Föreläsning 6: Tillståndsmodeller

- Repetition
- Lösning av tillståndsekvationen
- Översikt LTI-modeller
- Linjärisering
- Diskretisering av tillståndsmodeller

Lärandemål:

- Analysera linjära systems egenskaper i tids- och frekvensplanet och transformera mellan olika representationsformer.
- Formulera dynamiska modeller för enklare tekniska system, såväl i form av tillståndsekvationer som överföringsfunktioner.
- Linjärisera olinjära modeller.

Repetition – tillståndsmodeller

En tillståndsmodell är en *intern* modell – tillståndsvariablerna ger mer information än bara insignal-utsignal-sambandet.

En *olinjär* tillståndsmodell ges av:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= g(x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

En *linjär* tillståndsmodell ges av:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

I båda fallen gäller att:

- $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ är *tillståndsvektorn* och n modellens *ordningstal*
- $u(t)$ är insignalen (som kan vara en vektor)
- $y(t)$ är utsignalen (som kan vara en vektor)

Från linjär tillståndsmodell till överföringsfunktion

Tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Polerna till $G(s)$ ges av *egenvärdena* till matrisen A, dvs rötterna till den karakteristiska ekvationen $\det(sI - A) = 0$.

Lösning av tillståndsekvationen

Den linjära tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

har lösningen

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (2)$$

där *övergångsmatrisen* $\Phi(t)$ $(n \times n)$ definieras som lösningen till diff-ekvationen

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t), \qquad \Phi(0) = I \qquad (3)$$

I det skalära fallet ges lösningen av $\Phi(t) = e^{at}$. Lösningen till (3) i det allmänna fallet betecknas även e^{At}, *matrisexponentialfunktionen*.

Om initialtillståndet är 0, följer av (2) att insignal-utsignal-sambandet ges av

$$y(t) = \int_0^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

LTI-modeller — översikt

Vi kan nu ge den kompletta "kartan" över olika LTI-modeller, *interna* och *externa*:

$$
\begin{array}{ccc}
a(\frac{d}{dt})y(t) = b(\frac{d}{dt})u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\
 & & \Big\downarrow G(s)=\frac{b(s)}{a(s)} \\
y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s) \\
\Big\uparrow g(t)=Ce^{At}B+D\delta(t) & & \Big\uparrow G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \\
\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)+Du(t) \end{aligned} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \begin{aligned} sX(s)-x(0) &= AX(s)+BU(s) \\ Y(s) &= CX(s)+DU(s) \end{aligned}
\end{array}
$$

Relation mellan interna och externa modeller

- En tillståndsmodell (intern modell) har mer detaljrikedom än en insignal-utsignal-modell (extern modell), t ex överföringsfunktion
- En konsekvens av detta är att två tillståndsmodeller $S_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ och $S_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ kan ge samma överföringsfunktion:

$$C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

Två frågor uppstår naturligt:

1. Hur skiljer sig S_1 och S_2 åt? Svaret är att systemen bara skiljer sig åt genom en koordinattransformation (olika val av tillståndsvariabler).
2. Hur går man från en överföringsfunktion till en tillståndsmodell? Svaret är att man kan gå många olika vägar; ett sätt är att använda s.k. kanoniska former, som man kan skriva upp direkt från överföringsfunktionen – se boken!

Linjärisering

Den olinjära tillståndsmodellen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

kan linjäriseras kring en *stationär lösning* eller *jämviktslösning* (eng. *steady state, equilibrium*) $(x(t), u(t)) \equiv (x_0, u_0)$ som uppfyller $f(x_0, u_0) = 0$.

Den linjäriserade tillståndsmodellen beskriver systemet i en omgivning till jämviktslösningen
$\big(\Delta x(t) = x(t) - x_0, \Delta u(t) = u(t) - u_0, \Delta y(t) = y(t) - y_0, y_0 = g(x_0, u_0)\big)$:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t)\\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, u_0)} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0, u_0)}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0, u_0)} \qquad D = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(x_0, u_0)}$$

(Dessa beteckningar förklaras i matterepetitionshäftet!)

Diskretisering och simulering av tillståndsmodeller

Anta vi har en tillståndsmodell för vår process (anta $D = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Approximera nu derivatan med en differenskvot:

$$\frac{1}{\Delta t}\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) = Ax(t) + Bu(t)$$

Låt nu $\Delta t = h$ och $t = k \cdot h,\ k = 1, 2, 3 \ldots$, dvs

$$x((k+1)h) = x(kh) + h\big(Ax(kh) + Bu(kh)\big)$$

Om vi slutligen väljer h som tidsenhet, så fås den *tidsdiskreta tillståndsmodellen*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I + hA)x(k) + hBu(k) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

som ger en algoritm för att simulera systemet!