Föreläsning 3: Linjära system II

- Repetition
- Blockschema
- Kvarstående fel
- Återkopplat system, kretsöverföring
- Tidssvar, poler och nollställen, stabilitet
- Linjära tidsdiskreta system, repetition

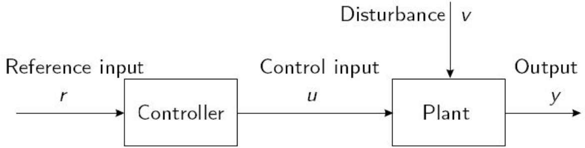
Lärandemål:

- Analysera linjära systems egenskaper i tids- och frekvensplanet och transformera mellan olika representationsformer.
- Förklara funktionen hos ett reglersystem, samt beskriva dess möjligheter och begränsningar; definiera begreppen återkoppling och framkoppling.

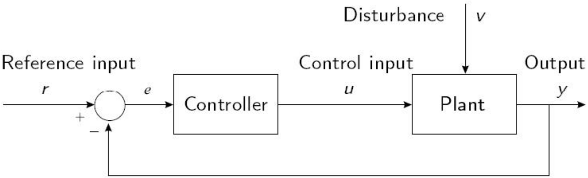
Repetition

Reglerteknik handlar om *styrning* av *dynamiska* system genom *återkoppling*

- Öppen styrning (*open-loop control*)



- Sluten/återkopplad styrning (*closed-loop control*)



Repetition

Linjära, tidsinvarianta system (LTI) kan beskrivas på flera sätt:

- Linjär differentialekvation med konstanta koefficienter (*tidsdomänen*)
- Viktfunktion (*tidsdomänen*)
- Överföringsfunktion (*Laplace-domänen*)

Relationerna mellan dessa olika externa eller insignal/utsignal- modeller kan illustreras så här:

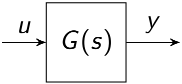
$$
\begin{array}{ccc}
a(\tfrac{d}{dt})y(t) = b(\tfrac{d}{dt})u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\
 & & \Big\downarrow G(s)=\tfrac{b(s)}{a(s)} \\
y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s)
\end{array}
$$

Viktiga begrepp:

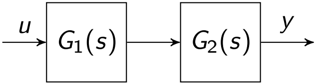
- Poler och nollställen
- Stabilitet

Blockschema

En extern modell med överföringsfunktionen $G(s)$, med insignal u och utsignal y kan beskrivas av en grafisk symbol:

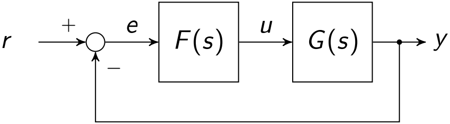


Seriekoppling:



$$\Rightarrow \quad Y(s) = \big(G_1(s)G_2(s)\big) \cdot U(s)$$

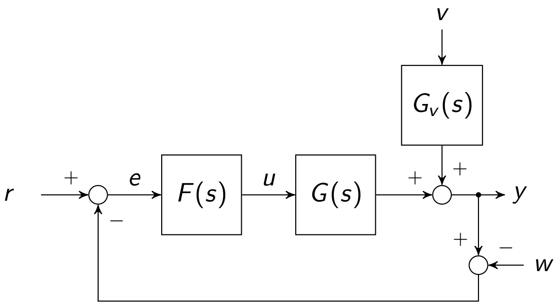
Återkoppling:



$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} R(s)$$

Blockschemaräkning

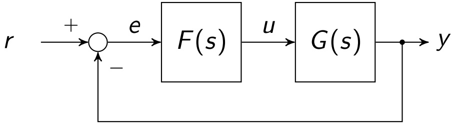
Överföringsfunktioner kan beräknas ur ett blockschema genom att införa hjälpvariabler, teckna samband mellan variablerna, och sedan lösa de resulterande ekvationerna.



$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)U(s) + G_v(s)V(s) \\
U(s) &= F(s)E(s) \\
E(s) &= R(s) - Y(s) + W(s)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad Y = \frac{FG}{1+FG}R + \frac{FG}{1+FG}W + \frac{G_v}{1+FG}V
$$

Kvarstående fel

Ett enkelt återkopplat system:



Reglerfelet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s),$$

där $L(s) = F(s)G(s)$ är *kretsöverföringen* (eng. *open loop transfer function*).
Det *kvarstående felet*, dvs det stationära felet då börvärdet r är ett enhetssteg, kan beräknas med slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + L(s)}$$

Kvarstående fel, forts.

