

# ERE103 Reglerteknik D

## Repetition

Bo Egardt

Institutionen för Elektroteknik  
Chalmers Tekniska Högskola

December, 2019

# Varför reglerteknik?

Reglerteknik: *styrning* av *dynamiska* system genom *återkoppling*.

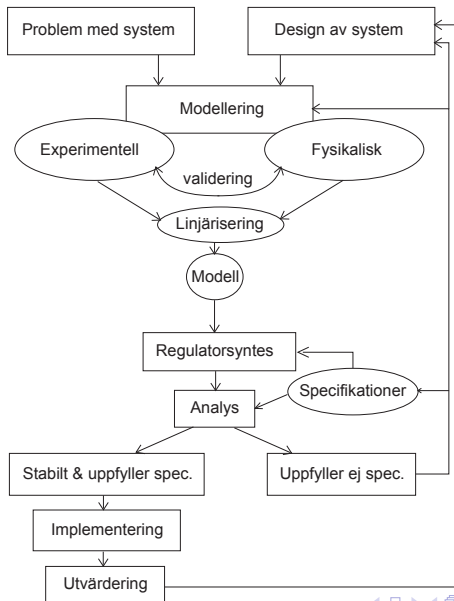
Reglertekniken är ofta anonym (“den gömda teknologin”), men...

- ▶ styrning med återkoppling används “överallt”
- ▶ styrningen med mikro-controllers eller datorer kräver reglertekniska algoritmer
- ▶ reglerteknikens metoder ger systemförståelse

Med återkoppling kan vi...

- ▶ Minska effekten av osäkerhet (modellfel, komponentvariationer, störningar)
- ▶ Forma systemets dynamik (t ex snabba upp, stabilisera)

# Reglerdesign – arbetsflöde



# Dynamiska system

Skilj mellan:


- **Statiskt** system: insignal  $\rightarrow$  utsignal *momentant*
- **Dynamiskt** system: insignal  $\rightarrow$  utsignal med “minne” (tröghet)
- Dynamik beskrivs med differentialekvationer

Exempel 1: Ett elektriskt system.

Exempel 2: Ett flödessystem.

Exempel 3: Ett mekaniskt system.

Exempel 4: Ett roterande, mekaniskt system.



Spänning  
Ström  
Tryck  
Volym  
Yttre  
Hastighet  
Fjäder  
Dämp

Moment:  $T_a$  och  $T_b$

Vinkelhastigheter:  $\omega_1$  och  $\omega_2$

Fjäderkonstanter:  $k_1$

Dämpkonstanter:  $b_1$   $b_2$

A DC-motor can be described by the equations

$$u(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0$$
$$T(t) - J \frac{d\omega(t)}{dt} - B\omega(t) = 0$$

Here, the induced counter emf is  $e(t) = K_e \omega(t)$  and the driving torque is  $T(t) = K_T i(t)$ .  
In case of a non-constant magnetizing current  $i_m(t)$  we have:

$$e(t) = \Psi(t)\omega(t)$$
$$T(t) = \eta(t)\Psi(t)i(t)$$

where  $\Psi$  is the magnetic flux and  $\eta$  is a factor of efficiency.  
If the current  $i(t)$  and the angular velocity  $\omega(t)$  are chosen as state variables:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -\Psi(t)/L \\ \eta(t)\Psi(t)/J & -B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

Det finns två huvudmetoder att ta fram en modell för ett tekniskt system:

## 1. Fysikalisk modellering

- använd kunskap om systemet!
- uttryck fysikaliska samband
- ex: differentialekvation, tillståndsmodell

## 2. Experimentell modellering

- gör experiment med systemet!
- dra slutsatser från insamlade data
- ex: stegsvar, impulssvar, frekvenssvar
- mer avancerat: spektralanalys, parametrisk systemidentifiering

Vad är tankesättet när man ställer upp en modell?

# ► Fysikaliskt modellbygge – arbetsgång

## 1. Analysera systemets funktion, strukturera

- Nedbrytning i delsystem
- Vilka variabler?
- Vilka kvalitativa samband?
- Graf eller blockschema

## 2. Ställ upp basekvationer

- Balanskvationer
- Konstitutiva samband
- Dimensionskontroll
- Differentialekvationer och algebraiska samband

## 3. Formulera modell

- Linjärisera?
- Laplace-transformera, bilda överföringsfunktioner, eller...
- **Välj tillståndsvariabler och formulera tillståndsmodell**
- Differentialekvation, överföringsfunktion eller tillståndsmodell

Kom ihåg: tillståndsvariabler ofta *upplagrade storheter!*

Det finns ett antal olika modeller för tidskontinuerliga *linjära, tidsinvarianta system*:

- ▶ Differentialekvation
- ▶ Överföringsfunktion
- ▶ Viktfunktion
- ▶ Tillståndsmodell

Motsvarande modeller finns även för tidsdiskreta system

## ► LTI-modell 1: Differentialekvation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$$

Varje lösning kan skrivas

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

där  $y_p(t)$  är partikulärlösningen,  $y_h(t)$  är en lösning till den homogena ekv.

Karakteristiska polynomet:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

Strukturen på lösningen till den homogena ekvationen ges av

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^m p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

där  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  är de skilda nollställena till det karakteristiska polynomet

Systemet *stabil* om alla  $\lambda_k$  ligger i VHP ( $\text{Re } \lambda_k < 0$ ).



## ► LTI-modell 2: Överföringsfunktion

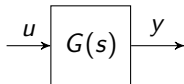
Överföringsfunktionen  $G(s)$  kan användas för att uttrycka systemets svar på en *godtycklig insignal*. Definiera *Laplace-transformen* av tidsfunktionen  $f(t)$ :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

Om systemet är i vila vid  $t = 0$  (alla tidsderivator lika med 0) så gäller:

$$Y(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) = G(s) U(s)$$

Systemet kan representeras med **överföringsfunktionen  $G(s)$**  i ett blockelement:



- ▶ *Integralprocess (typ 1)* med överföringsfunktionen  $G(s) = K/s$ . Exempel på detta är en tank med styrt in/utlopp och en hydraulkolv.
- ▶ *Dubbelintegralprocess (typ 2)* med överföringsfunktion  $G(s) = K/s^2$ . Ett exempel är en massa (tröghetsmoment), som drivs av en kraft (moment) utan friktion.
- ▶ *Tidskonstant* med överföringsfunktion  $G(s) = K/(1 + sT)$ .
- ▶ *Integrator + tidskonstant* med  $G(s) = K/(s(1 + sT))$ . Exempel på detta är en DC-motor.
- ▶ *Dubbla tidskonstanter* med  $G(s) = K/((1 + sT_1)(1 + sT_2))$ . Exempel är dubbeltank (labben!) och farthållarexemplet.
- ▶ *Dämpad resonans* med överföringsfunktionen  $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ .
- ▶ *Instabila processer*, t ex den inverterade pendeln.
- ▶ *Dödtid eller tidsfördröjning* med  $G(s) = e^{-s\tau}$ . Exempel är transportfördröjning.

