

ERE103  
REGLERTEKNIK D

FILTER

2015



CLAËS LINDEBORG, BO EGARDT, JONAS SJÖBERG  
Modifierat 2015: Jonas Fredriksson

INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

OKTOBER, 2019

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analoga filter</b>	<b>2</b>
2.1	Det ideala lågpasfiltret . . . . .	2
2.2	Filterdesign . . . . .	4
2.3	Transformation av lågpasfilter . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Digitala filter</b>	<b>9</b>
3.1	Digital realisering av analoga filter . . . . .	9
3.2	Tidsdiskret filterdesign . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Insamling av mätdata och sampling</b>	<b>11</b>
4.1	Aliasing . . . . .	12
4.2	Outliers . . . . .	13
4.3	Tidsdiskret filtrering . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Övningsuppgifter</b>	<b>16</b>

# 1 Inledning

Med begreppet *filter* brukar man mena en apparat/utrustning som avskiljer oönskade komponenter från det som passerar filtret från dess ingång till dess utgång. Termen kommer från latinets *filtrum*, dvs filt, och syftar på hur man tidigt silade ut ex matvaror för att göra sig av med oönskade beståndsdelar. Några fler exempel är luft- och oljefilter, vars uppgift är att avskilja partiklar, och UV-filter, som används för att filtrera bort ultraviolettera strålar från ljus.

Ett linjärt, tidsinvariant (LTI) system kallas ibland också för filter. Anledningen till detta är att insignalens frekvenskomponenter behandlas olika på sin väg från ingång till utgång, och avgörande för hur detta sker är systemets eller filtrets frekvensfunktion  $H(i\omega)$ . Denna kan i sin tur påverkas genom val av parametrar i motsvarande överföringsfunktion eller differentialekvation. Genom att välja dessa på lämpligt sätt kan man göra så att signaler med frekvenskomponenter inom vissa frekvensområden, eller *frekvensband*, får passera filtret medan signaler med frekvenskomponenter inom andra band dämpas ut.

Grunden för ett LTI-systems filterfunktion är att det modifierar insignalens spektrum  $\Phi_x(\omega)$  med frekvensfunktionen  $H(i\omega)$ , vilket resulterar i en utsignal med spektrum  $\Phi_y(\omega) = |H(i\omega)|^2 \Phi_x(\omega)$  (tidskontinuerliga fallet). Frekvensfunktionen ger alltså olika vikt till olika frekvenskomponenter i insignalen. Detta gäller alla LTI-system, och ett filter är egentligen inget annat än ett sådant, men när syftet är att forma signalens spektrum på det sätt som beskrivits, brukar man använda begreppet filter.

Filter används flitigt inom signalbehandling, reglerteknik och telekommunikation. Här är några exempel:

## Filter-tillämpningar

- Reducera brus i signaler
- Spektral omformning i kommunikationssystem
- Signaldetektering i radar, telekommunikation mm
- Spektralanalys för exempelvis talsignaler
- Komponenter i reglersystem

Ett filters utsignal vid tidpunkten  $t$ ,  $y(t)$ , beror i allmänhet av insignalens värden fram till och med tidpunkten  $\tau$ , dvs  $\{x(s), s \leq \tau\}$ . Man brukar skilja mellan följande fall:

## Olika typer av filtrering

Utsignalen  $y$  beror av insignalen  $x$  enligt

$$y(t) = y(x(s), s \leq \tau)$$

$\tau = t$  : filtrering

$\tau < t$  : prediktion

$\tau > t$  : glättning (smoothing)

## 2 Analoga filter

Vi skall börja med att studera filter för tidskontinuerliga signaler, så kallade *analog filter*. Ett av de absolut vanligaste filtren är *lågpassfiltret*, vars syfte framgår av namnet: avsikten är att lågfrekventa signaler skall släppas igenom av filtret, men att högfrekventa delar skall filtreras bort (t ex för att reducera brus). Förutom att vara ett vanligt förekommande filter, så är lågpassfiltret viktigt som utgångspunkt för många andra filter.

### 2.1 Det ideala lågpassfiltret

Det ideala lågpassfiltret utnyttjar att det ofta är acceptabelt att ett filter ger en viss, konstant, tidsfördröjning i utsignalen relativt insignalen. Därför brukar man kalla filtret *distorsionsfri* om utsignalen är en, eventuellt skalad, fördröjd kopia av insignalen, dvs

$$y(t) = Cx(t - t_0)$$

vilket efter Fourier-transformering ger motsvarande relation i frekvensplanet:

$$Y(\omega) = CX(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

För att ge en distorsionsfri överföring skall alltså filtret ha en frekvensfunktion

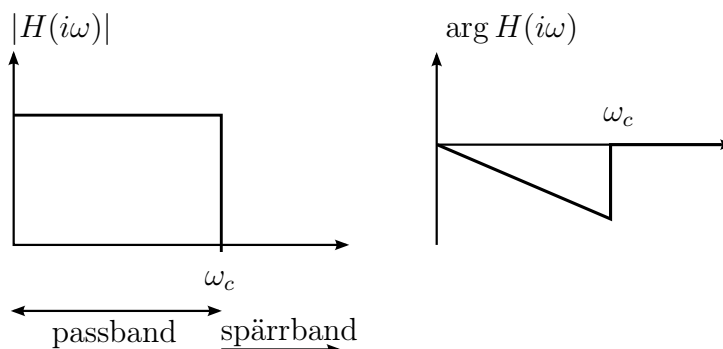
$$H(i\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ce^{-i\omega t_0}$$

vars amplitud- och fasfunktion är

$$\begin{aligned} |H(i\omega)| &= C \\ \arg H(i\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned}$$

Filtret har alltså en konstant amplitud och fasfunktionen varierar linjärt med frekvens.

