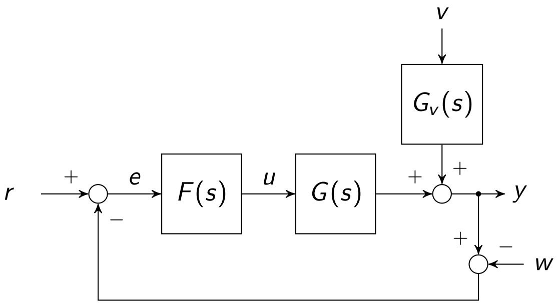
Föreläsning 11: PID-design

- Repetition
- PID-design
- Designexempel

Lärandemål:

- Välja och dimensionera P/PI/PID-regulatorer så att önskade specifikationer uppfylls.

Repetition – känslighetsfunktioner



Definiera *kretsöverföringen* $L(s)$, *känslighetsfunktionen* $S(s)$ och den *komplementära känslighetsfunktionen* $T(s)$:

$$L(s) = F(s)G(s) \qquad S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \qquad T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = T(s)\big[R(s) + W(s)\big] + G_v(s)S(s)V(s)$$

$$E(s) = S(s)\big[R(s) + W(s) - G_v(s)V(s)\big] \qquad S(s) + T(s) = 1$$

$$U(s) = F(s)S(s)\big[R(s) + W(s) - G_v(s)V(s)\big]$$

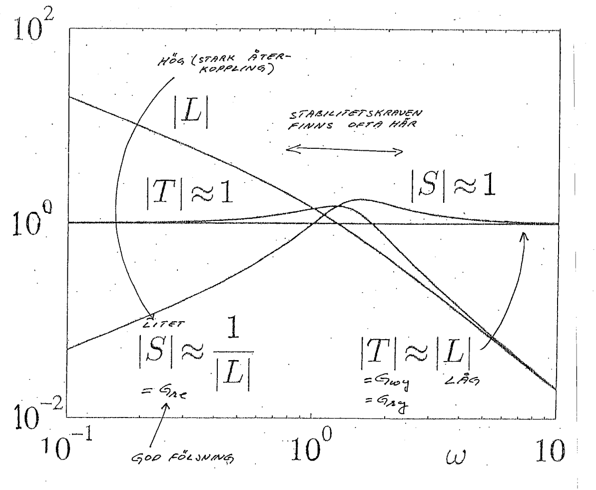
Repetition – designkompromisser

Designkompromiss: $S + T = 1 \Rightarrow$ det går inte att göra S och T små samtidigt!

Lösning: separera kraven i frekvensplanet!

- Gör S litet för lägre frekvenser för att ...
  1. följa börvärden: $E(s) = S(s)R(s)$
  2. reducera inverkan av processtörningar: $Y(s) = S(s)G_v(s)V(s)$
     $(Y_{ol}(s) = G_v(s)V(s)$ och $Y_{cl}(s) = S(s)G_v(s)V(s))$
  3. reducera inverkan av parametervariationer: $\frac{dT/T}{dL/L} = S(s)$
- Gör T respektive T/G litet för högre frekvenser för att ...
  4. begränsa inverkan av mätstörningar: $Y(s) = T(s)W(s)$, $U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}W(s)$
  5. använda rimligt stora styrsignaler: $U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}\left[R(s) + W(s) - G_v(s)V(s)\right]$
- Håll koll på stabiliteten, som oftast avgörs av utseendet i mellanfrekvensområdet, dvs runt ω_c.

Repetition – typiska frekvenskurvor



Repetition – specifikationer

Vad är låga resp. höga frekvenser?
Avgörs av specifikationer på snabbhet, t ex:

- Skärfrekvens/överkorsningsfrekvens ω_c ($|L(i\omega_c)| = 1$)
- Bandbredd ω_b ($|T(i\omega_b)| = -3$ dB)
- Stigtid T_s
- Insvängningstid $T_{5\%}$

Vad innebär det att ha koll på stabiliteten?
Avgörs av specifikationer, t ex:

- Amplitudmarginal A_m (2-4 ggr)
- Fasmarginal φ_m ($30 - 60^o$)
- Max översläng M (r till y)
- Känslighetsfunktionens maximala värde $M_S = \max_\omega |S(j\omega)|$
- Resonanstopp $M_p = \max_\omega |T(j\omega)|$ (påverkar robusthet)

PID-design

Det finns flera alternativa metoder att dimensionera t ex PID-regulatorer:

- Kompensering eller modifiering av kretsöverföringen
- Flytta en punkt i Nyquistdiagrammet
- Ziegler-Nichols svängningsmetod
- Lambda-metoden (vanlig i processindustrin)
- Polplacering (inlämningsuppgift 3)
- Optimering enligt olika kriterier, som uttrycker designkompromisserna i frekvensplanet (mer att läsa i kursboken)

