i universet under diskurs og betegnes med symbolet '$\exists$'.

Dersom man eksempelvis for hvert objekt x har en påstand $P(x)$ om x, kan man danne påstanden[6]

$$\exists x \; P(x),$$

som leses «det eksisterer x slik at $P(x)$».

2.4. **Universell instansiering.** La oss fiksere et univers av objekter som vi kvantifiserer over. Anta at vi for hvert objekt x har en påstand $P(x)$ om x. Dersom a er et objekt og vi vet

$$\forall x \; P(x),$$

kan vi konkludere $P(a)$. Dette deduksjonsprinsippet kalles *universell instansiering* (engelsk: *universal instantiation*), og med ord sier det at

> dersom $P(x)$ er sann for alle objekter x og a er et objekt, kan vi konkludere at $P(a)$ også er sann.

I Eksempel 2 ovenfor kan vi tenke oss at universet under diskurs består av katter. Dersom x er en katt, kan påstanden $P(x)$ om x uttrykke at x er en svart katt. Påstanden $\forall x \; P(x)$ uttrykker da at alle katter er svarte, som i Eksempel 2 tas som et aksiom. Dersom a betegner Rusken, som er en katt, kan vi ved universell instansiering konkludere $P(a)$, altså at Rusken er svart.

---

[4]Man sier at P er et *predikat* med *fri variabel* x.

[5]Det kan argumenteres for at det er mer presist å skrive $(\forall x)(P)$ eller $\forall x P$, men denne skrivemåten ville ha tilføyd lite i det som her diskuteres sammenliknet med det mer lesbare $\forall x \; P(x)$.

[6]Også her kan det argumenteres for at det er mer presist å skrive $(\exists x)(P)$ eller $\exists x P$, kontra det mer lesbare $\exists x \; P(x)$.

2.5. **En digresjon.** Er deduksjonsprinsippet universell instansiering *sant*? I så fall, hvordan kan man påvise det? La oss anta at det er mulig, og la $\mathscr{B}$ betegne hva enn vi har benyttet for å bevise sannhet av universell instansiering. Er $\mathscr{B}$ sant? I så fall, hvordan kan man påvise det? Ad infinitum.

Spørsmålet som reises i forrige avsnitt – om resonneringens oppstandelse og rasjonalitetens «big bang» – kan for enkelte mennesker bli så altomfattende og vekke følelser som fører til at de dedikerer store deler av sine liv til å finne svar på dette. Forfatteren ekskluderes ikke.

Når det å stille spørsmål av typen «*men hvordan kan man begrunne dét?*» ser ut til å danne en uendelig kjede

$$\text{opprinnelig spørsmål } \leftarrow \mathscr{B}_1 \leftarrow \mathscr{B}_2 \leftarrow \mathscr{B}_3 \leftarrow \cdots$$

av mer og mer fundamentale prinsipper som til syvende og sist skal forklare det hele, kan man lure på om den noen gang stopper ved et svar som vil gi oss ro i sjelen? Det reiser også spørsmål om absolutt sannhet.

Kanskje konvergerer den til det resonnerende *selv*? Skal vi følge Descartes, er den første sannhet at hver gang disse spørsmålene reises i din ånd, er det hevet over enhver tvil at det på dette øyeblikket eksisterer et resonnerende selv. Men å finne veien fra cogitosetningen til en rettferdiggjøring av universell instansiering som et gyldig deduksjonsprinsipp er ikke trivielt, så la oss heller skissere en tilnærming til et svar på mer pragmatisk vis.

La oss ta det for gitt at vi er resonnerende selv.[7] Et selv kommer med en virkelighetsoppfatning og evne til selvbeskuelse, altså bevissthet over egen eksistens. Det er fristende å hevde at mulighetsbetingelser for sistnevnte er et koherent sett med åndsevner som selvet selv supplerer. Disse åndsevnene kan vi også omtale som *primærkonsepter*: konsepter eller mulighetsbetingelser som må ligge til grunne for selvets virkelighetsoppfatning.

Når vi har overbevist oss om at vi er resonnerende selv, kan vi i andre omgang ta stilling til om universell instansiering er et gyldig deduksjonsprinsipp. Er det sant?

Som nevnt i Seksjon 2.1 kan det være problematisk å identifisere en ytre kilde av sannhet man kan vise til for å validere eller forkaste et aksiom eller et deduksjonsprinsipp som henholdsvis sant eller usant, og at dette heller ikke er nødvendig. De vesentlige spørsmålene er heller:

(1) Kan vi inngå konsensus om å trekke slutninger ut ifra dette mønsteret?
(2) Appellerer prinsippet til vår fornuft?