## ► LTI-modell 3: Viktfunktion

Laplace-transformen uppfyller *faltningsatsen*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\} = G(s)F(s)$$

vilket tillsammans med relationen  $Y(s) = G(s)U(s)$  ger (byt  $f$  mot  $u$ ):

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(s)e^{st}ds$$

- $g(t)$  är systems *viktfunktion* – utsignalen ges av en “viktad summa” av gamla insignalvärden.
- Om  $u(t) = \delta(t)$  (en Dirac-funktion eller impuls), så följer att  $y(t) = g(t)$ . Viktfunktionen kallas därför också *impulssvaret*.

# LTI-system: egenskaper

Faltningsintegralen:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Av detta följer några viktiga egenskaper för ett *linjärt, tidsinvariant (LTI) system*:

- ▶ *Dynamik*: utsignalen beror i princip av *alla* gamla värden på insignalen.
- ▶ *Kausalitet*: utsignalen  $y(t)$  beror *inte* på framtida insignaler,  $u(\tau)$ ,  $\tau > t$ .

▶ *Superpositionsprincipen*:

$$u_1(\cdot) \rightarrow y_1(\cdot), u_2(\cdot) \rightarrow y_2(\cdot) \Rightarrow \alpha_1 u_1(\cdot) + \alpha_2 u_2(\cdot) \rightarrow \alpha_1 y_1(\cdot) + \alpha_2 y_2(\cdot)$$

Användning: studera respons på börvärdesändringar resp störningar var för sig!

# Externa modeller

Sammanfattning av *externa* eller *insignal/utsignal-modeller* för linjära, tidsinvarianta (LTI) system:

$$\begin{array}{ccc} a\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = b\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\ & & \downarrow G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \\ y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s) \end{array}$$

- ▶ Differentialekvationen och faltningsintegralen är modellbeskrivningar i *tidsdomänen*.
- ▶ Överföringsfunktionen är en modellbeskrivning i *Laplace-domänen*.
- ▶ Nollställena till  $b(s)$  kallas systemets *nollställen*.
- ▶ Nollställena till karakteristiska polynomet  $a(s)$  kallas systemets *poler* (som alltså bestämmer systemets stabilitet).

# Tidsdiskreta, externa modeller

Sammanfattning av externa modeller för tidsdiskreta LTI-system:

$$\begin{array}{ccc} a(q)y(k) = b(q)u(k) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & a(z)Y(z) = b(z)U(z) \\ & & \downarrow H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \\ y(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i) & \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}} & Y(z) = H(z)U(z) \end{array}$$

där vi definierat *pulssvaret*  $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ .

- ▶ Nollställena till  $b(z)$  kallas systemets *nollställen*.
- ▶ Nollställena till karakteristiska polynomet  $a(z)$  kallas systemets *poler* (som alltså bestämmer systemets stabilitet).

## ► LTI-modell 4: Tillståndsmodell

En olinjär tillståndsmodell ges av:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

En linjär tillståndsmodell ges av:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

I båda fallen gäller att:

- $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  är *tillståndsvektorn* och  $n$  modellens *ordningstal*
- $u(t)$  är insignalen (som kan vara en vektor)
- $y(t)$  är utsignalen (som kan vara en vektor)

Tillståndsmodeller kallas också *interna* modeller

Olinjära → linjära tillståndsmodeller?

# ► Linjärisering

Den olinjära tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

kan linjäriseras kring en *stationär lösning* eller *jämviktslösning* (eng. *steady state, equilibrium*)  $(x(t), u(t)) \equiv (x_0, u_0)$  som uppfyller  $f(x_0, u_0) = 0$ . Den linjäriserade tillståndsmodellen beskriver systemet i en omgivning till jämviktslösningen  $(\Delta x(t) = x(t) - x_0, \Delta u(t) = u(t) - u_0, \Delta y(t) = y(t) - y_0, y_0 = g(x_0, u_0))$ :

$$\Delta \dot{x}(t) = A \Delta x(t) + B \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = C \Delta x(t) + D \Delta u(t)$$

där

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$



## ► Lösning av tillståndsekvationen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Lösningen ges av

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\tag{2}$$

där *övergångsmatrisen*  $\Phi(t) = e^{At}$  definieras som lösningen till diff-ekvationen

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I\tag{3}$$

Av (2) följer att viktfunktionen/impulssvaret ges av

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

och därmed utsignalen (då initialtillståndet är 0) av

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

# ► LTI-modeller — översikt

Vi kan nu komplettera vår “karta” över olika LTI-modeller, interna och externa:

$$\begin{array}{ccc} a\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = b\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\ & & \downarrow G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \\ y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s) \\ \uparrow g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) & & \uparrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & & Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{array}$$

Φ-matrisen – vad är det, vad används den till?

# ► Diskretisering av tillståndsmodeller

Anta vi har en tillståndsmodell för vår process (anta  $D = 0$ ):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4}$$

Om processen styrs av en dator, så är **styrsignalen styckvis konstant**:

$$u(t) = u(kh), \quad kh \leq t < (k+1)h$$

Om detta utnyttjas i den allmänna lösningen till (4), nämligen

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

så fås (sätt  $t = (k+1)h$ ,  $t_0 = kh$ , utnyttja att styrsignalen är konstant över intervallet, samt välj till sist  $h = 1$ ):

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + \left( \int_0^h e^{A\tau}B d\tau \right) u(k)$$

## ► Tidsdiskret tillståndsmodell

Resultatet av diskretiseringen är en tidsdiskret tillståndsmodell, som är en *exakt* beskrivning av processen *vid samplingstidpunkterna*:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

där

$$F = e^{Ah} \quad G = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

- Systemets överföringsfunktion är

$$H(z) = C(zI - F)^{-1}G$$

- Polerna ges av egenvärdena till matrisen  $F = e^{Ah}$
- Egenvärdena till  $F$  är  $\{e^{\lambda_i h}\}$ , där  $\{\lambda_i\}$  är egenvärdena till  $A$ . Transformationen från s-planen till z-planen är alltså:

$$z = e^{sh}$$

Notera att stabila poler ( $\text{Re } s < 0$ ) avbildas på stabila poler ( $|z| < 1$ )!