Lagfilter och PI-regulator

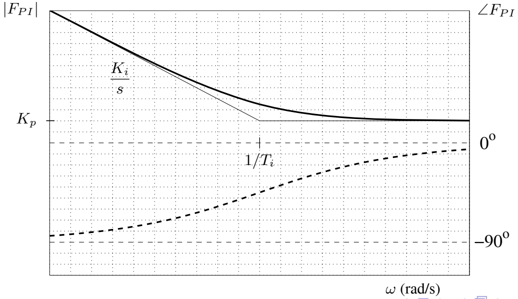
Ett *lagfilter* ger hög förstärkning för låga frekvenser till priset av negativ fasförskjutning:

$$F(s) = a\frac{1 + sT}{1 + asT}, \quad a > 1$$

I extremfallet med $a = \infty$ fås en PI-regulator:

$$F_{PI}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p\frac{1 + T_i s}{T_i s} = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Användning: minska kvarstående fel.



Leadfilter och PD-regulator

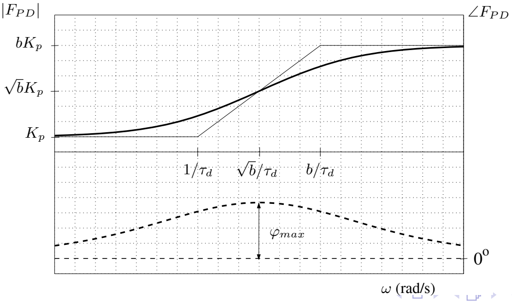
Ett *leadfilter* (eller PD-regulator med filter på D-delen) ger ett positivt fastillskott inom frekvensintervallet $[1/\tau_d, b/\tau_d]$:

$$F_{PD}(s) = K_p\left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}; \quad b > 1$$

där $\tau_d = T_d + T_f$ och $b = (T_d + T_f)/T_f$. I extremfallet $b = \infty$ fås en ideal PD-regulator:

$$F_{PD}(s) = K_p(1 + T_d s)$$

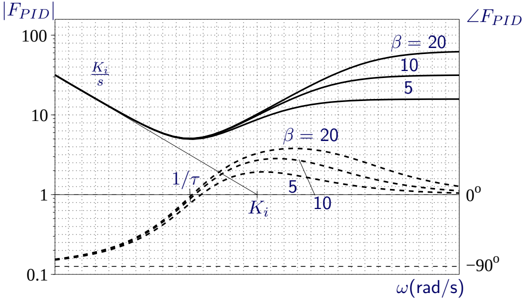
Användning: snabba upp systemet och/eller förbättra stabilitetsmarginaler.



PID-regulatorn

PID-regulatorn är en kombination av PI- och PD-regulatorn:

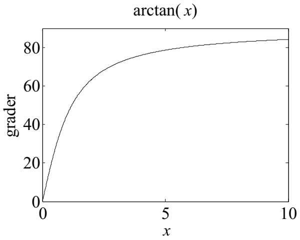
$$F_{PID}(s) = \kappa \frac{1 + s\tau_i}{s\tau_i} \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} = K_p \big(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\big)$$

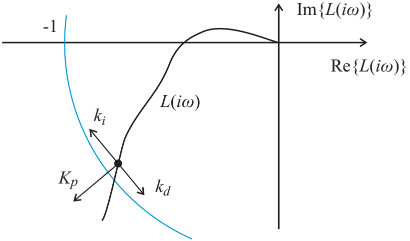


Hur påverkar parametrarna?

$$
\begin{aligned}
F(s) &= K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_D\right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\
&= K_p\left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) = K_p\left(\frac{s + k_i + k_d s^2}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arg L(j\omega) &= \arg G(j\omega) - \arg j\omega + \arg(j\omega + k_i - k_d\omega^2) \\
&= \arg G(j\omega) - 90^o + \arctan\left(\frac{\omega}{k_i - k_d\omega^2}\right)
\end{aligned}
$$





Flytta en punkt i Nyquistdiagrammet

En vanlig teknik att dimensionera PID-regulatorer är att specificera en punkt på kretsöverföringens frekvenskurva. På detta sätt kan 2 parametrar bestämmas i regulatorn:

1. Specificera en punkt för kretsöverföringen, $L(i\omega_0)$
2. Bestäm parametrarna i regulatorn genom villkoren

$$|F(i\omega_0)| = |L(i\omega_0)|/|G(i\omega_0)|$$
$$\arg F(i\omega_0) = \arg L(i\omega_0) - \arg G(i\omega_0)$$

Ett exempel på detta är att specificera fasmarginal φ_m och skärfrekvens ω_c. OBS! Det finns flera olika varianter av detta, men "grundreceptet" är detsamma enl ovan!

