# Föreläsning 14: Implementering

- Repetition
- Sampling
- Alias
- Diskretisering av processmodell
- Diskretisering av regulator
- Andra implementeringsaspekter

Lärandemål:

- Implementera enkla regulatorer med dator, förstå sampling och vikningseffekten.

# Repetition – tillståndsåterkoppling

Då tillstånden är mätbara kan vi använda *tillståndsåterkoppling*:

$$\text{Processen:} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{Regulatorn:} \quad u(t) = -L_u x(t) + K_r r(t),$$

där $L_u = [l_1 \; l_2 \; \dots \; l_n]$ och $K_r$ är en skalär.

Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A - BL_u)x(t) + BK_r r(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$L_u = [l_1 \; l_2 \; \dots \; l_n]$ bestäms så att det återkopplade systemet får önskade poler, där polerna ges av egenvärdena till matrisen $A - BL_u$.

På detta sätt kan man godtyckligt placera polerna för det slutna systemet, under förutsättning att det ursprungliga systemet är *styrbart*.

Förstärkningen $K_r$ bestäms vanligen så att $G_{ry}(0) = 1$.

Anm. Tillståndsåterkoppling av diskreta tillståndsmodeller görs på samma sätt!

# Tillståndsåterkoppling med integralverkan

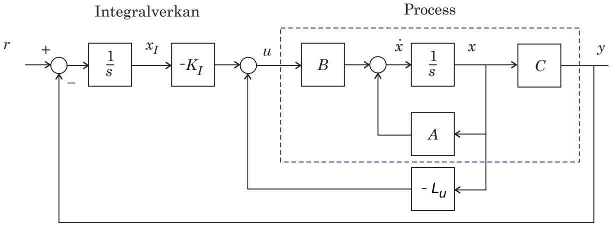
För att kompensera konstanta laststörningar kan man komplettera tillståndsåterkopplingen med integralverkan. Inför ett integraltillstånd

$$x_I(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau$$

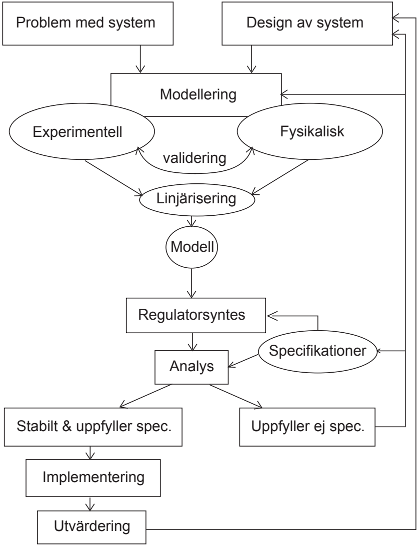
och skapa en utökad tillståndsmodell

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

för vilken återkopplingsmatrisen $\begin{bmatrix} L_u & K_i \end{bmatrix}$ beräknas.