# ► Diskretisering: egenskaper

Diskretisering av tillståndsmodell:

- Ger en tidsdiskret tillståndsmodell, som är en exakt beskrivning i samplingstidpunkterna
- Polerna avbildas enligt  $z = e^{sh}$  (t ex VHP  $\rightarrow$  enhetscirkeln)
- Ett stabilt system förblir stabilt efter tidsdiskretiseringen

De enkla diskretiseringsmetoderna (Euler framåt, Euler bakåt, Tustin) kan ses som approximationer av relationen  $z = e^{sh}$ :

$$z = e^{sh} \approx 1 + sh \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(z - 1)$$

$$z = e^{sh} = \frac{1}{e^{-sh}} \approx \frac{1}{1 - sh} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(1 - z^{-1})$$

$$z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx \frac{1 + sh/2}{1 - sh/2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Med Tustins approximation avbildas stabila poler på stabila, tidsdiskreta poler (och instabila på instabila).

# Diskreta LTI-modeller — översikt

Vi kan nu komplettera vår “karta” över olika LTI-modeller i det tidsdiskreta fallet:

$$a(q)y(k) = b(q)u(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} a(z)Y(z) = b(z)U(z)$$

$$\downarrow H(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i) \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

$$\uparrow h(k) = CF^{k-1}G$$

$$\uparrow H(z) = C(zI - F)^{-1}G$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \begin{aligned} z(X(z) - x(0)) &= FX(z) + GU(z) \\ Y(z) &= CX(z) \end{aligned}$$

$$F = e^{Ah} \uparrow G = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

# Tidsförlopp, stegsvar

- ▶ Ett första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

har stegsvaret  $y(t) = K(1 - e^{-t/T})$ . Utsignalen når c:a 2/3 av sitt slutvärde efter tiden  $T$  (*tidskonstanten*).

- ▶ Ett andra ordningens system

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

har i fallet  $0 < \zeta < 1$  komplexvärda, stabila poler och stegsvaret är

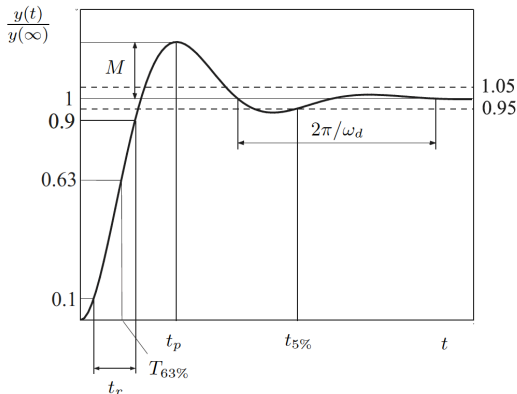
$$y(t) = K(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta))$$

Notera tolkningarna av den *relativa dämpningen*  $\zeta$  och den *odämpade självsvängningsfrekvensen*  $\omega_n$ !

# Stegsvar

Begrepp som är viktiga för att beskriva insvängningen av ett stegsvar:

- ▶ *Stigtiden*  $t_r$  (eng. *rise time*)
- ▶ *Insvängningstiden*  $t_{5\%}$  (*settling time*)
- ▶ Ekvivalent tidskonstant  $T_{63\%}$
- ▶ (Relativ) *översläng*  $M$  (*overshoot*)
- ▶ Dämpad självsvängningsfrekvens  $\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$

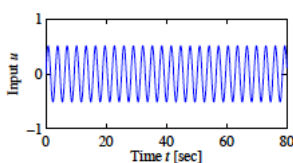




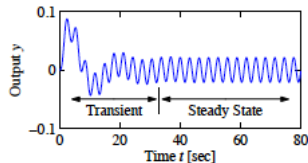
# Frekvenstrogenhet

För ett *stabil* LTI-system gäller:

- Om insignalen är en sinussignal, så är utsignalen *stationärt* en sinussignal med samma frekvens.

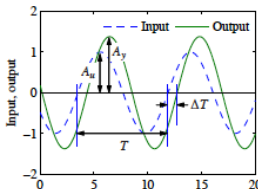


(a) Input



(b) Output

- Den stationära utsignalen karakteriseras av *förstärkningen* och *fasförskjutningen* relativt insignalen.



# ► Frekvensanalys

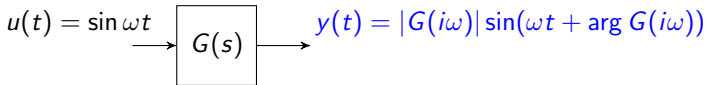
Frekvensanalysen bygger på användning av superpositionsprincipen:

1. Approximera insignalen som en viktad summa av "enkla" signaler: för en *periodisk* signal med perioden  $T = 2\pi/\omega_0$  kan vi använda en *Fourier-serie*:

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

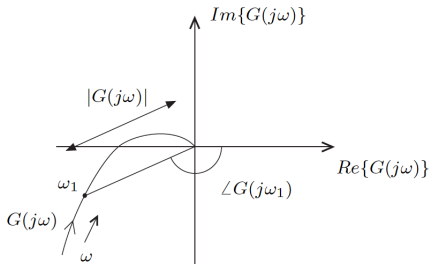
2. Beräkna utsignalerna för de enkla insignalerna, dvs i detta fallet sinussignaler
3. Beräkna linjärkombinationen (den viktade summan) av dessa utsignaler

- För icke-periodiska signaler får vi använda Fourier-transformen.
- För steg 2 ovan räcker det för stabila system att bestämma förstärkning  $|G(i\omega)|$  och fasförskjutning  $\arg G(i\omega)$ :



## ► Frekvenskurva

Frekvensanalysen bygger alltså på kunskap om *frekvenskurvan*  $G(i\omega)$ ,  $\omega \in [0, \infty]$ . Denna kan åskådliggöras som en kurva i det komplexa talplanet, ett *Nyquist-diagram*:



- ▶ Används vid stabilitetsundersökningar med Nyquistkriteriet.
- ▶ En nackdel med Nyquistdiagrammet är att beroendet av  $\omega$  inte framgår explicit.

## Amplitud/fas i Nyquistdiagram?

# ► Bodediagram

Frekvenskurvan kan också visas i ett *Bode-diagram*, som i två grafer visar hur den komplexa funktionen  $G(i\omega)$  beror av  $\omega$ :

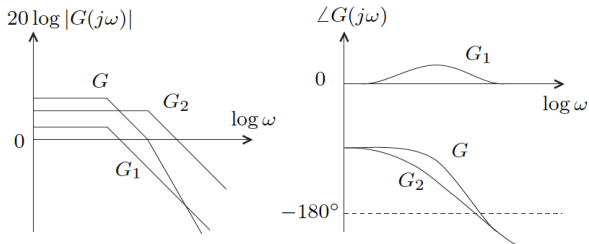
1. Amplituddiagram:  $20 \log |G(i\omega)|$  (dB) mot  $\log \omega$
2. Faskurva:  $\arg G(i\omega)$  mot  $\log \omega$