Målet med det *ideala lågpassfiltret* är att ha en distorsionsfri överföring för lågfrekventa signaler inom *passbandet*  $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$  och att helt spärra frekvenskomponenter utanför detta (dvs inom *spärrbandet*). Därmed skulle det ideala lågpassfiltret ha en amplitud- respektive fasfunktion enligt figuren nedan.



*Example 2.1.* Låt  $H(i\omega)$  vara frekvensfunktionen för det ideala lågpasfiltret:

$$H(i\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega t_0}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

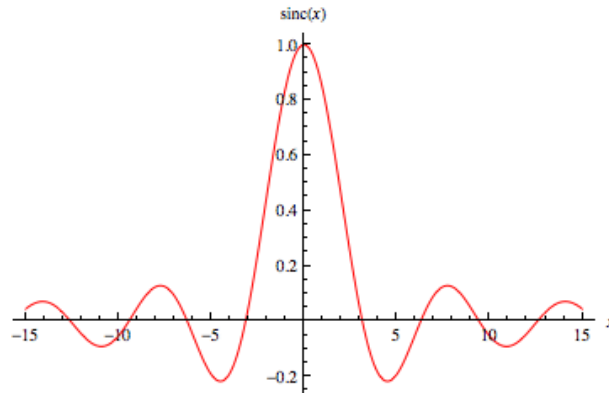
Filtrets impulssvar blir då

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega_c(t-t_0)} - e^{-i\omega_c(t-t_0)}}{i(t-t_0)} \\ &= \frac{\sin(\omega_c(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right) \end{aligned}$$

där sinc-funktionen definieras av

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Nedan visas sinc-funktionens utseende.



Notera att impulssvaret är skilt från 0 för negativa argument, dvs filtret är inte kausalt. Trots detta är det ideala lågpasfiltret ett användbart begrepp vid konstruktion av praktiska (dvs kausala) filter. ■

*Example 2.2.* Vi skall studera hur en fyrkantspuls  $x(t)$  behandlas av ett idealt lågpasfilter. Insignalen ges alltså av

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_0/2 \\ 0, & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

Med impulssvaret  $h(t)$  från förra exemplet kan vi beräkna filtrets utsignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{\sin(\omega_c(t-t_0-\tau))}{\omega_c(t-t_0-\tau)} d\tau \quad (1)$$

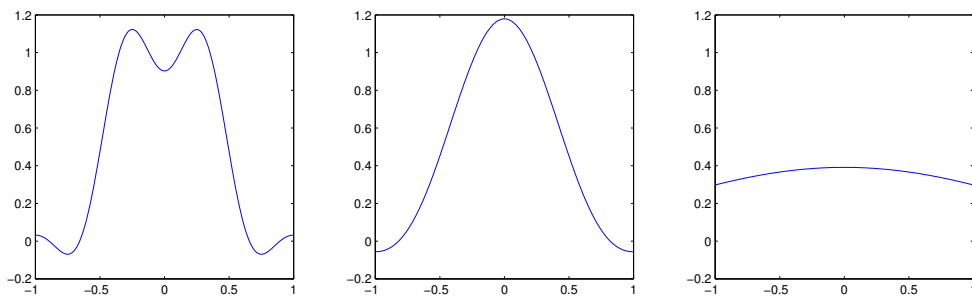
Låt nu  $\lambda = \omega_c(t-t_0-\tau)$ ,  $a = \omega_c(t-t_0+T_0/2)$  och  $b = \omega_c(t-t_0-T_0/2)$ , vilket ger

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\omega_c}{\pi} \int_a^b \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cdot \left(\frac{-1}{\omega_c}\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^a \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda - \int_0^b \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (Si(a) - Si(b)) \end{aligned}$$

där  $Si(\cdot)$  är sinusintegralen

$$Si(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt$$

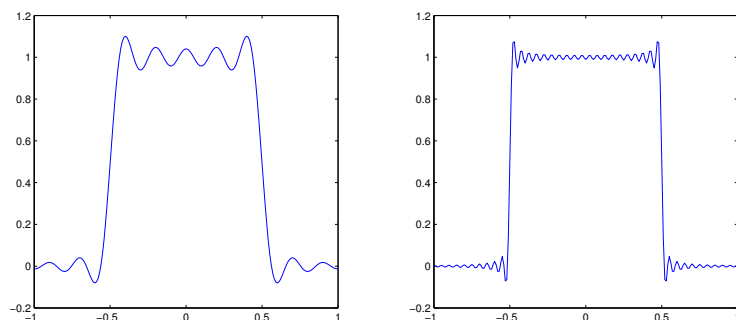
I figuren nedan visas utsignalen  $y(t)$  för  $T_0 = 1$ ,  $t_0 = 0$  samt för tre olika värden på  $\omega_c$ ,  $\omega_c = 4\pi, 2\pi, 0.4\pi$ .



Vi kan observera följande:

- Kurvans form beror av  $\omega_c$ , där större värden på  $\omega_c$  ger brantare flanker.
- Utsignalspulsens bredd är ungefär densamma som insignalspulsens bredd för stora värden på  $\omega_c$ .
- Utsignalen uppvisar en oscillation före och efter flankerna istället för en konstant nivå.
- Då  $\omega_c$  görs mindre än  $2\pi/T_0$  distorderas den rektangulära formen alltmer.

I figuren nedan visas hur ett ännu större värde på  $\omega_c$  ger större likhet med den ideala pulsen på filtrets ingång. I detta fallet är  $\omega_c = 10\pi/T_0$  respektive  $\omega_c = 40\pi/T_0$ .