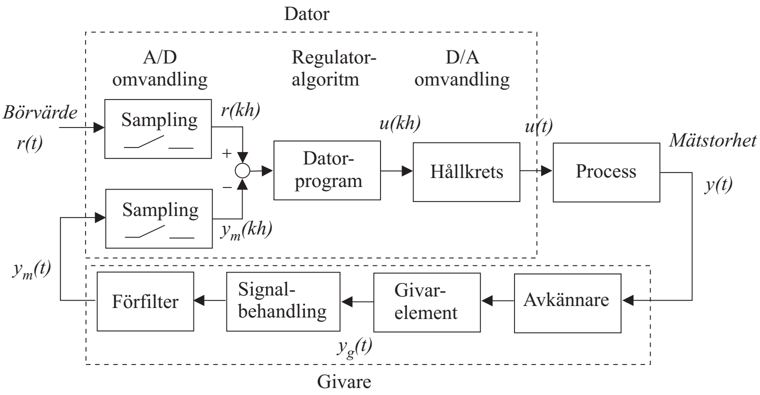


# Reglerdesign – arbetsflöde



# Datorimplementering av reglersystem

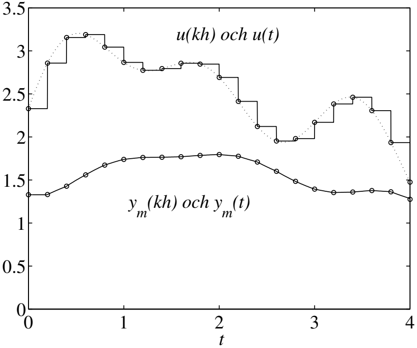
Ett reglersystem implementeras oftast med dator/mikrocontroller:



# Samplad reglering

Implementering med dator innebär:

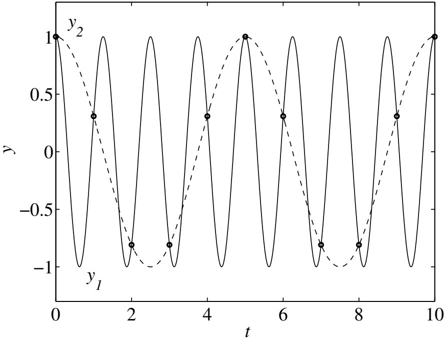
- *Sampling* av processvariabler (A/D-omvandling)
- *Hållning* av styrvariabler (D/A-omvandling)



# Aliaseffekten

**Konsekvens 1**:

- Information går förlorad vid sampling

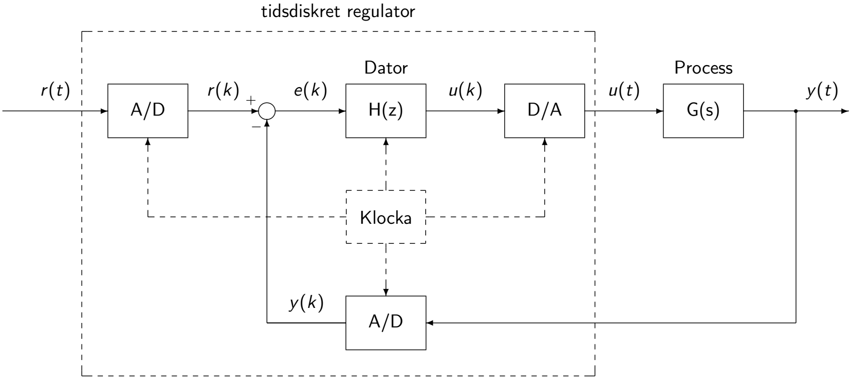



- Figuren: olika sinussignaler kan ge samma samplade signal!
- Viktigt att lågpassfiltrera före sampling

# Samplad reglering

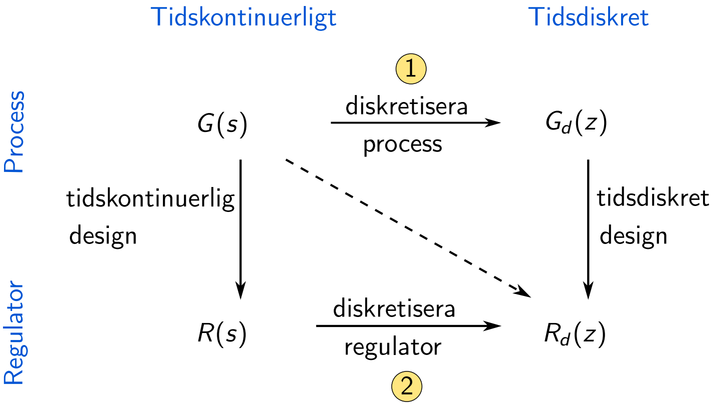
**Konsekvens 2**:

