

ERE103
REGLERTEKNIK D

ÖVNINGSUPPGIFTER
2019



AVDELNINGEN FÖR SYSTEM- OCH REGLERTEKNIK
INSTITUTIONEN FÖR ELEKTROTEKNIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

1 Insignal-utsignalmodeller

Övningstal 1.1 (plap1)

Vilka tidsfunktioner motsvaras av Laplacetransformerna

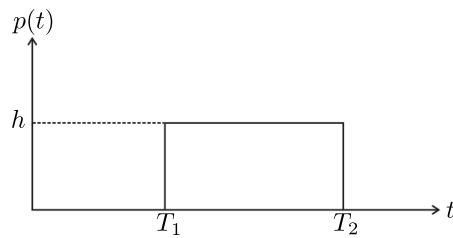
$$\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2}$$

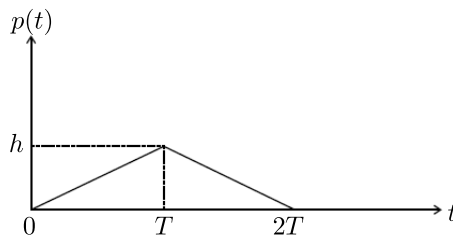
Övningstal 1.2 (plap2)

Härled Laplacetransformen för pulsen $p(t)$



Övningstal 1.3 (plap3)

Härled Laplacetransformen för pulsen $p(t)$



Övningstal 1.4 (plap4)

Härled, med hjälp av dämpningssatsen, Laplacetransformen för tidsfunktionen

$$e^{-3t}(\cos 2t + \sin 2t)$$

Övningstal 1.5 (plap5)

Beräkna den inversa Laplacetransformen till nedanstående uttryck:

$$\frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

Övningstal 1.6 (plap6)

Funktionen $J_0(at)$ har Laplacetransformen $1/\sqrt{s^2+a^2}$. Vilken tidsfunktion har då nedanstående Laplacetransform?

$$1/\sqrt{s^2+2s+5}$$

Övningstal 1.7 (plap7)

Betrakta funktionen $f(t)$, definierad genom sin Laplacetransform

$$F(s) = (s + 4)/(s^3 + s)$$

Använd slutvärdessatsen och begynnelsevärdessatsen för beräkning av $f(\infty)$ och $f(0)$. Kan man lita på resultaten? Motivering krävs!

Övningstal 1.8 (plap8)

Lös nedanstående integralekvation med hjälp av Laplacetransformation

$$y(t) + \lambda \int_0^t y(\tau) d\tau = t$$

Övningstal 1.9 (plap9)

Ange Laplacetransformen till följande differentialekvations lösning. Initialvärdena för y , liksom för dess derivator, är noll. Vad händer med insignalen u respektive utsignalen y då tiden t växer obegränsat?

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + y = u = (1 - t)e^{-2t}$$

Övningstal 1.10 (plap10)

Tre ämnen, vars initialkoncentrationer är N , 0 respektive N partiklar per volymenhet, växelverkar enligt nedanstående differentialekvationsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= n_2 - n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= n_3 - n_2 \\ \frac{dn_3}{dt} &= n_1 - n_3 \end{aligned}$$

Bestäm antalet partiklar av typ 2 efter att växelverkan ägt rum under en mycket lång tid.

Övningstal 1.11 (plap11)

Med stigtid avses tiden som förflyter medan utsignalen ökar sitt värde från 10% till 90% av sitt stationära (konstanta) slutvärde, då insignalen är en stegfunktion. Bestäm stigtiden för ett system vars överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{K e^{-Ds}}{1 + \tau s}$$

Övningstal 1.12 (plap12)

Betrakta systemet, med insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$, vars överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

Det gäller att beräkna och skissera $y(t)$ för följande tre fall

- a) $u(t)$ är en puls med höjd = bredd = 1.
- b) $u(t)$ är en puls med höjd = 10 och bredd = 0.1.
- c) $u(t) = \delta(t)$.

Övningstal 1.13 (plap13)

Antag i föregående exempel att insignalen $u(t) = \sin \omega t$. Vilka tidsfunktioner ingår i utsignalen $y(t)$? För den stationära delen av utsignalen $y(t)$, beräkna amplitud och fasläge i förhållande till insignalen som funktion av vinkelfrekvensen ω .

Övningstal 1.14 (plap14)

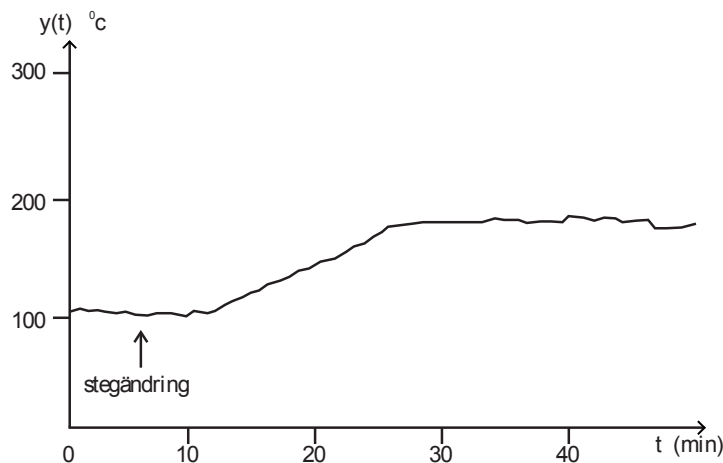
Insignalen till ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1 + \tau_0 s}{(1 + \tau_1 s)^2}$$

är ett enhetssteg. Skissera systemets utsignal som funktion av tiden då täljarens tidskonstant är 1, 0, respektive -1. Nämnarens tidskonstant är fixerad till 2.

Övningstal 1.15 (plap16)

Bifogat diagram visar ett stegsvar i en temperatur, y , som skall styras. Svaret erhöles då effekttillförseln, p , ändrades från 30% till 70% av det maximala värdet. Uppgiften innebär uppställning av en överföringsfunktion, $Y(s)/P(s)$, som approximativt motsvarar stegsvaret.



Övningstal 1.16 (ptf5)

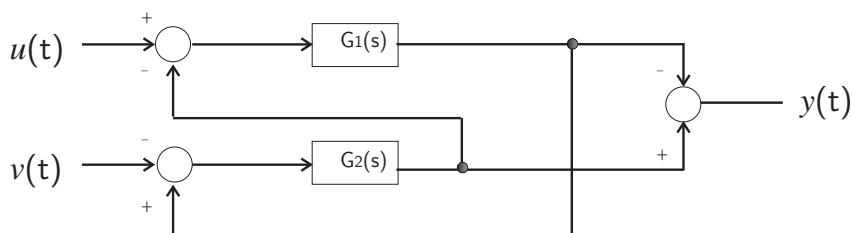
Ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)^2}$$

matas med insignalen $u(t) = 3 \sin(2t) - e^{-t} \cos(0.5t)$. Vad blir utsignalen $y(t)$ då alla transienter har dött ut?

Övningstal 1.17 (plap17)

Ett system beskrivs av nedanstående blockdiagram:



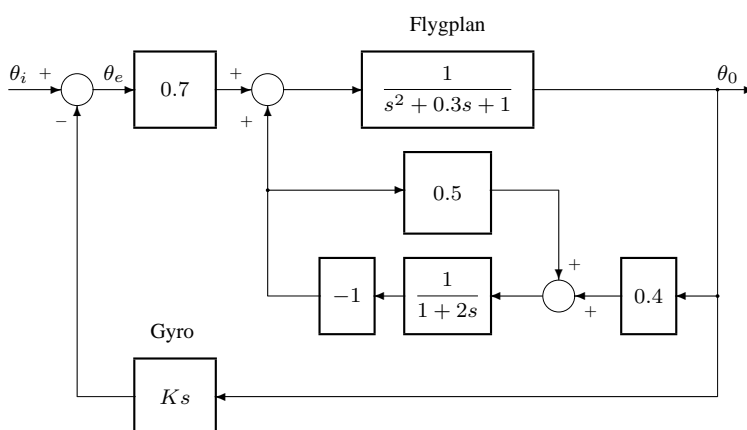
- Ställ upp ett uttryck som visar hur utsignalens Laplacetransform beror av överföringsfunktionerna och insignalernas Laplacetransformer.
- Bestäm överföringsfunktionerna $Y(s)/U(s)$ och $Y(s)/V(s)$ för fallet då

$$G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Bestäm $y(t)$, enligt b-uppgiften, då $u(t) = \sigma(t)$ och $v(t) = \delta(t)$.

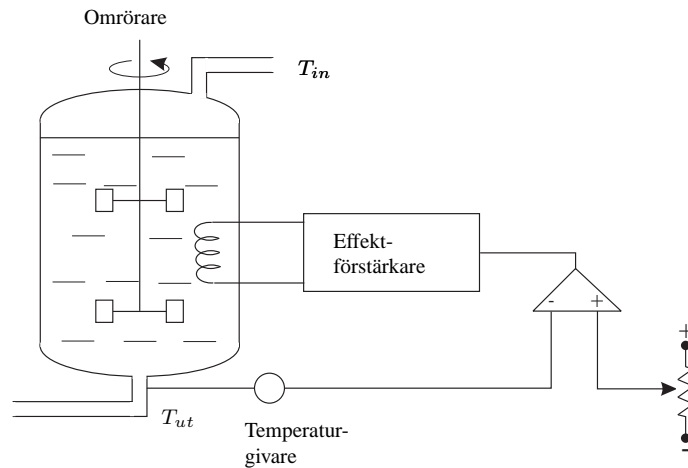
Övningstal 1.18 (pmd15)

Figuren nedan visar ett blockdiagram för ett flygplan vid ett vindtunnelförsök. Insignalen θ_i är pilotens styrsignal och utsignalen θ_0 är flygplanets vinkel. Bestäm överföringsfunktionen från θ_i till θ_0 .



Övningstal 1.19 (pin2)

Temperaturreglering



En behållare med ett konstant genomflöde av vatten skall regleras så att temperaturen på det utgående vattnet T_{ut} hålls konstant. Temperaturen på det ingående vattnet är T_{in} . Rita ett principiellt blockschema som visar hur vattentermostaten är uppbyggd. Notera speciellt vilken storhet som kan betraktas som störning i systemet?

Övningstal 1.20 (pin1)

En *intelligent farthållare* för bilar har bl.a. till uppgift att reglera hastigheten, så att ett säkert avstånd hålls till framförvarande fordon. Antag att det framförvarande fordonet kör i en rimlig hastighet v_f , och att farthållaren därför väljer att följa detta fordon med målsättningen att hålla ett konstant avstånd.

Avståndet y till framförvarande bil mäts med radar, och farthållaren kommenderar som styrsignal önskad acceleration. Verkligen acceleration skiljer sig från begärd acceleration på grund av trögheten i bränslesystem/motor/bil. Denna tröghet representeras i denna uppgift av en systemmodell

$$a = G_v u$$

där den begärda accelerationen u är insignal och den verkliga accelerationen a är utsignal. Det önskade idealavståndet beräknas som Tv , där v är följebilens hastighet och konstanten T är *tidsluckan*. Antag också att en proportionell P-regulator med förstärkning K_p används i återkopplingen.

Rita ett principiellt blockschema som visar hur den beskrivna farthållaren är uppbyggd. Notera de ingående signalerna i systemet, och ange speciellt referenssignal, störning och reglerfel. På vilket sätt skiljer sig referenssignalen från en standardmässig reglerkonfiguration?

Övningstal 1.21 (pmdir1)

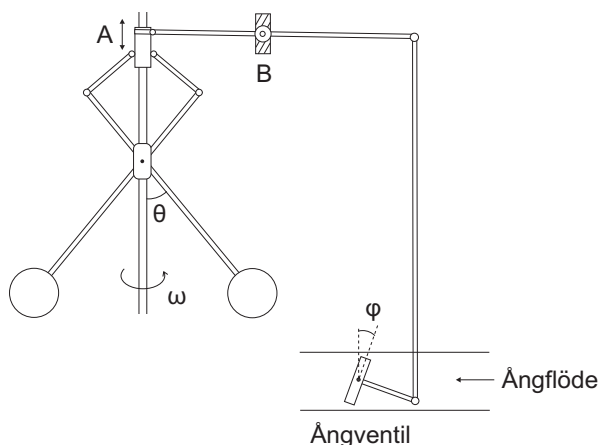
Sambandet mellan insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ för några system ges av följande differentialekvationer

- $2\dot{y}(t) + 4y(t) = 8u(t)$
- $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t)$
- $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$
- $2\dot{y}(t) + 4y(t) + 4\dot{u}(t) - 8u(t) = 0$

Bestäm för dessa system överföringsfunktionen $G(s)$ i insignal/utsignalrelationen $Y(s) = G(s)U(s)$ samt poler och nollställen, tidskonstanter, och statisk förstärkning.

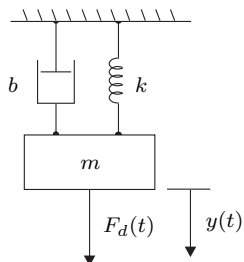
Beräkna utsignalen $y(t)$ då insignalen $u(t)$ är ett steg $u_0\sigma(t)$ (stegsvar), samt kommentera relationen mellan den statiska förstärkningen och $y(\infty)$.

Övningstal 1.22 (pinCentrifugal)



Utgå från figuren och rita ett blockschema för hur ångflödet i ångmaskinen regleras med hjälp av centrifugalregulatorn.

Övningstal 1.23 (pmdir4)



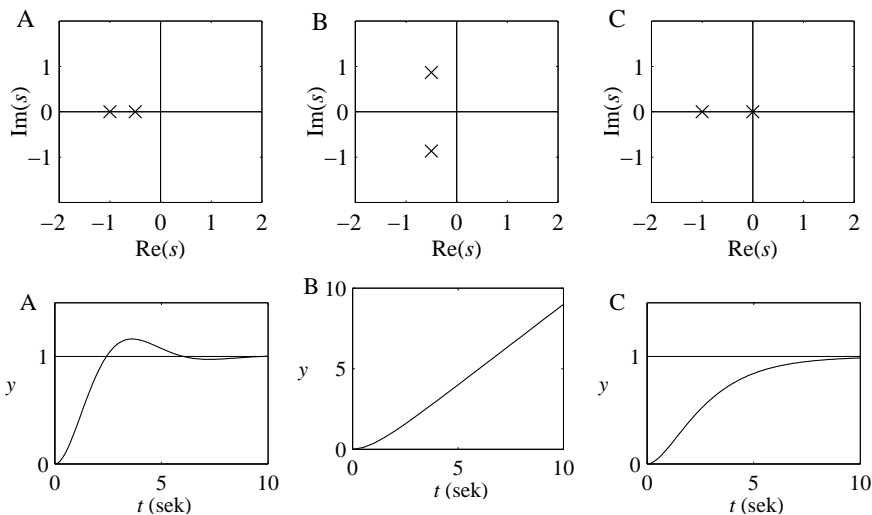
För fjäder-massasystemet i figuren gäller följande differentialekvation

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = F_d(t)$$

- Bestäm för motsvarande överföringsfunktion den odämpade svängningsfrekvensen ω_n och dämpningskonstanten ζ , samt den statiska förstärkningen K . På vilket sätt påverkas dessa parametrar av massan m , dämpningen b och fjäderkonstanten k ?
- Bestäm den dämpade resonansfrekvensen $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ och den exponentiella avklingningsparametern $a = \omega_n \zeta$ i e^{-at} . På vilket sätt relateras dessa parametrar till systemets polplacering. Skissera motsvarande stegsvar för $m = b = k = 1$.

Övningstal 1.24 (pmd6)

I denna uppgift visas polernas läge för tre olika andra ordningens system, samt motsvarande stegsvar. Tyvärr har dessa blandats ihop. Bestäm vilka poldiagram och vilka stegsvar som hör ihop. Motivera!



Övningstal 1.25 (pmd1)

Ett system antas approximativt kunna beskrivas med hjälp av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1 + Ts}$$

Visa hur tidskonstanten T kan skattas genom att bestämma ytan under impulssvaret då $T > 0$.

Övningstal 1.26 (pmd1b)

Bestäm impulssvar och stegsvar för en första ordningens modell

$$G_1(s) = K/(1 + Ts)$$

samt för en andra ordningens modell

$$G_2(s) = \frac{2}{(1 + s)(1 + \tau s)}$$

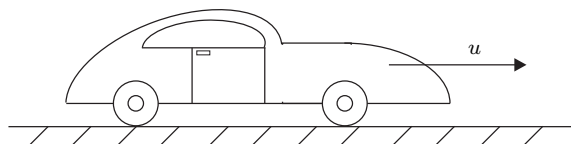
för $\tau = 0.01, 100$. Jämför tidssvaren för dessa båda modeller av olika ordning, samt bestäm K och T för de aktuella värdena på τ , så att $G_1(s)$ approximativt ger samma tidssvar som $G_2(s)$.

Formulera utifrån de erhållna resultaten en allmän princip vid framtagning av approximativa lägre ordnings modeller.

Övningstal 1.27 (pmd2)

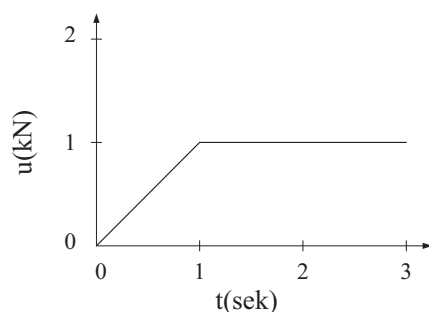
Antag att viktfunktionen $g(t)$ för ett dynamiskt system är given. Bestäm motsvarande viktfunktion (impulssvar) och stegsvar då ett extra nollställe i $s = -b$ inkluderas. Ange även explicita uttryck då $g(t) = te^{-t}$.

Övningstal 1.28 (pmd3)

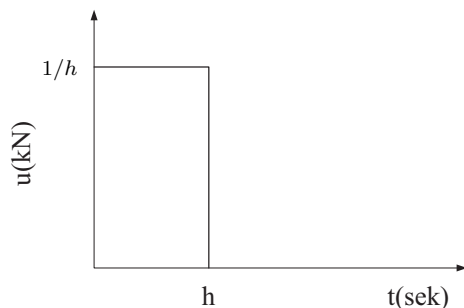


För en personbil antas gälla att vindmotståndet är proportionellt mot hastigheten $v(t)$ med konstanten $b = 0.25 \text{ kN s/m}$. Bilens massa $m = 1 \text{ ton}$. För motorns dragkraft $u(t)$ gäller att $u(t) = 0$ då $t < 0$.

- Beräkna överföringsfunktionen $G(s) = V(s)/U(s)$.
- Beräkna bilens hastighet $v(t)$ då dragkraften $u(t)$ varierar enligt följande:



- Beräkna $v(t)$ då $u(t)$ ges av nedanstående tidsfunktion. Vad händer då $h \rightarrow 0$? Jämför resultatet med viktfunktionen $g(t) = \text{impulsfunktionssvaret}$.



- På vilket sätt förändras ovanstående resultat då man utgår från att hastigheten $v(t) = 20 \text{ m/s}$ (72 km/tim) för $t < 0$, men att styrsignalen $u(t)$ förändras lika mycket som ovan för $t \geq 0$.

Övningstal 1.29 (pmd1c)

Ett system beskrivs av differential-integralekvationen

$$\dot{v}(t) + bv(t) + \int_0^t v(\tau) d\tau = u(t)$$

Denna modell representerar ett fjäder-massasystem då v tolkas som hastighet (positionen $y(t) = \int_0^t v d\tau$) och massan samt fjäderkonstanten är lika med ett, jmf med differentialekvationen för fjäder-massasystemet i uppgift 1.23. I detta exempel antas parametern b kunna anta godtyckliga värden. (Vilka värden är aktuella för ett fjäder-massasystem?)

- Bestäm $v(t)$ då insignalen $u(t)$ är ett steg $\sigma(t)$.
- Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ samt systemets poler och nollställe. Tolk nollställets betydelse. För vilka värden på parametern b är systemet stabilt?
- Använd slutvärdessatsen för bestämning av $y(\infty)$ och jämför med resultatet i uppgift a). För vilka värden på parametern b är resultatet korrekt? Förklara!

Övningstal 1.30 (pmd4)

Betrakta differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) - y(t) = u(t) - b\dot{u}(t)$$

- Bestäm $y(t)$ då $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ och insignalen $u(t)$ är ett enhetssteg, för fallet $b = 1$.
- Upprepa a) med skillnaden att $y(0) = 1$.
- Upprepa a) för fallet $b \neq 1$.

Förklara den dramatiska skillnaden mellan resultaten.

Övningstal 1.31 (pmd10)

En termometer har tidskonstanten 20 sekunder. Man vill mäta temperaturen i ett bad som (p.g.a. intern effektgenerering) ökar med 0.10 K per sekund med denna termometer. Vilken stationär felvisning blir resultatet av mätningen?

Övningstal 1.32 (pmd9)

Para ihop vart och ett av enhetsstegsvaren på nästa sida med en av överföringsfunktionerna.

$$(1) \quad \frac{2(1 - 0.5s)}{(1 + 0.5s)(1 + 0.33s)}$$

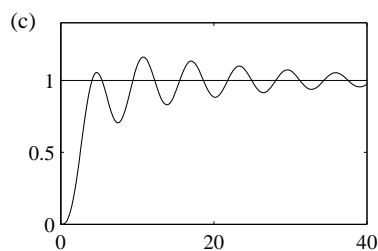
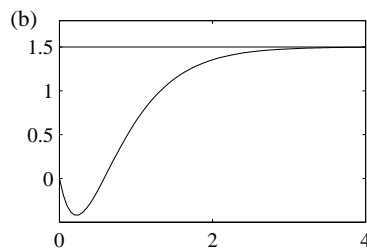
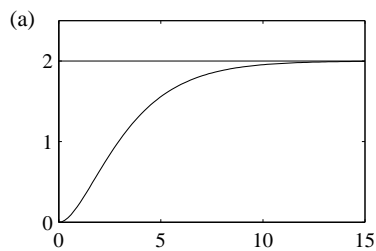
$$(2) \quad \frac{1}{(s + 0.5)(1 + 1.5s)}$$

$$(3) \quad \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

$$(4) \quad \frac{1}{(s + 0.67)(1 + 2s)}$$

$$(5) \quad \frac{18}{s + 2} - \frac{22.5}{s + 3}$$

$$(6) \quad \frac{1}{(s^2 + 0.1s + 1)(1 + 3s)}$$



Övningstal 1.33 (pmdi2)

Förklara med hjälp av viktfunktionen och faltningsintegralen begreppen kausalt, dynamiskt, linjärt respektive tidsinvariant system.

2 Tillståndsmodeller

Övningstal 2.1 (pss1)

Representera följande system på tillståndsform, där u är insignalen och y är utsignalen:

- a) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$
- b) $2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) - 5u(t) = 0$
- c)
$$\begin{aligned} 4\dot{v}(t) + 5v(t) &= 2u(t) \\ \dot{y}(t) + 2y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$$
- d)
$$\begin{aligned} \dot{v}(t) + 2v(t) &= 3u(t) \\ \ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 4y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$$
- e) $y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$
- f) $\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{u}(t) + 10u(t)$

Övningstal 2.2 (pss2)

Representera följande system på tillståndsform med hjälp av lämplig kanonisk form:

- a) $G(s) = \frac{4s + 8}{2s^2 + 6s + 4}$
- b) $G(s) = \frac{3}{(s + 2)(s + 4)}$
- c) $G(s) = \frac{s + 1}{s + 3} + \frac{2}{s + 4}$
- d) $G(s) = \frac{2s^2 + 10s + 4}{s^2 + 3s + 1}$
- e) $y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 2u(t)$

Övningstal 2.3 (pss3)

Insignalen till en första ordningens process med insignal/utsignalsambandet

$$Y(s) = \frac{4}{1 + 2s}X(s)$$

genereras via ett styrdon vars dynamik representeras av uttrycket

$$X(s) = \frac{1.5}{1 + 0.5s}U(s)$$

Ställ upp olika tillståndsrepresentationer för sambandet mellan u och y

- a) för en modell där fysikaliska signalstorheterna också är tillstånd.

- b) för en tillståndsmodell på observerbar kanonisk form.
 c) för en tillståndsmodell på diagonalform.

Övningstal 2.4 (pss4)

Bestäm överföringsfunktionen $G(s) = Y(s)/U(s)$ för följande system

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

Övningstal 2.5 (pss5)

En modell för en helikopters lutningsvinkel (pitch) θ vid justering av rotorvinkeln δ är

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) + \sigma_1 \dot{\theta}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) &= n\delta(t) \\ \ddot{x}(t) + \sigma_2 \dot{\theta}(t) + \alpha_2 \dot{x}(t) - g\theta(t) &= g\delta(t) \end{aligned}$$

Här är x den horisontella rörelsen och $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2, n$ och g konstanter.

- a) Välj tillståndsvariabler och formulera modellen på tillståndsform.
 b) Tag fram överföringsfunktionen $\frac{\theta(s)}{\delta(s)}$

Övningstal 2.6 (pss6)

Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) - y(t) + 2x(t) &= u(t) \end{aligned}$$

- a) Formulera en tillståndsmodell för detta system samt överföringsfunktionen från u till y .
 b) Analysera systemets stabilitet med hjälp av dess tillståndsmodell och överföringsfunktion. Förklara skillnaderna i resultaten.

Övningstal 2.7 (pst2)

Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2u \\ \dot{y} &= y - x + u \end{aligned}$$

Bestäm motsvarande överföringsfunktion från u till y . Är systemet stabilt?

Övningstal 2.8 (pmd7)

En process kan approximativt beskrivas av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -2y + x + u \end{aligned}$$

där $u(t)$ är systemets insignal och $y(t)$ dess utsignal. Är systemet stabilt? Bestäm processens svar på en enhetsramp, dvs bestäm $y(t)$ då $u(t) = t$ då $t \geq 0$.

Övningstal 2.9 (plap15)

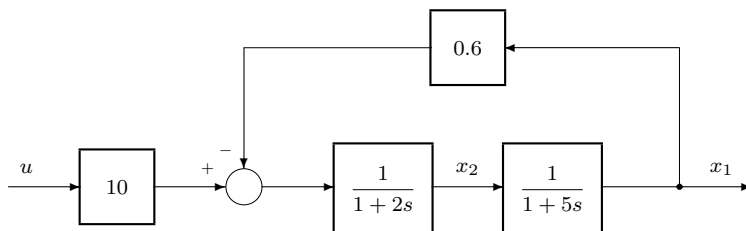
Ett linjärt dynamiskt system är definierat genom tillståndsekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

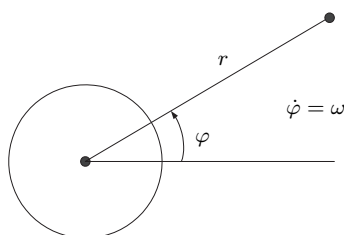
Beräkna och skissera systemets viktfunction (impulsfunktionssvar), $g(t)$. Är systemet stabilt?