PI-design

PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

- Specifikation av ω_c och φ_m (Ruta 8.1 i boken):

$$|L(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)| K_p \frac{\sqrt{1 + \omega_c^2 T_i^2}}{\omega_c T_i} = 1$$

$$\arg L(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) - 90^o + \arctan(\omega_c T_i) = -180^o + \varphi_m$$

- Specifikation av ω_π och A_m ger i princip samma som ovan:

$$|L(j\omega_\pi) = |G(i\omega_\pi)| K_p \frac{\sqrt{1 + \omega_\pi^2 T_i^2}}{\omega_\pi T_i} = 1/A_m$$

$$\arg L(j\omega_\pi) = \arg G(j\omega_\pi) - 90^o + \arctan(\omega_\pi T_i) = -180^o$$

PD-design

En PD-regulator ges av

$$F(s) = K_p(1 + \frac{sT_d}{1 + sT_f}) = K_p \frac{1 + s(T_d + T_f)}{1 + sT_f} = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s/b}, \quad b > 1$$

Anta att ω_c och φ_m är specificerade (Ruta 8.3 i boken):

1. Bestäm behovet av faslyft vid skärfrekvensen:

$$\varphi_{max} = \varphi_m - (\arg G(i\omega_c) + 180^\circ)$$
$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}}$$

2. Placera maximalt faslyft vid $\omega = \omega_c$:

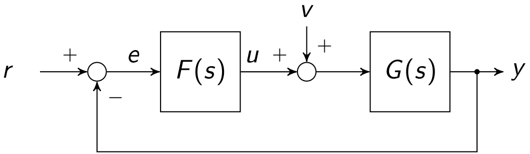
$$\sqrt{b}/\tau_d = \omega_c$$

3. Bestäm K_p så att ω_c blir det önskade:

$$|L(j\omega_c)| = K_p \sqrt{b}\,|G(j\omega_c)| = 1$$

Designexempel

Vi skall studera dimensioneringen av ett positionsservo:



Processmodell:

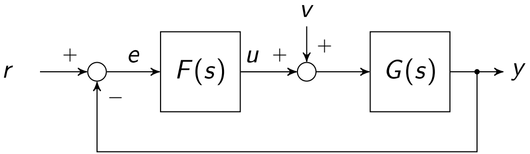
$$G(s) = \frac{3}{s(1 + 0.015s + 0.0001s^2)} = \frac{3 \cdot 10^4}{s(s^2 + 150s + 10^4)}$$

Designkrav:

1. Börvärdesföljning: rampfel $\leq 0.5mm$ vid insignalramp 30 mm/s
2. Laststörning: positionsfel $\leq 0.5mm$ vid stegstörning på 15 enheter
3. Stabilitet: fasmarginal $\varphi_m \geq 45°$
4. Snabbhet: $\omega_c = 70$. Stabilitet: $\varphi_m = 60°$

Designexempel

Vi skall studera dimensioneringen av ett positionsservo:



Processmodell:

$$G(s) = \frac{3}{s(1 + 0.015s + 0.0001s^2)} = \frac{3 \cdot 10^4}{s(s^2 + 150s + 10^4)}$$

Designkrav:

1. Börvärdesföljning: rampfel $\leq 0.5mm$ vid insignalramp 30 mm/s
2. Laststörning: positionsfel $\leq 0.5mm$ vid stegstörning på 15 enheter
3. Stabilitet: fasmarginal $\varphi_m \geq 45°$
4. Snabbhet: $\omega_c = 70$. Stabilitet: $\varphi_m = 60°$

1. Försök först med P-reglering:
   - Krav 1 ger $K_p \geq 20$ (slutvärdessatsen)
   - Krav 2 ger $K_p \geq 30$ (slutvärdessatsen)
   - P-regulator med $K_p = 30$ ger för liten fasmarginal $\varphi_m = 21.5^\circ$
2. Sänk förstärkningen för att ge önskad fasmarginal:
   - Välj $\varphi_m = 55^\circ$ för att ge 10° marginal för ett lagfilter i nästa steg
   - Detta ger $\omega_c = 39$ och $K_p = 40/3$
   - Denna P-regulator ger önskad φ_m men krav 1 och 2 ej uppfyllda
3. Höj förstärkning för låga frekvenser med lag-filter:
   - Välj $a = 30/(40/3) = 2.25$
   - Tillåt fasförlust på max 10° vid $\omega_c = 39$, vilket ger $1/T = \omega_c/3 = 39/3 = 13$
   - Regulatorn är nu $F(s) = \frac{40}{3} \cdot 2.25 \cdot \frac{1+s/13}{1+2.25 \cdot s/13}$
4. Öka snabbheten genom att kräva $\omega_c = 70$ och öka samtidigt fasmarginalen till $\varphi_m = 60^\circ$:
   - Fasen behöver lyftas c:a 40°, vilket ger $b = 4.6$
   - Max faslyft vid ω_c ger $T = \sqrt{b}/\omega_c = 0.031$
   - Justera förstärkningen så att $|L(i\omega_c)| = 1$ (faktor $1/1.06$)
   - Regulatorn är nu $F(s) = \frac{1}{1.06}\frac{40}{3} \cdot 2.25 \cdot \frac{1+s/13}{1+2.25 \cdot s/13} \cdot \frac{1+0.03s}{1+0.03s/4.6}$