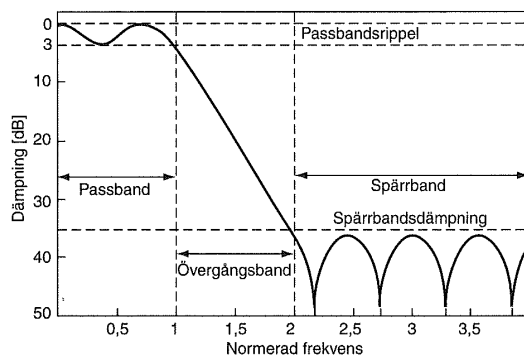


■

## 2.2 Filterdesign

Det ideala lågpassfiltret kan, som vi såg i föregående avsnitt, inte realiseras som ett kausalt filter. Därför måste man i praktiken acceptera en viss distorsion, dvs avvikelse från det ideala filtret. Figuren nedan visar ett sätt att uttrycka vilka avvikelser som är

acceptabla, nämligen genom att ange *toleransband* i frekvensplanet. Ett toleransband gäller i intervallet  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ , där  $\omega_p$  är passbandets övre gräns, och ett annat gäller i intervallet  $\omega_s \leq \omega < \infty$ , där  $\omega_s$  är spärbandets undre gräns. Mellan  $\omega_p$  och  $\omega_s$  finns ett övergångsband. I figuren<sup>1</sup> är frekvensaxeln normerad så att  $\omega_p = 1$  och  $\omega_s = 2$ .



Med toleransparametrarna  $\epsilon$  (*ripple* i passbandet) och  $\delta$  (*dämpningen*) kan kraven sammanfattas enligt följande:

$$1 - \epsilon \leq |H(i\omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$|H(i\omega)| \leq \delta, \quad |\omega| \geq \omega_s$$

Med de givna toleranskraven är design av filtret liktydigt med att finna en *approximerande funktion*, som uppfyller dessa krav. Det finns två dominerande angreppssätt:

1. Maximalt platt amplitudkurva (eng. *maximally flat amplitude response*): välj en frekvensfunktion som uppfyller

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} |H(i\omega)|_{\omega=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n - 1$$

Ett exempel på detta är Butterworth-filtret.

2. Likformigt rippel (eng. *equiripple magnitude response*): välj en frekvensfunktion som uppvisar likformig oscillation i passbandet. Ett exempel på detta är Chebyshev-filtret.

## Butterworthfiltret

Butterworthfiltret uppfyller

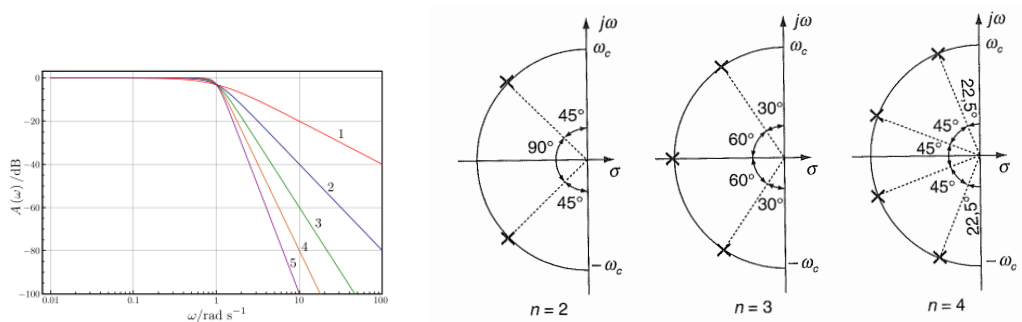
$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}$$

där  $n$  är filtrets ordning och  $\omega_c$  är filtrets brytfrekvens (*cut-off frequency*) eller bandbredd. Filtrets poler ges av

$$p_k = \omega_c \cdot e^{i(\pi/2 + \pi/(2n) + \pi(k-1)/n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

och ligger alltså likformigt fördelade på en cirkel med radien  $\omega_c$ . I figuren nedan visas filtrets amplitudfunktion till vänster och polernas lägen till höger för några olika ordningstal.

<sup>1</sup>Hämtad från A Svärd: Signaler och system, Studentlitteratur.



*Example 2.3* (Tredje ordningens Butterworth-filter). Med  $n = 3$  och  $\omega_c = 1$  ges filtrets poler av (2):

$$p_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_2 = e^{i\pi} = -1, \quad p_3 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Filtrets överföringsfunktion är alltså

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

För fallet  $\omega_c \neq 1$  så är det bara att byta  $s$  mot  $s/\omega_c$  i överföringsfunktionen ovan. ■

## Chebyshevfiltret

Chebyshevfiltret bygger på Chebyshevpolytom och har poler på en ellips. Med detta filter får man minimal avvikelse i passbandet för ett visst givet ordningstal. Två typer av Chebyshevfilter finns; typ 1 ger ekvirippel i passbandet, och typ 2 ger ekvirippel i stoppbandet.

## Besselfiltret

Besselfiltret är ett annat känt filter, som utmärks av att det har maximal linjäritet för fasfunktionen, vilket ger liten distorsion.

## 2.3 Transformation av lågpasfilter

Med utgångspunkt från ett lågpasfilter är det enkelt att få andra typer av filter genom en frekvenstransformation. Tex kan man från ett lågpasfilter med  $\omega_c = 1$  få ett lågpasfilter med ett annat  $\omega_c$  genom transformationen

$$s \rightarrow s/\omega_c$$

På liknande sätt kan ett antal andra transformationer ge andra filtertyper enligt följande. Vi använder här förkortningarna LP=lågpas, HP=högpas, BP=bandpas, BS=bandspärr.

**LP → HP** Använd transformationen (från ett LP-filter med  $\omega_c = 1$  till ett HP-filter med  $\omega_c$ )

$$s \rightarrow \omega_c/s$$



**LP → BP** Använd transformationen

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_L \omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)} = \frac{s^2 + \omega_M^2}{Bs}$$

där  $\omega_L$  och  $\omega_H$  är filtrets undre respektive övre gränshäns och det resulterande filtret får dubbla ordningstalet. Det sista uttrycket använder filtrets *mittfrekvens*  $\omega_M = \sqrt{\omega_L \omega_H}$  och bandbredd  $B = \omega_H - \omega_L$ .