Övningstal 2.10 (pss7)

Blockscemat nedan illustrerar två seriekopplade första ordningens system med återkoppling. Ställ upp systemet på tillståndsform och beräkna systemets egenvärden. Är systemet stabilt?



Övningstal 2.11 (pss8)



För en satellitbana i ett centralt gravitationsfält gäller följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) + \frac{k}{r^2(t)} - r(t)\omega^2(t) &= u_1(t) \\ \frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt}(r^2(t)\omega(t)) &= u_2(t) \end{aligned}$$

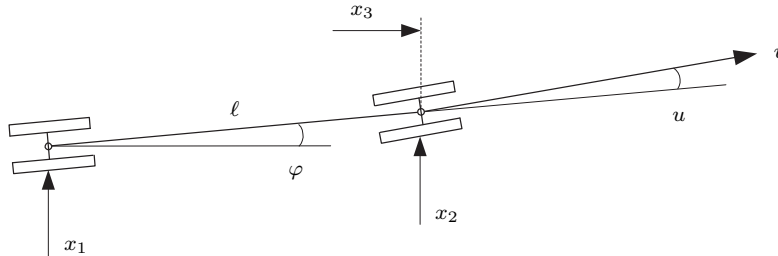
där k är gravitationskonstanten. Insignalerna u_1 och u_2 är radiella respektive tangentiella styrkrafter.

- Ställ upp satellitens rörelseekvationer på tillståndsform med r , \dot{r} och ω som tillståndsvariabler!
- För utveckling av regleralgoritmer ("station-keeping") till en geostationär satellit kring planeten Tellus vill man linjärisera ekvationerna kring den nominella cirkulära banan

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s} \right).$$

Genomför linjäriseringen av tillståndsmodellen med utnyttjande av att tillståndsderivatorna är noll i “arbetspunkten” (nominella banan). Nominella styrkrafter: $u_{10} = u_{20} = 0$. Vilka är det linjäriserade systemets egenvärden?

Övningstal 2.12 (pss9)



En truck med längden $\ell = 5$ m enligt figuren har fasta bakhjul och styrbara framhjul. För att förenkla uppgiften antas spårvidden vara mycket liten. Framhjulen drivs med konstant varvtal, vilket ger hastigheten $v = 8$ m/s i en riktning u radianer från truckens längsaxel.

- Ställ upp de olinjära tillståndsekvationerna för trucken.
- Inför antagandet att vinklarna u och φ är små och ställ upp den linjära tillståndsmodellen samt överföringsfunktionerna från u till x_1 respektive x_2 . Försök att förklara pol-nollställeskonfigurationen.

Övningstal 2.13 (pss10)

Ett dynamiskt system beskrivs av modellen

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) + p(t) &= q^3(t)u(t) \\ \varepsilon \dot{q}(t) + q(t) &= e^{q(t)}u^2(t) \\ y(t) &= p(t)q(t)\end{aligned}$$

där u är instorheten, medan y är utstorheten. Antag att ε är litet, vilket kan approximeras med $\varepsilon = 0$.

- Formulera en tillståndsmodell för godtyckligt ε och för $\varepsilon = 0$. På vilket sätt förändras den andra differentialekvationen och dimensionen på problemet (antalet tillståndsvariabler)? Tolka resultatet i termer av dynamisk respektive statisk relation.
- Bestäm den arbetspunkt (p_0, q_0, u_0) där stationärtillståndet $p_0 = 0.5$, d.v.s. bestäm q_0 och u_0 . (Det kan påpekas i sammanhanget att ekvationen $z^7 = e^z/4$ har lösningen $z = 0.9380$).
- Ställ upp en linjär tillståndsmodell för systemet, som gäller nära arbetspunkten (p_0, q_0, u_0) , då $\varepsilon > 0$. Bestäm systemets egenvärden och studera vad som händer då $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från instorheten Δu till utstorheten Δy då $\varepsilon > 0$. Vad blir systemets tidskonstanter? Sammanfatta slutsatserna angående systemdimension, poler, tidskonstanter och dynamiskt kontra statiskt samband då $\varepsilon \rightarrow 0$.

Övningstal 2.14 (pss11)

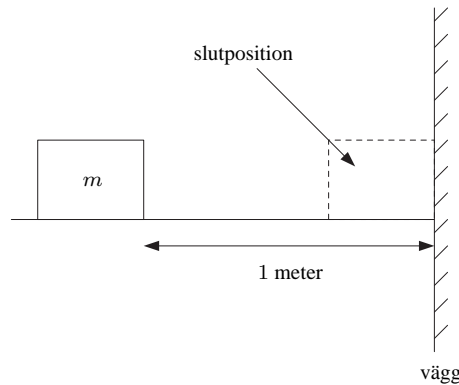
En tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

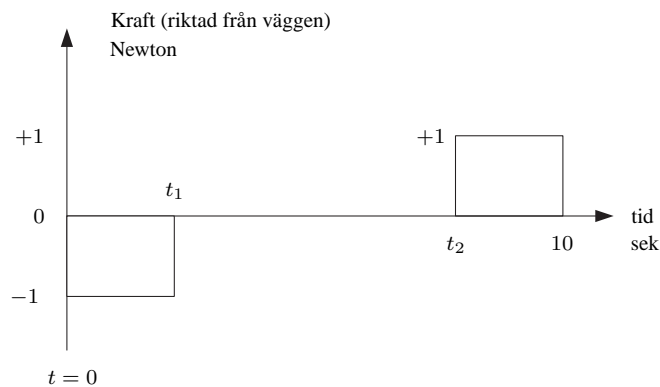
av andra ordningen har ett impulsfunktionssvar $y(t) = \sin t$. Vidare gäller att $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Bestäm matriserna A , B och C .

Övningstal 2.15 (pss12)

En kropp med massan $m = 1$ kg befinner sig vid $t = 0$ på ett avstånd av 1 meter från en vägg. Underlaget är friktionsfritt. Hastigheten är då 1 m/s riktad från väggen.



Kroppen skall styras in mot väggen så att den efter 10 sekunder befinner sig exakt vid väggen, och hastigheten skall då vara noll. Styrkraften u är ± 1 Newton och styrningen skall ske enligt följande diagram.



Beräkna tiderna t_1 och t_2 via systemets tillståndsbeskrivning och dess övergångsmatris.

Övningstal 2.16 (pss13)

En kraft F påverkar ett mekaniskt föremål utan dämpningskrafter. Då föremålets massa är $m = 1$ kg, bestäms dess hastighet y av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = F(t)$$

Kraften F genereras av styrsignalen u via ett styrdon, vars dynamik ges av överföringsfunktionen

$$G_u(s) = \frac{0.5}{1 + 0.5s}$$

samt av belastningskraften F_v , som agerar som en laststörning och därmed adderas med negativt tecken. Systemet styrs av en P-regulator

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t))$$

där förstärkningen $K_p = 1$.

- Rita ett blockschema för det återkopplade systemet och formulera en tillståndsmodell för den öppna icke-reglerade processen inklusive styrdon, samt för det återkopplade systemet.
- Bestäm för dessa båda system poler, övergångsmatris och insvängningsförloppet för $t > 0$ då $u = 0$ och $F_v = 0$ respektive $r = 0$ och $F_v = 0$ samt $y(0) = 1$ m/s och $\dot{y}(0) = 1$ m/s².

Övningstal 2.17 (pss14)

Visa hur tidssvar för en tillståndsmodell (A, B, C) kan beräknas med hjälp av övergångsmatriser, då insignalen är en ramp $u(t) = t\sigma(t)$ respektive en cosinussignal $u(t) = \cos(\omega t)\sigma(t)$.

Övningstal 2.18 (pss15)

Ett system som beskrivs av en tillståndsmodell (A, B, C) ska regleras med en PI-regulator

$$U(s) = \frac{K_i + K_p s}{s} (R(s) - Y(s))$$

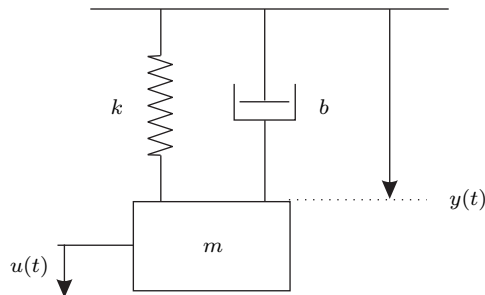
Formulera en tillståndsmodell för det återkopplade systemet från referenssignalen r till utsignalen y .

3 Modellering

Övningstal 3.1 (pmt1)

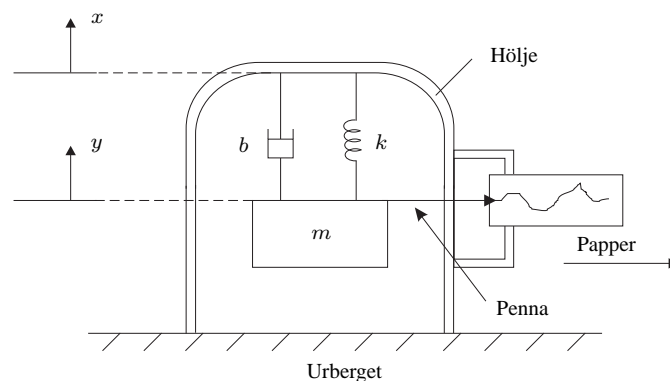
Betrakta följande mekaniska system. Fjädern har längden av ℓ_0 då fjäderkraften är lika med noll.

- Bestäm massans stationära jämviktsläge y_0 då dragkraften $u(t) = u_0$.
- Beräkna överföringsfunktionen som beskriver det dynamiska sambandet mellan ändringen i dragkraft Δu och ändringen i massans läge Δy . Ange även systemets relativa dämpning ζ och dess odämpade egenvinkelfrekvens ω .



Övningstal 3.2 (pmt2)

Figuren nedan visar schematiskt funktionen hos en seismograf, avsedd att registrera jordbävningar. Seismografens hölje är fast förbundet med urberget. När berget skakar kommer massan m på grund av sin tröghet att nästan vara helt still, varvid jordens rörelse registreras med hjälp av skrivaren och den penna som massan är fast förbunden med.



x = jordens "läge" ($x = 0$ vid jämvikt)

y = massans läge ($y = 0$ vid jämvikt)

m = massa

b = dämpkonstant

k = fjäderkonstant

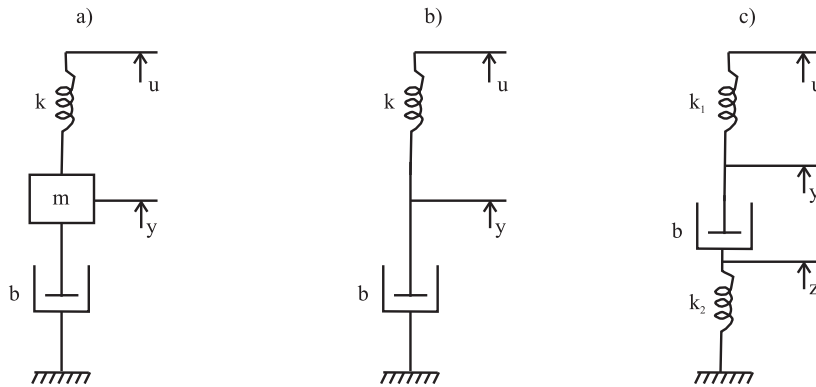
Bestäm överföringsfunktionen $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ för seismografen.

Övningstal 3.3 (pmod1)

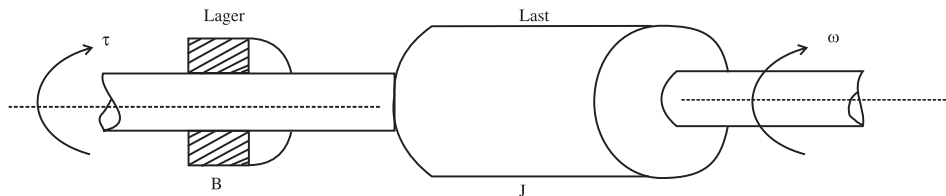
Ställ upp differentialekvationsmodeller och överföringsfunktioner, $Y(s)/U(s)$, för nedanstående mekaniska system där in- och utstorhet är $u(t)$ respektive $y(t)$.

- k betecknar fjäderkonstant (N/m)
- m betecknar massa (kg)

- b betecknar dämpningskoefficient (Ns/m)
- u , y och z betecknar lägen relativt jämviktspositionerna (m)



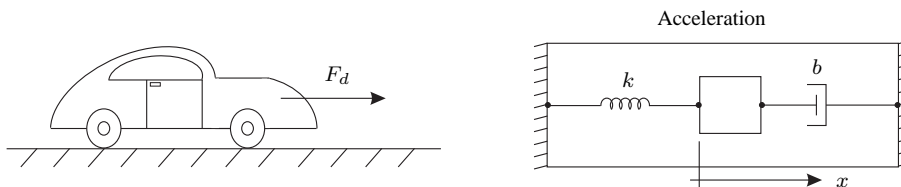
Övningstal 3.4 (E6)



- (a) Ange, för en stel drivaxel, enligt figuren ovan, med tröghetsmomentet J , överföringsfunktionerna från det vridande momentet $\tau(t)$ till vinkelläget, $\varphi(t)$, och till vinkelhastigheten, $\omega(t)$. Det bromsande friktionsmomentet är proportionellt mot vinkelhastigheten med friktionskoefficienten B mellan axel och lager.
- (b) Antag i Uppgift 3.4(a) att axelpartiet mellan lager och last är vekt och kan betraktas som en drivfjäder (med fjäderkonstant D), dvs det drivande momentet belastas av ett moment som är proportionellt mot vinkelskillnaden mellan "drivaxel" och "lastaxel". Bestäm överföringsfunktionerna från det vridande momentet $\tau(t)$ till vinkelhastigheterna, $\omega_1(t)$ och $\omega_2(t)$, på drivsidan respektive på lastsidan.

Övningstal 3.5 (pmt4)

En bil är utrustad med en accelerometer, för att mäta accelerationen i bilens längsled. Instrumentet är stelt fastskruvat i bilen.



Beteckningar:

F_d = bilens framdrivande kraft	k = fjäderkonstant
M = bilens massa	b = dämpningskonstant
m = en massa vars rörelse i x -led utgör instrumentets utsignal	a = bilens acceleration

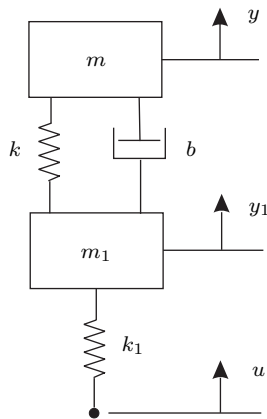
a) Bestäm instrumentets överföringsfunktion $G(s) = \frac{X(s)}{A(s)}$

b) Antag att $m = 0.1$ kg och att $k = 10$ N/m. Vilket värde skall då väljas på dämpningskonstanten b för att systemets relativa dämpning skall bli $\zeta = 1$. Skissera stegsvaret för systemet i detta fall.

Övningstal 3.6 (pmt5)

Fjädringssystemet för en bil kan modelleras som två kopplade svängande massor, där m_1 är massan för hjul och axlar, m motsvarar massan för bilens övriga delar, k_1 modellerar däckens elasticitet, medan k och b representerar fjädrar och stötdämpare. Positionen $u(t)$ härrör från ojämnheter i vägbanan.

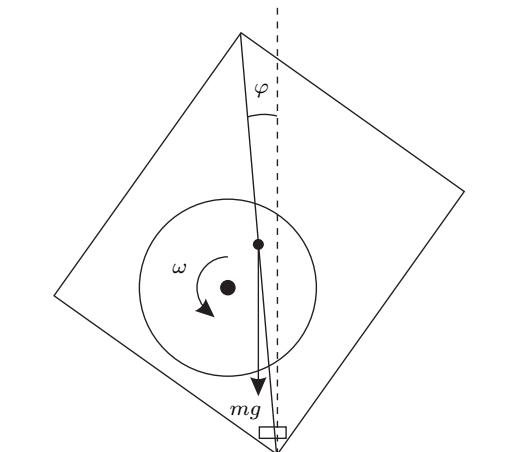
Bestäm överföringsfunktionen från vägbanans höjdvariation u till bilens vertikala rörelse y . Antag att systemet är i jämvikt när $u = y_1 = y = 0$.



Övningstal 3.7 (pmt6)

Ett populärt reglertekniskt demonstrationsobjekt är en attachéväska som kan fås att balansera på högkant enligt nedanstående skiss. För detta ändamål är väskan utrustad med ett svänghjul med styrbar drivordning (vinkelhastighet ω), samt en accelerometer (rektangel i figuren) placerad nära markkontaktpunkten, med vilken väskans obalansvinkel φ kan mätas (egentligen den mot φ svarande komponenten av tyngdaccelerationen).

Antag vidare att det på svänghjulet verkande drivmomentet u [Nm] är systemets styrsignal och att svänghjulets tröghetsmoment är $J = 0.1$ kg m². Väskans massa inklusive svänghjul är $m=5$ kg och tröghetsmomentet för vridningsrörelsen kring markkontaktpunkten är $J_0 = 1$ kg m². Tyngdpunktens höjd över underlaget i balanseringsläge är $h = 0.5$ m och tyngdaccelerationen antas vara 10 m/s².



Härled en tillståndsmode­ll för systemet som gäller vid små utslagsvinklar med φ och $\dot{\varphi}$ som till­stånds­variabler. Bestäm erhållen resonansfrekvens.

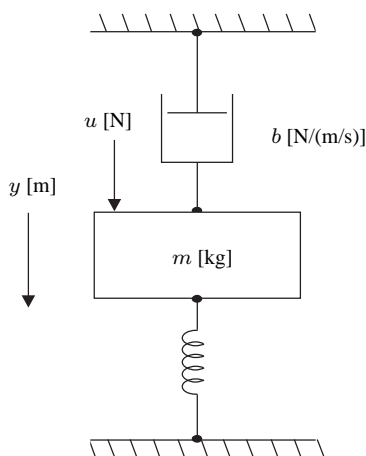
Notera att rörelsemängdsmomentet för hela systemet, väska plus svänghjul, blir $H = J\omega + J_0\dot{\varphi}$. Tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet är lika med summan av *yttre* moment.

Övningstal 3.8 (pmt7)

En massa $m = 10 \text{ kg}$ placeras på en progressiv (olinjär) fjäder med ett kraft-läges-beroende

$$F = 2 \cdot 10^3 y + 10^6 y^3$$

där $F \text{ [N]}$ är fjäderkraften och $y \text{ [m]}$ är sammanpressningen av fjädern jämfört med ospänt läge (ospända fjäderns längd är 10 cm). För att stabilisera massan finns dessutom en linjär viskös dämpare med dämpningskonstant $b = 100 \text{ Nm/s}$, se figur på nästa sida.

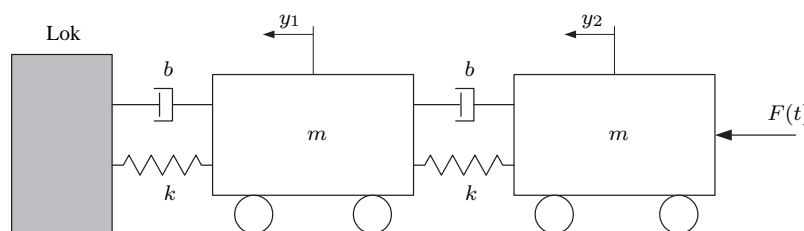


- Formulera en tillståndsmode­ll för det olinjära systemet. Vilket blir systemets jämviktsläge (arbetspunkt) om yttre kraften $u(t) = 0$?
- Linjärisera kring aktuell arbetspunkt och beräkna överföringsfunktionen mellan yttre kraften $u(t)$ (små krafter förut­setts) och motsvarande lägesändring $\Delta y(t)$. Vad blir systemets resonansfrekvens (odämpade egenfrekvens) och relativa dämpning?

Övningstal 3.9 (pmt7b)

Ett tåg med ett godtyckligt antal vagnar ska modelleras för att undersöka interaktionen mellan de olika vagnarna. Eftersom alla vagnar antas vara identiska räcker det att modellera några få tågsegment. En modell för det första tågsegmentet bestående av de första två vagnarna visas i nedanstående figur. Loket antas åka med konstant hastighet, och $F(t)$ antas vara kraften som överförs från nästa vagnsegment. Måtten y_1 och y_2 anger positionsändringar relativt loket och antas vara noll om fjädrarna är i viloläge (ingen fjäderkraft). Friktionen mellan hjul och räls kan försummas.

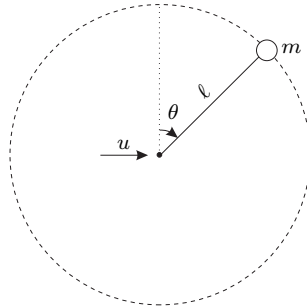
Ställ upp en tillståndsmode­ll av detta vagnsegment med $F(t)$ som insignal och avståndet $(y_1 - y_2)$ mellan vagnarna som utsignal. Välj dina tillstånd så att de har en fysikalisk tolkning (e.g. position, hastighet, acceleration, etc.)



Övningstal 3.10 (pmt7c)

I figuren på nästa sida visas en pendel med längd ℓ och massa m som styrs med accelerationen u i horisontell led. Låt θ vara vinkeln mellan vertikalen och pendeln enligt figuren. Genom momentbalans fås följande dynamik (g är gravitationskonstanten)

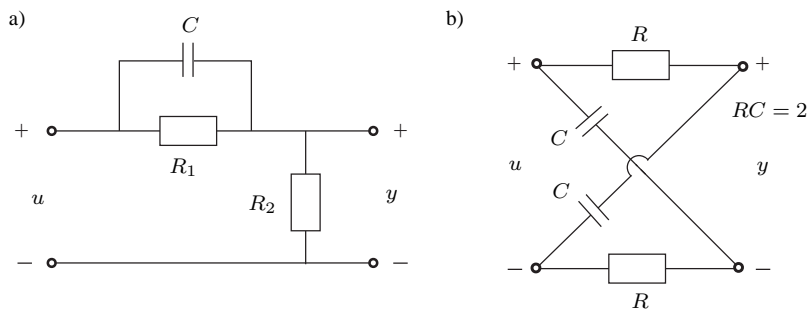
$$m\ell^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - m\ell u \cos \theta$$



- a) Formulera en tillståndsmodell och linjärisera kring arbetspunkten (θ_0, u_0) .
- b) Var hamnar det linjära systemets poler då pendeln är i vila dels rakt upp och dels rakt ner?

Övningstal 3.11 (pmt8)

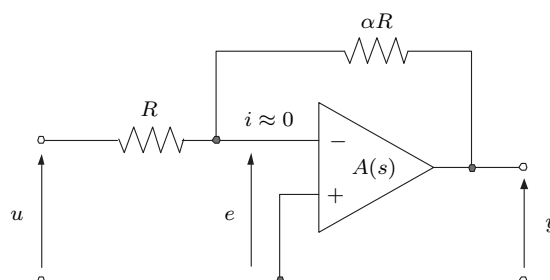
Nedanstående två elektriska filter är obelastade på utgångssidan. Bestäm deras överföringsfunktioner $G(s) = Y(s)/U(s)$ och skissera motsvarande stegsvar och impulssvar. Rita även pol-nollställesdiagram. Ge en fysikalisk tolkning till det märkliga impulssvaret i uppgift a).



Övningstal 3.12 (pmt9)

Beräkna överföringsfunktionen från u till y , då operationsförstärkaren i figuren längst upp på nästa sida fungerar som en första ordningens överföringsfunktion med tidskonstant T och hög förstärkning K , d.v.s.

$$A(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad K \gg 1$$



Hur stor blir tidskonstanten för den återkopplade förstärkaren (överföringen från u till y) då α varierar mellan noll och ett, och $K \gg 1$? Ange speciellt värdet då $K = 10^5$, $T = 0.01$ och $\alpha = 1$.

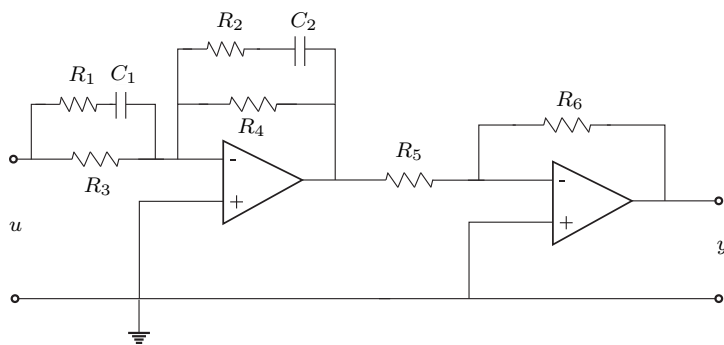
Övningstal 3.13 (pmt10)

Figuren nedan visar en kompenseringslänk som implementeras med hjälp av operationsförstärkare.

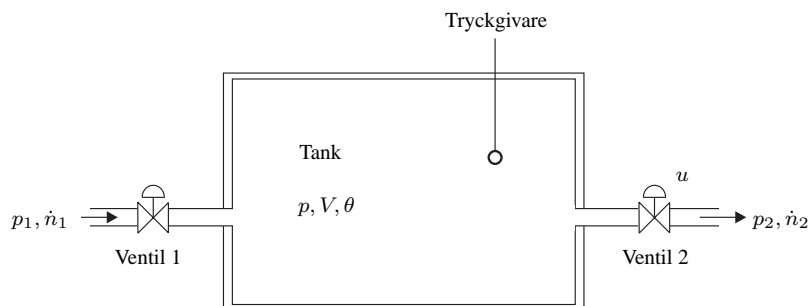
Visa, under antagande om ideala operationsförstärkare, att överföringsfunktionen från $U(s)$ till $Y(s)$ kan tecknas på formen

$$K \frac{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}{(s + \alpha_3)(s + \alpha_4)}$$

samt ange parametrarna K och $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ som funktioner av komponentvärdena R_1, \dots, R_6 och C_1, C_2 .