Dersom svaret på førstnevnte er *ja* og på sistnevnte *nei*, er det fremdeles mulig å undersøke hvilke slutninger som *ville ha fulgt* om vi tillot oss å resonnere etter det gitte mønsteret, uten å komme i konflikt med obskure og vage referanser til kosmiske tilstander.

Det overlates til leseren å vurdere hvorvidt denne måten å «besvare» et spørsmål ved å unngå at det i det hele tatt reises er tilfredsstillende eller ikke.

[7] Tviler du på det?

2.6. **Universell generalisering.** La antakelsene være som i Seksjon 2.4.

> Dersom vi ved å anta at a er et objekt kan konkludere med at $P(a)$ er sann, har vi lov til å slutte at påstanden $\forall x\, P(x)$ også er sann.

Dette deduksjonsprinsippet kalles *universell generalisering* (engelsk: *universal generalization*), og med ord sier det at dersom vi kan vise at $P(a)$ er sann for et vilkårlig (hvilket som helst) objekt a, så er $P(x)$ sann for alle objekter x.

Dette er et *ekstremt* viktig resonneringsprinsipp, da det er universell generalisering som er hovedverktøyet for å slutte universelt kvantifiserte påstander.

Et bevis for en universelt kvantifisert påstand ved hjelp av universell generalisering struktureres ofte som følger:

Anta at a er et objekt.[a]
Med a som navngitt objekt, danner vi et bevis for påstanden $P(a)$:
P_1,
P_2,
$\ldots$,
$P(a)$.

[a]På samme måte som i Seksjon 2.2, danner vi oss her en ny resonneringskontekst hvor symbolet 'a' er bundet til å referere til objektet a i universet under diskurs. Det er viktig å merke seg at så fort vi trer ut av denne resonneringskonteksten, kan vi ikke lenger benytte dette symbolet for å referere til a: *navngivelse* av objekter overlever ikke ved uttreden av en nøstet resonneringskontekst.

Vi trer ut av resonneringskonteksten ovenfor og konkluderer

$$\forall x\, P(x)$$

ved universell generalisering.

Vi tar med et eksempel på hvordan universell generalisering kan opptre i et bevis. I mengdelære forutsetter man at *alle* objekter i universet under diskurs er mengder, hvor begrepet «mengde» er et *primærkonsept* hvis meningsinnhold er supplert av selvet; aksiomene for mengdelære forteller oss hvilke operasjoner vi kan utføre på mengder. I mengdeuniverset er altså «objekt» og «mengde» synonymer, og i dette universet eksisterer det[8] en mengde T slik at

$$\forall x\, \neg(x \in T)$$

er en sann påstand. Denne mengden kan ved de andre aksiomene for mengdelære vises å være unik, vi omtaler den som *den tomme mengden*, og betegner den med $\emptyset$. Med andre ord, for alle mengder x er det slik at $x \notin \emptyset$. Videre sier man at dersom x og y er to mengder, så er x en *delmengde* av y, betegnet $x \subseteq y$, dersom følgende påstand er sann:

$$\forall z\, \big((z \in x) \implies (z \in y)\big).$$

[8]Dette er et mengdeteoretisk aksiom.

Eksempel 4. Følgende påstand om mengder er sann:

$$\forall x\ (\emptyset \subseteq x). \tag{2.1}$$

Skriver man ut definisjonen av delmengde i (2.1), får man påstanden

$$\forall x\ \left[\forall y\ \big((y \in \emptyset) \implies (y \in x)\big)\right], \tag{2.2}$$

og det er altså dette vi må vise for å bevise (2.1). Legg spesielt merke til at det forekommer to universelle kvantorer i (2.2) og at det derfor på naturlig vis benyttes universell generalisering ved to anledninger i følgende bevis.

Bevis 1. Vi viser (2.2) ved universell generalisering.

La a være en mengde. (Navngivelse.)

La b være en mengde.	Navngivelse.
$\neg(b \in \emptyset)$.	Universell instansiering.[a]
$\neg(b \in \emptyset) \implies \big((b \in \emptyset) \implies (b \in a)\big)$.	Tautologi.[b]
$(b \in \emptyset) \implies (b \in a)$.	Modus ponens.

[a] Vi har mengden $\emptyset$ og påstanden $\forall x\ \neg(x \in \emptyset)$ til disposisjon. Ettersom b er en mengde (et objekt), kan vi ved universell instansiering konkludere $\neg(b \in \emptyset)$.
[b] Påstanden $(\neg P) \implies (P \implies Q)$ er sann uavhengig av sannhetsverdiene til P og Q; lag en sannhetsverditabell!