**LP → BS** Använd transformationen

$$s \rightarrow \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L \omega_H} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}$$

som liksom bandpassfiltret ger ett filter av dubbla ordningstalet.

*Example 2.4* (Från lågpassfilter till högpassfilter 1). Utgå från ett lågpassfilter av Butterworth-typ av ordning 3 och med  $\omega_c = 1$ , dvs

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Motsvarande HP-filter fås genom att ersätta  $s$  med  $1/s$ :

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{(1/s+1)(1/s^2+1/s+1)} = \frac{s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

■

*Example 2.5* (Från lågpassfilter till högpassfilter 2). Utgå från ett lågpassfilter av Butterworth-typ av ordning 2 och med  $\omega_c = 1$ , dvs

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Motsvarande HP-filter med brytfrekvensen  $\omega_c$  fås genom att ersätta  $s$  med  $\omega_c/s$ :

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\omega_c^2/s^2 + \sqrt{2}\omega_c/s + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

■

*Example 2.6* (Från lågpassfilter till bandpassfilter). Utgå från ett lågpassfilter av Butterworth-typ av ordning 1 och med  $\omega_c = 1$ , dvs

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s+1}$$

Motsvarande bandpassfilter med mittfrekvensen  $\omega_M = 1$  och bandbredd  $B = 0.1$  fås genom att ersätta  $s$  med  $(s^2 + \omega_M^2)/(Bs)$ :

$$H_{BP}(s) = \frac{1}{\frac{s^2+1}{0.1s} + 1} = \frac{0.1s}{s^2 + 0.1s + 1}$$

■

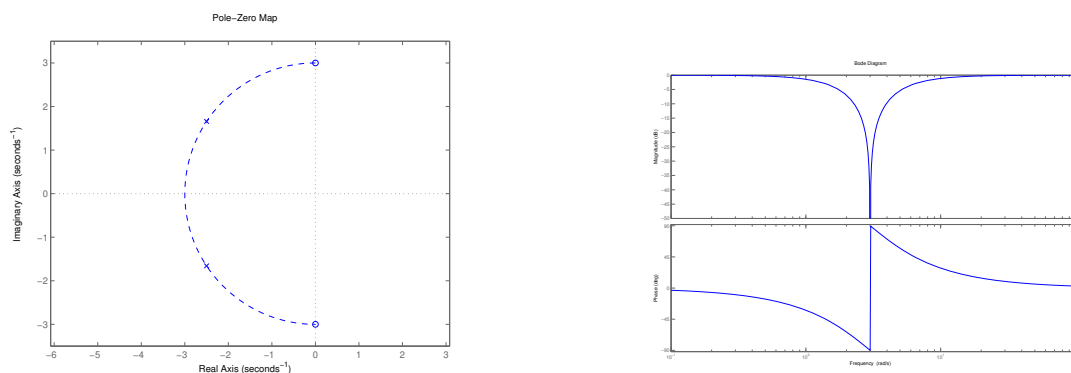
*Example 2.7* (Från lågpasfilter till bandspärrfilter). Utgå från ett lågpasfilter av Butterworth-typ av ordning 1 och med  $\omega_c = 1$ , dvs

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Motsvarande bandpassfilter med mittfrekvensen  $\omega_M = 3$  och bandbredd  $B = 5$  fås genom att ersätta  $s$  med  $\frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}$ :

$$H_{BS}(s) = \frac{1}{\frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2} + 1} = \frac{s^2 + 9}{s^2 + 5s + 9}$$

Filtrets pol-nollställes-diagram och Bodediagram framgår av figuren nedan.

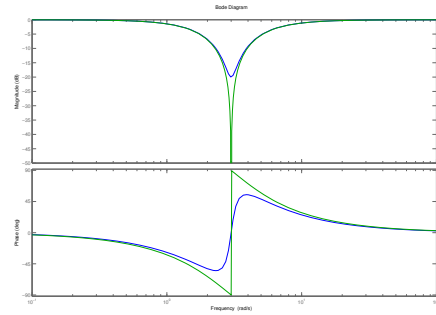
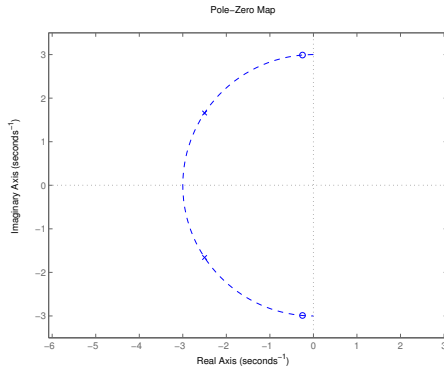


■

*Example 2.8* (Notch-filter). I exemplet ovan framgår av Bode-diagrammet att amplitud-delen har en djup “klyfta” runt  $\omega_M = 3$ , vilket resulterar i att signalkomponenter med frekvensen  $\omega = 3$  (och frekvenser i närheten) dämpas kraftigt. Denna funktion kan vara användbar i ett regelsystem, där man vill “trycka ned” utpräglade resonanstopp. I detta sammanhang används ofta beteckningen *notch-filter*. Som framgår i pol-nollställes-diagrammet i exemplet ovan har filtret nollställena på imaginära axeln. Man kan få en något mjukare frekvenskurva genom att flytta nollställena längs enhetscirkeln i i vänstra halvplanet. Ett exempel på ett filter som kan fås på detta sätt är

$$H_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 0.5s + 9}{s^2 + 5s + 9} \quad (3)$$

vars pol-nollställes-diagram och Bodediagram syns nedan (i Bodediagrammet syns även bandspärrfiltret från föregående exempel).