- Processen är (oftast) tidskontinuerlig
- Regulatorn är tidsdiskret



# Diskretisering

**Diskretisering kan göras på olika sätt**:



# 1. Diskretisering av process

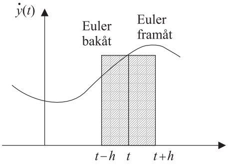
Enklaste idén att gå från en kontinuerlig modell till en diskret: ersätt derivatan med en *differensapproximation* med *samplingsintervallet* $h$:

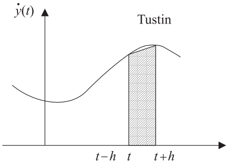
1. $\dot{y}(t) \approx \frac{1}{h}(y(t) - y(t-h)) = \frac{1}{h}\big(y(kh) - y((k-1)h)\big)$ *"Euler bakåt"*
2. $\dot{y}(t) \approx \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t)) = \frac{1}{h}\big(y((k+1)h) - y(kh)\big)$ *"Euler framåt"*

En metod, som har vissa fördelar (vi återkommer till dessa), bygger på trapetsregeln för numerisk integration:

3. $\hat{\dot{y}}(t) \approx \frac{2}{h}(y(t) - y(t-h)) - \hat{\dot{y}}(t-h)$ *Tustins/bilinjär approximation*

där $\hat{\dot{y}}(t)$ är approximationen av $\dot{y}(t)$.



# Diskretisering: exempel

Tidskontinuerlig modell:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \tag{6}$$

Euler bakåt ger

$$\frac{1}{h}\big(y(t) - y(t-h)\big) + ay(t) = bu(t)$$

Vi intresserar oss nu bara för samplingstidpunkterna $t = kh$, $k = 1, 2, \dots$
Detta ger en tidsdiskret modell i form av en *differensekvation*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\big(y(kh) - y((k-1)h)\big) + ay(kh) = bu(kh) \quad &\Leftrightarrow \\ (1 + ah)y(k) - y(k-1) = bhu(k) & \end{aligned} \tag{7}$$

där för enkelhets skull samplingsintervallet valts som tidsenhet, dvs $h = 1$.

Notera att modellen (7) är en *algoritm* för att beräkna systemets utsignal!

# Fördröjningsoperatorn

Exemplet gav en modell i form av en differensekvation:

$$(1 + ah)y(k) - y(k-1) = bhu(k)$$

Genom att införa *fördröjningsoperatorn* $q^{-1}$ med egenskapen $q^{-1}y(t) = y(t-1)$ kan vi skriva detta i en mer kompakt form:

$$\big((1 + ah) - q^{-1}\big)y(k) = bhu(k)$$

eller

$$y(k) = \frac{bh}{(1 + ah) - q^{-1}}u(k)$$

**OBS!** Det sista resultatet kan vi också få direkt från (6) genom att ersätta differentialoperatorn $p$ med $\frac{1}{h}(1 - q^{-1})$:

$$\frac{b}{p + a} \quad \rightarrow \quad \frac{bh}{(1 + ah) - q^{-1}}$$

# Diskretisering av tillståndsmodeller

Anta vi har en tillståndsmodell för vår process (anta $D = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \qquad (8)$$

Om processen styrs av en dator, så är styrsignalen styckvis konstant:

$$u(t) = u(kh), \quad kh \leq t < (k+1)h$$

Om detta utnyttjas i den allmänna lösningen till (8), nämligen

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

så fås (sätt $t = (k+1)h$, $t_0 = kh$, utnyttja att styrsignalen är konstant över intervallet, samt välj till sist $h = 1$):

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + \Big(\int_0^h e^{A\tau}B\,d\tau\Big)u(k)$$

# Tidsdiskret tillståndsmodell

Resultatet av diskretiseringen är en tidsdiskret tillståndsmodell, som är en *exakt* beskrivning av processen *vid samplingstidpunkterna*:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

där

$$\Phi = e^{Ah} \qquad \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B \, d\tau$$

- Systemets överföringsfunktion är

$$H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma$$

- Polerna ges av egenvärdena till matrisen $\Phi$
- Egenvärdena till $\Phi$ är $\left\{e^{\lambda_i h}\right\}$, där $\left\{\lambda_i\right\}$ är egenvärdena till $A$. Transformationen från s-planet till z-planet är alltså:

$$z = e^{sh}$$

Notera att stabila poler ($\operatorname{Re} s < 0$) avbildas på stabila poler ($|z| < 1$)!