$\forall y\ \big((y \in \emptyset) \implies (y \in a)\big)$. (Universell generalisering.)

$\forall x\ \left[\forall y\ \big((y \in \emptyset) \implies (y \in x)\big)\right]$. (Universell generalisering.) ■

Til tross for at det foregående beviset lykkes i å fremheve den logiske strukturen i argumentasjonen, er det i praksis mindre vanlig å føre bevis på denne måten. I første iterasjon kan det forkortes på følgende vis:

Bevis 2. Vi skal vise (2.2).

La a være en mengde.
Vi skal vise

$$\forall y\ \big((y \in \emptyset) \implies (y \in a)\big).$$

La b være en mengde.
Påstanden $b \in \emptyset$ er usann.
Påstanden $(b \in \emptyset) \implies (b \in a)$ er sann ved Tabell 1.

Vi konkluderer

$$\forall y\ \big((y \in \emptyset) \implies (y \in a)\big).$$

ved universell generalisering.

Vi konkluderer (2.2) ved universell generalisering. ■

I andre iterasjon er det utbredt praksis å skrive beviset på følgende vis:

Bevis 3. Vi skal vise (2.2).
La a være en mengde. Vi skal vise at $\emptyset \subseteq a$.
Anta derfor at $b \in \emptyset$. Da må også $b \in a$,[c] og siden b var *vilkårlig* valgt, følger det at $y \in a$ for alle $y \in \emptyset$, altså at $\emptyset \subseteq a$.
Ettersom a var vilkårlig valgt, følger det på tilsvarende vis at $\emptyset \subseteq x$ for alle mengder x. ■

Kunsten er å kunne ta stilling til *Bevis 3*, som inneholder ideen, og fra det kunne reprodusere *Bevis 1* ved behov.

[c] Hvorfor?

2.7. **Eksistensiell instansiering.** På tilsvarende vis som at vi har deduksjonsregler for universelt kvantifiserte påstander, har vi to fundamentale deduksjonsregler for *eksistensielt* kvantifiserte påstander.

Vi beskuer et univers av objekter og har en påstand $P(x)$ for hvert objekt x i dette universet. Deduksjonsregelen *eksistensiell instansiering* tar følgende form:

> dersom vi vet at det eksisterer et objekt x slik at $P(x)$ er oppfylt, kan vi navngi et objekt a slik at $P(a)$.

Med andre ord, fra påstanden $\exists x\ P(x)$ kan vi navngi/fiksere et objekt a slik at $P(a)$ er oppfylt. Når dette først er gjort, kan man innenfor den aktuelle resonneringskonteksten referere til objektet a ved navn og fritt benytte påstanden $P(a)$ om dette objektet.

2.8. **Eksistensiell generalisering.** La situasjonen være som i Seksjon 2.7. Deduksjonsprinsippet *eksistensiell generalisering* tar følgende form:

> dersom a er et objekt slik at $P(a)$ er sann, kan vi konkludere at det finnes et objekt x slik at $P(x)$ er sann.

Med andre ord, dersom vi har påvist eksistensen av et objekt a som oppfyller P, kan vi slutte påstanden $\exists x\ P(x)$ om at det finnes et objekt som oppfyller P.

Bevis ved eksistensiell generalisering struktureres gjerne som følger.

Fiksér et objekt a.
Produsér et bevis for at a oppfyller P:
P_1,
P_2,
$\ldots$,
$P(a)$.

Konkludér $\exists x\ P(x)$, altså at det finnes et objekt som oppfyller P.

Eksempel 5. La universet under diskurs bestå av heltall. For et heltall x, la $P(x)$ være påstanden om at x er et partall. Vi skal vise $\exists x\ P(x)$, altså at det finnes et partall.

Bevis. Trivielt:

2 er et partall.	$P(2)$. Bevis?
Derfor finnes det et partall.	$\exists x\ P(x)$ ved eksistensiell generalisering.

■

Bemerkning. Begynnerstudenten som uttrykker latter ved Eksempel 5 skal se hvem som ler sist når det skal påvises eksistens av $\delta > 0$.

2.9. **Om navngivelse ved hevding av kvantifiserte påstander.** Å hevde eksistens innebærer ikke å navngi. Påstår man at det finnes begynnerstudenter, har man ikke med det navngitt en begynnerstudent man deretter kan referere tilbake til. Påstår man at det finnes et primtall, har man ikke med det navngitt et spesifikt primtall man kan referere tilbake til.