Övningstal 3.14 (pmt13)



Gastrycket i ovanstående tank skall regleras med ventil 2, medan ventil 1 antas ha ett konstant läge. Följande beteckningar gäller:

p = tryck	\dot{n} = molflöde
V = volym	u = reglerventilens position
θ = temperatur	k = konstant

För molflödena genom respektive ventil gäller att

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= k_1 \sqrt{p_1 - p} \\ \dot{n}_2 &= k_2 u^2 \sqrt{p - p_2}\end{aligned}$$

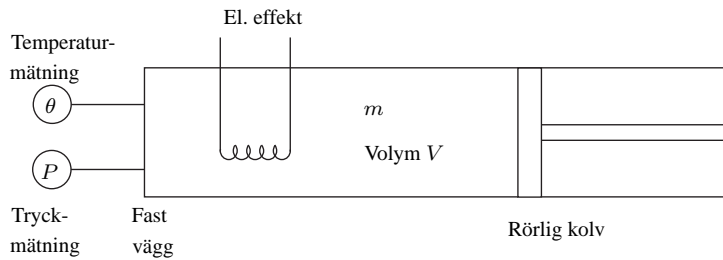
Eftersom flödena anses variera långsamt gäller isotermska förhållanden. Dessutom antas att allmänna gaslagen är giltig för den aktuella gasen (ideal gas).

- Ange den differentialekvation som bestämmer hur trycket p i tanken påverkas av trycken p_1 och p_2 samt ventilläget u .
- Bestäm vilket ventilläge u_0 som krävs för att få önskat tryck p_0 i tanken då $p_1 = p_{10}$ och $p_2 = p_{20}$.

- c) Beräkna den linjära överföringsfunktionen från ventilläge till tryck i tanken vid den önskade arbetspunkten enligt uppgift b).

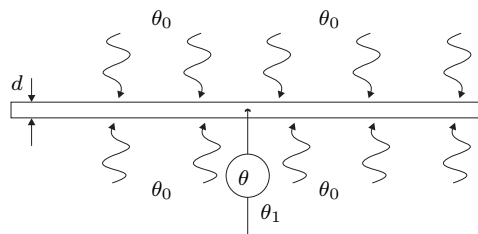
Övningstal 3.15 (pmt14)

En gasmassa m är innesluten i en cylinder, se figur. Allmänna gaslagen kan anses gälla.



Man vill nu styra trycket genom att variera temperaturen θ och volymen V . Ange ett linjärt samband mellan trycket och styrstorheterna θ och V . Låt P_0 , θ_0 och V_0 beteckna motsvarande värden vid önskad arbetspunkt.

Övningstal 3.16 (pmt16)

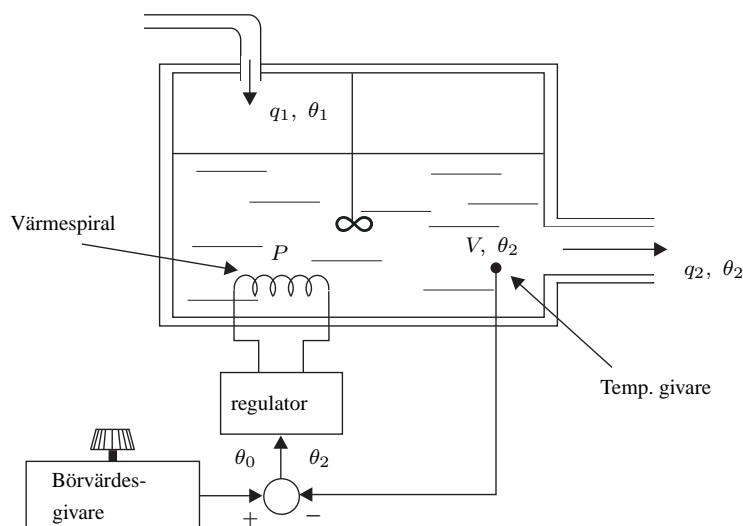


En tunn plåt (tjocklek d , densitet ρ , specifikt värme c) införs i en stålugn med temperaturen θ_0 . Temperaturen i plåten θ_1 mäts med pyrometer. För värmeövergången gäller Stefan Boltzmann's lag

$$q = \sigma(\theta_0^4 - \theta_1^4) \quad [\text{W/m}^2]$$

Bestäm överföringsfunktionen $\Delta\theta_1(s)/\Delta\theta_0(s)$ i arbetspunkten θ , där θ är en given konstant ugnstemperatur. Leder högre arbetstemperatur till ett snabbare eller ett långsammare system?

Övningstal 3.17 (pmt17)



Ett reglersystem för temperaturreglering i en vattentank visas i figuren. Temperaturen regleras med en regulator som bestämmer effekten till värmespiralen.

Antag följande:

- Temperaturgivaren är ideal, d.v.s. den kan anses reagera momentant på förändringar i temperaturen.
- Effektutvecklingen i värmespiralen är proportionell mot reglerfelet, d.v.s. $P = P_0 + \Delta P$, där $\Delta P = k(\theta_0 - \theta_2)$, $k = 4 \cdot 10^5$.
- Regleringen skall ske kring en arbetspunkt:

$$\theta_0 = \theta_{00} + \Delta\theta_0 \quad (\text{normalt börvärde } \theta_{00} = 40^\circ \text{ C})$$

$$\theta_1 = \theta_{10} + \Delta\theta_1 \quad (\text{normal tilloppstemperatur } \theta_{10} = 20^\circ \text{ C})$$

$$\theta_2 = \theta_{20} + \Delta\theta_2 \quad (\text{normalt ärvärde } \theta_{20} = 40^\circ \text{ C})$$

- Ideal blandning
- $q_1 = q_2 = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$, $V = 1 \text{ m}^3$, $c_p = 4.18 \text{ kJ/kgK}$.

a) Bestäm lämpligt värde på P_0 så att $\Delta P = 0$ i arbetspunkten.

b) Rita blockschema för systemet med aktuella numeriska värden.

c) Hur förändras blockschemat om temperaturgivaren inte är ideal utan motsvaras av ett första ordningens system med tidskonstanten $T = 2 \text{ s}$? Har temperaturgivarens överföringsfunktion någon praktisk betydelse i detta fall?

Övningstal 3.18 (pmt17b)

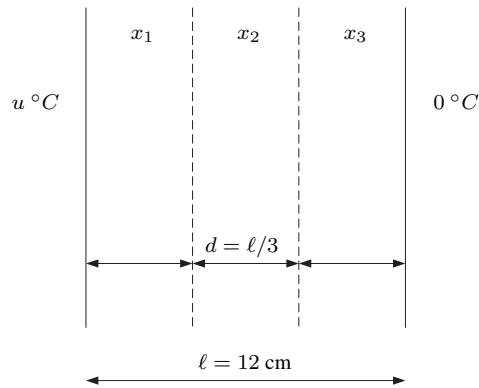
Två rum är åtskilda av en massiv stålvägg med 12 cm tjocklek. I det ena rummet varierar temperaturen ($u^\circ \text{ C}$) medan temperaturen i det andra är approximativt konstant ($= 0^\circ \text{ C}$).

För att få en förenklad dynamisk modell av det termiska energiflödet mellan rummen delas väggen in i tre skikt enligt figuren, med antagen konstant temperatur inom varje skikt $x_1(t)^\circ \text{ C}$, $x_2(t)^\circ \text{ C}$ och $x_3(t)^\circ \text{ C}$.

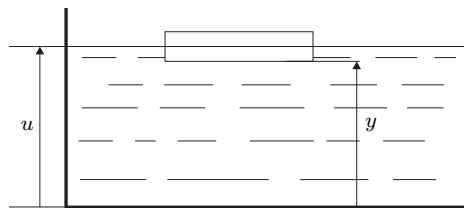
Energiflödet mellan omgivningen och ytskiktet bestäms av värmeövergångstalet, medan flödet mellan angränsande skikt bestäms av materialets värmekonduktivitet.

Ställ upp en tillståndsmodell (A, B, C) för systemet, där utsignalen $y(t)$ är den till det nollgradiga rummet strömmande effekten per väggareanhet [kW/m^2]. Numeriska värden på vissa aktuella konstanter är:

- $\rho = 7500 \text{ [kg/m}^3]$ (densitet)
- $c = 0.5 \text{ [kJ/(kg K)]}$ (värmekapacitet)
- $\alpha = 0.1 \text{ [kJ/(m}^2 \text{ s K)]}$ (värmeövergångstal)
- $\lambda = 0.08 \text{ [kJ/(m s K)]}$ (värmekonduktivitet, motsvarande värmegenomgång: λ/d).



Övningstal 3.19 (pmt18)



Som nivågivare i en vätsketank används en flottör med arean A , höjden h och densiteten lika med halva vätskedensiteten, som är ρ . Förutom av "lyftkraften" (enligt Arkimedes princip lika med vikten av den undanträngda vätskemängden) påverkas flottören av en dämpkraft proportionell mot den relativa hastigheten mellan flottören och vätskan, och motriktad denna. Proportionalitetskonstanten är c [Ns/m].

- Ställ upp den differentialekvation som beskriver det dynamiska sambandet mellan flottörens position y och vätskenivån u .
- Antag att systemet befinner sig i vila. Härled ett (statiskt) samband mellan jämviktsnivåerna y_0 och u_0 samt flottörens höjd h .
- Antag att små variationer från jämviktsläget förekommer, dvs att $y = y_0 + \Delta y$ och $u = u_0 + \Delta u$. Ställ upp överföringsfunktionen från nivåändringen Δu till motsvarande flottörförflyttning Δy .
- Ställ upp en tillståndsmodell på *styrbar kanonisk form* för systemet, dvs ange matriserna A , B och C i modellen

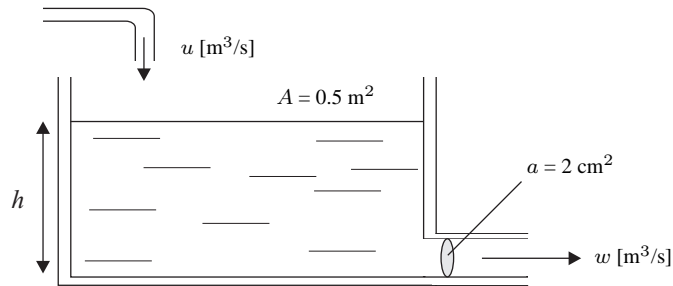
$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t), \quad \Delta y(t) = C\Delta x(t).$$

Övningstal 3.20 (pmt20)

Figuren på nästa sida visar en vattentank med inflödet u och utflödet w . Enligt Bernoullis ekvation gäller att

$$\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$$

där ρ = vattnets densitet [kg/m³], och v = vattnets utströmningshastighet [m/s]



- Bestäm differentialekvationen för sambandet mellan inflödet u och vattennivån h .
- Linjärisera ekvationen kring arbetspunkterna $h_0 = 0.4$ m och $h_0 = 0.8$ m. Bestäm sedan motsvarande linjäriserade överföringsfunktioner. Hur påverkas systemets linjäriserade tidskonstant av höjden h_0 ?

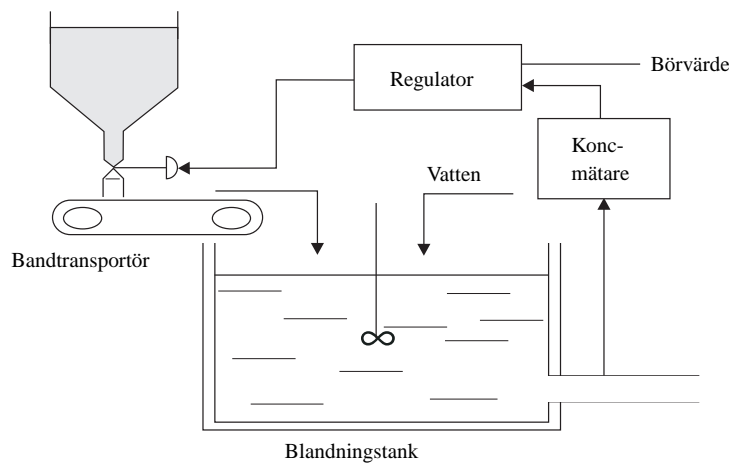
Övningstal 3.21 (pmt22)

Figuren nedan visar ett system för koncentrationsreglering. Blandningstanken med volymen 0.5 m^3 matas dels med vatten med konstant flöde $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$, och dels med ett pulverförmigt material av varierande sammansättning. Genom styrning av matningsventilens öppning vill man åstadkomma en konstant koncentration $[\text{g}/\text{m}^3]$ i utflödet från tanken. Eftersom pulvermängden är relativt liten påverkas ej den totala volymen av pulvertillförseln.

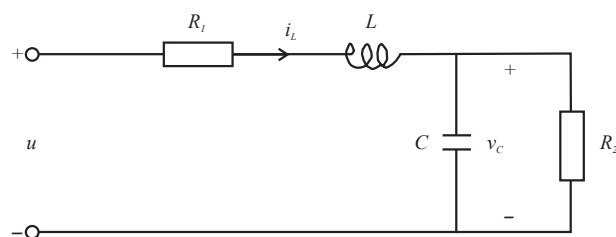
Processen regleras med en PI-regulator, vars överföringsfunktion är

$$F_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

Bandtransportören motsvarar en tidsfördröjning på 2 minuter. Rita blockschema över systemet och ange de olika blockens överföringsfunktioner.



Övningstal 3.22 (E18)



Betrakta den elektriska kretsen i figuren ovan.

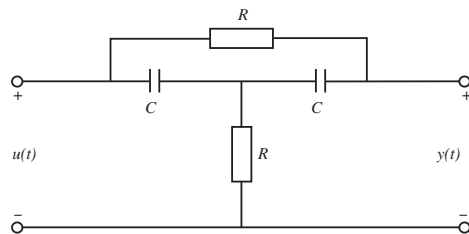
- (a) Välj strömmen genom induktansen och spänningen över kapacitansen som tillståndsvariabler och ställ upp tillståndsekvationerna på standardformen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

- (b) Beräkna övergångsmatrisen $\Phi(t) = e^{At}$ för fallet då $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ och då $L = 1 \text{ H}$ och då $C = 1 \text{ F}$.

- (c) Kretsen är ansluten till en ackumulator, med försumbar inre resistans och med EMK 2 V. Stationärt tillstånd råder i kretsen. Den något opraktiske Flinker Filip kommer nu in på labbet. Filips första åtgärd är att lägga sin lägenhetsnyckel över ackumulatorns polskruvar (vid $t = 0$), varvid ackumulatören kokar. Skissa i ett diagram tillståndet i kretsen för $0 \leq t \leq 3 \text{ s}$.

Övningstal 3.23 (E19)



Figur ovan visar ett så kallat överbryggt T-nät.

- (a) Uppställ en tillståndsmodell för systemet! Instorhet är spänningen u och utstorhet är spänningen y i figuren ovan.
- (b) Bestäm överföringsfunktionen från u till y ! Är systemet av minimumfastyp?

Övningstal 3.24 (pmt25)

Rita elektriska kretsar för de icke-elektriska modellerna

- Translaterisk rörelse

$$m \frac{dv}{dt} + bv + k \int_0^t v d\tau = F_d$$

- Rotationsrörelse

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + K \int_0^t \omega d\tau = T_d$$

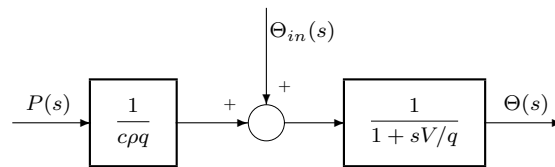
- Fluid

$$\frac{\rho l}{A} \frac{dq}{dt} + R_f q + \frac{\rho g}{A_T} \int_0^t q d\tau = p$$

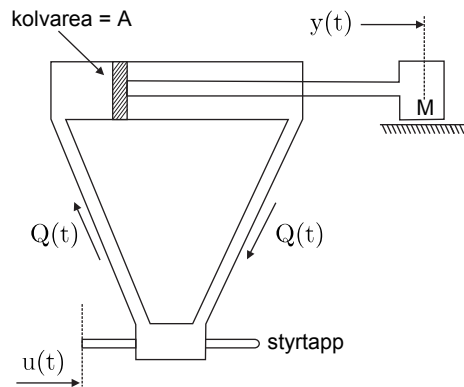
Övningstal 3.25 (pmt26)

Formulera en modell för seriekopplade värme- alternativt blandningstankar, där även transportfördröjning mellan tankarna ingår. Studera speciellt nedanstående blockschema för det termiska systemet ($\lambda = 0$)

$$c\rho V \frac{d\theta}{dt} + (c\rho q + \lambda)\theta = P + (c\rho q + \lambda)\theta_{in}$$



Övningstal 3.26 (pmod4)

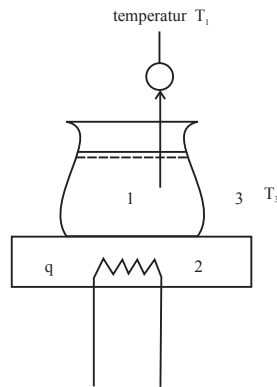


Den hydrauliska styrventilen ger ett flöde Q (m^3/s) av formen $Q = K_1 u - K_2 \Delta P$, där ΔP är tryckdifferensen över kolven, som ger den högerriktade kraften $F = A \Delta P$. Oljan anses här inkompressibel och kolvläckaget kan försummas. Kraften F driver massan M som glider utan friktion. Parametrarna A , M , K_1 och K_2 är konstanter. Man önskar styra massans läge, $y(t)$, med hjälp av ventiltappen vars läge är $u(t)$.

- Ange överföringsfunktionen $G(s) = Y(s)/U(s)$.
- Om $u(t)$ har formen av en hög, kortvarig puls med arean B , svarande mot en snabb fram- och återgående ventiltappsrorelse, hur lång sträcka kommer då massan M att röra sig?
- Vad händer om ventiltappen flyttas från sitt neutralläge till ett annat läge och förblir där?
- Ställ upp tillståndsekvationerna för systemet. Som tillståndsstorheter väljs massans läge och hastighet. Utstorhet är massans läge, $y(t)$, och instorhet är ventiltappens läge, $u(t)$.
- Hur skulle tillståndsekvationerna ändras om massans rörelse påverkades av en dynamisk friktion, $K_3 v(t)$, där $v(t)$ är massans hastighet?

Övningstal 3.27 (pmod5)

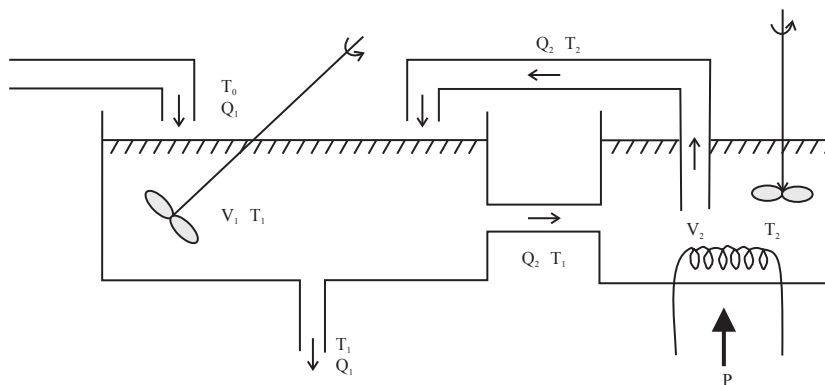
På en värmeplatta med värmekapaciteten C_2 ($\text{kJ}/^\circ\text{C}$) och temperaturen T_2 ($^\circ\text{C}$) står en vätskefylld bägare med (den totala) värmekapaciteten C_1 och temperaturen T_1 . Plattan tillföres den elektriska effekten q (kW). Värmeflödena från plattan till bägaren, från bägaren till omgivande luft och från plattan till omgivande luft är proportionella mot temperaturskillnaderna med respektive proportionalitetskonstanter $k_{12}A_{12}$, $k_{13}A_{13}$ och $k_{23}A_{23}$, där k betecknar värmeövergångstal och A gränssytor. Luften, vars temperatur är T_3 , anses ha oändlig värmekapacitet. Atmosfärstryck råder.



- Identifiera systemets in- och utstorheter, välj tillståndsstorheter och ställ upp tillståndsekvationerna på matrisform.
- Beräkna överföringsfunktionsmatrisen $G(s)$ där $Y(s) = G(s)U(s)$. Hur tolkas elementen i $G(s)$ fysikaliskt? Hur många poler har systemet?
- Antag att processen äger rum i ett värmeisolerat, begränsat utrymme där den omgivande luften har värmekapacitet C_3 . Förklara varför $G(s)$ i detta fall övergår till en skalär. Hur många poler har systemet?
- Antag följande parametervärden (enligt a- och b-uppgifterna): $k_{12}A_{12} = 0.010$, $k_{13}A_{13} = 0.006$, $k_{23}A_{23} = 0.003$ (kJ/°C). $C_1 = 10$, $C_2 = 3$ (kJ/°C). Skissera vätsketemperaturen som funktion av tiden då effekten ändras från 0 till 1 kW. För enkelhets skull kan man anta att såväl plattans som vätskans initialtemperatur är 0°C. Omgivningstemperaturen är 0°.
- Resultatet i d-uppgiften antyder att ytterligare en fysikalisk mekanism (på något sätt) borde ha inkluderats i modellen. Vilken mekanism? (Antal t ex att effekten höjts till 1.2 kW och att vätskan vore vatten!)

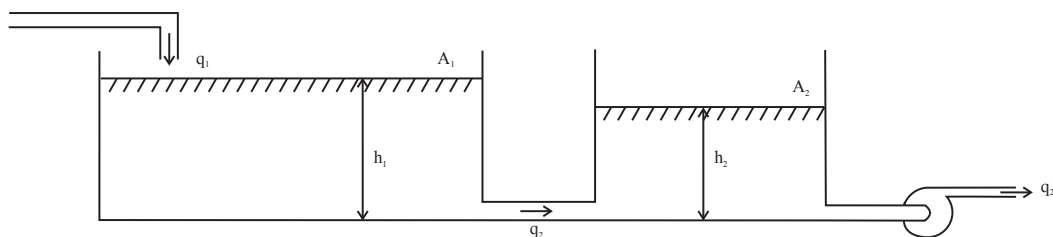
Övningstal 3.28 (pmod6)

I en processanläggning finns ett delsystem bestående av två kar enligt figuren. Det större karet används för beredning av en viss kemikalie, medan det mindre karet används för uppvärmning och för tillsättning av speciella ämnen. Ideal omrörning antas i vardera tanken. Flödena Q_1 och Q_2 antages här konstanta. Till tidsfördröjningar i rören tages ej hänsyn. Ingående vätsketemperatur T_0 varierar, liksom värmningseffekten P . De båda kartemperaturerna mäts kontinuerligt.



- Ställ upp en tillståndsmodell för systemet där karens entalpier väljs som tillståndsstorheter. Vätskans specifika värme är c_p och densiteten är ρ .
- Bestäm överföringsfunktionsmatrisen $G(s)$ där $Y(s) = G(s)U(s)$.
- Beräkna speciellt överföringsfunktionen från T_0 till T_1 då följande parametervärden gäller: $V_1 = 2 \text{ m}^3$, $V_2 = 0.5 \text{ m}^3$, $Q_1 = 20 \text{ l/s}$, $Q_2 = 10 \text{ l/s}$.

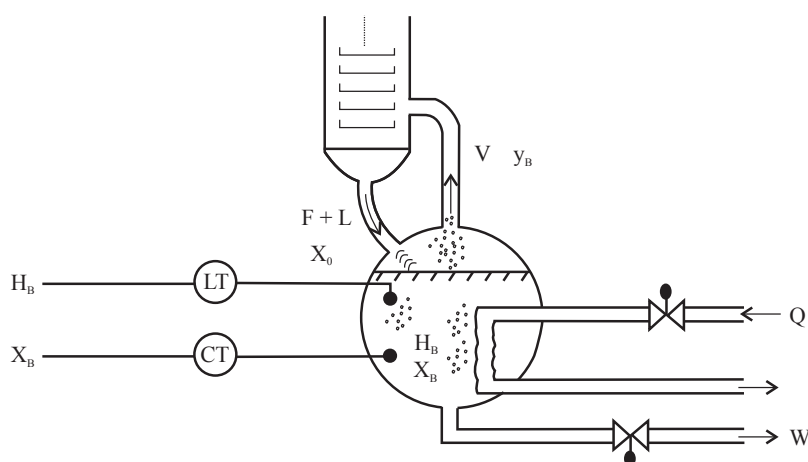
Övningstal 3.29 (pmod9)



Två cylindriska kar med bottenareor A_1 och A_2 har arrangerats som kommunicerande kärl enligt ovanstående figur. Flödet q_{12} antas vara proportionellt mot kvadratroten ur tryckskillnaden över ventilen. Utflödet från det andra karet, q_2 , hålls nära arbetspunktens stationära flöde, Q (m^3/s), genom pumpning. Nivån i detta kar hålls då nära h_{20} .

- Formulera en olinjär tillståndsmodell för det beskrivna systemet. Instorheter är inflödet q_1 och det pumpade utflödet q_2 . Med pressduktorer (metod för vägning baserad på elektromagnetism) mäts massan av de två kare med innehåll kontinuerligt. Vätskans densitet är ρ och karens tomvikter är M_{10} respektive M_{20} . Kommunikationskanalens tvärsnittsarea är a .
- Linjärisera systemet i anslutning till den ovan definierade arbetspunkten.
- Bestäm systemets överföringsfunktionsmatris och ge en enkel fysikalisk tolkning av elementen i denna matris.

Övningstal 3.30 (pmod10)



Figuren visar kokardelen i en destillationskolonn. F , L och W är vätskeflöden medan V är ett ångflöde. X_0 och X_B är molbråket för den något flyktigare komponenten i vätskefas medan Y_B är motsvarande molbråk i ångfas. $[F] = [L] = [W] = [V] = \text{mol/s}$ och $[H_B] = \text{mol}$.

Kokningen påverkas genom extern tillförsel av värme via ett reglerbart ångflöde Q (m^3/s). Temperaturen i kokaren antas nära arbetspunkten vara sådan att tillförd värme omedelbart innebär förångning och vi kan därför ge en approximativ formel för det interna ångflödet V :s beroende av det externa ångflödet Q (gäller vid måttliga variationer av Q)

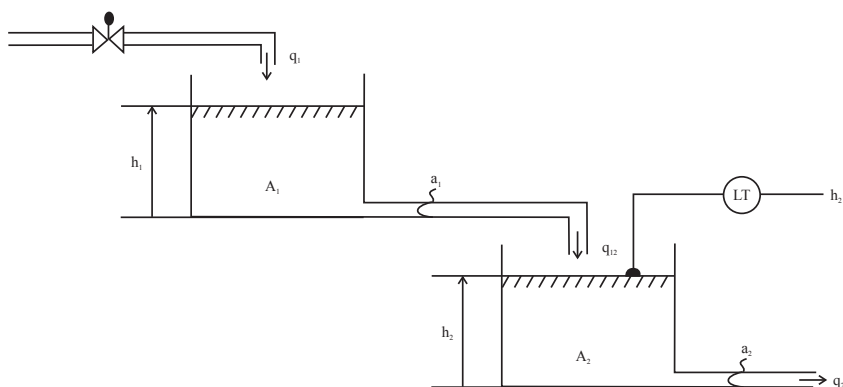
$$V = k_0 + k_1 Q + k_2 Q^2$$

där k_0 , k_1 och k_2 är konstanter. Innebörden av resonemanget är att energibalansen inte krävs för att approximativt beskriva systemdynamiken. Ställ upp materialbalanserna för kokaren, de I s för den totala molära kokarinnehållet och dels för den flyktigare komponenten i kokaren. Relationen mellan Y_B och X_B ges av formeln

$$Y_B = \frac{\alpha X_B}{1 + (\alpha - 1) X_B}$$

där α är den s.k. relativa flyktigheten. Bestäm överföringsfunktionen från små ändringar i Q till små ändringar i X_B . Relationen mellan en variabel (vilken som helst), dess variation och dess stationärvärde skrivs $Z = \bar{Z} + \Delta Z$.