### 3 Digitala filter

Vi har hittills diskuterat analoga filter, dvs filter som verkar på tidskontinuerliga signaler. I många tillämpningar sker dock det mesta av signalbehandlingen på samplade, eller tidsdiskreta, signaler. Därför finns ett behov av att göra olika typer av filterdesign i tidsdiskret form. Det finns i princip två olika sätt att gå tillväga:

1. Gör en analog (tidskontinuerlig) filterdesign och transformera denna till motsvarande tidsdiskret form.
2. Gör en digital (tidsdiskret) filterdesign direkt.

#### 3.1 Digital realisering av analoga filter

Med utgångspunkt från ett analogt filter, givet av dess överföringsfunktion  $H_c(s)$ , kan man göra transformationen till motsvarande tidsdiskreta filtret  $H(z)$  på olika sätt, t ex:

$$\begin{aligned}
 s &\rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{h} && \text{bakåtdifferens} \\
 s &\rightarrow \frac{z - 1}{h} && \text{framåtdifferens} \\
 s &\rightarrow \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} && \text{bilinjär eller Tustins transformation}
 \end{aligned} \tag{4}$$

där  $h$  är samplingsintervallet.

*Example 3.1* (Digital realisering av analogt filter). En resonant process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 0.3s + 9}$$

skall återkopplas med en regulator, som består av ett notchfilter enligt (3) i serie med en I-regulator. Den resulterande regulatorn ges av

$$C(s) = \frac{0.34s^2 + 0.17s + 3.06}{s(s^2 + 5s + 9)}$$

Med användning av Tustins approximation med  $h = 0.5s$  (`c2d(C,0.5,'tustin')` i Matlab) får man den tidsdiskreta regulatoren

$$C_{\text{tustin}}(z) = \frac{0.051z^3 + 0.02456z^2 + 0.017z + 0.04344}{z^3 - 1.311z^2 + 0.4222z - 0.1111}$$

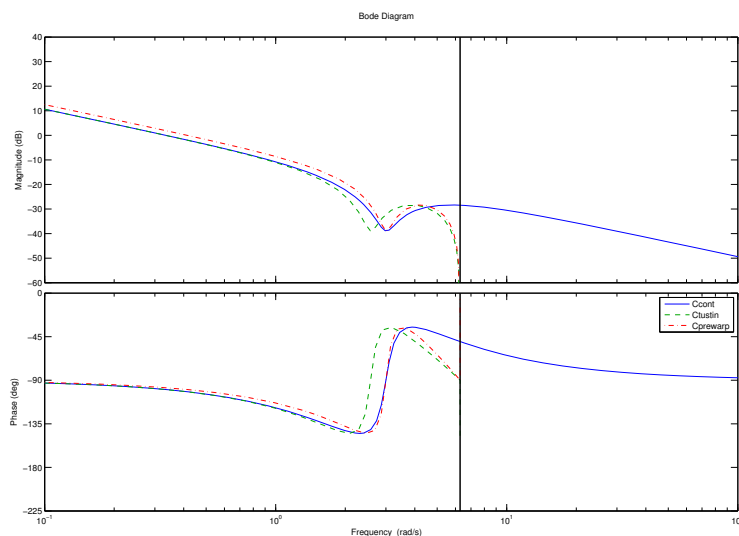
Bodediagrammet för den tidskontinuerliga regulatoren  $C(s)$  (heldragen, blå kurva) och den tidsdiskreta motsvarigheten  $C_{\text{tustin}}(z)$  (streckad, grön kurva) visas i figuren nedan. Observera att notchfiltrets ”dal” har flyttats något i frekvens. Detta beror på att frekvensskalan förvrängs vid diskretiseringen (eng. *frequency warping*). Förklaringen ges av (4), som med  $s = i\omega_c$  och  $z = e^{i\omega_d}$  ger

$$i\omega_c = \frac{2e^{i\omega_d h} - 1}{he^{i\omega_d h} + 1} = \frac{2e^{i\omega_d h/2} - e^{-i\omega_d h/2}}{he^{i\omega_d h/2} + e^{-i\omega_d h/2}} = \frac{2i}{h} \tan\left(\frac{\omega_d h}{2}\right)$$

dvs  $\omega_c = \frac{2}{h} \tan\left(\frac{\omega_d h}{2}\right)$ . Genom att göra en transformation av frekvensskalan (eng. *pre-warping*) kan frekvenskurvan modifieras, så att man får bättre överensstämmelse runt  $\omega = \omega_M$ . Detta görs helt enkelt genom att modifiera Tustins formel till

$$s \rightarrow \frac{\omega_M}{\tan\left(\frac{\omega_M h}{2}\right)} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Resultatet framgår av figurens streck-prickade, röda kurva (görs genom att använda optionen `PrewarpFrequency` i `c2d`).



■

## 3.2 Tidsdiskret filterdesign

Istället för att först genomföra design av ett analogt filter, för att sedan transformera detta till tidsdiskret form, kan man designa det tidsdiskreta filtret direkt. Principerna för detta liknar de som beskrivits tidigare för analoga filter. Vi skall istället ge några exempel på filter som inte har någon direkt analog motsvarighet.

