Föreläsning 16: Filter

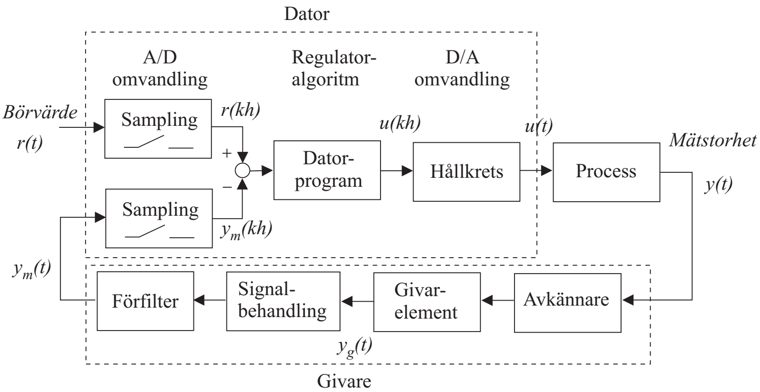
- Analoga filter
- Filterdesign
- Digital realisering
- Tidsdiskreta filter
- Aliasing

Lärandemål:

- Dimensionera vanliga typer av filter beroende på vilket frekvenssvar som önskas.
- Implementera enkla regulatorer med dator, förstå sampling och vikningseffekten.

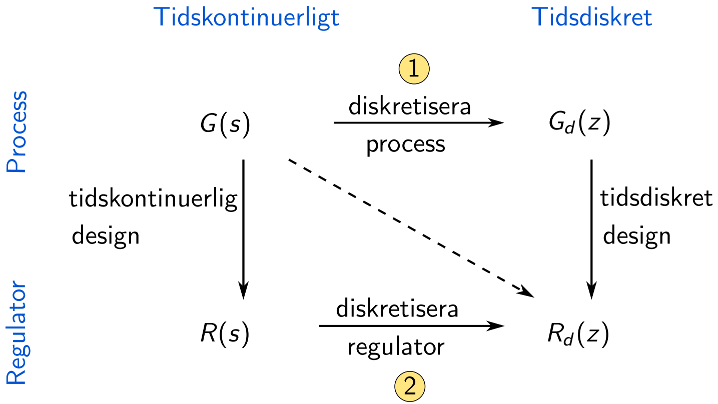
Repetition – datorimplementering av reglersystem

Ett reglersystem implementeras oftast med dator/mikrocontroller:



Repetition – diskretisering

Diskretisering kan göras på olika sätt:



Repetition – diskretisering forts.

Diskretisering av tillståndsmodell:

- Ger en tidsdiskret tillståndsmodell, som är en exakt beskrivning i samplingstidpunkterna
- Polerna avbildas enligt $z = e^{sh}$ (t ex VHP $\rightarrow$ enhetscirkeln)
- Ett stabilt system förblir stabilt efter tidsdiskretiseringen

De enkla diskretiseringsmetoderna (Euler, Tustin) kan ses som approximationer av relationen $z = e^{sh}$:

$$z = e^{sh} \approx 1 + sh \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(z-1)$$

$$z = e^{sh} = \frac{1}{e^{-sh}} \approx \frac{1}{1-sh} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{h}(1-z^{-1})$$

$$z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{h}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Tustins approximation har en intressant egenskap. Trots att den fås genom en approximation av $z = e^{sh}$, så avbildas stabila poler på stabila, tidsdiskreta poler (och instabila på instabila).