Example (Farthållaren)

För farthållaren gäller:

$$G(s) = \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{ms+b}, \qquad F(s) = K_p + K_I/s$$

Kvarstående fel:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \begin{cases} 1/(1+KK_p/b), & K_I = 0 \\ 0, & K_I > 0 \end{cases}$$

I-delen i regulatorn garanterar alltså att det kvarstående felet blir 0!

Tidsförlopp, stegsvar

- Ett första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

har stegsvaret $y(t) = K(1 - e^{-t/T})$. Utsignalen når c:a 2/3 av sitt slutvärde efter tiden T (*tidskonstanten*).

- Ett andra ordningens system

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

har i fallet $0 < \zeta < 1$ komplexvärda, stabila poler och stegsvaret är

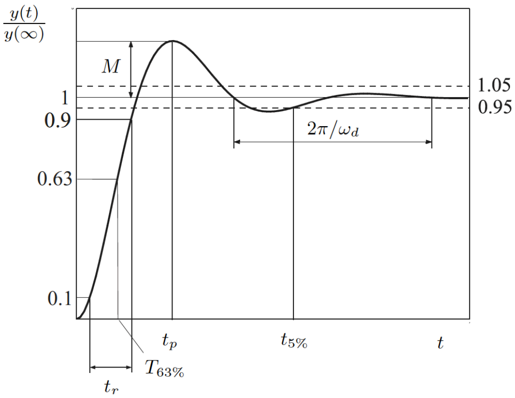
$$y(t) = K\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arccos\zeta)\right)$$

Notera tolkningarna av den *relativa dämpningen* ζ och den *odämpade självsvängningsfrekvensen* ω_n!

Stegsvar

Begrepp som är viktiga för att beskriva insvängningen av ett stegsvar:

- *Stigtiden* t_r (eng. *rise time*)
- *Insvängningstiden* $t_{5\%}$ (*settling time*)
- *Ekvivalent tidskonstant* $T_{63\%}$
- *(Relativ) överslâng* M (*overshoot*)
- *Dämpad självsvängningsfrekvens* $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$



Repetition av linjära, tidsdiskreta system

- Differens-ekvationer
- Z-transformen
- Överföringsfunktion
- Viktfunktion, impulssvar

Differensekvation

En linjär differensekvation av ordning n:

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\ldots+a_ny(k) = b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\ldots+b_nu(k)$$

Varje lösning kan skrivas

$$y(k) = y_p(k) + y_h(k),$$

där $y_p(k)$ är partikulärlösningen och $y_h(k)$ är en lösning till den homogena ekvationen.
Karakteristiska polynomet:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Strukturen på lösningen till den homogena ekvationen ges av

$$y_h(k) = \sum_{i=1}^{m} p_i(k)\lambda_i^k,$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är de skilda nollställena till det karakteristiska polynomet och $n_1, \ldots, n_m$ deras multiplicitet; notera att dessa nollställen kan vara komplexa.
p_i är godtyckliga polynom av grad $\leq n_i - 1$.

Systemet *stabilt* om alla λ_i ligger innanför enhetscirkeln ($|\lambda_i| < 1$ för alla i).

Z-transformen

Differensekvationer kan skrivas i kompakt form med fördröjningsoperatorn q^{-1} (eller ekvivalent dess invers q):

$$(q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_n) y(k) = (b_0 q^n + b_1 q^{n-1} + \ldots + b_n) u(k)$$

Alternativt kan man använda *Z-transformen* av en tidsberoende signal $f(k)$:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}\Big\{f(k-1)\Big\} = z^{-1}F(z) - f(-1)$$

Om systemet är i vila vid $k = 0$ (alla "gamla" (före 0) värden på signalerna är 0) så gäller:

$$Y(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots a_n} U(z) = \frac{b(z)}{a(z)} U(z) = H(z) U(z)$$

där $H(z)$ är systemets *(puls-)överföringsfunktion*.

Tidsdiskreta, externa modeller

Sammanfattning av vad vi gjort så här långt:

$$
\begin{array}{ccc}
a(q)y(k) = b(q)u(k) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & a(z)Y(z) = b(z)U(z) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle H(z)=\frac{b(z)}{a(z)}} \\
y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)u(i) & \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}} & Y(z) = H(z)U(z)
\end{array}
$$

där vi definierat *viktfunktionen* eller *pulssvaret* $h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$.

- Nollställena till $b(z)$ kallas systemets *nollställen*.
- Nollställena till karakteristiska polynomet $a(z)$ kallas systemets *poler* (som alltså bestämmer systemets stabilitet).