Mer generelt: dersom vi har et univers av objekter under diskurs og P er en egenskap, vil man ikke ved å hevde den eksistensielle påstanden $\exists x\ P(x)$ ha navngitt et objekt x med egenskap P. Det er derfor i strid med klar tanke å først hevde $\exists x\ P(x)$ for deretter å referere til x som om man har navngitt et objekt med egenskap P.

Korrekt språkbruk vil derimot være å først hevde $\exists x\ P(x)$, dersom det er sant, for deretter å navngi et objekt med egenskap P ved eksistensiell instansiering (Seksjon 2.7). I praksis kan dette ta følgende form: det eksisterer x slik at $P(x)$; *la* a være slik at $P(a)$; herved har vi navngitt et objekt a med egenskap P.

Legg merke til bruken av ordet «la»: når eksistens først er hevdet og påvist, fungerer dette ordet til å navngi et objekt hvis eksistens er etablert.

2.10. **La eller anta?** Det er snakk om forskjellen mellom følgende utsagn:

(1) La x være et objekt slik at $P(x)$.
(2) Anta at x er et objekt slik at $P(x)$.

Kan man hevde (1) dersom det ikke eksisterer et objekt med egenskap P? Svaret er nei, fordi dersom det ikke finnes noen objekter som tilfredsstiller P, kan man heller ikke velge ut et objekt som tilfredsstiller P. Se også Seksjon 2.7 om eksistensiell instansiering.

Kan man hevde (2) dersom det ikke eksisterer et objekt med egenskap P? Svaret er ja, fordi man påstår ikke med det at det faktisk finnes noe objekt som tilfredsstiller P, og kommer dermed ikke i konflikt med klar tanke dersom det skulle vise seg at den negative påstanden $\neg(\exists x\ P(x))$ skulle være sann.

Slik sett er det en forskjell mellom å navngi et objekt og å innføre en hypotese: med formulering (1) mener man å navngi; med formulering (2) mener man å hypotetisk resonnere om objekter som skulle tilfredsstille P.

Sistnevnte resonnering om hypotetisk eksistens forekommer ofte ved bevis ved motsigelse: man antar at det finnes x slik at $P(x)$ bare for å utlede en motsigelse. Deretter konkluderer man at det ikke finnes objekter som tilfredsstiller P. Skjematisk:

> Anta at x er et objekt slik at $P(x)$.[a]
> P_1,
> P_2,
> $\ldots$,
> Motsigelse!
>
> [a]Strengt tatt danner man her en ny resonneringskontekst med $\exists x\ P(x)$ som aksiom og anvender universell instansiering for å velge ut et objekt med egenskap P. Ved å utlede en motsigelse trer man deretter ut av denne resonneringskonteksten og konkluderer med at $\exists x\ P(x)$ var feilaktig.

Dermed $\neg(\exists x\ P(x))$.

2.11. **Negasjon av kvantifiserte påstander.** Å uttrykke at noe *ikke* er tilfelle kalles *negasjon*. Å uttrykke negasjonen av en kvantifisert påstand forekommer ofte og lar seg behandle rent mekanisk.

Betrakt et univers av objekter og la P være en egenskap: for hvert objekt x i dette universet har vi påstanden $P(x)$ om x.

Negasjon av universelle påstander. Påstanden $\neg(\forall x\ P(x))$ uttrykker at det *ikke* er tilfelle at alle x tilfredsstiller P. Det kommer til det samme å hevde at det finnes minst ett objekt som *ikke* oppfyller P (hvis ikke ville alle objekter ha oppfylt P). Vi tar dette som motivasjon for å anse påstandene

$$\neg(\forall x\ P(x)) \quad \text{og} \quad \exists x\ (\neg P(x))$$

som logisk ekvivalente.

Negasjon av eksistensielle påstander. Påstanden $\neg(\exists x\ P(x))$ uttrykker at det *ikke* er tilfelle at det finnes et objekt x som tilfredsstiller P. Da må det være tilfele at ingen objekter tilfredsstiller P (hvis ikke ville det ha fantes et objekt som oppfylte P). Vi tar dette som motivasjon for å anse påstandene

$$\neg(\exists x\ P(x)) \quad \text{og} \quad \forall x\ \neg(P(x))$$

som logisk ekvivalente.

Symbolspill. Den mekaniske prosedyren burde fremgå: negasjon ($\neg$) transformerer universell kvantor ($\forall$) til eksistensiell kvantor ($\exists$), og motsatt, og negasjonen propagerer inn på egenskapen som er subjekt for kvantifisering.