Filter-tillämpningar

- Reducera brus i signaler
- Spektral omformning i kommunikationssystem
- Signaldetektering i radar, telekommunikation mm
- Spektralanalys för exempelvis talsignaler
- Komponenter i reglersystem

Ett filters utsignal vid tidpunkten t, $y(t)$, beror i allmänhet av insignalens $(x(\cdot))$ värden fram till och med tidpunkten τ:

$$y(t) = y(x(s), s \leq \tau)$$

Man brukar skilja mellan följande fall:

$$\begin{aligned} \tau = t &: \quad \text{filtrering} \\ \tau < t &: \quad \text{prediktion} \\ \tau > t &: \quad \text{glättning (smoothing)} \end{aligned}$$

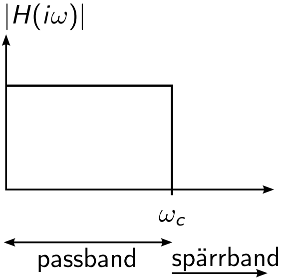
Det ideala lågpassfiltret

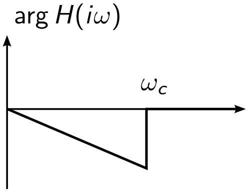
Distorsionsfri filtrering beskrivs av frekvensfunktionen

$$H(i\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ce^{-i\omega t_0}$$

Det *ideala lågpassfiltret* karakteriseras av:

- Distorsionsfri överföring inom *passbandet* $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$
- Ingen överföring alls utanför passbandet (dvs inom *spärrbandet*)





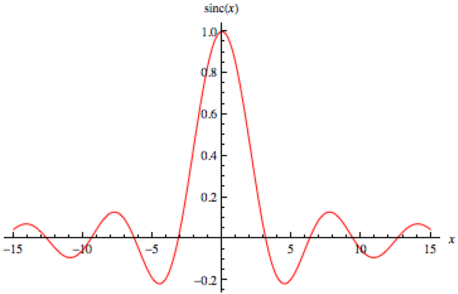
Det ideala lågpassfiltret

Frekvensfunktionen för det ideala lågpassfiltret:

$$H(i\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega t_0}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Filtrets impulssvar:

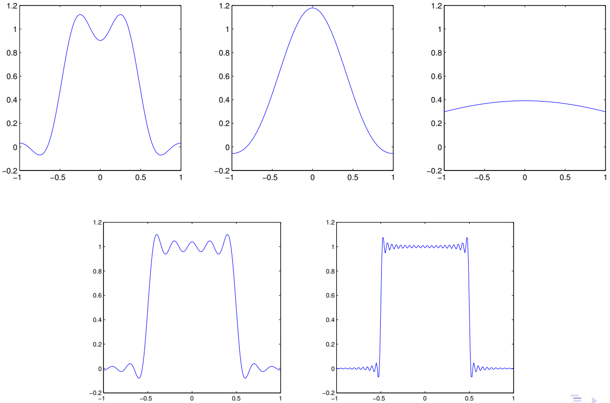
$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t - t_0)\right); \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



Exempel: filtrering av fyrkantspuls

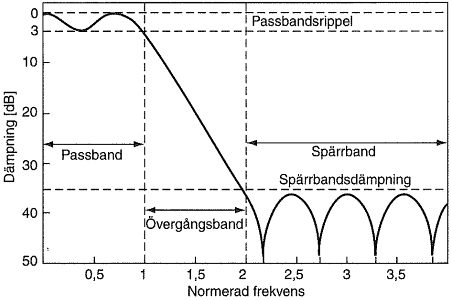
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_0/2 \\ 0, & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

Nedan visas utsignalen $y(t)$ för $T_0 = 1$, $t_0 = 0$ samt för olika värden på ω_c ($\omega_c = 4\pi, 2\pi, 0.4\pi$ i den övre raden, samt $\omega_c = 10\pi, 40\pi$ i den undre).