I Bodediagrammet adderas produkter av överföringsfunktioner i "y-led":

$$G(i\omega) = G_1(i\omega)G_2(i\omega) \Rightarrow$$

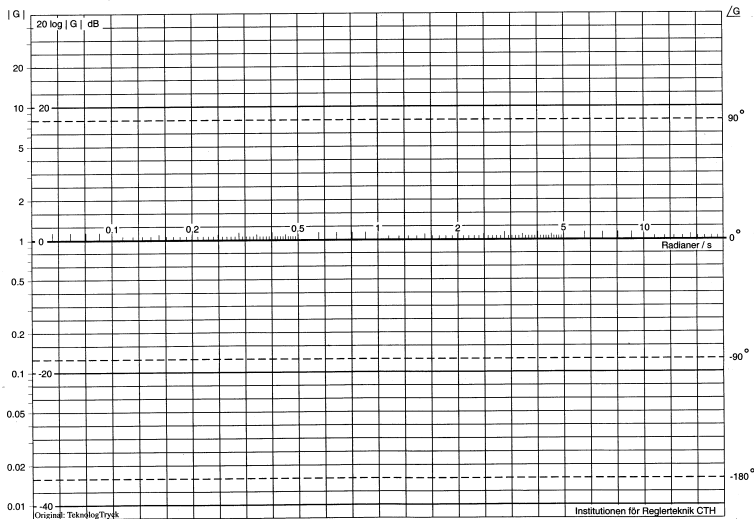
$$20 \log |G(i\omega)| = 20 \log |G_1(i\omega)| + 20 \log |G_2(i\omega)|$$

$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega)$$



# ► Bodediagram

Bodeform för  $G(s)$ ? Y-axeln i Bodediagram – logaritmisk eller ej?



# ► Frekvenskurvor: några användbara fakta

- $G(0)$  är den *statiska förstärkningen*
- Om  $G(s)$  innehåller en eller flera integratorer, så gäller  $|G(i\omega)| \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$
- $G(s)$  är av *typ  $n$*  om den innehåller  $n$  rena integratorer (faktorn  $\frac{1}{s^n}$ )  
 $\Rightarrow \arg G(i\omega) \rightarrow -n \cdot \frac{\pi}{2}, \omega \rightarrow 0$
- $|G(i\omega)| \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$  om nämnarens gradtal större än täljarens ( $G(s)$  kallas då strikt proper)
- $\arg G(i\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot (\text{antal poler} - \text{antal nollställen}), \omega \rightarrow \infty$
- Bodes amplitud-fas-relationer för minimumfas-system:  
$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty f(\omega) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} d \log \omega \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \Big|_{\omega=\omega_0},$$
  
där  $f(\omega) = \frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|$

## Återkopplingens möjligheter...

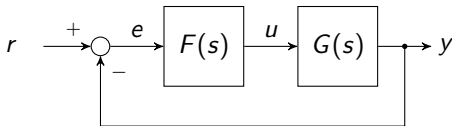
- ▶ Minska effekten av osäkerhet (komponentvariationer, störningar)
- ▶ Forma systemets dynamik (t ex snabba upp, stabilisera)

... och faror:

- ▶ Destabilisering
- ▶ Givarbrus

# Blockschema och kvarstående fel

Ett enkelt återkopplat system:



Reglerfelet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s),$$

där  $L(s) = F(s)G(s)$  är *kretsöverföringen* (eng. *open loop transfer function*).  
Det *kvarstående felet*, dvs det stationära felet då börvärdet  $r$  är ett enhetssteg, kan beräknas med slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)}$$



# Nyquists fullständiga stabilitetskriterium

Om  $L$  har poler i HHP måste fullständiga Nyquist-kriteriet användas. Kriteriet bygger på argumentvariationsprincipen som ger en relation mellan argumentet för en funktion längs en sluten kurva och antalet nollställen och singulariteter hos funktionen i området som omsluts av kurvan.

Låter man funktionen vara  $1 + L$  och området hela HHP får man

$$Z = N + P$$

$Z$  = antal nollställen i HHP hos  $1 + L$

= “ *instabila* poler hos slutna systemet

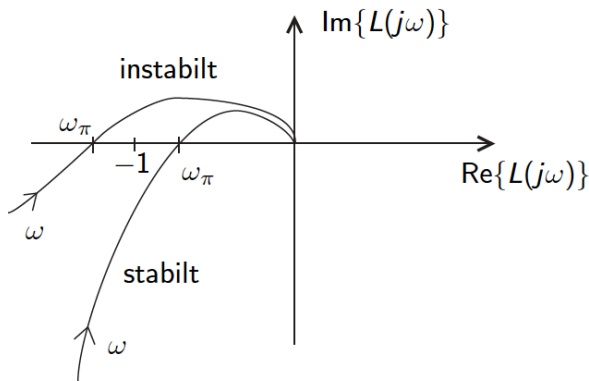
$P$  = “ *instabila* poler hos  $L$

$N$  = “ medurs omslingringar av  $-1$  för  $L(s)$   
då  $s$  genomlöper Nyquists kontur:

# Nyquists förenklade stabilitetskriterium

Låt  $L(s) = F(s)G(s)$  vara kretsöverföringen i ett enkelt återkopplat system (dvs återkopplat med -1).

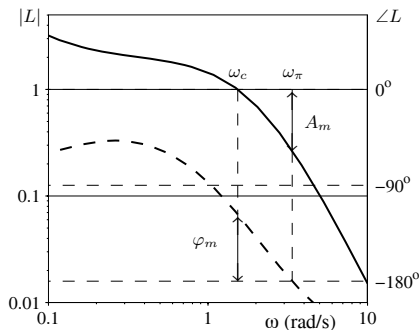
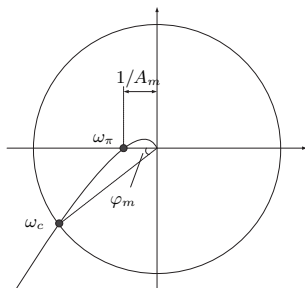
Om  $L(s)$  inte har poler i HHP, så är det återkopplade systemet stabilt om  $L(j\omega)$  inte passerar till vänster om punkten -1 i komplexa talplanet.



# ► Stabilitetsmarginaler

Stabilitetsmarginaler i Bode och Nyquist?

Hur korrelerar Nyquistkurvan med systemets svängighet?