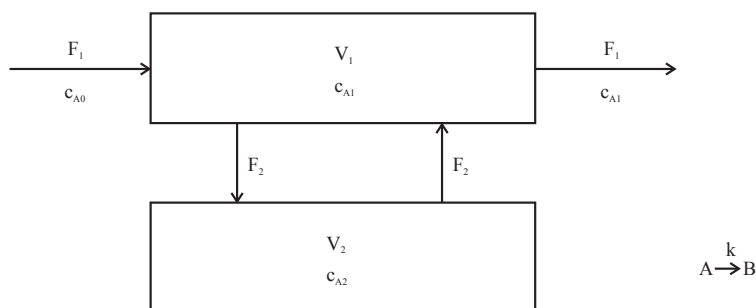
Övningstal 3.31 (pmod11)



Två cylindriska kar med bottenareor A_1 och A_2 och utloppsareor a_1 och a_2 har arrangerats enligt ovanstående figur. Systemets instorhet är flödet q_1 genom ventilen. Nivån i det nedre karet mäts kontinuerligt och utgör systemets utstorhet.

- Formulera en olinjär tillståndsmodell för det beskrivna systemet där nivåerna h_1 och h_2 är tillståndsstorheter.
- Bestäm den arbetspunkt i systemet som svarar mot det konstanta flödet Q genom karen (dvs beräkna h_{10} och h_{20}).
- Ställ upp den linjära tillståndsmodell för det beskrivna systemet som är korrekt "tillräckligt nära" ovan givna arbetspunkt.
- Utgående från den linjära modellen ovan, bestäm överföringsfunktionen $\Delta h_2(s)/\Delta q_1(s)$.
- Bestäm uttryck för ω_0 och ζ i överföringsfunktionen ovan uttryckt i givna storheter. Visa också att den relativa dämpningen $\zeta > 1$.
- Hur påverkas de två nivåerna om en liten "extra" vätskevolym, ΔV , direkt pumpas i det andra karet? Beräkna responserna i de olika fallen!

Övningstal 3.32 (pmod12)



En kemisk reaktor med dåliga blandningsförhållanden kan modelleras, enligt figuren ovan, genom att reaktorvolymen delas upp i två separata delvolym, vardera med god blandning, och inbördes cirkulation. Volym och flöden antas konstanta. Den reaktion i vilken A övergår till B är irreversibel. Reaktionshastigheten bestäms approximativt av relationen $r_A = k_A c_A$, där $[r] = \text{mol/m}^3\text{s}$.

- Ställ upp en tillståndsmodell för processen där initialkoncentrationen, c_{A0} , är instorhet och utflödets koncentration, c_{A1} , är utstorhet. Lagrade mängder av komponenten A väljs som systemets tillståndsstorheter.
- Bestäm den överföringsfunktion som visar hur en förändring i inflödets koncentration, c_{A0} , påverkar utflödets koncentration, c_{A1} .

Övningstal 3.33 (pmod13)

I en väl omrörd biologisk reaktor reagerar substrat med bakterier i cellsyntes. Reaktionshastigheten, r , är en Monodfunktion av substratkoncentrationen, c . En Monodfunktion är en olinjär funktion av typen

$$r = \frac{r_0 c}{k + c}$$

där r_0 och k är konstanta parametrar. Flödet genom bioreaktorn, Q [liter/min], och reaktorvolymen, V [liter], kan även de antas vara konstanta. Koncentrationen av inkommande substrat är c_i och koncentrationen av bakterier är x , där x betraktas som en insignal. Under processens gång förbrukas substrat så att ändringen av substratkoncentrationen per tidsenhet är arx där a är en konstant. Processens arbetspunkt är (c_0, c_{i0}, x_0) . Bestäm de överföringsfunktioner som visar hur små förändringar i inflödets substratkoncentration, Δc_i , respektive i bakteriekoncentrationen, Δx , påverkar koncentrationen i reaktorn, Δc .

Övningstal 3.34 (E9)

En perfekt isolerad metallstav av längden L och tvärsnittsytan A tillföres från stavens ena ände (symmetriskt) den styrbara värmeeffekten $u(t)$ (W/m²). Vid stavens andra (och isolerade) ände mäts temperaturen $y(t)$ (K).



Det kan antas att värmeledningsekvationen (som kan Laplacetransformeras), dvs

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

beskriver den interna värmetransporten i staven, tillsammans med randvillkoren

$$-\lambda_{z=0} \frac{\partial T}{\partial z} = u(t), \quad -\lambda_{z=L} \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Densitet, konduktivitet och specifikt värme för staven är respektive ρ , λ , c_p .

Bestäm överföringsfunktionen $G_0(s) = Y(s)/U(s)$ som relaterar styreffekten till temperaturvärdet.

Ledning.

Differentialekvationen $w''(z) - \beta w(z) = 0$ har de två linjärt oberoende lösningarna $\sinh(\sqrt{\beta}z)$ och $\cosh(\sqrt{\beta}z)$.

4 Återkopplade system i tidsplanet

Övningstal 4.1 (ptf2)

En PI-regulator med utsignalsområdet 4-20 mA används för att styra ett ångflöde för uppvärmning av en process. En stegändring av styrsignalen på 4 mA leder vid *manuell* styrning till följande stegsvar (se tabell) för systemet med omvandlare, ventil, process och mätgivare. Mätgivarens arbetsområde är 0-200°C.

Tid (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	30	50
Temp (°C)	50	51	54	58	62	65	68	71	73	76	79	80

Ange en överföringsfunktion för processen med omvandlare, ventil och mätgivare. Antag att dynamiken approximativt kan beskrivas som ett första ordningens system med dödtdid.

Övningstal 4.2 (void)

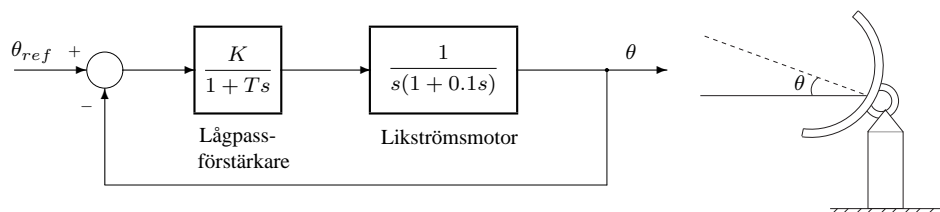
Uppgiften har utgått.

Övningstal 4.3 (void)

Uppgiften har utgått.

Övningstal 4.4 (pst4)

Ett servosystem för en radarantenn består bl.a. av en likströmsmotor och en förstärkning K . På grund av begränsad snabbhet hos de ingående komponenterna ingår i modellen för förstärkaren en låpassfilterande länk. En lång tidskonstant T motsvaras av en långsam förstärkare medan en kort tidskonstant representerar en snabb förstärkare med brett frekvensområde.



Dimensionera förstärkningen K så att amplitudmarginalen för det återkopplade systemet blir $A_m = 2$, dvs se till att K kan ökas med en faktor 2 innan systemet blir instabilt. Ange speciellt vad som händer med K då T är mycket stor respektive mycket liten.

Övningstal 4.5 (pst5)

Den friktionsfritt rörliga massan m styrs av en hydraulkolv i nedanstående positionsservo. Man dimensionerade servokretsen utan att beakta fjädningen k , som alltså avsågs oändligt styv, $k = \infty$. Den beräknade öppna kretsöverföringen var

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = L(s) = \frac{50}{s(1 + 0.02s)}$$

I verkligheten blev den

$$L(s) = \frac{50}{s(s^2/\omega_n^2 + 0.02s + 1)}$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (cylinders vikt försummad). Beräkna hur hög den odämpade resonansfrekvensen ω_n minst måste vara för att fjädningen inte skall leda till instabilitet.

och nämnarpolynom. Eftersom Laplacetransformen för dödtid ej kan beskrivas på detta sätt, införs ofta den s k Padéapproximationen för att modellera dödtidsprocesser. I denna uppgift ska vi undersöka hur denna approximation påverkar stabiliteten för ett återkopplat system. Utgå från följande kretsöverföring med dödtid

$$L(s) = \frac{0.3e^{-2s}}{1 + 0.3s}$$

- a) Vi använder oss av en första ordningens Padéapproximation och ersätter dödtidsfaktorn med

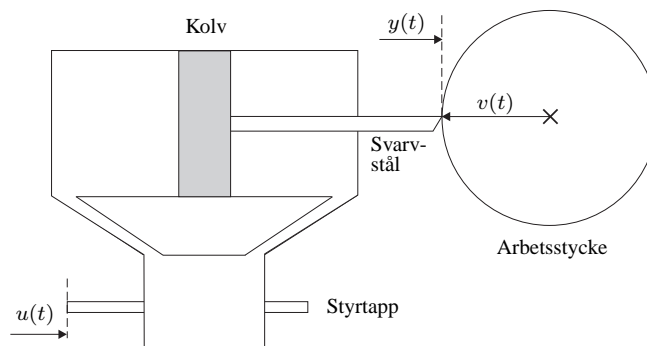
$$\frac{2 - T_d s}{2 + T_d s}$$

där T_d betecknar dödtiden. Bestäm amplitudmarginalen A_m för det återkopplade systemet med Padéapproximation, baserat på Routh-Hurwitz' kriterium.

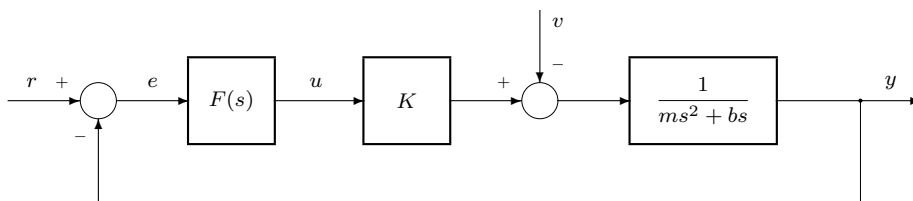
- b) Beräkna amplitudmarginalen A_m för det verkliga systemet med dödtid och jämför med marginalen i uppgift a). Kommentera resultatet.

Övningstal 4.9 (pdp9)

Svarvstålet i en automatsvarv positioneras med hjälp av ett hydraulservo.



Hydraulservots uppgift är att balansera skärkraften $v(t)$ så att önskad position hos svarvstålet $y(t)$ erhålls. Det principiella utseendet för det återkopplade servosystemet ges i följande figur.

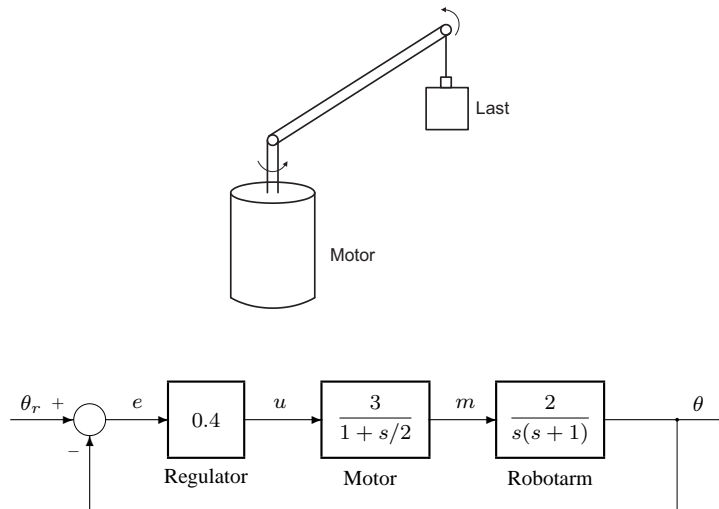


Beräkna kvarstående felet vid konstant skärkraft $v(t) = v_0$ då följande regulatorer används:

- a) $F(s) = K_p$ (P-regulator)
- b) $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ (PI-regulator)

Övningstal 4.10 (pdp10)

Figuren och blockschemat nedan beskriver ett system för positionering av en robotarm. Beräkna hur stort det kvarstående felet blir då robotarmen skall följa en referenssignal, som växer linjärt med hastigheten 30 grader per sekund.



Övningstal 4.11 (pdp11)

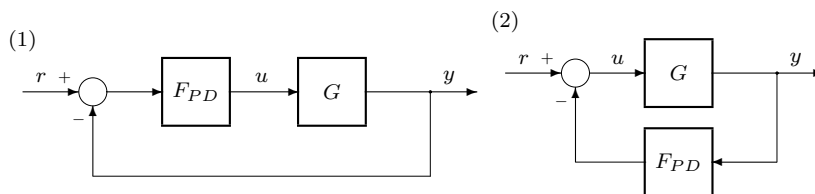
Vid attitydreglering av en raket i vakuum blir processmodellen i linjäriserad form en dubbelintegral,

$$G(s) = \frac{2.5}{s^2}$$

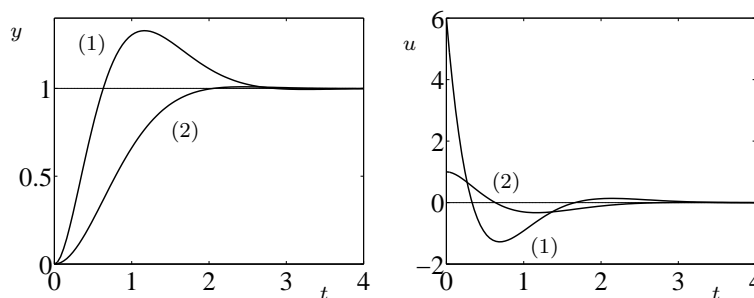
För att reglera denna process införs ett kompenserande filter i form av en PD-regulator.

$$F_{PD}(s) = \frac{1+s}{1+s/6}$$

Kompenseringslänken kan placeras enligt följande två alternativ



Utsignalen $y(t)$ och styrsignalen $u(t)$ för de återkopplade systemen vid en stegändring $r(t) = \sigma(t)$ ges i följande diagram.



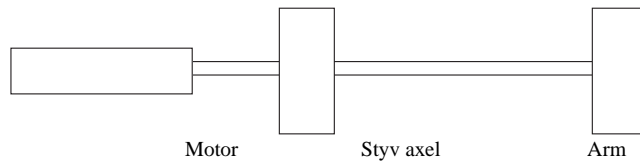
a) Beräkna slutna systemets överföringsfunktion i de båda fallen. Vad är orsaken till översvängen i det första fallet?

b) Beräkna kvarstående felet för de båda fallen då referenssignalen $r(t) = t$.

Kommentera placeringen av kompenseringslänken med avseende på steg- och rampsvar.

Övningstal 4.12 (pdp12)

Figuren visar en enkel modell av en industrirobot i en frihetsgrad.



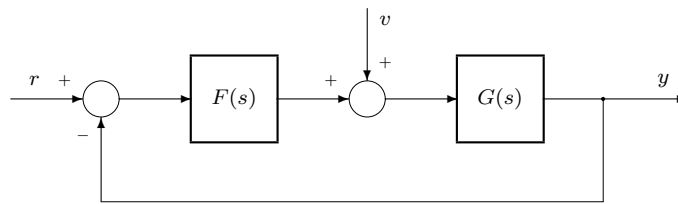
Systemet kan förenklat beskrivas av ekvationen

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_m I$$

där ω är vinkelhastigheten, I är motorströmmen, J är summan av motorns och axelns tröghetsmoment, samt k_m är en motorkonstant. Följande parametervärden gäller: $k_m = 0.5 \text{ Nm/A}$, $J = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/s}^2$.

- Man vill att roboten skall kunna följa en vinkelhastighetsreferens ω_r , som växer linjärt med 1 rad/s^2 , med ett stationärt fel som är mindre än 0.05 rad/s . Visa hur detta kan uppnås genom att återkoppla vinkelhastigheten med en proportionell regulator, vars utsignal styr motorströmmen. Vilken förstärkning erfordras?
- För att eliminera det stationära felet vid rampformade vinkelhastighetsreferenser, utökas regulatoren med en integralterm. Beräkna de parametervärden för den så erhållna PI-regulatorens, som uppfyller (i) att regulatorns högfrekvensförstärkning bibehålls från uppgift a) och (ii) att det slutna systemet får en relativ dämpning på ca 0.7.

Övningstal 4.13 (pdp14)



Antag att processen $G(s)$ innehåller en integration, d.v.s. $G(s) = \frac{K}{s} \bar{G}(s)$ där $\bar{G}(0) = 1$. Bestäm och rita låg- och högfrekvensasymptoterna för kretsöverföringen $L = GF$, känslighetsfunktionen $S = 1/(1 + L)$, komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1 + L)$, styrkänslighetsfunktionen $FS = F/(1 + L)$ och störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1 + L)$ då

- $F(s) \rightarrow \begin{cases} K_p & \text{när } \omega \rightarrow 0 \\ K_\infty & \text{när } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$
- $F(s) \rightarrow \begin{cases} \frac{K_i}{s} & \text{när } \omega \rightarrow 0 \\ K_\infty & \text{när } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$

Vad blir det kvarstående felet för de båda regulatortyperna då laststörningen $V(s) = 1/s^\ell$ där $\ell=1, 2$ ($\ell = 1 \leftrightarrow \text{steg}$, $\ell = 2 \leftrightarrow \text{ramp}$).

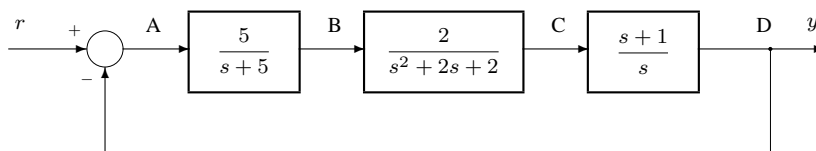
Övningstal 4.14 (ppi10)

En viss process har på grund av långa rörledningar en dödtid på cirka 10 sekunder. Processen styrs av en PID-regulator med överföringsfunktionen

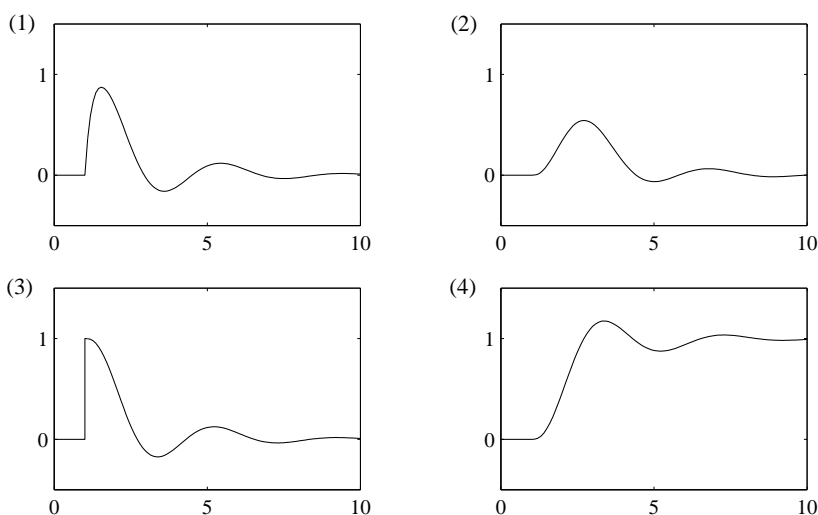
$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

Regulatorn har det konstanta referenssignalvärdet 80°C , varvid reglerfelet är approximativt lika med noll. Referenssignalen ändras plötsligt till 90°C . Hur ändras styrsignalens värde omedelbart efter denna referensändring då $T_i = 30$ sek, $T_d = 6$ sek, $T_f = 1$ sek och $K_p = 0.20$. Ange också ett uttryck för denna styrsignalförändring för godtyckliga värden på regulatorparametrarna.

Övningstal 4.15 (pmd8)

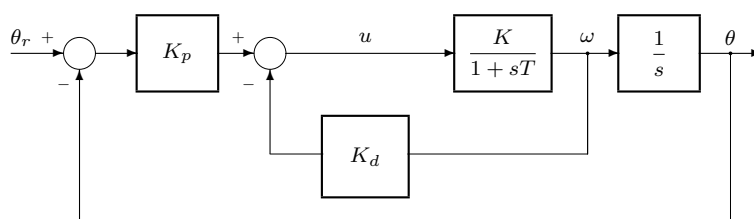


Det återkopplade systemet enligt ovanstående figur påverkas av ett steg i referenssignalen $r(t)$. Fyra signaler registreras i punkterna A, B, C och D. Ange för var och en av kurvorna nedan från vilken punkt registreringen är hämtad.



Övningstal 4.16 (pmd11)

Betrakta följande servosystem med en likströmsmotor

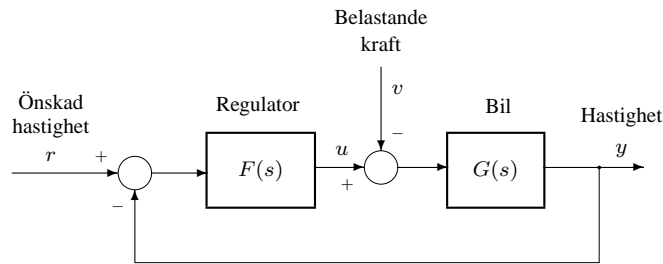


Både vinkeln θ och vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ återkopplas enligt blockschemat. Antag att $K = 3$ och $T = 0.5$.

- Bestäm överföringsfunktionen från referenssignalen θ_r till utsignalen θ , och välj regulatorparametrarna K_p och K_d så att slutna systemets poler hamnar i en dubbelpol $s = -\alpha$. Dubbelpolen garanterar ett väl dämpat återkopplat reglersystem ($\zeta = 1$).
- Bestäm och skissera utsignalen $\theta(t)$ samt styrsignalens begynnelsevärde $u(0)$ för $\alpha = 1$ och 5 , då referenssignalen är ett enhetssteg. Vilken motsättning råder mellan önskad snabbhet och styrsignalaktivitet, då dämpningen är konstant?

Övningstal 4.17 (pmd12)

Figuren nedan visar ett blockdiagram för en bil med farthållare.



Den belastande kraften $v(t)$ uppträder vid höjdförändringar (upp- och nedförsbackar). Bilens tröghet beskrivs av överföringsfunktionen (jmf uppgift 1.28)

$$G(s) = \frac{4}{1 + 4s}$$

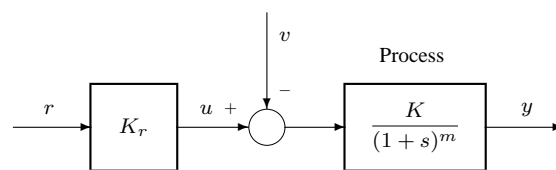
och regulatorn är av PI-typ, d.v.s.

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

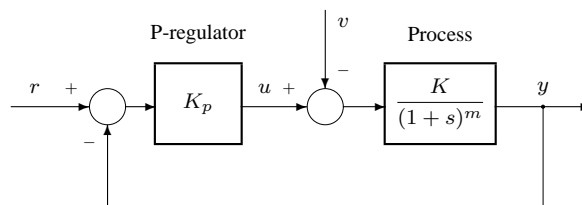
Notera att P-reglering erhålls då $K_i = 0$.

- Bestäm överföringsfunktionerna $G_{ry}(s)$ från r till y , $G_{ru}(s)$ från r till u och $G_{vy}(s)$ från v till y .
- Vad blir de kvarstående felen vid stegformade och rampformade referenssignaler $r(t)$ respektive laststörningar $v(t)$? Iakttag speciellt fallet $K_i = 0$, dvs P-reglering. Det kan antas att regulatorparametrar K_p och K_i är valda så att det återkopplade systemet är stabilt.
- Bestäm för godtyckliga K_p och K_i styrsignalens startvärde $u(0)$ vid stegformade referenssignaländringar. Vilka slutsatser kan man dra angående relationen mellan styrsignalaktivitet ($u(0)$) och kvarstående fel vid P-respektive PI-reglering.

Övningstal 4.18 (pmd13)



Jämför ovanstående öppna styrning, där processens multipelpol är av ordning $m = 1, 2$, med nedanstående återkopplade system.



- Bestäm förstärkningen K_r vid öppen styrning, så att $y(t) \rightarrow r$ då $t \rightarrow \infty$, då referenssignalen $r(t)$ är en stegfunktion och $v = 0$. Antag att processförstärkningen $K = 2$.

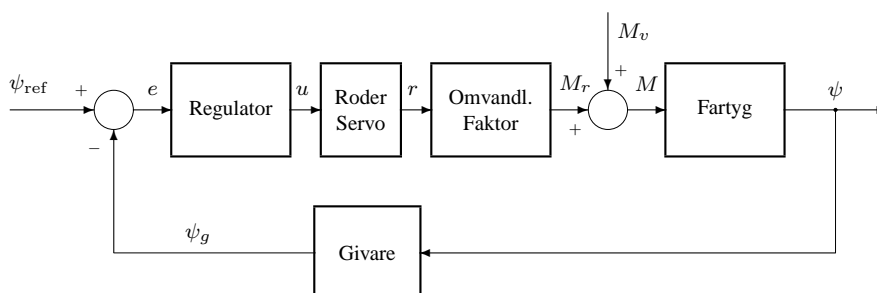
- b) Antag nu att processförstärkningen K avviker från det nominella värdet $K = 2$. Bestäm därför, för ett godtyckligt värde på K , utsignalens slutvärde $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ vid öppen styrning och återkoppling, då referenssignalen $r(t)$ är ett enhetssteg. Notera skillnaden mellan öppen styrning och återkoppling, speciellt då P-regulatorns förstärkning K_p är stor.
- c) Antag att en stegformad laststörning $v(t)$ med amplituden ett subtraheras från styrsignalen $u(t)$. Bestäm det kvarstående felet orsakat av denna störning vid återkoppling respektive öppen styrning. Välj $r = 0$.
- d) Dålig dämpning och stabilitetsproblem kan uppstå i återkopplingsfallet. Bestäm därför dämpningen ζ för det återkopplade systemets nämnarpolynom för $m = 2$, då $K_p = 99$ och $K = 1$. Jämför med polplaceringen då $m = 1$ (återkoppling) samt öppen styrning.
- e) Vilka slutsatser kan vi dra angående fördelar och nackdelar med återkoppling respektive öppen styrning, då processens förstärkning K varierar eller ej kan bestämmas exakt (osäker parameter). Observera skillnaden mellan 1:a och 2:a ordningens system ($m = 1, 2$) vad avser dämpnings- och stabilitetsproblematiken.