*Example 3.2* (MA-filtrer). MA-filtret (eng. *moving average*, glidande medelvärde) innebär helt enkelt en medelvärdesbildning av de  $n$  senaste värdena på insignalen, dvs

$$y(t) = \frac{1}{n}(x(t) + x(t-1) + \dots + x(t-n+1))$$

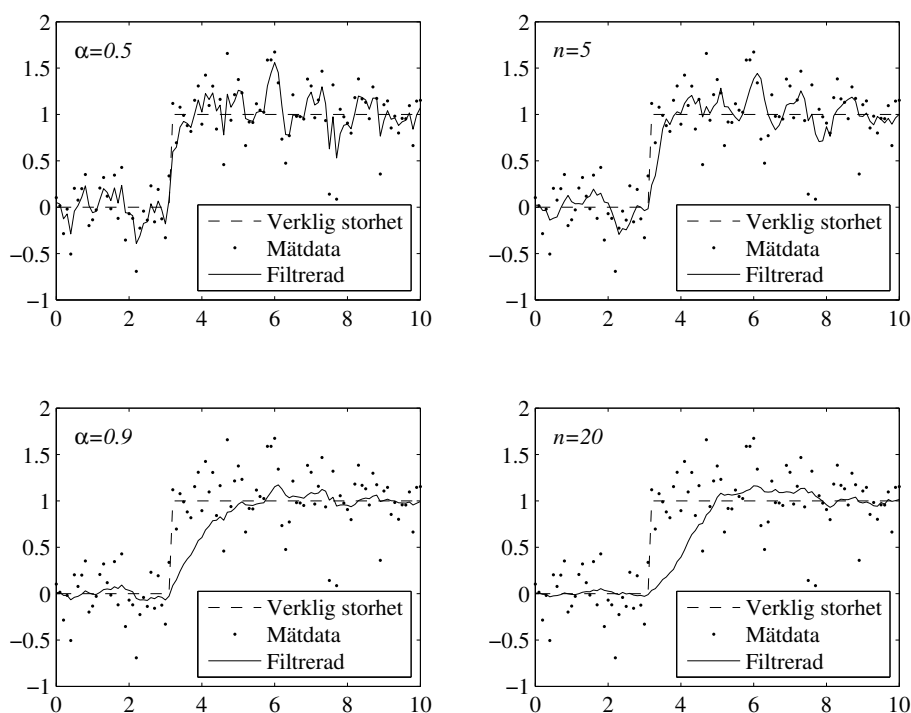
där tidsenheten är samplingsintervallet och  $n$  är filtrets ordningstal. Namnet på filtret syftar på att medelvärdet beräknas över ett tidsfönster med fix längd, som “glider” med tiden. MA-filtret kallas i vissa sammanhang också för FIR-filter (FIR=*finite impulse response*). Filtrets enda designparameter är ordningstalet  $n$  — ett stort  $n$  ger bättre undertryckning av ev. brus, men ger samtidigt en fördröjning. Begreppen MA-filtrer och FIR-filter används även för generaliseringen av ovanstående, där man beräknar ett *viktat* medelvärde av de  $n$  senaste värdena på insignalen. ■

*Example 3.3* (Exponentialfiltrer). Exponentialfiltret är ett första ordningens filter med förstärkningen 1, dvs

$$y(t) = \alpha y(t-1) + (1-\alpha)x(t)$$

Ett litet värde på  $\alpha$  ger god följning av en varierande insignal, men till priset av högre brusnivå, och vice versa. ■

I figuren nedan visas resultatet av att filtrera med ett exponentialfilter (vänstra kolumnen) respektive ett MA-filtrer (högra kolumnen).



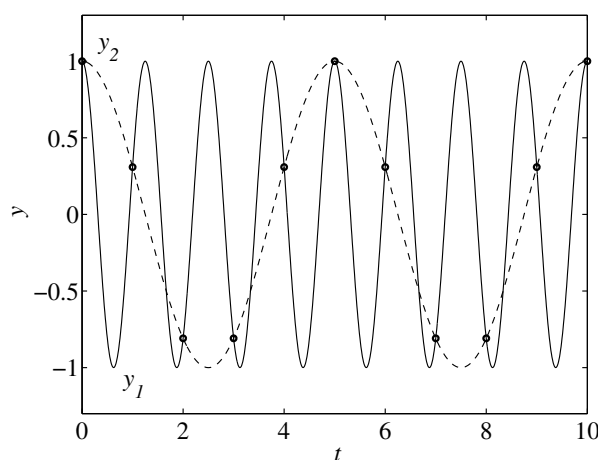
## 4 Insamling av mätdata och sampling

Innan det är möjligt att genomföra någon typ av bearbetning av mätdata eller andra signaler i dator, måste dessa läsas in i datorn. Detta kan ske på olika sätt, t ex genom att data översänds i digital form från ett separat mätinsamlingssystem, eller genom att

analoga mätgivare avläses, samplas, vid diskreta samplingstidpunkter. I samband med datainsamlingen är det nödvändigt att vidta vissa åtgärder för att insamlade data skall vara av så god kvalitet som möjligt. Vi skall ge några exempel på detta nedan.

## 4.1 Aliasing

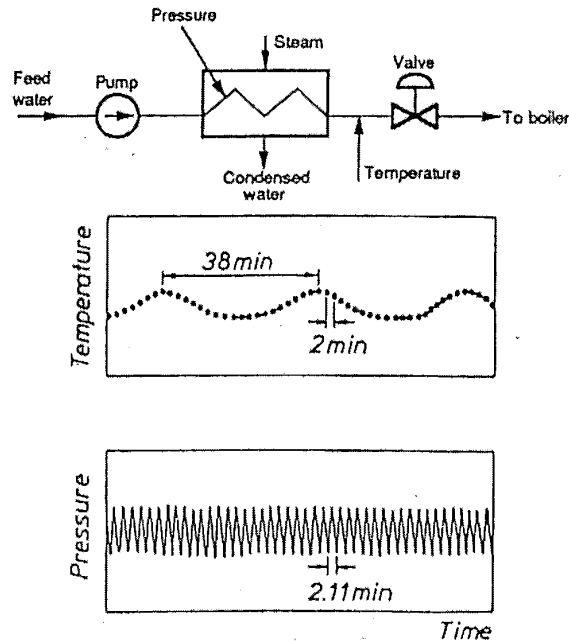
I samband med att mätvärden avläses, samplas, kan det uppstå ett fenomen, som är känt som *vikningsfenomenet* (eng. *aliasing*). Innebörden är att endast frekvenskomponenter upp till *Nyquist-frekvensen*  $\omega_N = \frac{\pi}{h}$  kan urskiljas entydigt efter sampling. Frekvenskomponenter, som ligger högre än  $\omega_N$ , uppträder efter sampling under "falskt namn", dvs kan inte särskiljas från frekvenskomponenter som är lägre än  $\omega_N$ . Ett exempel på detta visas nedan.