Ett annat mått är känslighetsfunktionens maximala värde:

$$M_S = \max_{\omega} |S(i\omega)| = \frac{1}{\min_{\omega} |1 + L(i\omega)|}$$

## ► Återkopplingens uppgifter

Vi vill åstadkomma följande med återkopplingen:

1. Följa börvärdets förändringar med tillräcklig snabbhet
2. Begränsa inverkan av störningar och processförändringar
3. Använda rimligt stora styrsignaler
4. Ge det återkopplade systemet tillräckliga stabilitetsmarginaler

# ► Specifikationer (exempel)

## ► Snabbhet:

- Stigtid  $T_s$  ( $r$  till  $y$ )
- Insvägningstid  $T_{5\%}$  ( $r$  till  $y$ )
- Skärfrekvens  $\omega_c$
- Bandbredd  $\omega_b$  för  $T(s)$  ( $r$  till  $y$ )

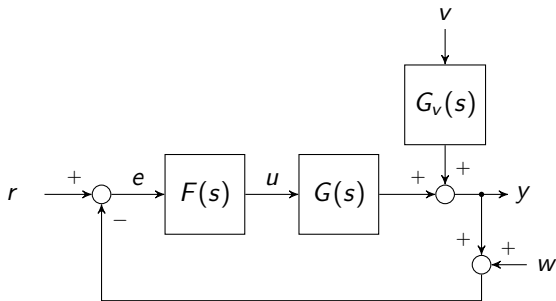
## ► Stabilitet:

- Amplitudmarginal  $A_m$  (2-4 ggr)
- Fasmarginal  $\varphi_m$  ( $30 - 60^\circ$ )
- Max översläng  $M$  ( $r$  till  $y$ )
- Känslighetsfunktionens maximala värde  $M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)|$
- Resonanstopp  $M_p = \max_{\omega} |T(j\omega)|$  (påverkar robusthet)

Hur vet man om kraven som ställs är omöjliga att uppnå?

Varför ger högre  $\omega_c$  ett snabbare system?

# ► Känslighetsfunktioner



$$Y(s) = T(s)[R(s) - W(s)] + S(s)G_v(s)V(s)$$

$$E(s) = S(s)[R(s) - W(s) - G_v(s)V(s)]$$

$$U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}[R(s) - W(s) - G_v(s)V(s)]$$

$$\frac{dT/T}{dL/L} = S(s)$$

$$L(s) = F(s)G(s)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$S(s) + T(s) = 1$$

## ► Återkopplingens uppgifter

Kraven på återkopplingen leder till krav på känslighetsfunktionerna:

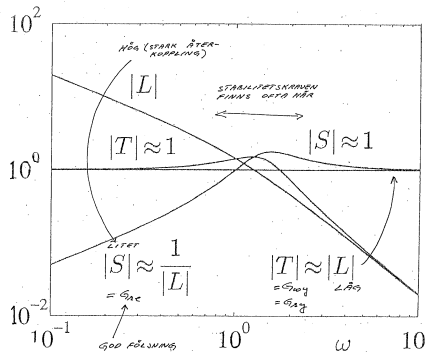
1. Följ börvärden:  $E(s) = S(s)R(s) \Rightarrow$  gör  $S$  litet!
2. Reducera inverkan av processtörningar:  $Y(s) = S(s)V(s) \Rightarrow$  gör  $S$  litet!  
( $Y_{ol}(s) = V(s)$  och  $Y_{cl}(s) = S(s)V(s)$  medför att  $S$  anger förbättringen med återkoppling!)
3. Reducera inverkan av parametervariationer:  $\frac{dT/T}{dL/L} = S(s) \Rightarrow$  gör  $S$  litet!
4. Begränsa inverkan av mätstörningar:  
 $Y(s) = T(s)W(s)$ ,  $U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}W(s) \Rightarrow$  gör  $T$  litet!
5. Använd rimligt stora styrsignaler:  
 $U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}[R(s) - W(s) - V(s)] \Rightarrow$  gör  $T/G$  litet!

$S + T = 1 \Rightarrow$  det går inte att göra  $S$  och  $T$  små samtidigt!

# ► Designkompromisser

Designkraven 1–3 gäller framför allt lägre frekvenser, medan kraven 4–5 gäller främst högre frekvenser. Alltså: gör  $S$  litet för lägre frekvenser och  $T$  litet för högre!

Detta leder till följande principiella utseende för  $S$ ,  $T$  och  $L$ :



Systemets stabilitetsegenskaper avgörs av utseendet i mellanfrekvensområdet, dvs runt  $\omega_c$ .



# Kompensering i frekvensplanet

Modifiering av kretsöverföringen i vissa frekvensintervall kan åstadkommas med t ex:

- En *fasretarderande* länk (lagfilter) ger hög förstärkning för låga frekvenser:

$$F(s) = a \frac{1 + sT}{1 + asT}, \quad a > 1$$

Uttrycket fasretarderande kommer av att en negativ fasförskjutning fås, framför allt inom frekvensintervallet  $[1/aT, 1/T]$ .

Jfr. PI-regulator!

- En *fasavancerande* länk (leadfilter) ger ett positivt fastillskott inom frekvensintervallet  $[1/T, b/T]$ :

$$F(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT/b}, \quad b > 1$$

Jfr. PD-regulator!

## ► Val av regulatortyp

Ska vi använda en  $P$ ,  $PI$ ,  $PD$  eller  $PID$  regulator?

Använd enklast möjliga  
regulatorstruktur!

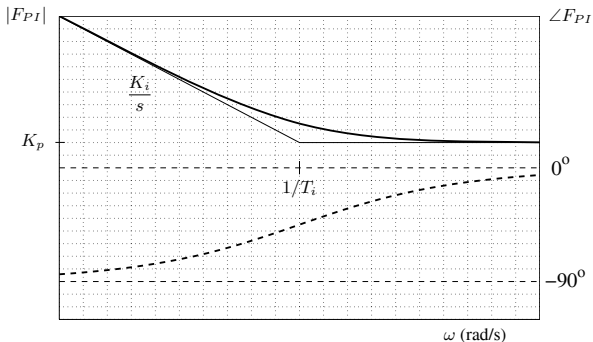
Använd enklaste regulatortyp som löser problemet.

- Krav på att bli av med kvarstående fel medför ofta krav på integralverkan i regulatorn.
- Krav på snabbhet eller stor fasmarginal medför ofta krav på derivataverkan i regulatorn.

## ► PI-reglering

Ökad I-verkan innebär bättre kompensering av lågfrekventa processtörningar samt minskade stabilitetsmarginer

$$F_{PI}(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i}) = K_i \frac{(1 + T_i s)}{s}$$

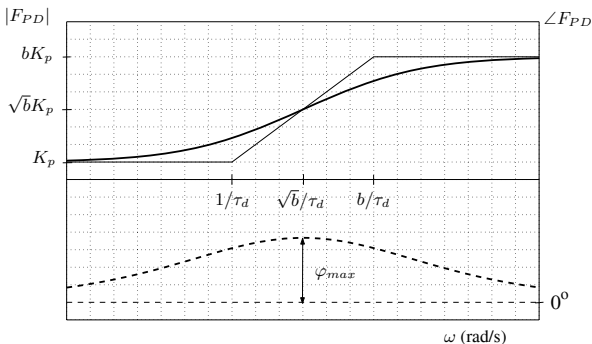


PI-regulator eller lagfilter? När räcker inte lagfilter till?