# Diskreta LTI-modeller — översikt

Vi kan nu komplettera vår “karta” över olika LTI-modeller i det tidsdiskreta fallet:

$$
\begin{array}{ccc}
a(q)y(k) = b(q)u(k) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & a(z)Y(z) = b(z)U(z) \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle H(z)=\frac{b(z)}{a(z)}} \\
y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)u(i) & \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}} & Y(z) = H(z)U(z) \\
\Big\uparrow {\scriptstyle h(k)=C\Phi^{k-1}\Gamma} & & \Big\uparrow {\scriptstyle H(z)=C(zI-\Phi)^{-1}\Gamma} \\
\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & \begin{aligned} z(X(z) - x(0)) &= \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) &= CX(z) \end{aligned} \\
{\scriptstyle \Phi=e^{Ah}} \Big\uparrow {\scriptstyle \Gamma=\int_0^h e^{A\tau}B\,d\tau} & & \\
\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} & &
\end{array}
$$

# Diskretisering: egenskaper

Diskretisering av tillståndsmodell:

- Ger en tidsdiskret tillståndsmodell, som är en exakt beskrivning i samplingstidpunkterna
- Polerna avbildas enligt $z = e^{sh}$ (t ex VHP $\rightarrow$ enhetscirkeln)
- Ett stabilt system förblir stabilt efter tidsdiskretiseringen

De enkla diskretiseringsmetoderna (Euler, Tustin) kan ses som approximationer av relationen $z = e^{sh}$:

$$z = e^{sh} \approx 1 + sh \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(z-1)$$

$$z = e^{sh} = \frac{1}{e^{-sh}} \approx \frac{1}{1-sh} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(1-z^{-1})$$

$$z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Tustins approximation har en intressant egenskap. Trots att den fås genom en approximation av $z = e^{sh}$, så avbildas stabila poler på stabila, tidsdiskreta poler (och instabila på instabila).

# Frekvensfunktion

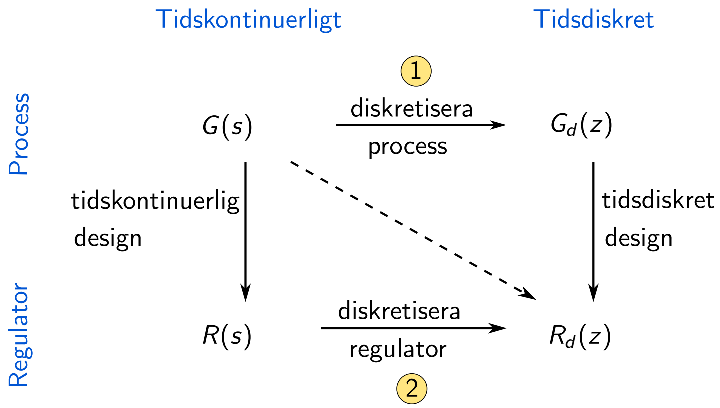
För det tidsdiskreta systemet med överföringsfunktion $H(z)$ definieras *frekvensfunktionen*

$$H(e^{i\omega h}), \quad \omega \in [0, \pi/h]$$

- Frekvensfunktionen beräknas alltså för $z = e^{i\omega h}$, dvs punkter längs enhetscirkeln från $z = 1\,(\omega = 0)$ till $z = -1\,(\omega = \pi/h)$.
- Frekvensen $\omega_N = \pi/h = \omega_s/2$, där $\omega_s$ är samplingsfrekvensen, kallas *Nyquist-frekvensen*.
- Frekvensfunktionen är periodisk med perioden $2\pi/h$.
- För att undvika aliasing, så bör alla frekvenser över Nyquistfrekvensen filtreras bort.