I ett regelsystem kan vikningsfenomenet ställa till med problem. Om t ex en störning med en dominerande frekvens runt dubbla Nyquistfrekvensen påverkar mätsignalen, så kommer denna efter sampling att uppfattas som en långsamt varierande offset, som regulatorn försöker att kompensera för, trots att det i själva verket är en högfrekvent mätstörning, som regulatorn bör lämna utan åtgärd.

*Example 4.1* (Ångpanna i lastbåt<sup>2</sup>). Det är lätt att luras av alias-effekten. Figuren nedan visar två registreringar från en s.k. förvärmare i en ångpanna, som genererar ånga för turbindrif i en lastångare. Temperaturen samplas med samplingsperioden  $h = 2$  min. Trycket har registrerats som en analog signal, där det framgår ett reglerkretsens svänger med en period på 2,11 min (anledningen var en sliten ventil). Tack vare tryckregistreringen, så kunde man avslöja att den svängning med perioden 38 min, som syns i temperatursignalen, är en "bluff". I själva verket är detta en alias-signal, som kommer från den snabbare svängningen med perioden 2,11 min. Detta inses på följande sätt: den snabba svängningen har frekvensen  $2\pi/2.11$  rad/min, medan samplingsfrekvensen är  $\omega_s = 2\pi/2 = \pi$  rad/min. Svängningen ger alltså en alias med frekvensen  $2\pi/2.11 - \pi$  och perioden  $\frac{2\pi}{(2/2.11-1)\pi} = 38$  min.

<sup>2</sup>Exemplet hämtat från Wittenmark et al: Process Control.



För att undvika problem av det slag som beskrevs ovan, bör man filtrera signalen före sampling, så att frekvenser över Nyquistfrekvensen i möjligaste mån elimineras. Observera att denna filtrering måste göras *analogt*, dvs efter det att samplingen är gjord är det för sent! I figuren nedan visas principen. Till vänster visas en fyrkantssignal med en störning pålagrad, samt motsvarande signal efter sampling. Till höger visas den tidskontinuerliga signalen, nu filtrerad med ett sjätte ordningens Bessel-filter, som effektivt filtrerar bort högre frekvenser. Samtidigt ser vi att fyrkantssignalens skarpa hörn har rundats av, en effekt av filtreringen. Denna effekt är förstås kvar i den samplade signalen längst ned till höger.

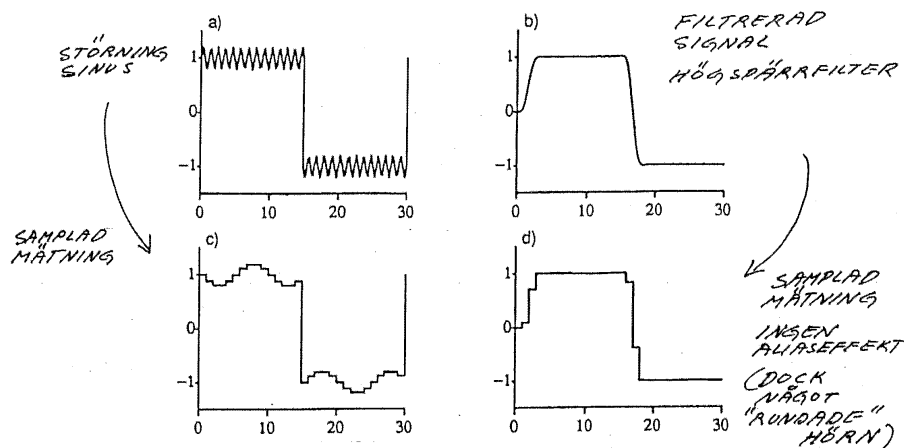


Figure 10.7 Usefulness of a prefilter. a) Signal plus sinusoidal disturbance; b) The signal filtered through a sixth-order Bessel filter; c) Sample and hold of the signal in a); d) Sample and hold of the signal in b).

## 4.2 Outliers

När mätdata har lästs in (samplats), är det ofta en god idé att göra en rimlighetskontroll av indata. Vissa mätuppgifter är av en karaktär som innebär att givaren ibland levererar

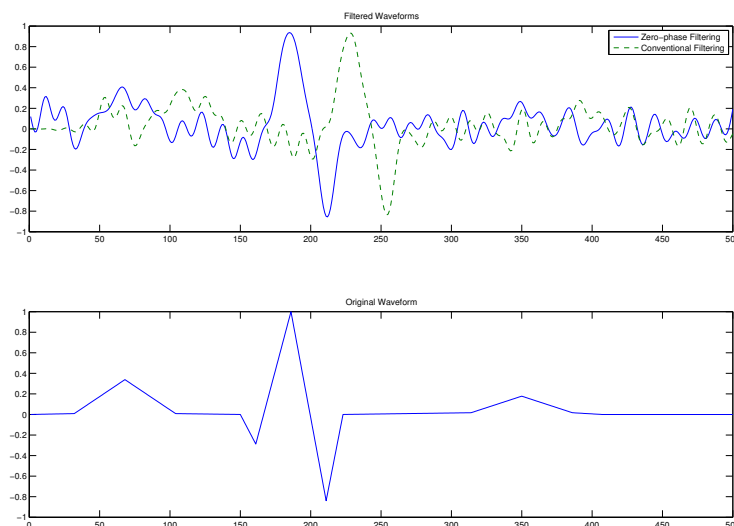
värden som är orimliga. Det är viktigt att detektera dessa felaktiga värden, så att de inte “förstör” de för övrigt korrekta mätvärden, som används i reglersystem mm. Att granska data för att bl.a. upptäcka outliers är en viktig förberedelse för senare bearbetning av mätdata. I ett reglersystem är det svårare att hantera outliers, eftersom såväl detektering av outliers som beslutet om hur bortfall av mätdata skall hanteras måste ske automatiskt.