## ► PD-reglering

Ökad D-verkan innebär ökade stabilitetsmarginaler och snabbhet samt ökad styrsignalaktivitet

$$F_{PD}(s) = K_p \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_p \frac{(1 + s\tau)}{(1 + s\tau/b)} \quad \text{lead-filter}$$



Varför behövs ett filter på D-delen hos en PD-regulator?

# PID-regulatorn

Används för att kompensera lågfrekventa processtörningar samt förbättra stabilitetsmarginalerna och prestanda.

## *Parallellkoppling*

$$F_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

## *Seriekoppling PI- och PD-regulatorer*

$$F_{PIPD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_i}{s\tau_i} \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} = \frac{K_p}{\tau_i} \frac{1 + s(\tau_i + \tau_d) + s^2\tau_i\tau_d}{s(1 + s\tau_d/b)}$$

Det finns flera alternativa metoder att dimensionera t ex PID-regulatorer:

- ▶ Kompensering eller modifiering av kretsöverföringen
- ▶ Flytta en punkt i Nyquistdiagrammet
- ▶ Ziegler-Nichols svängningsmetod
- ▶ Lambda-metoden (vanlig i processindustrin)
- ▶ Optimering enligt olika kriterier, som uttrycker designkompromisserna i frekvensplanet

PID-design?

## ► Flytta en punkt i Nyquistdiagrammet

En vanlig teknik att dimensionera PID-regulatorer är att specificera en punkt på kretsöverföringens frekvenskurva. På detta sätt kan 2 parametrar bestämmas i regulatorn:

1. Specificera en punkt för kretsöverföringen,  $L(i\omega_0)$
2. Bestäm parametrarna i regulatorn genom villkoren

$$\begin{aligned}|F(i\omega_0)| &= |L(i\omega_0)|/|G(i\omega_0)| \\ \arg F(i\omega_0) &= \arg L(i\omega_0) - \arg G(i\omega_0)\end{aligned}$$

Ett exempel på detta är att specificera fasmarginal  $\varphi_m$  och skärfrekvens  $\omega_c$ . OBS! Det finns flera olika varianter av detta, men "grundreceptet" är detsamma enl ovan!

PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

- Specifikation av  $\omega_c$  och  $\varphi_m$  (Ruta 8.1 i boken):

$$|L(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)| K_p \frac{\sqrt{1 + \omega_c^2 T_i^2}}{\omega_c T_i} = 1$$

$$\arg L(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) - 90^\circ + \arctan(\omega_c T_i) = -180^\circ + \varphi_m$$

- Specifikation av  $\omega_\pi$  och  $A_m$  ger i princip samma som ovan:

$$|L(j\omega_\pi)| = |G(j\omega_\pi)| K_p \frac{\sqrt{1 + \omega_\pi^2 T_i^2}}{\omega_\pi T_i} = 1/A_m$$

$$\arg L(j\omega_\pi) = \arg G(j\omega_\pi) - 90^\circ + \arctan(\omega_\pi T_i) = -180^\circ$$



En PD-regulator ges av

$$F(s) = K_p \left( 1 + \frac{sT_d}{1 + sT_f} \right) = K_p \frac{1 + s(T_d + T_f)}{1 + sT_f} = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s/b}, \quad b > 1$$

Anta att  $\omega_c$  och  $\varphi_m$  är specificerade (Ruta 8.3 i boken):

1. Bestäm behovet av faslyft vid skärfrekvensen:

$$\varphi_{max} = \varphi_m - (\arg G(i\omega_c) + 180^\circ); \quad b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}}$$

2. Placera maximalt faslyft vid  $\omega = \omega_c$ :  $\sqrt{b}/\tau_d = \omega_c$

$$\sqrt{b}/\tau_d = \omega_c$$

3. Bestäm  $K_p$  så att  $\omega_c$  blir det önskade:  $|L(j\omega_c)| = K_p \sqrt{b} |G(j\omega_c)| = 1$

$$|L(j\omega_c)| = K_p \sqrt{b} |G(j\omega_c)| = 1$$

## P-regulator

- + Enkel
- Dålig statisk nogrannhet, d v s om  $r$  konstant så blir i regel  $y \neq r$   
(kan förbättras med börvärdesfaktor  $e = k_r r - y$ )

## PI-regulator

- + God statisk nogrannhet, d v s om  $r$  konstant blir i regel  $y = r$
- + Långsamma processtörningar regleras bort väl
- Försämrade stabilitetsmarginaler (I-verkan medför ökad negativ fasvridning)

## D-verkan

- + Förbättrad stabilitet
- + Snabbare reglering möjlig
- Ökad känslighet för mätstörningar

Integralverkan i regulatorn vs. i processen?

## ► Tillståndåterkoppling

Då tillstånden är mätbara kan vi använda *tillståndåterkoppling*:

$$\text{Processen} : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

$$\text{Regulatorn} : u = -L_u x + K_r r(t),$$

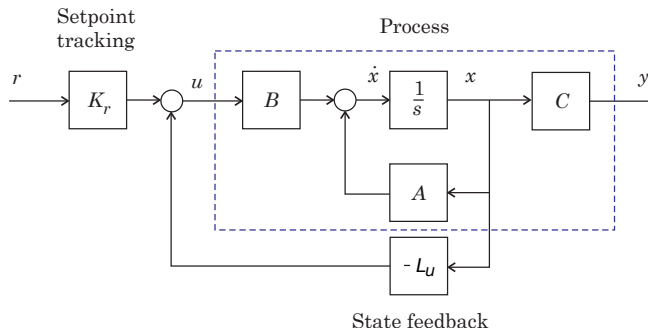
Där  $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$  och  $K_r$  är en skalär.

Det återkopplade systemet ges nu av

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL_u)x + BK_r r(t) \\ y &= Cx \end{cases}$$

Bestäm  $l_1, \dots, l_n$  så att det återkopplade systemet får önskade poler, polerna ges av egenvärdena till matrisen  $A - BL_u$ .

# Tillståndsåterkoppling

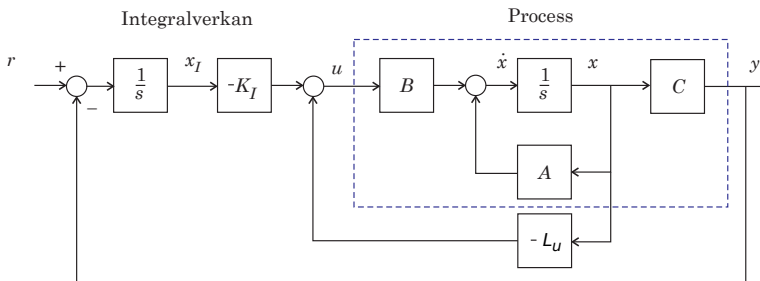


Laplacetransformering av återkopplade systemets tillståndsekvation ger

$$\begin{aligned} sX(s) &= (A - BL_u)X(s) + BK_r R(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G_{ry}(s) = C[sI - A + BL_u]^{-1}BK_r$$

Korrekt stationär förstärkning, d.v.s.  $G_{ry}(0) = I$ , ger  $K_r = 1/(C(BL_u - A)^{-1}B)$ .