# Diskretisering

**Diskretisering kan göras på olika sätt**:



# 2. Diskretisering av regulator

De approximativa diskretiseringsmetoderna används ofta när man skall "översätta" en tidskontinerlig regulator till motsvarande tidsdiskreta form.

Exempel: Diskretisering av PID-regulator

$$U(s) = \underbrace{K_P(R(s) - Y(s))}_{U_P} + \underbrace{\frac{K_i}{s}(R(s) - Y(s))}_{U_I} - \underbrace{K_D s Y(s)}_{U_D}$$

Notera att man ofta skippar D-verkan på $r(t)$!

$$\begin{aligned}
U_P &: u_P = K_P(r(k) - y(k)) \\
U_I &: s = \frac{q-1}{h} \Rightarrow u_I(k) = \frac{K_i h}{q-1}(r(k) - y(k)) \\
&\Rightarrow u_I(k+1) = u_I(k) + K_i(r(k) - y(k)) \\
U_D &: s = \frac{1-q^{-1}}{h} \\
&\Rightarrow u_D(k) = K_D \frac{1-q^{-1}}{h} y(k) = K_D \frac{y(k) - y(k-1)}{h}
\end{aligned}$$

# Implementering

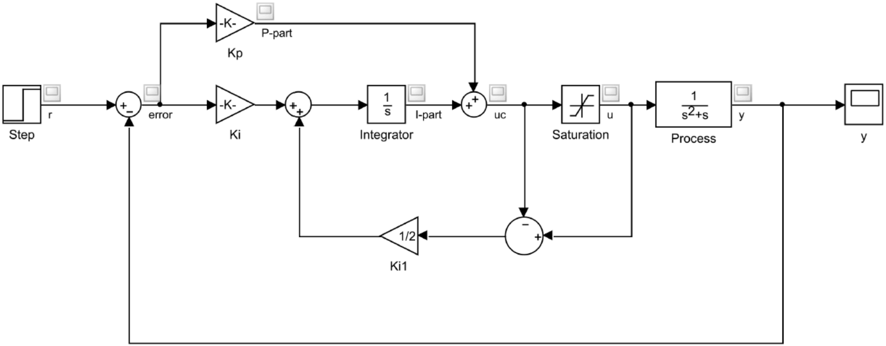
Förutom själva regleralgoritmen behöver man tänka på bl.a. följande saker vid implementeringen:

- Val av samplingsintervall (tumregel: $\omega_s = (10 - 20) \cdot \omega_B$)
- Anti-windup
- Ryckfri övergång

# Anti-windup

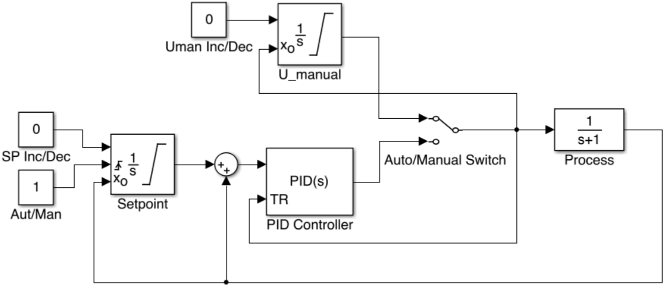
*Windup* (eller *integrator windup*, integratoruppvridning) kan uppstå då styrsignalen mättas och regulatorns I-del fortsätter att öka för att kompensera ett kvarstående fel.

*Anti-windup* innebär i stort sett att integrationen stängs av då styrsignalen mättas.



# Ryckfri övergång

Ofta finns i verkliga implementeringar av regulatorer en möjlighet att växla mellan olika *regulator-moder*, t ex manuell och automatik. Vid växlingen vill man inte ha några hopp i styrsignalen, och därför förser man regulatorn med lite logik för att få *ryckfri övergång* (eng. *bumpless transfer*).




Man -> Auto: set SP to output