*Medianfiltret* är ett enkelt sätt att upptäcka outliers. Det är snarlikt MA-filtret, men istället för att ta medelvärdet av de  $n$  senaste mätpunkterna används medianen. Medianfiltret är olinjärt, dvs kan inte uttryckas som ett tidsdiskret LTI-filter. Däremot är det enkelt att realisera med ett stycke programkod.

### 4.3 Tidsdiskret filtrering

Efter att mätdata samplats och genomgått en kontroll m.a.p. outliers, kan data behandlas ytterligare med diskreta filter. Principerna för design av filter har behandlats ovan. Vi skall här begränsa oss att ta upp ytterligare en aspekt av tidsdiskret filtrering, nämligen möjligheten att använda *icke-kausala* filter. I motsats till ett reglersystem, så finns det många tillämpningar där data först samlas in och sparas, för att därefter bearbetas i efterhand. Det betyder alltså att man vid bearbetningen har tillgång till *alla* mätvärden. Detta ger en möjlighet att gå runt den fundamentala begränsningen för kausala filter, nämligen att man alltid får en fasförskjutning eller fördröjning efter filtreringen.

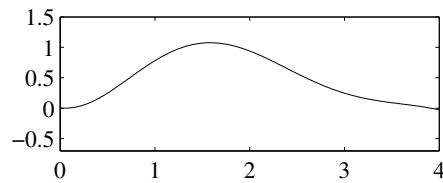
*Example 4.2* (EKG-data). Vid analys av EKG-data samplas först mätvärdena in. Eftersom mätdata är störda av brus, så behöver man filtrera signalen, innan man kan tolka resultatet. En möjlighet är då att använda ett konventionellt LP-filter. Men det finns också en möjlighet att göra följande: filtrera först signalen som vanligt med ett LP-filter; filtrera därefter den erhållna signalen *baklänges* i tiden. Effekten av detta är att den dubbla filtreringen (filtfilt i Matlab) ger en fasförskjutning som är 0, dvs ingen fördröjning av signalen fås! Effekten illustreras i figuren nedan (hämtat från exempel i Matlab).



■

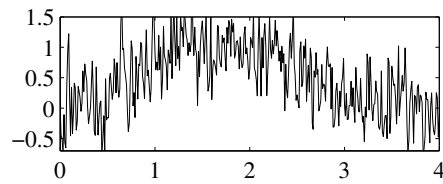


Låt oss avsluta detta avsnitt genom att illustrera hur behandlingen av mätdata kan te sig i ett konkret fall. Nedan illustreras hur den ursprungliga storheten vi är intresserade av ser ut; hur den uppmätta signalen distorderas av brus; hur en sekvens av mätdata fås efter antialiasfiltrering och sampling; samt hur denna signal efter filtrering med ett exponentiellt filter ser ut jämfört med den ursprungliga signalen.



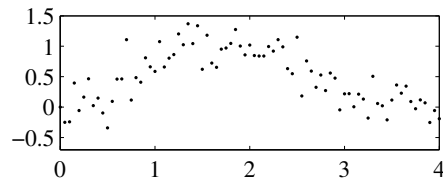
*Verklig mätstorhet (utan brus)*

$$y(t)$$



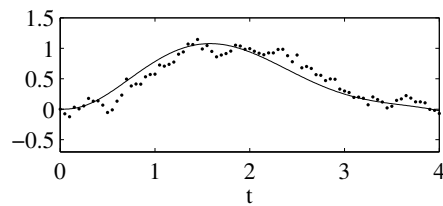
*Uppmätt storhet (med brus)*

$$y_g(t)$$



*Antialiasfiltrerad och samplad storhet*

$$y_m(t) \text{ och } y_m(kh)$$



*Filtrerad storhet ( $\alpha=0.7$ ) och verklig storhet*

$$y_f(kh) \text{ och } y(t)$$

## 5 Övningsuppgifter

### 1. Butterworthfilter

Bestäm överföringsfunktionen för ett Butterworthfilter där dämpningen skall vara  $< 1$  dB för  $\omega < 2000$  rad/s och  $> 15$  dB för  $\omega > 5000$  rad/s. (Svärdström 8.3)

### 2. LP-design

Bestäm överföringsfunktion för ett andra ordningens lågpasfilter av standardtyp som uppfyller följande kravspecifikation: Bandbredd 1 kHz, dämpning minst 25 dB över 2 kHz. Illustrera också specifikationerna i en skiss. (Svärdström 8.4)

### 3. Bandpassfilter

Bestäm överföringsfunktionen för ett Butterworth bandpassfilter av 4:e ordningen med geometrisk centerfrekvens 1 kHz och med bandbredd 100 Hz. (Svärdström 8.5)

### 4. Tidsdiskret filter

Ett tidsdiskret filter har överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0.8z + 0.87}$$

Bestäm filtrets differentialekvation och rita ett blockschema som visar hur denna kan realiseras. Skissa även filtrets frekvensgång utgående från poler och nollställen i  $z$ -planet. (Svärdström 9.1)

### 5. Tidsdiskretisering av filter

Konstruera ett tidsdiskret LP-filter med gränsfrekvensen 400 Hz genom att transformera det tidskontinuerliga filteret

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

med Tustins formel. Samplingstiden ska vara 0.5 ms. (Svärdström 9.7)