Har man dermed en påstand bestående av flere nøstede kvantorer (se Seksjon 2.12), benytter man altså transformasjonene $\forall \mapsto \exists$ og $\exists \mapsto \forall$ mens negasjonen propagerer inn til «innerste nivå».

2.12. **Dobbelt kvantifiserte påstander.** Betrakt et univers av objekter og la Q være en relasjon: gitt objekter x og y får vi dannet en påstand $Q(x, y)$ som enten er sann eller usann. Vi får igjen dannet fire *dobbelt kvantifiserte* påstander:

(1) $\forall x\ (\forall y\ Q(x, y))$:
For alle x er det slik at det for alle y er slik at $Q(x, y)$.

(2) $\exists x\ (\exists y\ Q(x, y))$:
Det eksisterer x slik at det eksisterer y slik at $Q(x, y)$.

(3) $\forall x\ (\exists y\ Q(x, y))$:
For alle x eksisterer det y slik at $Q(x, y)$.

(4) $\exists x\ (\forall y\ Q(x, y))$:
Det eksisterer x slik at det for alle y er slik at $Q(x, y)$.

Av disse er (1) og (2) harmløse: førstnevnte hevder at $Q(x, y)$ holder for alle objekter x og y; sistnevnte hevder at det eksisterer objekter x og y slik at $Q(x, y)$ holder.

Påstandene (3) og (4) er mer subtile: førstnevnte hevder at for alle x kan man finne en (eller flere!) korresponderende y slik at $Q(x, y)$ er oppfylt; sistnevnte hevder at det finnes et objekt x slik at uansett hvilket objekt y vi betrakter, så er $Q(x, y)$ en sann påstand.

I påstand (3) er det ikke gitt at dersom $x \neq x'$ er to forskjellige objekter, så kan man finne én og samme y slik at både $Q(x, y)$ og $Q(x', y)$ er oppfylt. Påstanden garanterer kun at det eksisterer objekter y og y' slik at $Q(x, y)$ og $Q(x', y')$ er sanne påstander.

I påstand (4) kan man ved eksistensiell instansiering (Seksjon 2.7) velge et objekt x_0 slik at $Q(x_0, y)$ er en sann påstand uansett hvilket objekt y vi skulle betrakte.

Eksempel 6. La universet under diskurs være mengden

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

av reelle tall $x \geq 0$.

Gitt objekter x og y i dette universet lar vi $Q(x, y)$ være påstanden $x = y^2$:

$$Q(x, y): \quad x = y^2.$$

Da er påstanden $\forall x\ \big(\exists y\ Q(x, y)\big)$ sann.

Bevis. Vi viser påstanden ved universell generalisering (Seksjon 2.6).

> La x være et objekt.
> Da er x et reelt tall slik at $x \geq 0$.
> Følgelig har x en kvadratrot.
>
> > La $y = \sqrt{x}$.
> > Da er $x = y^2$.
> > Vi har $Q(x, y)$.
>
> Vi konkluderer $\exists y\ Q(x, y)$ ved eksistensiell generalisering.

Vi konkluderer $\forall x\ \big(\exists y\ Q(x, y)\big)$ ved universell generalisering. ■

Hva er sannhetsverdien til påstanden $\exists x\ \big(\forall y\ Q(x, y)\big)$? Bevis?

Bemerkning. I Eksempel 6 har vi tatt enkelte mer avanserte konstruksjoner, eksempelvis de reelle tallene og eksistens av kvadratrøtter, for gitt. Videre er påstanden $\forall x\ \big(\exists y\ Q(x, y)\big)$, som vi mener å vise, det samme som å hevde at alle reelle tall $x \geq 0$ har en positiv kvadratrot. Så når man i beviset ovenfor skriver «La $y = \sqrt{x}$», kan man med rette undre seg over om man har argumentert sirkulært: i Seksjon 2.10 ble det poengtert at navngivelse av objekter ved ordet «la» kun kan etterfølge en påstand om eksistens, i dette tilfellet $\exists y\ Q(x, y)$. I beviset ovenfor har vi med andre ord benyttet den eksistensielle påstanden $\exists y\ Q(x, y)$ for å bevise den eksistensielle påstanden $\exists y\ Q(x, y)$!

Problemet som nå har kommet for dagen springer ut av at vi i Eksempel 6 ikke har vært klare på nøyaktig hva vi tar for gitt, altså hva som utgjør vår resonneringskontekst.

Videre undersøkelse overlates til leseren.