Design av lågpassfilter

Lågpassfiltret specificeras genom krav i *passbandet* $0 \leq \omega \leq \omega_p$ respektive *spärrbandet* $\omega \geq \omega_s$:



Med toleransparametrarna ϵ (*ripplet* i passbandet) och δ (*dämpningen*) kan kraven sammanfattas enligt följande:

$$1 - \epsilon \leq |H(i\omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$
$$|H(i\omega)| \leq \delta, \quad |\omega| \geq \omega_s$$

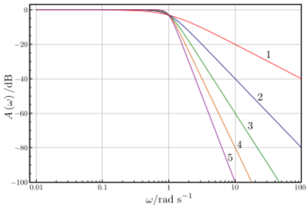
Butterworthfiltret

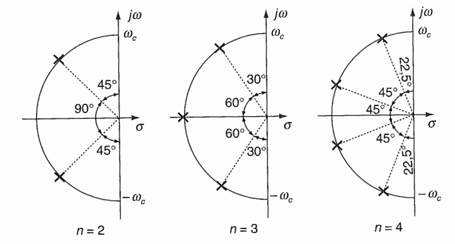
Butterworthfiltret av ordning n och brytfrekvens (*cut-off frequency*) ω_c:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}$$

Filtrets poler:

$$p_k = \omega_c \cdot e^{i(\pi/2 + \pi/(2n) + \pi(k-1)/n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$





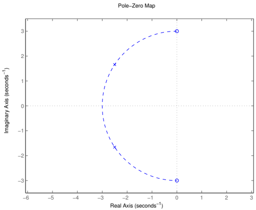
Transformation av LP-filtret

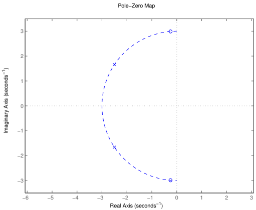
Från LP-filtret kan andra typer av filter fås genom enkla transformationer:

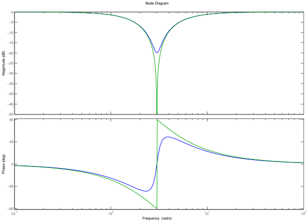
$$
\begin{aligned}
\text{LP} \to \text{LP}: &\quad s \to s/\omega_c \\
\text{LP} \to \text{HP}: &\quad s \to \omega_c/s \\
\text{LP} \to \text{BP}: &\quad s \to \frac{s^2 + \omega_L\omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)} = \frac{s^2 + \omega_M^2}{Bs} \\
\text{LP} \to \text{BS}: &\quad s \to \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L\omega_H} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}
\end{aligned}
$$

Exempel: BS- och notchfilter

$$H_{BS}(s) = \frac{s^2 + 9}{s^2 + 5s + 9} \qquad H_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 0.5s + 9}{s^2 + 5s + 9}$$







Digital realisering

Utgå från det analoga filtret med överföringsfunktionen $H_c(s)$. Transformationen till motsvarande tidsdiskreta filter $H(z)$ kan göras på olika sätt, t ex (h är samplingsintervallet):

$$s \to \frac{1 - z^{-1}}{h} \qquad \text{bakåtdifferens ("Euler bakåt")}$$

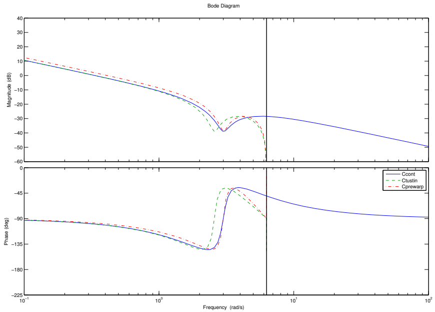
$$s \to \frac{z - 1}{h} \qquad \text{framåtdifferens ("Euler framåt")}$$

$$s \to \frac{2}{h}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \qquad \text{bilinjär eller Tustins transformation}$$

Frequency warping

Användning av Tustins approximation ger en förvrängning (eng. *frequency warping*) av frekvensskalan, $\omega_c = \frac{2}{h}\tan(\frac{\omega_d h}{2})$.
Frequence prewarping används för att få bättre överensstämmelse runt $\omega = \omega_M$:

$$s \to \frac{\omega_M}{\tan(\frac{\omega_M h}{2})}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