# Tillståndsåterkoppling med integralverkan



Inför integraltillstånd

$$x_I(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

och skapa en utökad tillståndsmodell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

för vilken återkopplingsmatrisen  $[L_u \quad K_I]$  beräknas.

## ► Alternativa regulatorstrukturer

Det finns många sätt att “bygga” ett reglersystem, förutom den enkla, återkopplade kretsen som vi studerat hittills. Här är några exempel:

### ► Inre återföring:

- En intern mätsignal är tillgänglig och kan användas för en “inre” återkoppling
- Ett typiskt exempel på detta är hastighetssignalen i en motordrift

### ► Kaskadreglering:

- Används ofta då man har tillgång till en extra mätning, som ligger “närmare” styrsignalen än den slutliga utsignalen
- Genom att sluta en inre reglerloop, som är snabbare än den yttre, kan man förbättra prestanda
- Ett exempel är reglering av Balanduino-roboten!

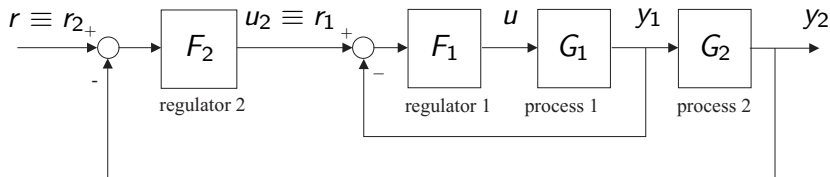
### ► Framkoppling:

- Återkoppling bygger på att observerade (mätta) felaktigheter korrigeras
- Om en störning mäts, så finns möjlighet att kompensera denna “i förväg”
- Denna s.k. framkoppling används oftast tillsammans med återkoppling

# Kaskadreglering

Om en process består av delsystem i serie (kaskad) med möjlighet att mäta mellan delsystemen använder man dessa mätningar för en intern återkoppling.

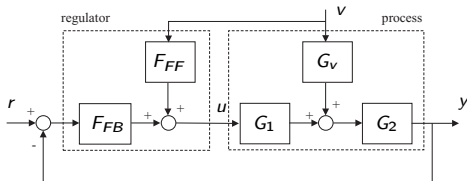
⇒ Snabbare system totalt.



Om man kan ha en hög förstärkning i den inre loopen så kan man vid designen av den yttre bortse från den inre återkopplingen.

# Framkoppling (av störsignaler)

Mätning av en störning utnyttjas för att bättre kompensera bort effekterna av störningen, t ex mätning av utomhustemperatur vid reglering av inomhustemperatur.



Vi ser att störningen  $v$  kompenseras bort fullständigt om

$$F_{FF} G_1 + G_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{FF} = -\frac{G_v}{G_1}$$

Problem:

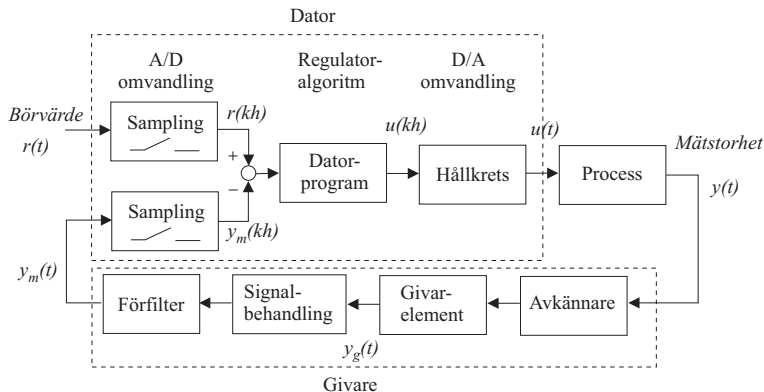
1. Ej för stora modellfel.
2.  $F_{FF}$  stabil  $\Rightarrow$  nollställena till  $G_1 \in \text{VHP}$ .
3.  $F_{FF}$  kausal  $\Leftrightarrow$  dödtid hos  $G_v \geq$  dödtid hos  $G_1$ .
4.  $F_{FF}$  proper  $\Leftrightarrow$  grad(nämnare)  $\geq$  grad(täljare).

(1) Gör en försiktig kompensering. (2-4) Sträva efter att minimera påverkan i det frekvensområde där de huvudsakliga störningarna är. Är störningarna lågfrekventa ger ofta  $F_{FF} = -G_v(0)/G_1(0)$  ändå en markant förbättring.



# Datorimplementering av reglersystem

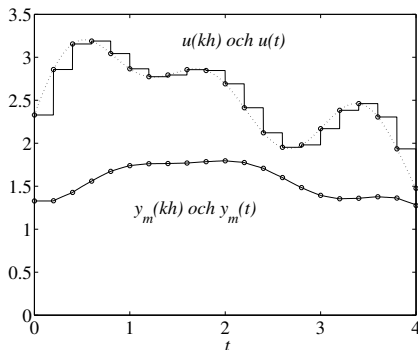
Ett reglersystem implementeras oftast med dator/mikrocontroller:



# Samplad reglering

Implementering med dator innebär:

- ▶ *Sampling* av processvariabler (A/D-omvandling)
- ▶ *Hållning* av styrvariabler (D/A-omvandling)





# Filter-tillämpningar

- ▶ Reducera brus i signaler
- ▶ Spektral omformning i kommunikationssystem
- ▶ Signaldetektering i radar, telekommunikation mm
- ▶ Spektralanalys för exempelvis talsignaler
- ▶ Komponenter i reglersystem

Ett filters utsignal vid tidpunkten  $t$ ,  $y(t)$ , beror i allmänhet av insignalens ( $x(\cdot)$ ) värden fram till och med tidpunkten  $\tau$ :

$$y(t) = y(x(s), s \leq \tau)$$

Man brukar skilja mellan följande fall:

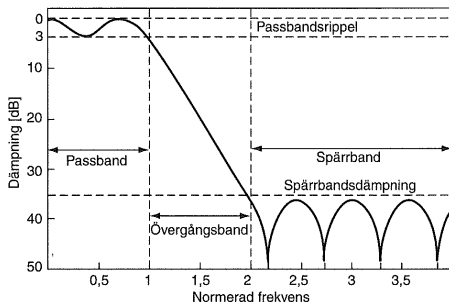
$\tau = t$  : filtrering

$\tau < t$  : prediktion

$\tau > t$  : glättning (smoothing)