Övningstal 4.19 (pmd14)

Figuren nedan beskriver ett reglersystem för automatisk styrning av ett fartyg. Systemet är uppbyggt med en elektrisk regulator. För de olika delarna gäller följande samband:

Regulatorn	$u = 0.5e$
Roderservot	$5\dot{r} + r = 0.1u$
Fartyget	$100\ddot{\psi} + \dot{\psi} = 0.1M$
Givaren	$\psi_g = 0.1\psi$

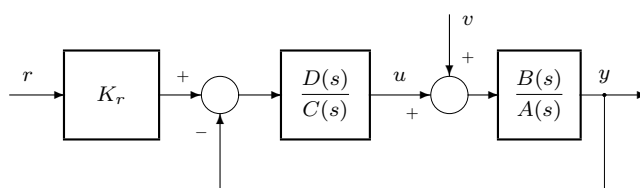
Omvandlingsfaktorn är vid den aktuella hastigheten 10^3 .



ψ = kursvinkel	u = spänning från regulatorn
M_v = vridmoment pga störningar	e = felsignal
M_r = vridmoment pga roderverkan	ψ_g = mätsignal från givaren
M = totalt vridmoment på båten	r = rodervinkel

Bestäm kretsöverföringen $L(s)$, överföringsfunktionen från referenssignalen ψ_r till utsignalen ψ , samt överföringsfunktioner från störningen M_v till kursvinkeln ψ .

Övningstal 4.20 (pmd18)



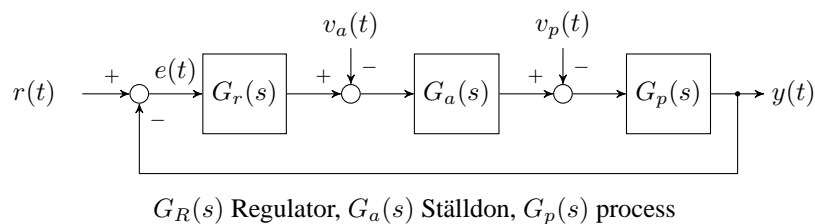
Figuren visar blockschemat för ett reglersystem där $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ och $D(s)$ är polynom. Beräkna överföringsfunktionerna för det återkopplade systemet från referenssignalen r och processtörningen v till den reglerade utsignalen y och styrsignalen u , dvs $G_{ry}(s)$, $G_{vy}(s)$, $G_{ru}(s)$ samt $G_{vu}(s)$.

Inför $P(s)$ som beteckning för slutna systemets nämnarpolynom (polerna ges av $P(s) = 0$). Bestäm förstärkningen K_r så att lågfrekvensförstärkningen från r till y blir ett. Vilken egenskap ska polynomet $C(s)$ ha, för att kvarstående fel efter stegstörningar skall undvikas? Använd slutvärdessatsen! Bestäm också explicit slutna systemets poler då

$$\frac{D(s)}{C(s)} = \frac{2(s+1)}{s} \quad \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Övningstal 4.21 (pads3)

Betrakta reglersystemet i nedanstående figur:



För överföringsfunktionerna i figuren gäller:

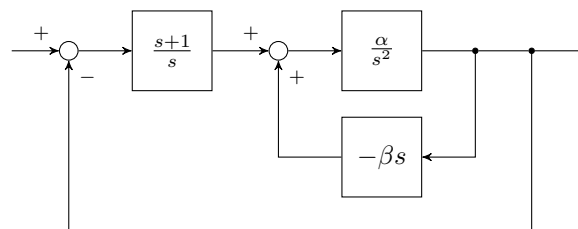
$$G_p(s) = \frac{K_p}{1 + \tau s}, \quad G_a(s) = \frac{K_a}{s}, \quad G_r(s) = K \left(1 + \frac{1}{Ts} \right)$$

En process med ett integrerande ställdon regleras med en PI-regulator. Störningar kan inträffa vid två punkter i den slutna kretsen.

- Utred vilka värden på regulatorparametrarna, K och T , som leder till ett stabilt system.
- Utred om stegformade ändringar av referensen leder till kvarstående fel.
- Kan stegformade störningar, $v_p(t)$, ge kvarstående fel?
- Kan stegformade störningar, $v_a(t)$, ge kvarstående fel?

Övningstal 4.22 (pads4)

Betrakta nedanstående reglersystem

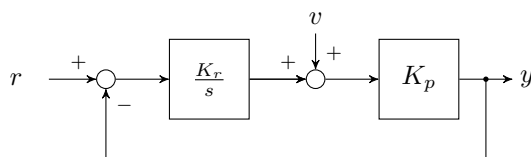


Förstärkningarna α och β är båda positiva. För vilka värden på dessa parametrar är systemet stabilt? Skissera det stabila området i $\alpha\beta$ -planet.

Övningstal 4.23 (pads5)

En viss process kan för långsamma förlopp grovt approximeras med en ren konstant vars värde emellertid är dåligt känt.

Parametern K_p har något olika värden vid olika tillfällen men begränsas av olikheten $0.04 \leq K_p \leq 0.08$. Genom användning av återkoppling vill man styra processen mot olika konstanta börvärden på så sätt att reglersystemets stigtid (från 10% till 90% efter steg i börvärdet) är högst 10 sekunder.



- Bestäm ett lämpligt värde på regulatorparametern K_r !
- Antag att såväl ärvärdet som börvärdet är 1 och att systemet är i vila. Skissera ärvärdet efter en stegstörning med höjden -5 (störningen $v(t)$ i figuren ovan) i de två extremfallen (med tanke på osäkerheten).
- Antag att man kräver stigtiden 1 sekund i stället, vilket teoretiskt uppnås genom att K_r ges ett värde som är 10 gånger högre än i a-uppgiften. Processen har emellertid försummad dynamik i form av en dödtid på en halv sekund (Padé-approximation). Hur kommer systemet att fungera?

Övningstal 4.24 (pads6)

En process har överföringsfunktionen $G(s) = 1/s$. Processen skall PI-regleras med regulatorn $K(1 + 1/s)$ som har den fasta integrationstiden 1 sekund och variabel förstärkning. Beräkna insvängningstiden, t_s , till 5% efter en stegändring av börvärdet, då K-värdet anpassas för att det återkopplade systemet skall få den relativa dämpningen $\zeta = 0.3$.

Övningstal 4.25 (pads7)

Polplacering innebär att polerna i ett återkopplat system föreskrivs och alltså används som designparametrar. Betrakta systemet $G(s) = 3/(1 + 2s)$ och PI-regulatorn $F(s) = K(1 + 1/(Ts))$.

- Bestäm regulatorparametrarna så att det slutna systemet får en dubbelpol i $s = -1$.
- Bestäm regulatorparametrarna så att det slutna systemet får en relativ dämpning av 0.7 och den odämpade svängningsfrekvensen 1.

5 Återkopplade system i frekvensplanet

Övningstal 5.1 (ptf3)

Rita Bodediagram för överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{s(1 + s/2)}$$

genom addition av graferna för 5, $\frac{1}{s}$ och $\frac{1}{1 + s/2}$

Övningstal 5.2 (ptf4)

Rita Bodediagram för följande överföringsfunktioner. Bestäm även (vid enhetsåterkoppling) parametrarna ω_c , ω_π , A_m och ϕ_m .

a)
$$G(s) = \frac{2(1 + s/0.5)}{s(1 + s/4)}$$

b)
$$G(s) = \frac{16}{(s + 4)(s^2 + 0.8s + 4)}$$

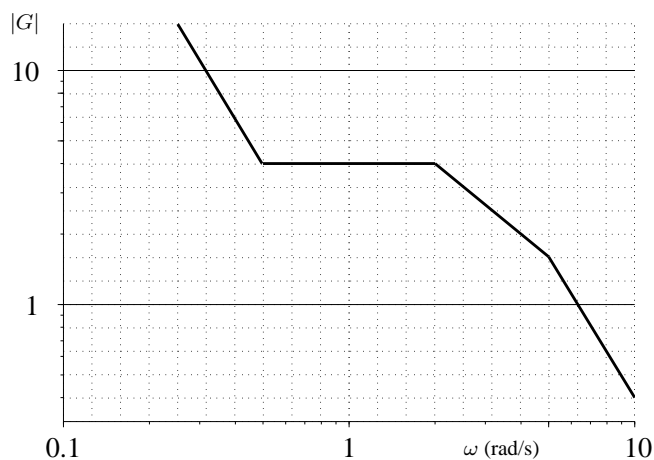
c)
$$G(s) = \frac{4(s + 0.5)}{s(s + 4)(s^2 + s + 1)}$$

d)
$$G(s) = \frac{2.5}{(s + 0.5)} e^{-0.4s}$$

e)
$$G(s) = \frac{10(s + 0.5)}{s^2(s + 5)^2}$$

f)
$$G(s) = \frac{80}{s^2 + 2s + 16}$$

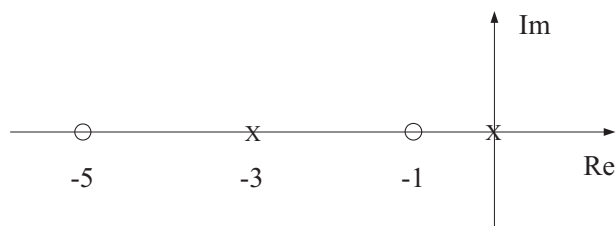
Övningstal 5.3 (ptf6)



För en stabil överföringsfunktion $G(s)$ utan dödtid och icke-minfas nollställen gäller ovanstående asymptotiska beloppsskurva. Bestäm $G(s)$.

Övningstal 5.4 (ptf7)

Rita Bodediagrammet för ett system med nedanstående pol-nollställesdiagram. Högfrekvensförstärkningen är 0.5.



Övningstal 5.5 (ptf9)

Överföringsfunktionen för en dödtid e^{-sT_d} kan approximeras med en rationell överföringsfunktion exempelvis Padé-approximationen

$$\frac{1 - sT_d/2}{1 + sT_d/2}$$

Utnyttja denna approximation för modellen

$$G(s) = \frac{e^{-s/3}}{1 + s}$$

och studera avvikelserna mellan den exakta och den approximativa modellens amplitud och fasvridning i ett Bodediagram. Bestäm också stegsvaren för de båda modellerna. Kommentera approximationens giltighet för olika frekvensområden.

Övningstal 5.6 (ptf10)

Modellreduktion innebär att en modell av hög ordning approximeras med en modell av låg ordning. Betrakta modellen

$$G(s) = \frac{8}{(s + 2)^4}$$

Approximera denna modell med överföringsfunktionen

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$$

så att lågfrekvensförstärkningen och vinkelfrekvensen vid -90° överensstämmer för dessa modeller. Rita Bodediagram samt skissera stegsvaren för de båda modellerna. Kommentera den approximativa modellens noggrannhet.

Övningstal 5.7 (ptf11)

I uppgift 4.16 studeras ett servosystem med en likströmsmotor. Bestäm överföringsfunktionerna $G_{\theta_r, \theta}$ från referenssignalen θ_r till utsignalvinkeln θ samt $G_{\theta_r, u}$ från θ_r till styrsignalen $u(t)$, och välj liksom i uppgift 4.16 regulatorparametrarna K_p och K_d så att slutna systemets poler hamnar i en dubbelpol $s = -\alpha$. Rita ett amplituddiagram för $G_{\theta_r, \theta}$ och $G_{\theta_r, u}$ för $\alpha = 1$ och 5. Vilken motsättning råder mellan ökad bandbredd (snabbhet) och styrsignalaktivitet, då dämpningen är konstant?

Övningstal 5.8 (ptf12)

Rita amplituddiagram för följande lågpass- och bandpassfilter, samt ange aktuella bandbredder.

$$G_{LP_1}(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$G_{LP_2}(s) = \frac{1}{1+1.4s+s^2}$$

$$G_{BP}(s) = \frac{4s^2}{(1+s/0.5)^2(1+s/10)^2}$$

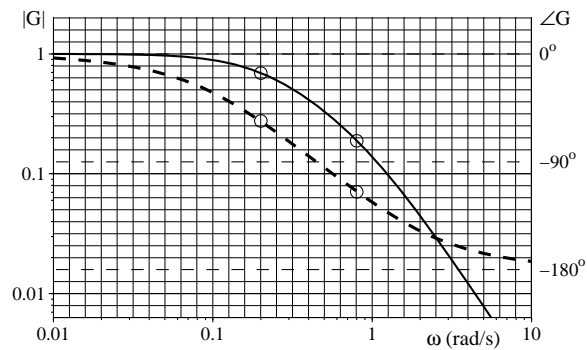
Ange en fördel med att introducera komplexkonjugerade poler och nollställen i stället för multiplrotter.

Övningstal 5.9 (ptf17)

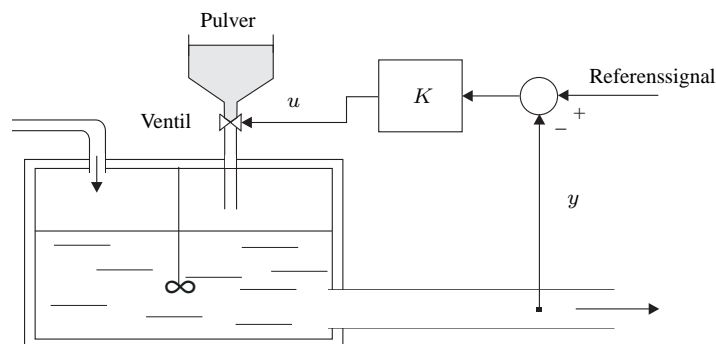
Följande överföringsfunktion beskriver en normaliserad modell för sambandet mellan styrsignal (trottelvinkel i för-gasaren) och hastighet för en bil.

$$G(s) = \frac{1}{(1+5s)(1+s)}$$

Beloppet och fasvridningen av modellens frekvensfunktion $|G(j\omega)|$ och $\angle G(j\omega)$ visas figuren nedan.



Övningstal 5.10 (pst8)



För ovanstående koncentrationsprocess gäller att överföringsfunktionen är

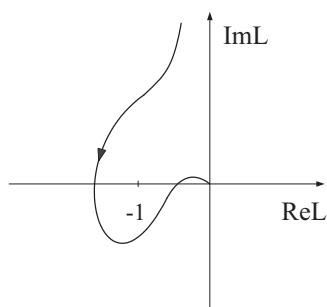
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{1+5s}$$

Koncentrationen skall regleras med en proportionell regulator med förstärkningen K . Givaren som mäter koncentrationen kan antas vara av ideal typ.

Hur stor förstärkning kan tillåtas i regulatorn innan systemet blir instabilt? Kommentera möjligheterna att utnyttja Routh-Hurwitz' metod alt. polbestämning vid stabilitetsanalysen.

Övningstal 5.11 (pst9)

En kretsöverföring representeras av nedanstående Nyquistkurva. Öppna systemets poler ligger inte i högra halvplanet. Bestäm med hjälp av detta diagram reglerkets stabilitet och antalet integrationer i kretsöverföringen då kretsförstärkningen är positiv. Jämför Nyquists förenklade kriterium med det fullständiga Nyquistkriteriet.

**Övningstal 5.12** (padf2)

Upprita Nyquistkurvan för följande överföringsfunktioner. Avgör även (utifrån Nyquistkurvan) systemets stabilitet vid enhetsåterföring. Kan Nyquists förenklade stabilitetskriterium användas?

a) $G(s) = \frac{s+2}{s^2}$

b) $G(s) = \frac{1-s}{s(1+2s)}$

c) $G(s) = \frac{2e^{-s}}{s+1}$

Övningstal 5.13 (pst10)

Skissera Nyquists kontur i $L(s)$ -planet för kretsöverföringarna

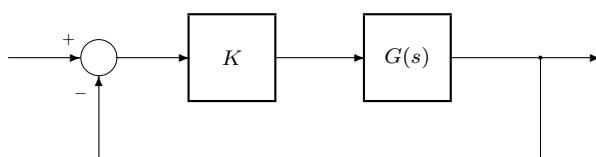
a) $L(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$

b) $L(s) = \frac{s+2}{s(2-s)}$

c) $L(s) = \frac{1}{s^3(1-s)}$

Avgör systemens stabilitet med hjälp av Nyquists fullständiga kriterium. Notera att då Nyquists kontur i s -planet passerar origo gäller i fallen b) och c) att

$$s = re^{j\theta} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad r \ll 1$$

Övningstal 5.14 (pst11)

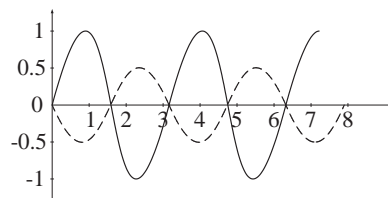
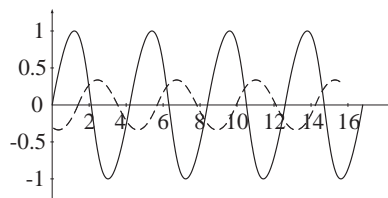
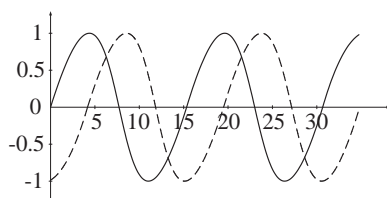
Undersök med hjälp av Nyquistkriteriet för vilka värden på förstärkningsparametern K som det återkopplade systemet är stabilt då

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}$$

Jämför med Routh-Hurwitz stabilitetskriterium. Vilka värden på K är acceptabla då en minimal och maximal amplitudsmarginal $A_{min} = 0.5$ respektive $A_{max} = 2$ efterfrågas?

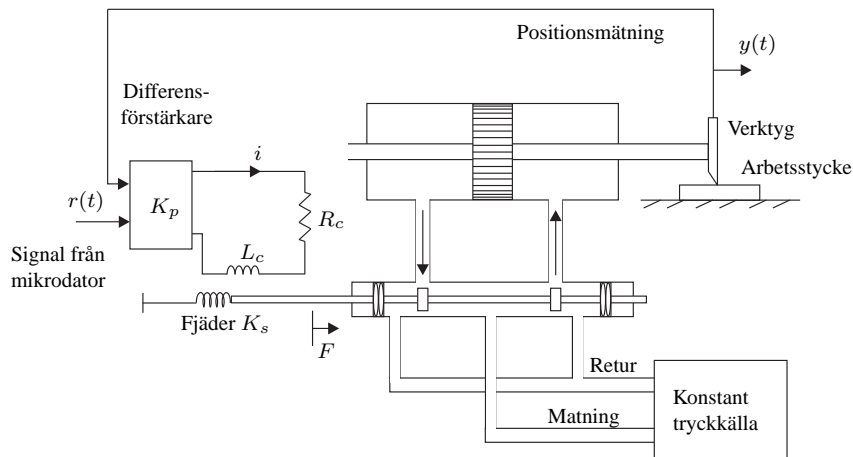
Övningstal 5.15 (pst12)

En labprocess exciterades med hjälp av sinussignaler med amplituden ett och frekvenserna $\omega_1 = 0.4$ rad/s, $\omega_2 = 1.5$ rad/s och $\omega_3 = 2$ rad/s. In- och utsignalerna plottades efter att transienterna hade dött ut (insignal heldragen linje). Man kan anta att kretsöverföringen inte har några poler i högra halvplanet, och att processen regleras med en P-regulator $K_p = 1$. I alla tre fallen observerade man en negativ färförskjutning på maximalt -180 grader. Baserat på informationen från dessa plottar, kommer det återkopplade systemet att bete sig stabilt? Och om så är fallet, vilka stabilitetsmarginaler gäller?



Övningstal 5.16 (pst14)

En numeriskt styrd verktygsmaskin får kommandosignal (referenssignal) från en mikrodator. Systemet enligt figur studeras i en dimension $y(t)$.



För differentialsförstärkaren (P-regulator) gäller att utsignalen

$$U(s) = K_p[R(s) - Y(s)]$$

där $K_p = 0.2$, och solenoidkretsen har överföringsfunktionen

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R_c + sL_c}$$

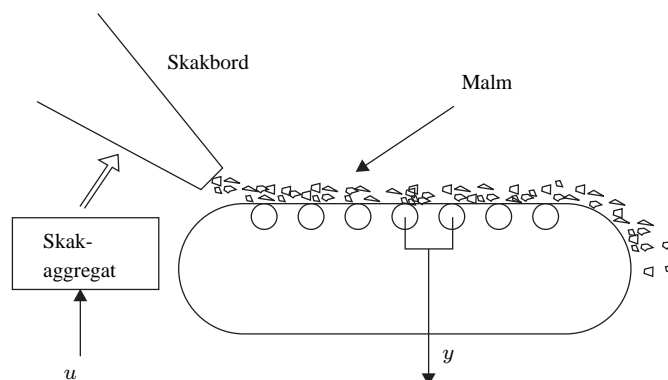
där $R_c = 0.1 \, \Omega$ och $L_c = 0.2 \, \text{H}$. Kraften F på den nedre axeln (magnetspol) antas vara proportionell mot strömmen, d.v.s. $F(t) = K_2 i(t)$ där $K_2 = 3.0$. Antag också att överföringen från kraften $F(t)$ till utsignalpositionen $y(t)$ är

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_a}{s(1 + sT_a) + K_s}$$

där $T_a = 0.5 \, \text{s}$, $K_a = 1.0$ och $K_s = 2.0$ (fjäderkonstant)

Rita Bodediagram för den öppna kretsöverföringen och bestäm fasmarginalen φ_m , samt uppskatta stigtiden t_r med hjälp av överkorsningsfrekvensen ω_c .

Övningstal 5.17 (pst15)



Påmatningen av krossad malm på ett transportband styrs genom att variera frekvensen hos ett skakbord, som ger ett viktsflöde ungefär proportionellt emot styrstorheten u . Viktsflödet mäts sedan med en bandvåg, som ger utstorheten y . Överföringsfunktionen anses vara

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K e^{-sT_d}$$

med $T_d = 10$ sek och $K = \Delta y / \Delta u = 200$ kg/sek. En I-regulator, $F(s) = K_i/s$, skall styra u så att y regleras mot ett referensvärde r .

Bestäm högsta värde på regulatorkonstanten K_i som uppfyller stabilitetsmarginalerna $\varphi_m \geq 40^\circ$, $A_m \geq 2.5$ gånger (fas- och amplitudmarginal).

Övningstal 5.18 (pst17)

Visa följande samband, då kretsöverföringen $L(s)$ saknar poler i högra halvplanet.

a) $|S(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\varphi_m/2)}$

b) Maximering av minsta avståndet från $L(j\omega)$ till punkten -1 motsvaras av att minimera $\max_\omega |S(j\omega)|$.

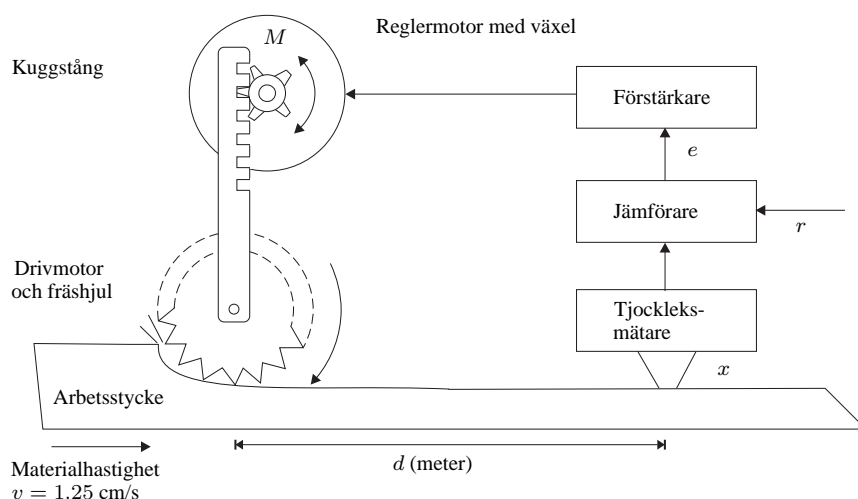
c) Då $L(j\omega)$ passerar innanför enhetscirkeln med centrum i punkten -1 gäller att $\max_\omega |S(j\omega)| > 1$ och $\varphi_m < 60^\circ$.
Då tvärtom $\max_\omega |S(j\omega)| \leq 1$ gäller att $\varphi_m \geq 60^\circ$ och $A_m = \infty$.

Övningstal 5.19 (pst16)

Figuren visar en fräs med automatisk reglering av tjockleken. Fräshjulet höjs och sänks med hjälp av reglermotorn M och tjockleken x mäts med en givare placerad d meter från fräshjulet. Överföringsfunktionen från felet $e(t)$ till fräshjulets vertikala rörelse är

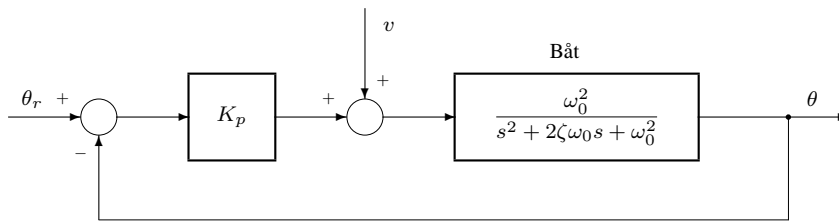
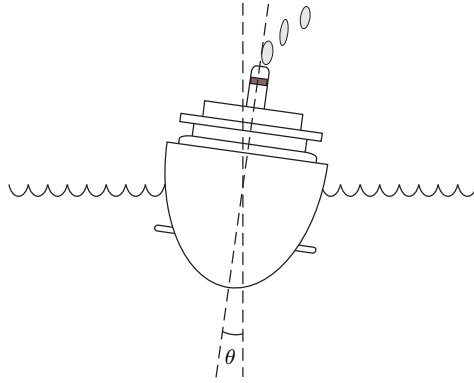
$$\frac{0.1}{s(1 + 0.1s)}$$

Det visar sig att systemet blir instabilt om avståndet d görs alltför stort. Bestäm det största avståndet d för vilket det återkopplade reglersystemet är stabilt.

