Föreläsning 5: Modellering II

- Repetition
- Begreppet tillstånd
- Tillståndsmodeller (linjära och olinjära)
- Tillståndsmodell $\rightarrow$ överföringsfunktion

Lärandemål:

- Analysera linjära systems egenskaper i tids- och frekvensplanet och transformera mellan olika representationsformer.
- Formulera dynamiska modeller för enklare tekniska system, såväl i form av tillståndsekvationer som överföringsfunktioner.

Repetition – fysikaliskt modellbygge

1. Analysera systemets funktion, strukturera
   - Nedbrytning i delsystem
   - Vilka variabler?
   - Vilka kvalitativa samband?

   $\rightarrow$ Graf eller blockschema
2. Ställ upp basekvationer
   - Balansekvationer
   - Konstitutiva samband
   - Dimensionskontroll

   $\rightarrow$ Differentialekvationer och algebraiska samband
3. Formulera modell
   - Linjärisera?
   - Laplace-transformera, bilda överföringsfunktioner, eller...
   - Välj tillståndsvariabler och formulera tillståndsmodell (denna föreläsning)

   $\rightarrow$ Differentialekvation, överföringsfunktion eller tillståndsmodell

Repetition – analogier vid modellbygge

Energiflöden i tekniska system förmedlas ofta via en *intensitet* $e(t)$ och ett *flöde* $f(t)$, som tillsammans ger en *effekt* $P(t) = e(t) \cdot f(t)$.

Vanliga komponenter beskriver relationer mellan dessa variabler:

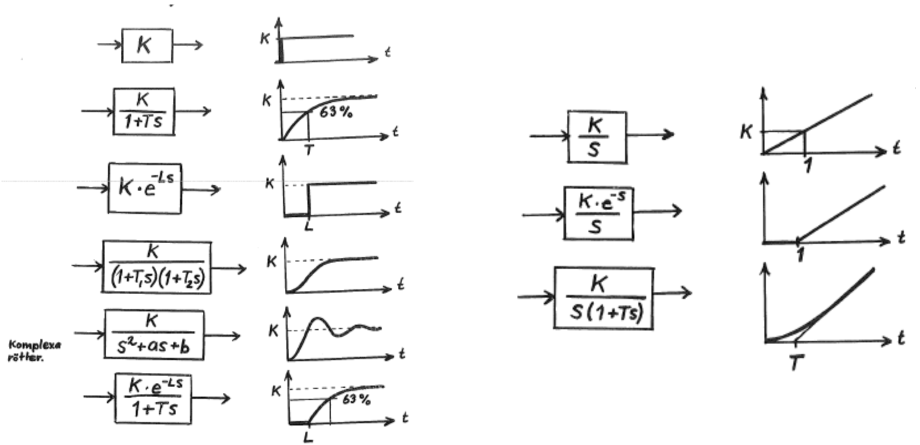
- Intensitetsupplagring (induktivt element)
- Flödesupplagring (kapacitivt element)
- Dissipation (resistivt element)

	Allmänt	Elektriskt	Flöde	Mekaniskt
Intensitet	e	u	p	F
Flöde	f	i	Q	v
Resistans	$e = \gamma f$	$u = Ri$	$p = R_f Q$	$F = dv$
Induktans	$f = \frac{1}{\alpha} \int e \cdot dt$	$i = \frac{1}{L} \int u \cdot dt$	$Q = \frac{1}{L_f} \int p \cdot dt$	$v = \frac{1}{m} \int F \cdot dt$
Kapacitans	$e = \frac{1}{\beta} \int f \cdot dt$	$u = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$	$p = \frac{1}{C_f} \int Q \cdot dt$	$F = k \int v \cdot dt$

Några vanliga systemtyper

- Integralprocess $G(s) = \frac{K}{s}$
  Ex. Tank med styrt inlopp eller utlopp
- Dubbelintegralprocess $G(s) = \frac{K}{s^2}$
  Ex. Momentstyrd robot med försumbar friktion
- En tidskonstant $G(s) = \frac{K}{1+sT}$
  Ex. Blandningsprocess
- Integrator + tidskonstant $G(s) = \frac{K}{s(1+sT)}$
  Ex. DC-motor
- Dubbla tidskonstanter $G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
  Ex. Dubbeltank
- Dämpad resonans $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
  Ex. Massa/fjädersystem med dämpning
- Instabila system
  Ex. Inverterad pendel
- Transportfördröjning (dödtid) $G(s) = e^{-sT_d}$
  Ex. Transportband; kommunikationsfördröjning

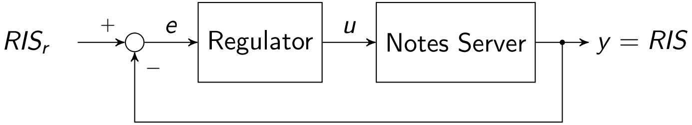
Stegsvar för olika systemtyper



Tidsdiskreta modeller

De flesta tekniska system kan beskrivas av tidskontinuerliga modeller, men...

- *Tidsdiskretisering* kan ge en tidsdiskret modell
- Vissa fysikaliska fenomen är tidsdiskreta (ex. förbränningsmotor)
- Många *data/informationssystem* är till sin natur tidsdiskreta
  Ex. Mailserver



Styrsignalen $u = MaxUsers$, maximala antalet samtidiga användare.
Utsignalen $y = RIS$, antalet processer (RPC) i servern.
Modell baserad på experimentella data (tidsenhet min.):

$$y(k+1) = 0.43y(k) + 0.47u(k)$$

Tillståndsmodeller

En olinjär tillståndsmodell ges av:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

En linjär tillståndsmodell ges av:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

I båda fallen gäller att:

- $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ är *tillståndsvektorn* och n modellens *ordningstal*
- $u(t)$ är insignalen (som kan vara en vektor)
- $y(t)$ är utsignalen (som kan vara en vektor)

Tillståndsmodeller kallas också *interna* modeller (och tillståndsvariablerna interna variabler)

Varför tillståndsmodeller?

Tillståndsmodeller har flera fördelar:

- Naturligt resultat av fysikalisk modellering
- Kompakt modellbeskrivning, linjärt eller olinjärt
- Lätt att linjärisera
- Lämpligt för datorberäkningar inkl. simulering
- Flera in- och utsignaler möjligt

Från intern till extern modell

Anta att vi har en linjär tillståndsmodell, som beskriver vårt system:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Laplace-transformera och anta initialtillståndet är 0:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Notera att karakteristiska polynomet ges av $\det(sI - A) = 0$, dvs *polerna till $G(s)$ ges av egenvärdena till matrisen A*.