# Design av lågpasfilter

Lågpasfiltret specificeras genom krav i *passbandet*  $0 \leq \omega \leq \omega_p$  respektive *spärrbandet*  $\omega \geq \omega_s$ :



Med toleransparametrarna  $\epsilon$  (*ripple* i passbandet) och  $\delta$  (*dämpningen*) kan kraven sammanfattas enligt följande:

$$1 - \epsilon \leq |H(i\omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$
$$|H(i\omega)| \leq \delta, \quad |\omega| \geq \omega_s$$

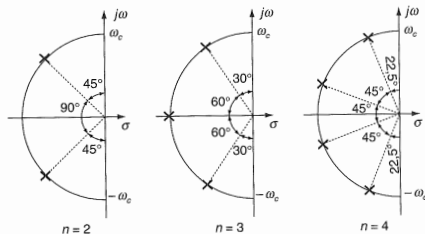
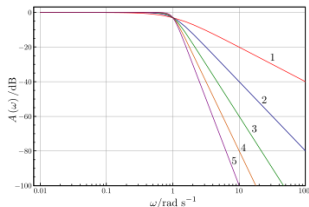
# Butterworthfiltret

Butterworthfiltret av ordning  $n$  och brytfrekvens (*cut-off frequency*)  $\omega_c$ :

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Filtrets poler:

$$p_k = \omega_c \cdot e^{i(\pi/2 + \pi/(2n) + \pi(k-1)/n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$



# Transformation av LP-filtret

Från LP-filtret kan andra typer av filter fås genom enkla transformationer:

$$\text{LP} \rightarrow \text{LP} : s \rightarrow s/\omega_c$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{HP} : s \rightarrow \omega_c/s$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{BP} : s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_L\omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)} = \frac{s^2 + \omega_M^2}{Bs}$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{BS} : s \rightarrow \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L\omega_H} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}$$

- Utgå från det analoga filtret med överföringsfunktionen  $H_c(s)$ . Transformera till motsvarande tidsdiskreta filter  $H(z)$  på något av följande sätt ( $h$  är samplingsintervallet):

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{h} \quad \text{bakåtdifferens ("Euler bakåt")}$$

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{h} \quad \text{framåtdifferens ("Euler framåt")}$$

$$s \rightarrow \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{bilinjär eller Tustins transformation}$$

- Designa ett tidsdiskret filter, t ex:

$$y(t) = \frac{1}{n}(x(t) + x(t-1) + \dots + x(t-n+1)) \quad (\text{glidande medelvärde})$$

$$y(t) = \alpha y(t-1) + (1 - \alpha)x(t) \quad (\text{exponentialfilter})$$



## ► Diskretisering av regulator

De approximativa diskretiseringsmetoderna används ofta när man skall "översätta" en tidskontinuerlig regulator till motsvarande tidsdiskreta form.

Exempel: Diskretisering av PID-regulator

$$U(s) = \underbrace{K_P(R(s) - Y(s))}_{U_P} + \underbrace{\frac{K_I}{s}(R(s) - Y(s))}_{U_I} - \underbrace{K_D s Y(s)}_{U_D}$$

Notera att man ofta skippar D-verkan på  $r(t)$ !

$$U_P : u_P = K_P(r(k) - y(k))$$

$$U_I : s = \frac{q-1}{h} \Rightarrow u_I(k) = \frac{K_I h}{q-1}(r(k) - y(k))$$

$$\Rightarrow u_I(k+1) = u_I(k) + K_I(r(k) - y(k))$$

$$U_D : s = \frac{1-q^{-1}}{h}$$

$$\Rightarrow u_D(k) = K_D \frac{1-q^{-1}}{h} y(k) = K_D \frac{y(k) - y(k-1)}{h}$$

Förutom själva regleralgoritmen behöver man tänka på bl.a. följande saker vid implementeringen:

- ▶ Val av samplingsintervall (tumregel:  $\omega_s = (10 - 20) \cdot \omega_B$ )
- ▶ Anti-windup
- ▶ Ryckfri övergång (eng. *bumpless transfer*)

# Var används reglertekniken?

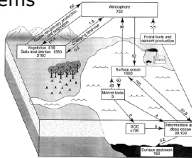
Robotics and autonomous systems



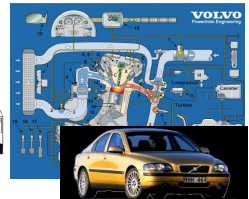
Power systems



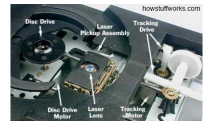
Environmental systems



Automotive systems



Electronic and optical systems

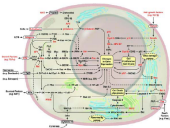


Process and pulp & paper industry



Aerospace

Molecular and chemical processes

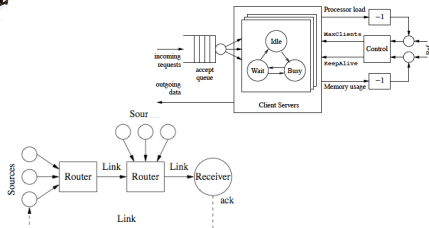
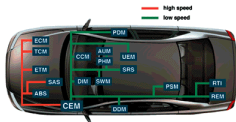


Information systems



# Reglerteknik inom D-området

- Realisering av styrsystem med datorer
- Styrning av informations/data/kommunikationssystem



# Några trender

- ▶ Reglersystem i nätverk (*networked control systems*)
- ▶ Komplexa beräkningar (t ex optimering) i reglerloopen
- ▶ Styrning av stora, komplexa system (t ex elkraftnätet, *smart grid*, transportnätet)
- ▶ Distribuerad styrning, autonomi + koordinering
- ▶ Adaptiva och lärande system
- ▶ Icke-tekniska tillämpningar (biologi, medicin)

# Vad finns det mer att lära?

- ▶ ESS101 *Modelling and simulation* (fysikaliskt och experimentellt modellbygge)
- ▶ SSY165 *Discrete event systems* (DES, händelsediskreta system)
- ▶ SSY285 *Linear control system design* (tillståndsmetodik, flera in- och utsignaler)
- ▶ SSY281 *Model predictive control* (“optimering i reglerloopen”)
- ▶ SSY191 *Model based development of cyber-physical systems* (modellbaserad utveckling och implementering av styrsystem, realtidsaspekter)
- ▶ ESS076 *Robust and nonlinear control* (olinjära system, robust reglering)

Masterprogrammet *Systems, Control & Mechatronics* (MPSYS) ackrediterat av D-programmet.

Exjobb: fler och fler arbeten innehåller stora delar av algoritmer, beräkningar och optimering — lämpligt för D:are!

LYCKA TILL!