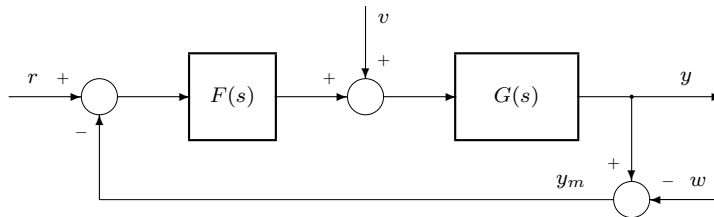


Övningstal 5.20 (pdp1)

Figuren visar ett system för stabilisering av båtar i sjögång. Störningen $v(t)$ representerar det vridande moment, som vågorna utövar på båten. Bestäm den förstärkning K_p , som för lågfrekventa störningar reducerar rullningen från 20° utan reglering till 0.4° med reglering. Antag att kretsöverföringen är mycket stor vid dessa låga frekvenser.



Övningstal 5.21 (pdp2)

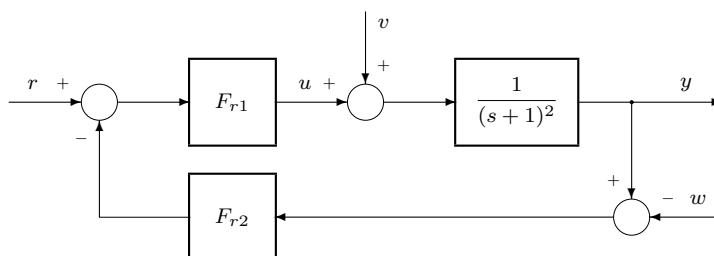


Antag att kretsöverföringen för systemet är

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Bestäm K så att inverkan från en laststörning v på den reglerade utsignalen y för $\omega \leq 0.5$ rad/sek reduceras med minst en faktor 3 för det återkopplade systemet jämfört med det öppna systemet. Inverkan från mätbruset w på den reglerade utsignalen y skall samtidigt reduceras med en faktor 4 eller mer för $\omega \geq 3$ rad/sek, jämfört med mätbrusnivån i den uppmätta utsignalen y_m utan återkoppling.

Övningstal 5.22 (pdp3)



Reglersystemet i ovanstående figur skall analyseras då det utsätts för olika typer av excitation. Tre styrstrategier jämförs, P-reglering, PI-reglering och öppen styrning.

- I $F_{r1} = 7$ $F_{r2} = 1$ (P-regulator)
 II $F_{r1} = 1.4 \frac{(s+1)}{s}$ $F_{r2} = 1$ (PI-regulator)
 III $F_{r1} = 1$ $F_{r2} = 0$ (Öppen styrning)

P- och PI-regulatorerna är inställda så att fasmarginalen $\varphi_m = 45^\circ$. Rita låg- och högfrekvensasymptoterna för följande överföringsfunktioner i ett amplituddiagram

känslighetsfunktionen $S = 1/(1 + L)$ (L =kretsöverföringen)
 komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1 + L)$
 störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1 + L)$ (G =processmodell)

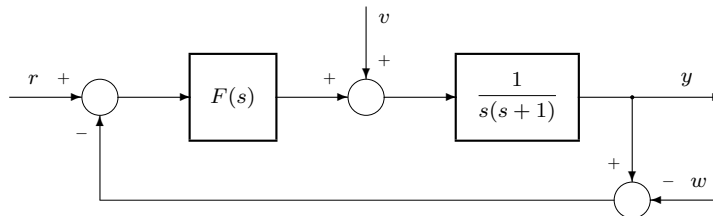
Uppskatta utifrån dessa diagram det stationära reglerfelet (amplituden) för de tre styrstrategierna vid följande typer av excitation

- $v = \text{enhetssteg}$
- $v = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$
- $w = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$
- $r = \text{enhetssteg}$
- $r = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$

Vilka slutsatser kan man dra av denna analys vid en jämförelse mellan de tre styrstrategierna?

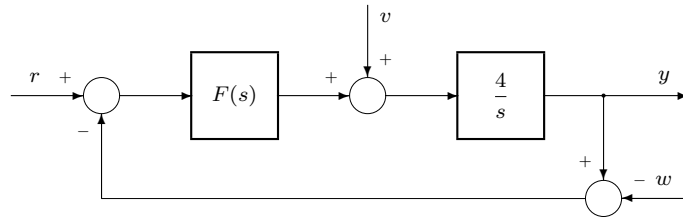
Övningstal 5.23 (pdp4)

Figuren nedan beskriver ett servosystem för positionering av en last. Systemets förmåga att hantera referenssignalvariationer, last- och mätstörningar skall undersökas. En P-regulator $F(s) = K_p$ undersöks därför med olika förstärkningsnivåer $K_p = 0.25, 1$ och 4 .



- Rita ett Bodediagram för kretsöverföringen $L(j\omega)$ och studera fasmarginalen φ_m och överkorsningsfrekvensen ω_c för de tre förstärkningsnivåerna. Vilken allmän relation råder mellan K_p , φ_m och ω_c .
- Rita amplitudkurvas låg- och högfrekvensasymptoter för känslighetsfunktionen $S = 1/(1 + L)$, komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1 + L)$, störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1 + L)$ (G =processmodell) och styrkänslighetsfunktionen $FS = F/(1 + L)$. Vilken relation råder mellan förstärkningen K_p och
 - förmågan att följa referenssignaländringar $r(t)$
 - förmågan att kompensera processtörningar $v(t)$ och mätstörningar $w(t)$
 - styrsignalaktiviteten $u(t)$
- Bestäm slutna systemets polplacering. Vad blir den relativa dämpningen ζ för de olika förstärkningarna? Kommentera kopplingen mellan dämpning och fasmarginal. Vilken relation råder mellan snabbheten för slutna systemets stegsvar från r till y och överkorsningsfrekvensen ω_c ?

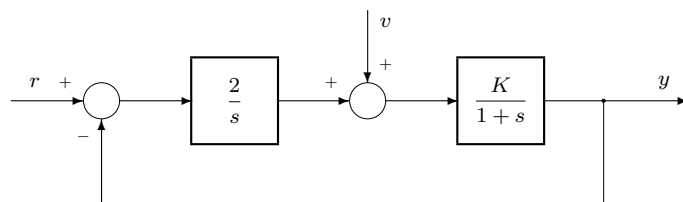
Övningstal 5.24 (pdp5)



Ovanstående integralprocess skall regleras med en PI-regulator $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$.

- Bestäm ett samband mellan K_p och K_i som ger en polplacering med ett komplexkonjugerat polpar motsvarande en relativ dämpning $\zeta = 0.7$. Vad blir fasmarginalen φ_m ?
- Bestäm för lämpliga frekvensfunktioner deras låg- eller högfrekvensasymptot, för att studera reglersystemets förmåga att följa referenssignaländringar, kompensera process- och mätstörningar samt styrsignalaktiviteten.
- Studera $1/K_i$ som funktion av K_p . På vilket sätt relaterar detta samband till föregående deluppgift. Vilka slutsatser kan vi dra angående den föreslagna reglerstrategin?

Övningstal 5.25 (pdp7)

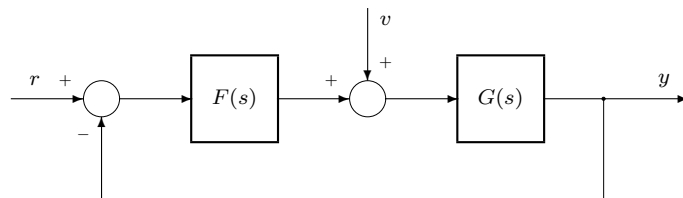


Kompensering av processtörningen v vid förstärkningsvariationer i processen skall studeras med och utan återkoppling.

- Rita $|Y(j\omega)|/|V(j\omega)|$ för ovanstående återkopplade reglersystem då $K = 1$ och 2. Jämför med fallet utan återkoppling. Rita asymptoter om du saknar datorverktyg.
- För vilka frekvenser ger återkopplingen bättre kompensering jämfört med det öppna systemet? Vad gäller för känslighetsfunktionen $S(j\omega)$ i detta frekvensområde? Hur påverkas resultatet av processens förstärkningsvariation?

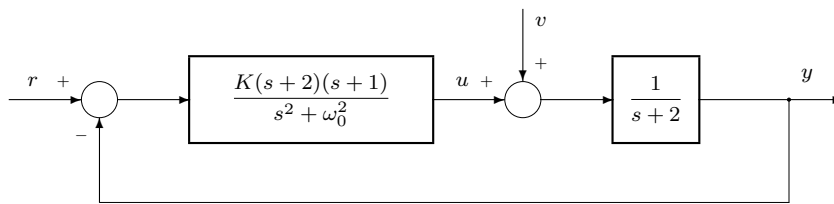
Övningstal 5.26 (pdp8)

Betrakta reglersystemet enligt figuren nedan.



- Visa hur känslighetsfunktionen $S(s)$ uttrycker minskningen av störningens inverkan på det återkopplade systemet relativt det icke återkopplade systemet (dvs med $F(s) = 0$).
- Visa att det återkopplade systemet ger bättre kompensering av störningen än det icke återkopplade systemet för alla frekvenser ω om Nyquistkurvan för kretsöverföringen ligger utanför en cirkel med medelpunkt i -1 och med radien 1. För vilka typer av processer är detta möjligt?

Övningstal 5.27 (pdp13)

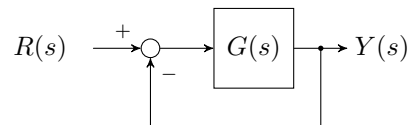


En första ordningens process utsätts för intensiva lågfrekventa störningar kring frekvensen ω_0 . Enligt den interna modellprincipen införs därför en resonans i regulatorm vid denna frekvens (oändlig förstärkning vid ω_0).

Bestäm förstärkningen K så att det återkopplade systemet får en dubbelpol (kritisk dämpning). Skissera speciellt $|G_{ry}(j\omega)|$, $|G_{vy}(j\omega)|$ och $|G_{ru}(j\omega)|$ då $\omega_0 = 0.2$

Övningstal 5.28 (padf4)

Följande problem har förekommit som tentamensuppgift (E3, 1991). Betrakta nedanstående återkopplade system, där τ är en dödtid och K är en (positiv) förstärkning.



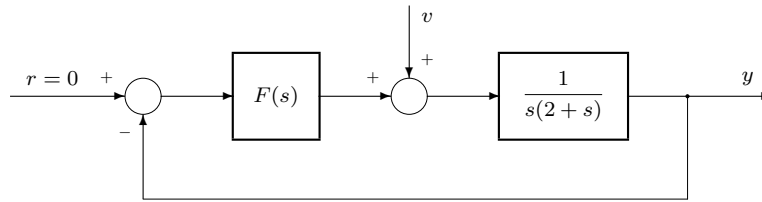
$$G(s) = \frac{K}{s-1} e^{-\tau s}$$

Om dödtiden τ är noll, kan man (till exempel med Rouths kriterium) se att systemet är stabilt för $K > 1$. Utred med hjälp av Nyquists fullständiga stabilitetskriterium, om systemet är stabilt för $K = 2$ och $\tau = 0.2$. Ett omsorgsfullt Nyquistdiagram skall upprättas, där hela det "intressanta" frekvensområdet avbildas!

I formeln $Z = N + P$ räknas N positiv om Nyquistkurvan omslingrar punkten $-1 + j0$ medurs. I annat fall skall N räknas negativ! Man förutsätter att Nyquists kontur i s -planet genomlöpes medurs.

6 Design av regulatorer i frekvensplanet

Övningstal 6.1 (ppi1)



Reglersystemet i ovanstående figur skall vara stabilt med tillfredsställande stabilitetsmarginaler och får högst ha ett kvarstående fel på 0.1 enheter efter en rampstörning $v(t) = 2t$. Ange vilken av följande regulatorer, som kan användas i systemet.

- A: I-reg med $F(s) = \frac{20}{s}$ D: PI-reg med $F(s) = 100 + \frac{20}{s}$
 B: P-reg med $F(s) = 20$ E: I reg med $F(s) = \frac{10}{s}$
 C: P-reg med $F(s) = 200$

Övningstal 6.2 (ppi4)

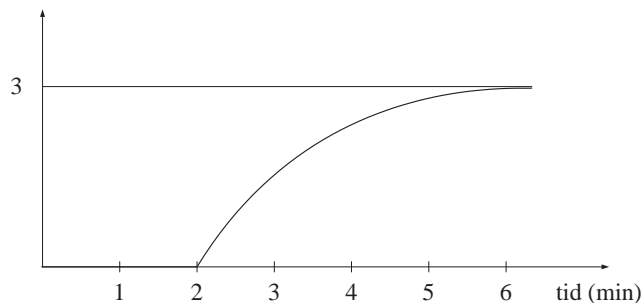
En process bestående av tre seriekopplade nivåtankar har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{(1 + 10s)^3}$$

Dimensionera en PI-regulator för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$, där ω_{G150} anger den frekvens då $G(j\omega)$ har fasvridningen -150° . Vad blir regulatorns integralförstärkning K_i och högfrekvensförstärkning K_∞ ?

Övningstal 6.3 (ppi5)

För en enkel första ordningens termisk process med transportfördröjning har man mätt upp följande stegsvar:



- a) Dimensionera en PI-regulator så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Starta med en överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$.
 b) Variera sedan ω_c så att integralförstärkningen K_i maximeras. Vid handräkning studeras fallen $\omega_c = 0.3, 0.4$ och 0.5 .

Övningstal 6.4 (ppi4b)

a) Dimensionera en PI-regulator för processen i uppgift 6.2 enligt tabellen.

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + s\tau}{s}$$

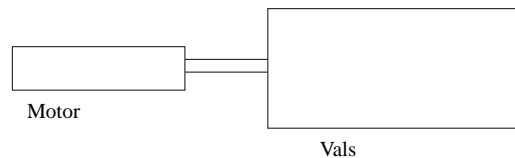
	$\frac{K_i G(0) }{\omega_{G180}}$	$\frac{1}{\tau \omega_{G180}}$	ζ	$K_\infty G(0)$
PI	$0.33 - 0.15\kappa_{180}$	$0.18 + \kappa_{180}$	-	-
PID	$0.13 + \frac{0.16}{\kappa_{180}} - \frac{0.007}{\kappa_{180}^2}$	$0.4 + 0.75\kappa_{180}$	0.75	$4 + \frac{1}{\kappa_{180}}$

Tabell 6.1: Inställningsformler för PI- och PID-regulatorer för stabila processer med reella poler, baserade på $G(0)$, $\kappa_{180} = \frac{|G(j\omega_{G180})|}{G(0)}$ och ω_{G180} . Uttrycken är tillämpbara då $\kappa_{180} \geq 0.1$. Notera att $\beta = K_\infty/(\tau K_i)$ för PID-regulatorer.

b) Vilken typ av experiment behöver genomföras för att bestämma parametrarna $G(0)$, κ_{180} och ω_{G180} i tabellen, då processens överföringsfunktion inte är känd?

Övningstal 6.5 (ppi2)

I denna uppgift skall vi studera motordriften av en vals i ett valsverk (se figur).



Systemet kan förenklat beskrivas av ekvationen

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m - M_l$$

där ω är vinkelhastigheten, J är summan av motorns och valsens tröghetsmoment, samt M_m och M_l är motorns drivande moment respektive lastmoment. Motorns drivande moment ges av $M_m = k_m \cdot I$, där k_m är en motorkonstant och I är motorströmmen. Följande parametervärden gäller: $k_m = 5 \text{ Nm/A}$, $J = 100 \text{ kg m}^2$.

Man vill att valsens skall följa en vinkelhastighetsreferens ω_r , och för att uppnå detta återkopplas vinkelhastigheten med en regulator, som styr motorströmmen.

a) Dimensionera en lämplig regulator, som uppfyller följande specifikationer:

- Vinkelhastighetsreferensen skall följas utan stationärt fel för konstant lastmoment.
- Ett lastmoment, som växer linjärt med 10 Nm/s skall stationärt ge upphov till ett vinkelhastighetsfel på högst 0.5 rad/s .
- Det slutna systemet skall ha en relativ dämpning $\zeta = 0.7$.

b) Vilket allmänt samband råder mellan regulatorns integralförstärkning K_i och dess högfrekvensförstärkning K_∞ då slutna systemet har en konstant relativ dämpning ζ . Skissera $1/K_i$ som funktion av K_∞ för $\zeta = 0.5, 0.7$ och 1 .

c) Tolka resultatet i uppgift b) i termer av prestanda vid kompensering av laststörningen M_l kontra stabilitetsmarginaler, styrsignalaktivitet samt känslighet för mätstörningar.

Övningstal 6.6 (ppi6)

En process har överföringsfunktionen

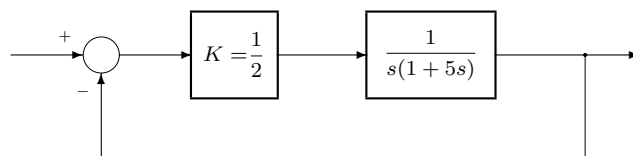
$$G(s) = \frac{0.5}{s(1+2s)^2}$$

För att erhålla önskad snabbhet erfordras en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.4$ rad/s för kretsöverföringen $L(s)$. Dimensionera en PD-regulator med maximalt faslyft vid önskat ω_c , så att fasmarginalen blir

- a) $\varphi_m = 45^\circ$
- b) $\varphi_m = 60^\circ$

Bestäm regulatorns låg- och högfrekvensförstärkning för de båda fallen och diskutera sambandet mellan prestanda, stabilitetsmarginaler och styrsignalaktivitet.

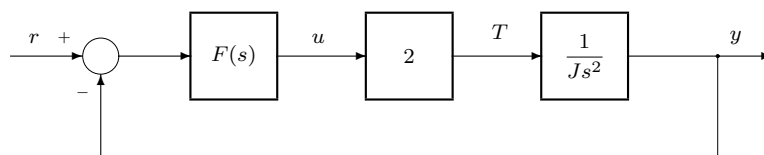
Övningstal 6.7 (ppi8)



I ovanstående system har en förstärkningsfaktor på 0.5 visat sig ge tillräckliga stabilitetsmarginaler och tillräcklig statisk noggrannhet. Tyvärr är man inte helt nöjd med snabbheten utan önskar öka den med en faktor 5. Visa hur detta kan göras med lämplig regulator. Hur förändras låg- och högfrekvensförstärkningarna vid denna reglerstrategi, jämfört med den enklare P-regleringen.

Övningstal 6.8 (ppi9)

När astronauterna Armstrong och Aldrin landsatte mänsklighetens första farkost på månen, hade de god hjälp av ett regelsystem för reglering av attitydvinkeln, se figur. Här är r önskad attitydvinkel, y verklig attitydvinkel, u styrsignal till jetstrålarna och T moment på farkosten. Tröghetsmomentet antas vara $J = 0.25$.



- a) Vilken av följande regulatorer fungerar för denna typ av process: P- PI- eller PD-regulatorn? Motivering krävs.
- b) Dimensionera en regulator, som ger en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 5$ rad/s samt en fasmarginal $\varphi_m = 60^\circ$. Placera regulatorns maximala faslyft vid önskad överkorsningsfrekvens.

Övningstal 6.9 (ppi7)

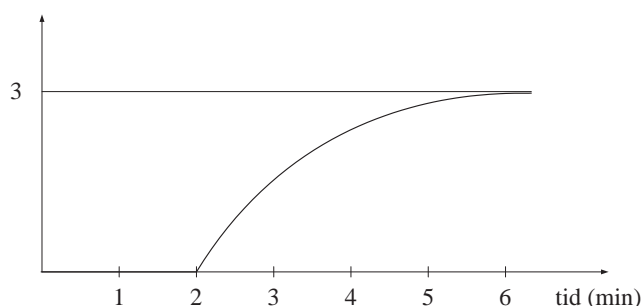
Läsarmen på en hårddisk ska styras med en servomotor. Eftersom motorns tidskonstant är några storleksordningar mindre än läsarmens, ersätts motormodellen med en ren förstärkning. Den förenklade servomotormodellen blir då med tidsenheten millisekunder

$$G(s) = \frac{0.4}{s(1+5s)}$$

- Dimensionera en P-regulator som ger det slutna systemet en fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$. Vilken överkorsningsfrekvens ω_c , dämpning ζ , bandbredd ω_b och stigtid t_r erhålls för det reglerade systemet?
- En bra hårddisk har en stigtid t_r på c:a 2 ms. Dimensionera en PD-regulator som uppfyller detta krav med bibehållen fasmarginal. Välj strategin att kancellera processens tidskonstant med regulatorns nollställe. Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c , dämpningen ζ och bandbredden ω_b för denna reglerstrategi. Hur mycket har regulatorns lågfrekvens- och högfrekvensförstärkning förändrats jämfört med uppgift a).
- Dimensionera nu i stället en regulator med samma överkorsningsfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m som i föregående deluppgift, men välj PD-regulatorn så att det maximala faslyftet hamnar vid den önskade överkorsningsfrekvensen. Bestäm regulatorns låg- och högfrekvensförstärkning?
- Vad blir det kvarstående felet efter en stegformad referenssignaländring, samt en stegformad laststörning (enhetssteg) som adderas till styrsignalen, för de tre fallen ovan.
- Vilka slutsatser kan man dra angående relationen mellan PD-regulatorns låg- och högfrekvensegenskaper i förhållande till placeringen av dess centerfrekvens, där det maximala faslyftet inträffar? Studera specifikt kvoten mellan regulatorns låg- och högfrekvensförstärkning.

Övningstal 6.10 (ppi11)

En regulator ska dimensioneras för den termiska processen med transportfördröjning enligt nedan:



Av stegsvaret framgår att överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{3e^{-2s}}{1 + 2s}$$

- Välj en PID-regulator med dubbelnollställe ($\zeta = 1$) så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 50^\circ$. Välj dessutom regulatorns styrsignalaktivitet och överkorsningsfrekvensen ω_c så att $\beta = 10$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$, där ω_{G150} anger den frekvens då $G(j\omega)$ har fasvidringen -150°
- Hur stor förbättring i prestanda erhålls med PID-regulatorn jämfört med PI-regulatorn i uppgift 6.3. Hur mycket ökar styrsignalaktiviteten.

Övningstal 6.11 (ppi12)

I uppgift 6.2 dimensionerades en PI-regulator för en process bestående av tre seriekopplade nivåtankar med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{(1 + 10s)^3}$$

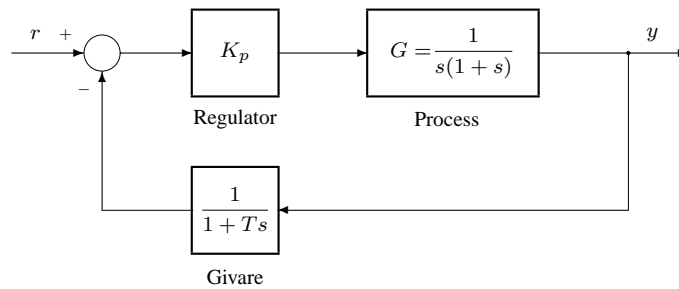
I denna uppgift ska även derivataverkan introduceras för att öka reglersystemets snabbhet.

- Dimensionera en PID-regulator för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj ett dubbelnollställe för regulatorn och en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$, samt regulatorns högfrekvensförstärkning så att $\beta = 5$.
- Genomför samma räkning som i uppgift a) men nu med $\beta = 10$.

- c) Jämför de båda PID-regulatorerna med avseende på prestanda och styrsignalaktivitet med PI-regulatorn i uppgift 6.2. Hur mycket förbättras förmågan att kompensera laststörningar i förhållande till den ökade styrsignalaktiviteten?

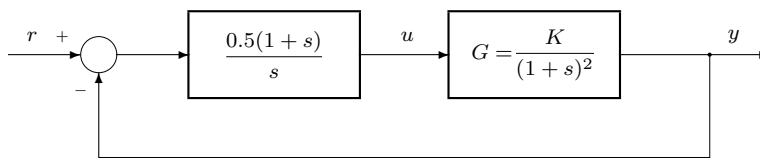
Övningstal 6.12 (pdr1)

Nedanstående blockschema visar ett reglersystem för reglering av en process $G(s)$. I systemet används en proportionell regulator med förstärkningen K_p . Givaren som mäter processens utsignal beskrivs med en första ordningens överföringsfunktion med tidskonstanten T . För regulatorn gäller att $K_p > 1$ och för givaren att $T > 0$.



- a) Hur lång får givarens tidskonstant maximalt vara om man önskar en amplitudmarginal på minst två gånger, $A_m = 2$? (Bestäm T_{max} som funktion av K_p .)
- b) Beräkna explicit hur stor tidskonstanten får vara då $K_p = 3$.

Övningstal 6.13 (pdr2)



I ovanstående reglersystem varierar processförstärkningen K . PI-regulatorn är dimensionerad för det nominella värdet $K = 3$, vilket ger en fasmarginal på knappt 45° .

- a) Undersök baserat på kravet för robust stabilitet, $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$, för vilka värden på K som systemet garanterat är stabilt.
- b) För vilka värden på K är systemet stabilt enligt Routh-Hurwitz kriterium? Jämför med resultatet i uppgift a) och kommentera olikheterna.

Övningstal 6.14 (pdr3)

Ersätt processmodellen i föregående uppgift med

$$G(s) = \frac{3}{(1+s)^2} e^{-sT_d}$$

där den nominella dödtiden $T_d = 0$, dvs samma nominella modell som i föregående uppgift.

Bestäm den största dödtiden T_d som uppfyller det robusta stabilitetskravet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$, och jämför med den största dödtid T_d som ger ett stabilt återkopplat system enligt Nyquistkriteriet. Kommentera skillnaderna i resultaten.

Övningstal 6.15 (pdr3b)

För ett system med nollställe i högra halvplanet

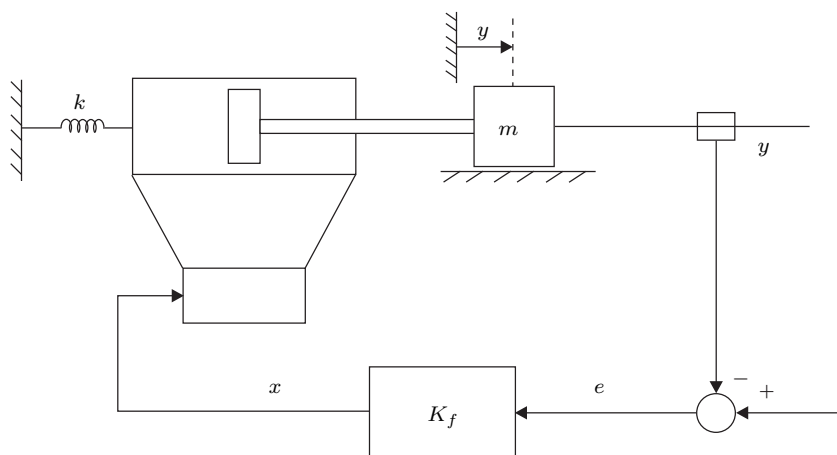
$$G_0(s) = \frac{1 - T_z s}{1 + 5s}$$

ska en PI-regulator dimensioneras baserat på följande förenklade nominella modell

$$G(s) = \frac{1}{1 + 5s}$$

Välj PI-regulatorns nollställe så att systemmodellens pol kancelleras. Vilken största bandbredd för det nominella systemet kan accepteras med bibehållande av det robusta stabilitetskravet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$?