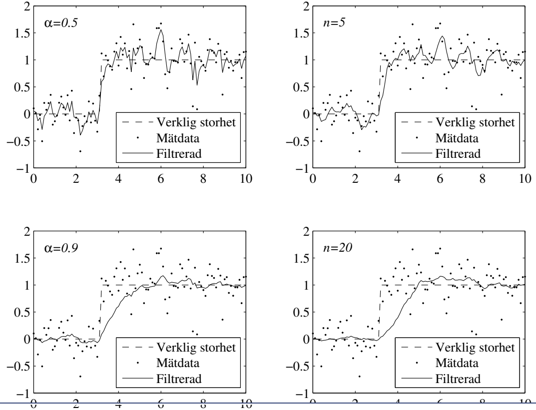
Tidsdiskreta filter

MA-filtret (eng. *moving average*, glidande medelvärde):

$$y(t) = \frac{1}{n}(x(t) + x(t-1) + \ldots + x(t-n+1))$$

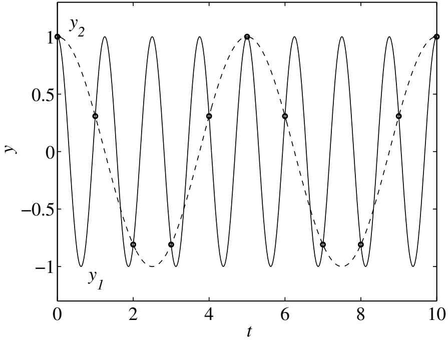
Exponentialfiltret är ett första ordningens filter med förstärkningen 1:

$$y(t) = \alpha y(t-1) + (1-\alpha)x(t)$$



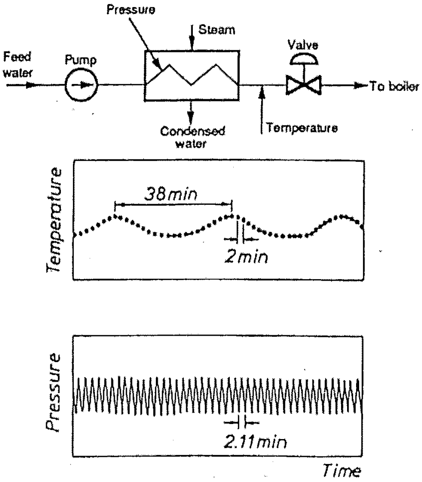
Vikningseffekten – aliasing

Vikningsfenomenet (eng. *aliasing*): Endast frekvenskomponenter upp till *Nyquist-frekvensen* $\omega_N = \frac{\pi}{h}$ kan urskiljas entydigt efter sampling.



Frekvenser högre än Nyquistfrekvensen måste filtreras bort *före* samplingen!

Exempel: aliasing



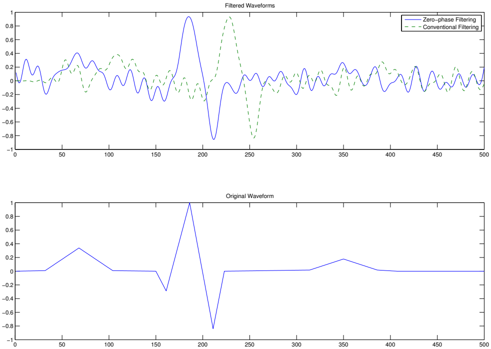
Nollfasfilter

Om mätdata sparas och är tillgängliga för bearbetning i efterhand (*post-processing*), så kan man använda *icke-kausala filter*.

Ett exempel på detta är *nollfas-filtret*, som ger en fasförskjutning som är 0:

1. Filtrera signalen som vanligt med ett LP-filter
2. Filtrera därefter den erhållna signalen *baklänges* i tiden

Figuren nedan visar hur en EKG-signal behandlats på detta sätt.



LYCKA TILL!