Övningstal 6.16 (pdr4)



Den friktionsfritt rörliga massan m styrs av en hydrauliskolva i ovanstående positionsservo. Servokretsen dimensioneras utan att beakta fjädringen k , som följaktligen antas vara oändligt styv, $k = \infty$. Kretsöverföringen blir då

$$L(s) = \frac{50}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0.02s}$$

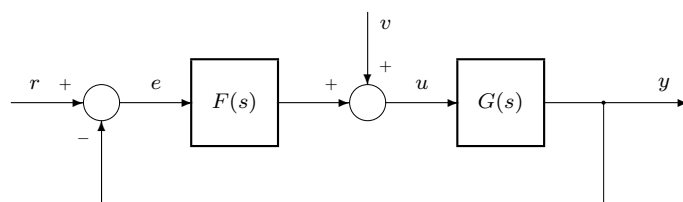
Med hänsyn taget till fjädringen blir i stället kretsöverföringen

$$L_0(s) = \frac{50}{s(1 + 0.02s + (s/\omega_n)^2)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{cylinders vikt försummad})$$

Beräkna hur hög den odämpade resonansfrekvensen ω_n minst måste vara för att fjädringen inte skall leda till instabilitet enligt det robusta stabilitetskriteriet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$. Jämför resultatet med uppgift 4.5, där samma problemställning studerades med utnyttjande av Routh-Hurwitz kriterium.

Övningstal 6.17 (pdr5)



Processens dynamik i ovanstående reglersystemet ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 0.1s + 1}.$$

Som synes har processen mycket svagt dämpade poler. En metod att kompensera sådana svagt dämpade poler är att använda ett s.k. spärrfilter. Metoden går ut på att förse regulatorn med nollställan, som kraftigt reducerar förstärkningen för frekvenser i närheten av processens resonans. I detta fall antar vi en regulator

$$F(s) = K \frac{s^2 + 0.1s + 1}{s(s + a)}$$

där förutom spärrfiltret även inkluderats en integrator samt två parametrar, K och a , att användas som designparametrar.

- Fullborda dimensioneringen av regulatorn genom att bestämma K och a så att det slutna systemet får en dubbelpol i -2 .
- Beräkna överföringsfunktionerna från r och v till u och y och skissa motsvarande amplituddiagram. Kommentera de icke önskvärda egenskaperna för denna dimensioneringsmetod.
- Anta nu att den verkliga överföringsfunktionen skiljer sig från den antagna ($G(s)$) med kvantiteten $\Delta_G^a(s)$, men att man vet att det relativa felet uppfyller olikheten

$$\left| \frac{\Delta_G^a(j\omega)}{G(j\omega)} \right|^2 < \frac{4\omega^2}{4 + \omega^2}.$$

Visa att det återkopplade systemet med den i uppgift a) dimensionerade regulatorn fortfarande är stabilt!

Övningstal 6.18 (pdr6)

En process antas ha en nominell överföringsfunktion $G(s)$, medan det verkliga systemets överföringsfunktion antas vara $G_0(s) = G(s)\tilde{G}(s)$. Den multiplikativa faktorn $\tilde{G}(s)$ kan ses som icke-modellerad dynamik som ej har beaktats i den nominella modellen.

Bestäm den multiplikativa osäkerhetsfunktionen $\Delta_G(\cdot)$. Antag att regulatorn har utformats så att den komplementära känslighetsfunktionen (återkopplade systemet) har överföringsfunktionen

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2}$$

där ω_0 kan väljas fritt.

Uppskatta högsta acceptabla bandbredd ω_b för det återkopplade systemet $T(s)$ baserat på kravet för robust stabilitet, nämligen att $|T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$. Gör detta genom att rita $|1/\Delta_G(j\omega)|$ och $|T(j\omega)|$ var för sig och välj ω_0 så att de ej korsar varandra. Studera följande osäkerheter

- $\tilde{G}(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$ $\zeta = 0.54$ och 0.1 (extra resonans)
- $\tilde{G}(s) = \frac{1}{1 + Ts}$ (extra tidskonstant)
- $\tilde{G}(s) = 1 - Ts$ (extra icke-minimumfas nollställe)
- $\tilde{G}(s) = e^{-sT}$ (extra dödtid)

Kommentera rimligheten i analysen.

Övningstal 6.19 (pdr7)

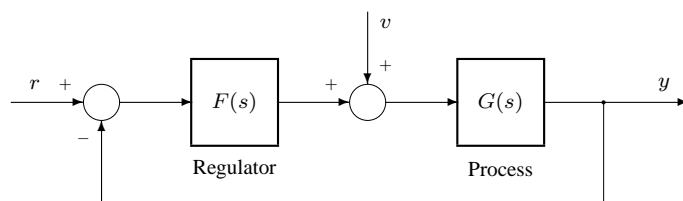
Hur hade resultatet i föregående uppgift utfallit om komplementära känslighetsfunktionens högfrekvensasymptot i stället hade haft lutning -20 dB/dekad exempelvis

$$T(s) = \frac{\omega_b}{s + \omega_b}$$

Vilken största acceptabla bandbredd ω_b hade då erhållits?

Övningstal 6.20 (pdr8)

Betrakta reglersystemet enligt figuren nedan, där r är referenssignal, y är processens utsignal och v är en laststörning. Antag att v är sinusformad med frekvensen ω_v .



- a) Det är förstås önskvärt att laststörningen påverkar utsignalen y mindre för det slutna systemet (med regulator) jämfört med det öppna (d.v.s. utan regulator). Härled ett villkor på kretsöverföringens frekvenskurva för att detta skall gälla oberoende av frekvensen, samt tolka villkoret grafiskt.
- b) I allmänhet är det omöjligt att uppnå målet som formuleras i a) – varför?

Övningstal 6.21 (pdr10)

Vilket minsta alternativt största värde på överkorsningsfrekvensen ω_c är acceptabelt vid reglering av följande processer?

a) $G(s) = \frac{e^{-0.4s}}{(1+s)^3}$

b) $G(s) = \frac{1-s}{(1+s)^3}$

Övningstal 6.22 (padf6)

En metod för att beräkna parametrarna hos en (ideal) PID-regulator har angetts av K.J. Åström och T. Hägglund (Lund): Metoden innebär att systemet direkt får önskad fasmarginal, φ_m , och överkorsningsfrekvens. Vid ω_c kan processens frekvensfunktion skrivas $r_p \exp\{j(\pi + \varphi_p)\}$. Regulatorn "flyttar" denna punkt till den nya punkten $\exp\{j(\pi + \varphi_p)\}$.

Designen ges av sambanden $\theta = \varphi_m - \varphi_p$, $K_r = \frac{\cos \theta}{r_p}$, $T_i = 4T_d$ och $T_d = \frac{\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{2\omega_c}$. Utför design enligt Åström och Hägglund under följande förutsättningar:

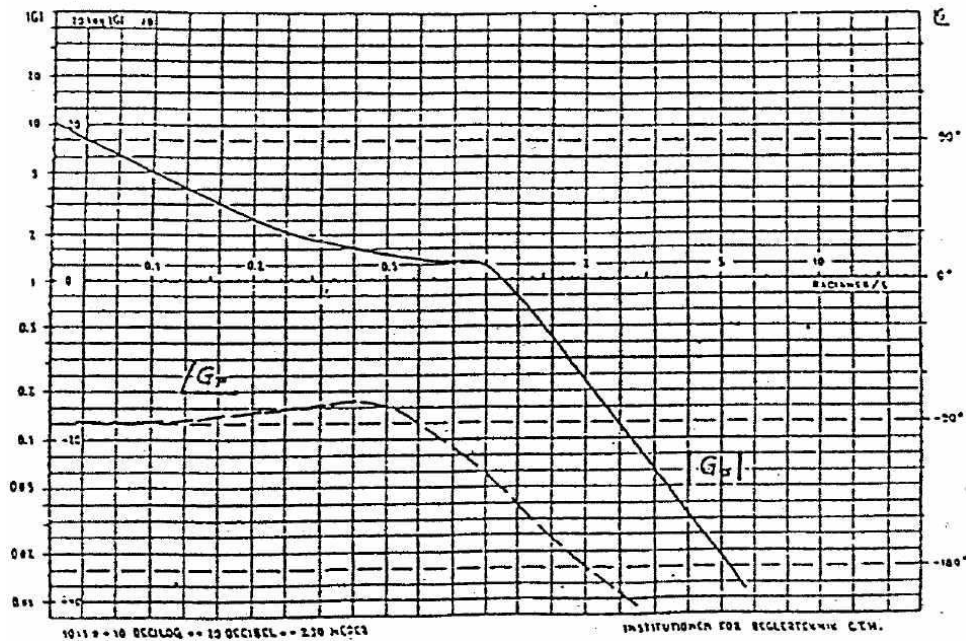
$$\text{Processen: } G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

- 1) $\phi_m \geq 40^\circ$
- 2) $\omega_c \geq 2.0 \text{ rad/min}$

Öka fasmarginalen med 10° för att kunna lägga till ett filter så att regulatorn blir fysikaliskt realiserbar. Filtrets tidskonstant väljs typiskt som $\frac{T_d}{10}$.

Övningstal 6.23 (pdf7)

Bodediagrammet för en viss process, $G_p(s)$, är givet nedan:



Processen skall PID-regleras. Bestäm, med användning av Ziegler/Nichols svängningsmetod, parametrarna K_r , T_i och T_d , hos regulatorn $G_r(s)$.

Övningstal 6.24 (pdf8)

Överföringsfunktionen för en viss process anses bestå av en förstärkning i kaskad med en integration i kaskad med en dödtid. Processen skall regleras med en PI-regulator, med parametrarna inställda enligt Ziegler/Nichols svängningsmetod. Rita ett Bodediagram över det öppna systemet och markera systemets fas- och amplitudmarginaler. Har stabilitetsmarginalerna normala värden?

Övningstal 6.25 (pdf9)

Ett reglerobjekt består av en trög massa på 500 kg, som med försumbar friktion kan röra sig under påverkan av en styrkraft $u(t)$. Massan skall positioneras med ett servosystem. (Rita ett blockdiagram över systemet!)

Bestäm parametrarna i en PD-regulator (Leadfilter) så att följande systemspecifikationer uppfylls: $\phi_m \geq 40^\circ$ och $\omega_c \geq 10$ rad/s.

Övningstal 6.26 (pdf10)

En process vars överföringsfunktion bestämts till

$$G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

skall regleras med en PD-regulator med så att följande systemspecifikationer uppfylls:

- 1) $\phi_m \geq 30^\circ$
- 2) $\omega_c \geq 1.0 \text{ rad/s}$

Övningstal 6.27 (pdf11)

En process vars överföringsfunktion bestämts till

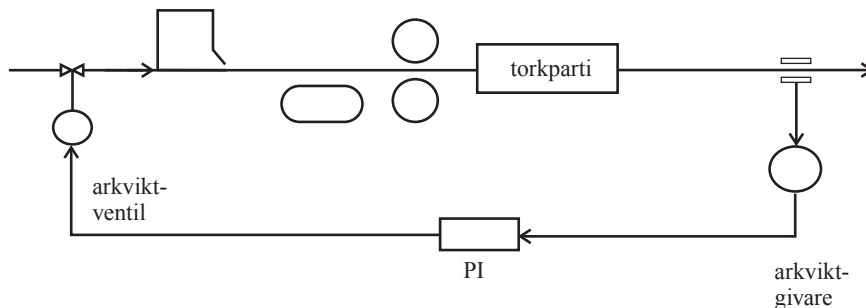
$$G_p(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$$

skall regleras med en PI/PD-regulator så att följande systemspecifikationer uppfylls:

- 1) $\phi_m \geq 30^\circ$
- 2) $\omega_c \geq 1.0 \text{ rad/s}$

Ledning: Använd t ex PI-delen till att “förkorta bort” en stabil processpol.

Övningstal 6.28 (pdf12)



Med arkviktsventilen styrs flödet av fibersuspension till pappersmaskiner, vilket ger möjlighet att reglera den slutliga arkvikten hos det papper som lämnar maskinens torkparti. Antag att överföringsfunktionen mellan ventil och arkvikts-givaren är en ren transporttid (eller dödtid), L .

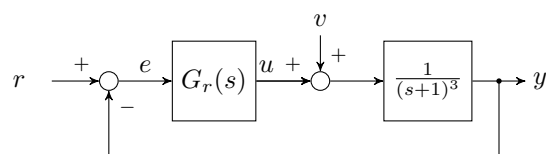
$L = 80 \text{ s}$ vid maskinhastigheten 500 m/min . (Transporttiden antas vara omvänt proportionell mot maskinhastigheten.)

Med en PI-regulator får den öppnade kretsöverföringen formen:

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) e^{-sL}$$

Vid angiven maskinhastighet inställes regulatorn enligt Cohen och Coon, vilket ger $K = \frac{1}{12}$ och $T_i = 12 \text{ s}$. Beräkna systemets amplitudmarginal. Vid vilken maskinhastighet når man instabilitetsgränsen?

Övningstal 6.29 (pdf13)



Bestäm en regulator, $G_r(s)$, sådan att systemspecifikationerna uppfylls:

- 1) Inga kvarstående fel efter stegstörning, v .
- 2) $\phi_m = 45^\circ$
- 3) $\omega_c = 2.0 \text{ rad/min}$

Ledning: Använd en PI/PD-regulator.

Övningstal 6.30 (padf14)

Betrakta problemet i föregående uppgift. Med kravet på 45° fasmarginal oförändrat, ange en teoretisk övre gräns för överkorsningsfrekvensen ω_c , för denna process och en PI/PD-regulator. Vad skulle motsvarande värde vara om 60° fasmarginal krävdes?

Övningstal 6.31 (pbl5)

Betrakta systemet med överföringsfunktionen $G(s) = \frac{v}{s}$. Systemet är reglerat med en P-regulator, $K(s) = k$. Systemets utsignal betecknas y .

- a) Skissera beloppsskurvan för både känslighetsfunktionen och komplementära känslighetsfunktionen (S och T). Vilken roll spelar förstärkningen k ?
- b) Antag att följande externa signaler påverkar den slutna kretsen: Referensen r , störningen (på processingången) d och mätstörningen n . Bestäm överföringsfunktionerna $\frac{Y(s)}{R(s)}$, $\frac{Y(s)}{N(s)}$ och $\frac{Y(s)}{D(s)}$. Vilka samband gäller mellan dessa överföringsfunktioner och $S(s)$ och $T(s)$?

Övningstal 6.32 (pbl6)

Betrakta systemet med överföringsfunktionen $G(s) = \frac{v}{s}$. Systemet är reglerat med en PI-regulator, $K(s) = k \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right)$.

Visa att det slutna systemet får en resonansliknande topp. Skissera beloppsskurvorna för komplementära känslighetsfunktionen T och känslighetsfunktionen S . Vad betyder förstärkningen k och integrationstiden τ i detta fall?

Övningstal 6.33 (pbl7)

Betrakta systemet med överföringsfunktionen $G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$. Systemet är reglerat med en PI-regulator, $K(s) = k(1 + \frac{1}{s})$.

Förstärkningen k anpassas så att systemet får en given fasmarginal. Skissera beloppsskurvan för både känslighetsfunktionen och komplementära känslighetsfunktionen, i de två fallen $\phi_m = 30^\circ$ och $\phi_m = 60^\circ$.

Övningstal 6.34 (pbl8)

En process som (nästan) helt saknar dynamik kan betraktas som en ren förstärkning, $G(s) = 1 + \delta$, där δ är en osäkerhet, som uppfyller $|\delta| \leq 0.5$.

- a) Bestäm en I-regulator, $K(s) = \frac{1}{\tau s}$, sådan att slutna systemets nominella bandbredd (då $\delta = 0$) blir 1 rad/min. Varför är det en dålig lösning att göra integrationstiden mycket liten, vilket ju skulle innebära hög förstärkning och därmed hög bandbredd, och dessutom "på köpet" låg känslighet?
- b) Bestäm en PI-regulator, $K(s) = \sigma \frac{1+\tau s}{\tau s}$, sådan att slutna systemets nominella bandbredd blir 1 rad/min, och så att beloppet av den nominella känslighetsfunktionen vid denna frekvens blir högst 0.30. Kan ett lägre maxvärde än 0.30 (exempelvis 0.28) uppnås? Motivera svaret!

- c) Hur varierar beloppet av känslighetsfunktionen vid frekvensen 1 rad/min som funktion av osäkerheten, i I-regulator-fallet och i PI-regulator-fallet?

Övningstal 6.35 (E14)

Ett system har enligt något slentrianmässiga antaganden överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\kappa}{s + \nu} . \quad (6.1)$$

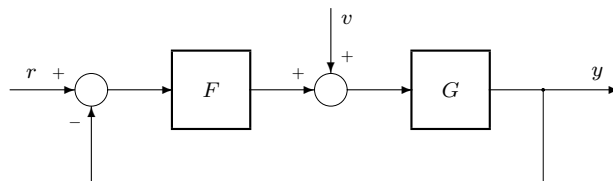
Frekvensanalys av systemet indikerar dock att överföringsfunktionen snarare är

$$G_0(s) = \frac{\kappa(1 + \tau s)}{s + \nu} \quad (6.2)$$

där täljarens tidskonstant τ kan variera något mellan olika driftsfall och därför utgör en osäkerhet. Som underlag för robust reglering formuleras en multiplikativ osäkerhetsmodell, $G_0(s) = (1 + \Delta_G(s))G(s)$.

- Bestäm den relative osäkerheten $\Delta_G(s)$ i modellen ovan.
- Vilken största bandbredd hos återkopplade systemet motsvarar lågförstärkningssatsens krav på robust stabilitet?

Övningstal 6.36 (pad10)



Förkortningen av en del av processens poler och nollställen via regulatorn $F(s)$ ingår ofta i designmetoder. Hur påverkas utsignalen y av laststörningen v och referenssignalen r , och vad blir kretsöverföringen $L(s)$ då regulatorn förkortar bort poler och nollställen i processen?

- $G(s) = \frac{1}{s+1}$ $F(s) = 10 \frac{(s+1)}{s}$
- $G(s) = \frac{s+2}{s^2+0.1s+1}$ $F(s) = 10 \frac{s^2+0.1s+1}{s(s+2)}$
- $G(s) = \frac{s-1+\varepsilon}{s-2+\varepsilon}$ $F(s) = 10 \frac{s-2}{s(s-1)}$

Vilka fördelar och nackdelar uppstår? I uppgift c) har en liten osäkerhet ε införts. Vilken effekt får detta och vilka inskränkningar är lämpliga att införa när det gäller pol-nollställes förkortning?

7 Regulatorstrukturer

Övningstal 7.1 (ppi15)

Lämpliga parametrar för en PID-regulator med dubbelnollställe har bestämts på den generella formen

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

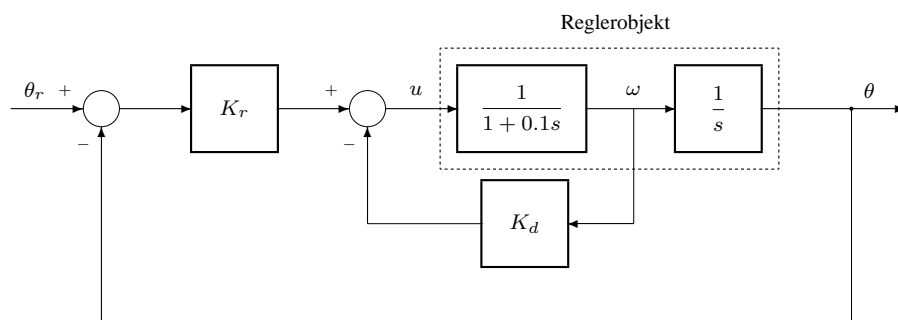
Denna regulator ska nu implementeras som en parallellkoppling på den additiva formen

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_f} \right)$$

Bestäm K_p , T_i , T_d och T_f samt kvoterna $a = T_i/T_d$ och $b = T_d/T_f$ som funktion av parametrarna K_i , τ och β .

Övningstal 7.2 (pad1)

Figuren nedan beskriver ett servosystem för positionering av en last. I systemet används reglering med *inre återföring*, dvs förutom reglerobjektets utsignal (vinkeln θ) återkopplas ytterligare en variabel (vinkelhastigheten ω). Denna princip används ofta för att erhålla snabbare och noggrannare reglering.



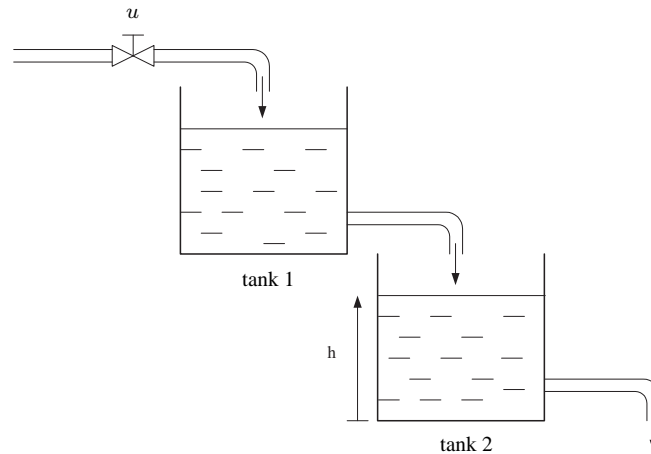
- Välj K_d och K_p så att polerna för det återkopplade systemet hamnar i $s = -10 \pm j10$.
- Vilken relativ dämpning ζ motsvarar denna polplacering? Vilken överkorsningsfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m erhålls då återkopplingen bryts upp vid styrsignalen u ?
- Dimensionera ett alternativt positionsservo *utan* inre återföring av vinkelhastigheten ω . Använd i stället seriekompensering i form av en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}, \quad b > 1$$

Se till att systemet får samma fasmarginal φ_m och överkorsningsfrekvens ω_c som i fallet med inre återföring.

- Jämför kretsöverföringen för de båda fallen i ett Bodediagram. Diskutera robust stabilitet med avseende på ickemodellerad dynamik exempelvis högfrekventa resonanser.

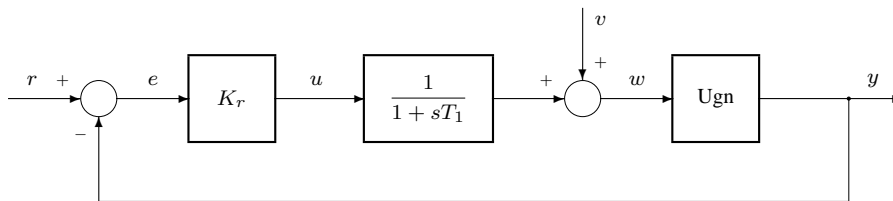
Övningstal 7.3 (pad2)



Att reglera höjden h i tank 2 med ventilläget u kan medföra vissa problem på grund av dynamiken i den första tanken. Med utnyttjande av flödesgivare skulle man kunna förbättra regleringen. Visa principiellt med hjälp av ett blockschema hur detta skulle kunna gå till.

Övningstal 7.4 (pad4)

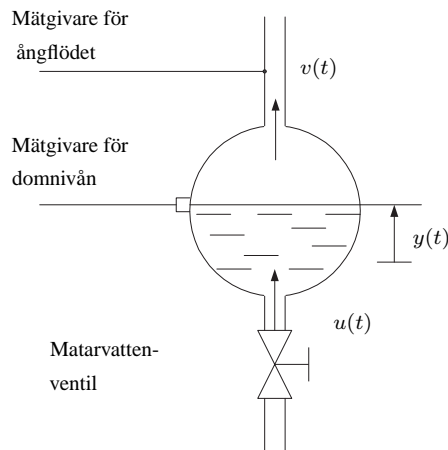
Figuren nedan visar en enkel proportionell reglering av temperaturen (y) i en oljeeldad ugn. Styrsignalen u är kommenderat bränsleflöde, vilket utgör insignalen till ett bränsleventilservo. Ugnens verkliga bränsletillflöde (w) karakteriseras av en tidskonstant T_1 i servot samt av ett störflöde v , som representerar variationer i bränsletryck, viskositet m m. Själva ugnens dynamik $G(s)$ kan beskrivas av en förstärkning K_p , en tidskonstant T_2 och en dödtid T_d . Numeriska värden är enligt följande: $K_p = 20^\circ\text{C}/\text{flödesenhet}$, $T_1 = 5\text{ s}$, $T_2 = 100\text{ s}$, $T_d = 20\text{ s}$.



- Rita upp systemets Bodediagram och bestäm härur det högsta värdet på regulatorförstärkningen K_r som uppfyller specifikationen: $A_m \geq 2.5$ och $\varphi_m \geq 50^\circ$. Hur mycket reduceras temperaturbidraget från störningen v jämfört med det oreglerade fallet?
- Antag att en stegformad störning $v = 2$ flödesenheter får ge en kvarstående temperaturändring på högst 1°C . För att klara detta krav utrustas systemet med en bränsleflödesgivare och en inre krets för reglering av bränsleflödet (kaskadreglering). Den inre kretsen förses också med en proportionell regulator. Rita ett blockschema som illustrerar det kompletta reglersystemet samt bestäm vilken förstärkning som skall väljas i den inre kaskadloopen för att noggrannhetskravet skall bli uppfyllt (övriga parametrar enligt ovan).
- Vilken fördel finns med detta sätt att reducera störningens inverkan jämfört med alternativet att införa integralverkan i den ursprungliga reglerkretsen?

Övningstal 7.5 (pad5)

I en ångpanna av s k domtyp används en behållare (domen) för att skilja vatten och ånga. Det är väsentligt att hålla konstant vattennivå i domen vid belastningsändringar.



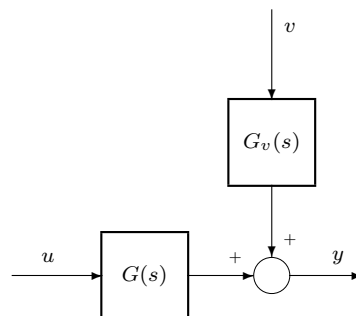
Domen kan beskrivas med modellen

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s}U(s) - \frac{10^{-4}(1 - 100s)}{s(1 + 10s)}V(s)$$

där y är domnivån i meter, m matarvattenflödet i kg/sek och f är ångflödet i kg/sek.

- I systemet införes en P-regulator för konstanthållning av nivå y via styrning av matarvattenflödet. Rita blockschema över det slutna systemet, inklusive störningens (ångflödet) inverkan!
- Dimensionera regulatorns förstärkningsfaktor K (kg/sek)/m så att ett begynnelsefel i nivå minskar till 25% av ursprungsvärdet efter 1 minut! Vad blir då kvarstående nivåfelet svarande mot en stegstörning i ångflöde på 2 kg/sek?
- Ange en framkoppling i reglersystemet, baserad på mätning av ångflödet, så att nivå blir oberoende av ändringar i ångflödet. Rita blockschema!
- Hur påverkas slutna systemets stabilitet av framkopplingen?

Övningstal 7.6 (pad8)



En framkopplingslänk skall dimensioneras för ovanstående process där störningen v antas vara mätbar. Processens överföringsfunktioner antas ha formen

$$G(s) = \frac{s + b}{s + a} e^{-sT_d}$$

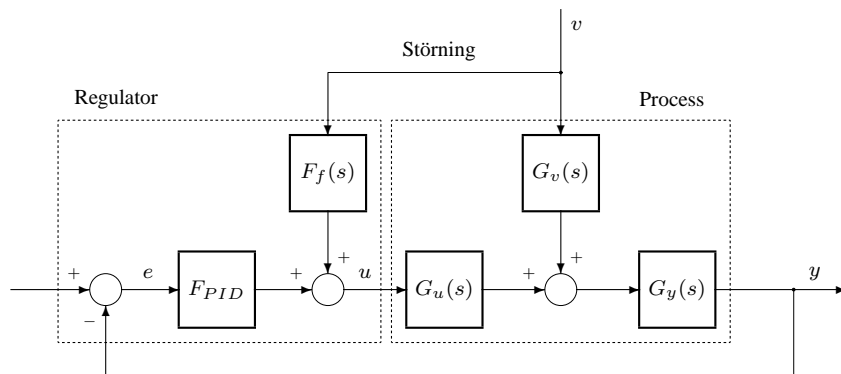
$$G_v(s) = \frac{s + b_v}{s + a_v} e^{-sT_{dv}}$$

- Bestäm framkopplingslänken $F_f(s)$.
- För vilka värden på parametrarna i processmodellerna går det att åstadkomma en praktiskt realiserbar länk $F_f(s)$ som ger ett stabilt reglersystem? Ange alternativa förslag på kompensering för övriga parameterkombinationer.

Ledning: Vid stabilitetsanalysen bör en viss osäkerhet hos processens poler och nollställen beaktas.

Övningstal 7.7 (pad9)

Figuren nedan visar ett reglersystem med återkoppling från utsignalen y och framkoppling från den mätbara störningen v .



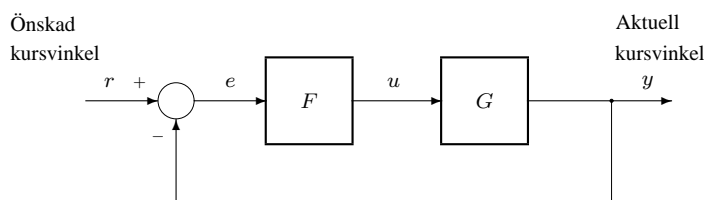
- Antag att PID-regulatorn i systemet ovan är lämpligt inställd, och att överföringsfunktionerna $G_u(s)$, $G_v(s)$ och $G_y(s)$ är stabila minimumfassystem. Bestäm ett lämpligt framkopplingsfilter $F_f(s)$.
- Antag som tidigare att $G_u(s)$, $G_v(s)$ och $G_y(s)$ är stabila men att *precis en* av dessa överföringsfunktioner är icke-minimumfas. Kan detta leda till besvärligheter vid idrifttagningen av reglersystemet? Motivering krävs! (OBS! Det finns tre olika fall att ta ställning till!).

Övningstal 7.8 (pad11)

Man skall bygga ett reglersystem för att reglera kursvinkeln hos ett medelstort lastfartyg. Genom identifiering och stegsvarsexperiment har man bestämt en approximativ överföringsfunktion från fartygets rodevinkel u (som mäts i radianer) till fartygets kursvinkel y (som också mäts i radianer). Denna överföringsfunktion ser ut på följande sätt:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+as)} \quad \text{där} \quad k = 0.1 \quad \text{och} \quad a = 5 \text{ s.}$$

För regleringen används en givare som mäter kursvinkeln y enligt nedanstående blockschema, samt en regulator $F(s)$ som bestämmer systemets styrsignal utgående från aktuell felsignal e .



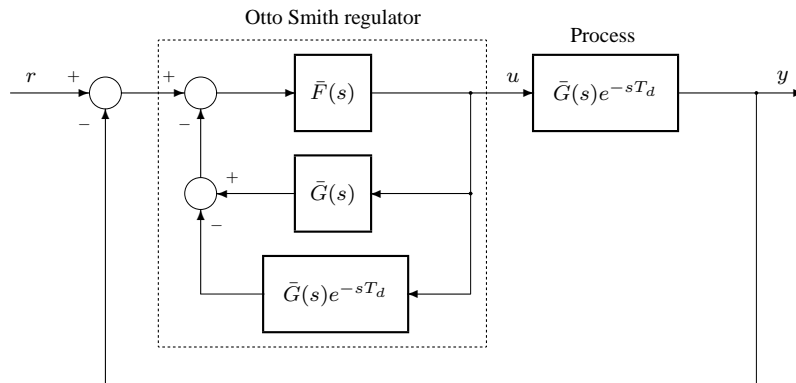
- Hur skall regulatorns överföringsfunktion $F(s)$ se ut om man önskar att det återkopplade systemet från r till y skall ha överföringsfunktionen

$$G_{ry} = \frac{1}{(1+\tau s)^2}$$

- Hur stor blir regulatorns maximala styrsignal (rodevinkeln u) vid en stegformad referenssignaländring r på 0.3 radianer? Notera speciellt värdet då $\tau = 4$ respektive 1.
- Hur stor blir fasmarginalen φ_m då $\tau = 4$ respektive 1.
- Hur mycket ökar bandbredden och snabbheten då tidskonstanten τ minskar från 4 till 1?

- e) Vilka slutsatser kan man dra angående prestanda, stabilitetsmarginaler, styrsignalaktivitet och robusthet för högfrekvent ickemodellerad dynamik i förhållande till tidskonstanten τ ?

Övningstal 7.9 (pad13)

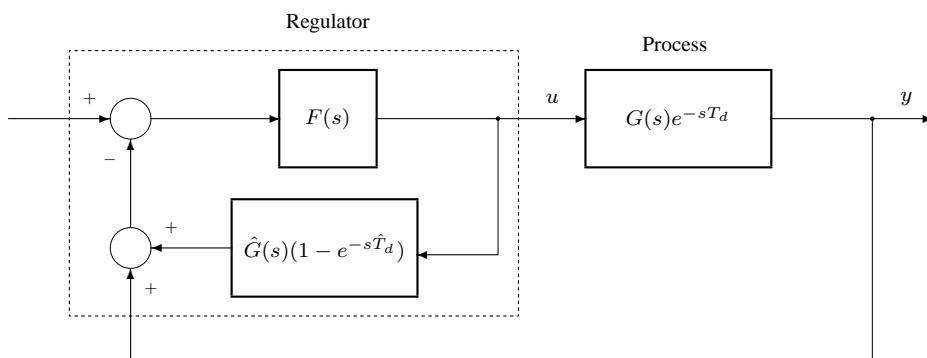


Figuren visar en sk Otto Smith-regulator, avsedd att reglera processer med döttidsdominerad dynamik. Processen antas ha överföringsfunktionen $G(s)e^{-sT_d}$, där $G(s)$ saknar döttid. Regulatorn $F(s)$ dimensioneras för reglering av processen utan döttid, dvs med antagandet att $T_d = 0$.

- Utgå från blockschemat ovan och beräkna det slutna systemets överföringsfunktion från r till y .
- Betrakta specialfallet $G(s) = 1/(s + 1)$. Dödtiden antas vara 1 tidsenhet. Bestäm en Otto Smith-regulator för denna process, så att insvängningstiden (till 5%) för det slutna systemet inte överstiger 2 tidsenheter och så att den statiska förstärkningen från r till y är lika med ett.

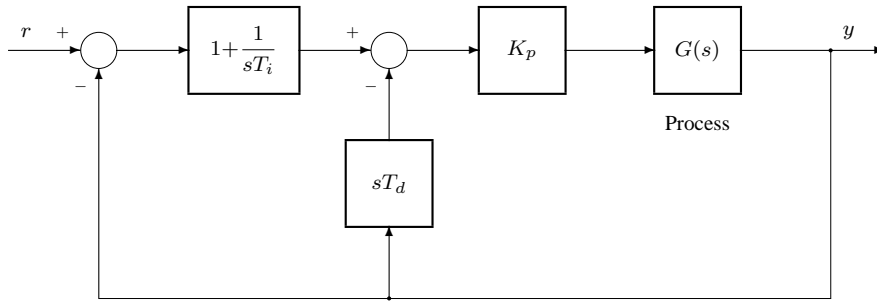
Övningstal 7.10 (pad14)

Figuren visar en Otto Smith-regulator, avsedd att reglera processer med döttidsdominerad dynamik. I regulatorn ingår förutom en kompenseringslänk $F(s)$ också en överföringsfunktion som beror av $\hat{G}(s)$ och $e^{-s\hat{T}_d}$ som tillsammans representerar en modell för processen.

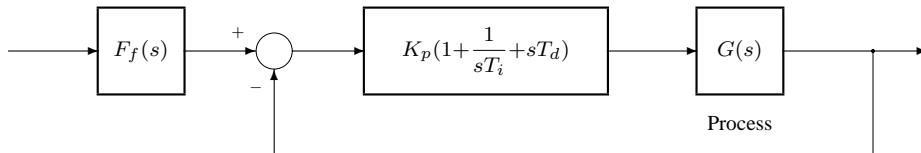


- Beräkna överföringsfunktionen G_{ry} från r till y under antagandet att $\hat{T}_d = T_d$.
- Anta förutom att $\hat{T}_d = T_d$ också att $\hat{G}(s) = G(s)$ (dvs att modellen är exakt). Tolka den resulterande överföringsfunktionen i detta fall och förklara fördelen med Otto Smith-regulatorn.

Övningstal 7.11 (pad16)



- a) En variant av PID-reglering visas i figuren ovan. Ställ upp det slutna systemets överföringsfunktion från r till y , $G_{ry}(s)$. Förklara kort fördelen med att arrangera I- och D-verkan på det här sättet.



- b) Bestäm filtret $F_f(s)$ så att överföringsfunktionen $G_{ry}(s)$ blir densamma som i uppgift a). Antag specifikt att $T_i = 4T_d$. Vilken skillnad i överföringsfunktionen $G_{ry}(s)$ kan då iakttas i termer av poler och nollställen jämfört med fallet $F_f(s) = 1$?
- c) Bestäm högfrekvensasymptoten för överföringsfunktionen från r till y , $G_{ru}(s)$ för de båda fallen i uppgift b) under antagandet att komplementära känslighetsfunktion $T(j\omega)$ närmar sig kretsöverföringen $L(j\omega)$ för stora värden på ω .

Övningstal 7.12 (pad17)

En PID-regulator kan tecknas på formen

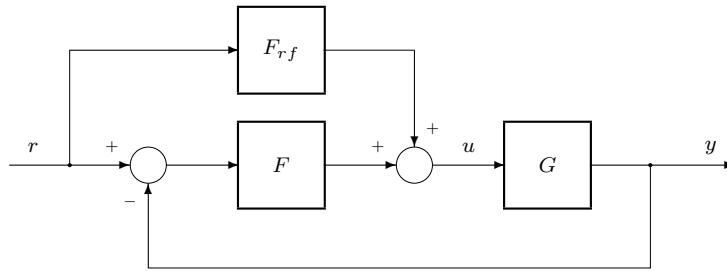
$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

För att ytterligare dämpa högfrekventa mätstörningar kan det vara lämpligt att ersätta lågpasfiltret av första ordningen med ett andra ordningens lågpasfilter, vilket ger följande PID-regulator

$$F_{PID_f}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + 2\zeta_f s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2)}$$

där indexet f markerar extra lågpasfiltrering. Rita asymptotiska amplituddiagram för dessa båda regulatorer, och bestäm maxvärdet $|F_{PID_f}(j\omega)|$ i det högre frekvensområdet från det exakta amplituddiagrammet. Antag att β är stort så att inte regulatorns nollställe påverkar övergången från asymptotiskt till exakt diagram.

Övningstal 7.13 (pad18)



En framkopplingslänk från referenssignalen direkt till styrsignalen kan utnyttjas för att få bättre referenssignalföljning även vid högre frekvenser ovanför det återkopplade systemets bandbredd.

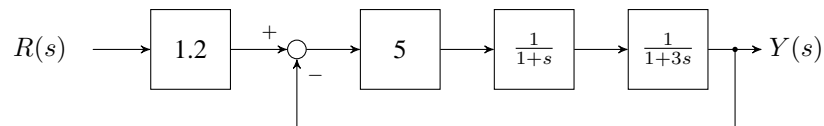
- Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = Y(s)/R(s)$ och välj $F_{rf}(s)$ så att $Y(s) = R(s)$.
- Vilka problem kan uppstå vid realisering av $F_{rf}(s)$?
- En förenklad variant är att välja statisk referenssignalframkoppling. Gör detta för fallet

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \quad G_r(s) = 0.5 \frac{s+1}{s}$$

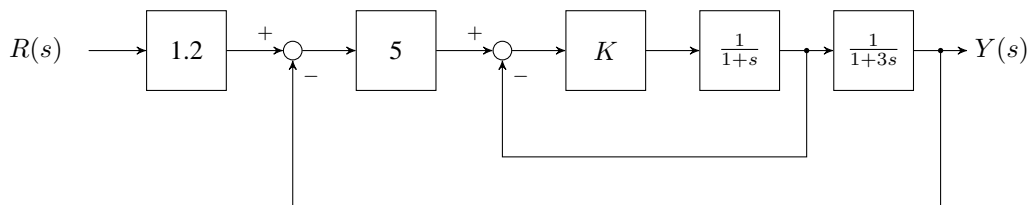
Vilken förändring av $G_{ry}(s)$ åstadkoms då i termer av poler och nollställen jämfört med fallet utan referenssignalframkoppling.

Övningstal 7.14 (pbl1)

Betrakta följande reglersystem:

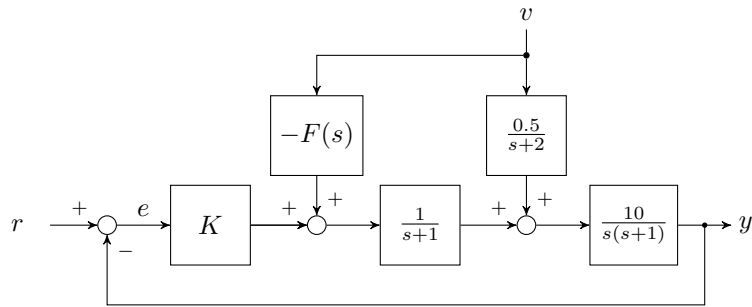


- Beräkna slutna systemets överföringsfunktion och uppskatta insvängningstiden t_s (5% från slutvärdet) vid stegformad referensändring.
- I figuren nedan har kaskadreglering införts kring det snabbare delsystemet. Hur förändras det återkopplade systemet och insvängningstiden om vi antar att förstärkningen K väljs stor? (Låt $K \rightarrow \infty$!)



Övningstal 7.15 (pbl2)

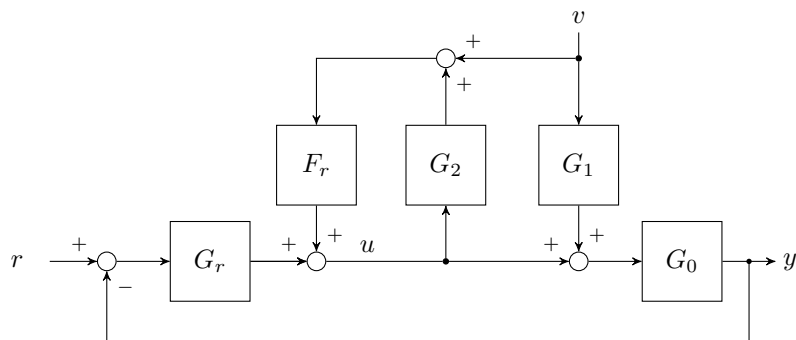
Betrakta följande styrsystem:



- Hur påverkas det slutna systemets stabilitet av framkopplingen? Motivera!
- Bestäm parametern i P-regulatorn så att amplitudmarginalen blir 2.5.
- Bestäm framkopplingsfiltret, $F(s)$, så att störningen, $v(t)$, avkopplas helt.

Övningstal 7.16 (pbl3)

Blockdiagrammet nedan visar ett styrsystem med både återkoppling och framkoppling. En speciell omständighet som gör att detta system avviker från det normala är att styrsignalen genom överföringsfunktionen $G_2(s)$ påverkar mätningen av den framkopplade störningen.

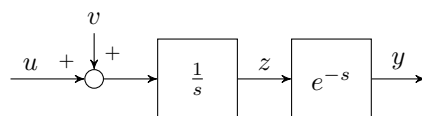


- Uppställ överföringsfunktionen, $\frac{Y(s)}{V(s)}$, från störning till utsignal.
- Bestäm framkopplingsfiltret, $F_r(s)$, så att effekten av störningen, $v(t)$, helt elimineras (teoretiskt sett).
- Undersök, med $F_r(s)$ valt enligt b-uppgiften, vilka förstärkningar, K , hos PI-regulatorn $G_r(s)$ som leder till ett stabilt system i specialfallet:

$$G_r(s) = K \left(1 + \frac{1}{s} \right), G_0(s) = \frac{1-s}{1+s}, G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{1+s}$$

Övningstal 7.17 (pbl4)

Betrakta processen i nedanstående blockdiagram, som påverkas av sinusformade störningar, vars frekvens kan variera mellan olika tillfällen.



$u = \text{styrning}, v = \text{störning}$

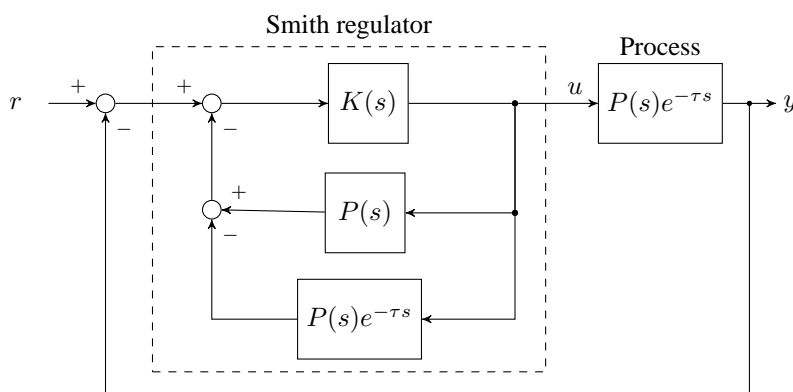
Två olika styrstrategier skall prövas:

- 1) Mätvärdet $z(t)$ ignoreras. Processen P-regleras så att $A_m = 2.5$.
- 2) Mätvärdet $z(t)$ används för kaskadreglering. Den inre loopen kan då P-regleras med relativt hög förstärkning (t ex 10), medan den yttre loopen P-regleras så att $A_m = 2.5$.

Utför design enligt båda styrstrategierna, och plotta i de två fallen $F(\omega) = \frac{|Y(j\omega)|}{|V(j\omega)|}$ som funktion av ω . Kommentera resultatet!

Övningstal 7.18 (pbl9)

Figuren nedan visar en så kallad Smith-regulator, avsedd att reglera processer med döttidsdominerad dynamik. Processen antas ha överföringsfunktionen $P(s)\exp(-\tau s)$, där $P(s)$ saknar dödtid. $K(s)$ är en regulator, avsedd för reglering av processen för fallet $\tau = 0$. Man kan därför anta att det slutna systemet, $\frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)}$, har godtagbara egenskaper.



- Utgå från blockdiagrammet ovan och beräkna det slutna systemets överföringsfunktion, $\frac{Y(s)}{R(s)}$.
- Betrakta specialfallet $P(s) = \frac{1}{s+1}$. Dödtiden antas vara 1 tidsenhet. Bestäm en Smith-regulator till denna process, så att insvängningstiden (till 5%) för det slutna systemet inte överstiger 2 tidsenheter.

Övningstal 7.19 (pbl10)

Betrakta en Smith-regulator för processen med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = Ae^{-(\tau+\theta)s}$$

där A är känd dynamiklös parameter, τ är känd dödtid, medan θ är en okänd dödtid. P-reglera A med en kraftig förstärkning så att det slutna "inre" systemet $\frac{PK}{1+PK} \approx 1$. Utred hur θ kan tillåtas variera, då det resulterande reglersystemet skall ha en amplitudmarginal på minst två.

(Observera att då θ är okänd har endast hänsyn tagits till τ vid konstruktionen av Smith-regulatorn!)

8 Design av regulatorer på tillståndsform

Övningstal 8.1 (psr1)

Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned}\dot{x} + x &= u \\ \dot{y} - y + 2x &= u\end{aligned}$$

- Formulera en tillståndsmodell för detta system samt motsvarande överföringsfunktion.
- Studera systemets styr- och observerbarhet, samt kommentera kopplingen till systemets överföringsfunktion.
- Analysera systemets stabilitet med hjälp av dess tillståndsmodell och överföringsfunktion. Förklara skillnaderna i resultaten.
- Kommentera möjligheterna att skatta tillstånden med hjälp av en observatör och att reglera systemet med hjälp av tillståndsåterkoppling.

Övningstal 8.2 (psr2)

En satellits rotation ska styras med hjälp av ett drivande moment u . Momentjämvikt ger differentialekvationen

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = u(t)$$

där J är satellitens tröghetsmoment och ω är satellitens vinkelhastighet som tillsammans med vinkeln θ är tillgängliga för återkoppling. Antag i fortsättningen att $J = 1$.

- Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta \theta - \ell_\omega \omega + K_r \theta_r$$

så att de båda polerna för det återkopplade systemet placeras som en dubbelpol i $s = -\alpha$.

- Bestäm överföringsfunktionen från θ_r till styrsignalen u , och ange speciellt $u(0)$ vid ett börvärdessteg (enhetssteg) som funktion av polplaceringen α .
- Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ då återkopplingsslingan bryts vid styrsignalen u . Ange speciellt kretsöverföringens högfrekvensasymptot som funktion av α , och kommentera känsligheten för icke-modellerade högfrekventa resonanser hos satelliten.
- Tillståndsåterkopplingen kan uppfattas som en PD-regulator med enbart återkoppling från θ , dock utan filtrering av derivataverkan och ingen derivering av referenssignalen, d.v.s.

$$u = K_p(\theta_r - (1 + T_d s)\theta)$$

Då en PD-regulator med filtrering

$$F_{PD}(s) = \frac{K_p(1 + s\tau)}{1 + s\tau/\beta}$$

utnyttjas, förändras kretsöverföringen speciellt i det högfrekventa området. Vilken förändring sker och på vilket sätt påverkar detta systemets robusthet för högfrekventa modellosäkerheter, jämfört med tillståndsåterkopplingen?

Övningstal 8.3 (psr3)

Läsarmen på en hårddisk ska styras med en servomotor. Eftersom motorns tidskonstant är några storleksordningar mindre än läsarmens, antas motormodellen vara en ren förstärkning. Den förenklade servomotormodellen blir då med tidsenheten millisekunder

$$Y(s) = \frac{10}{s(1 + 10s)} U(s)$$

där utsignalen y är den uppmätta vinkeln och styrsignalen u är spänningen till motorn. Antag att även vinkelhastigheten ω är mätbar.

- Dimensionera en tillståndsåterkoppling från y och ω så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $s = -\alpha$.
- Bestäm kretsöverföringen då återkopplingen bryts upp vid styrsignalen u . Ange kretsöverföringens låg- och högfrekvensförstärkning för de båda polplaceringarna $\alpha = 0.1$ och 0.5 .
- Diskutera de båda valen av polplacering i relation till robusthet, prestanda och styrsignalaktivitet.

Övningstal 8.4 (psr4)

En flödesprocess beskrivs förenklat av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Utsignalen mäts med en givare som tyvärr bidrar med signifikanta mätstörningar. Uppgiften är att undersöka hur en tillståndsobservatör hanterar sådana störningar.

- Dimensionera en tillståndsåterkoppling (P-regulator) så att slutna systemets pol hamnar i $s = -1$.
- Formulera en observatör med en godtycklig förstärkning K och inkludera den i ovanstående tillståndsåterkoppling. Bestäm överföringsfunktionen från mätsignalen y till styrsignalen u , d v s regulatorns överföringsfunktion $F(s)$. Antag att börvärdet $r = 0$.
- Studera överföringsfunktionen från mätstörningen till processens utsignal, d v s komplementära känslighetsfunktionen, i ett amplituddiagram. Jämför förstärkningarna $K = 1$ och $K = 10$. På vilket sätt påverkar nivån på denna förstärkning kompenseringen av mätstörningen?

Övningstal 8.5 (psr5)

- Formulera en tillståndsmodell för följande servomotor

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} = u$$

där θ är vinkeln, $\omega = \dot{\theta}$ är vinkelhastigheten och u är styrsignalen.

- Visa att systemet är styrbart från styrsignalen u och observerbart från vinkeln θ , men ej observerbart då endast vinkelhastigheten ω mäts.
- Konstruera en observatör med dubbelpol i $s = -\alpha$ då endast signalen θ mäts. Bestäm överföringsfunktionerna från θ till $\hat{\theta}$ och $\hat{\omega}$, samt skissera motsvarande amplituddiagram då $\alpha = 10$ (observatörens dynamik är väsentligt snabbare än systemets tidskonstant, som är lika med ett). Kommentera de erhållna filtrens karakteristika i förhållande till systemdynamiken.

Övningstal 8.6 (psr6)

Överföringsfunktionen för en satellit från momentet u till rotationsvinkeln θ är

$$\Theta(s) = \frac{1}{Js^2} U(s)$$

där J är satellitens tröghetsmoment. Antag i fortsättningen att $J = 1$. Antag också att vinkeln θ mäts med en mätstörning w så att

$$\theta_m(t) = \theta(t) + w(t)$$

- Konstruera en tillståndsobservatör med en dubbelpol placerad i $s = -\alpha$ som skattar vinkeln och vinkelhastigheten.

- b) Bestäm överföringsfunktionen från θ_m till vinkeln θ och vinkelhastigheten ω som funktion av α . Ange speciellt låg- och högfrekvensasymptoterna. På vilket sätt påverkas dessa asymptoter av α , d.v.s. dubbelpolens placering.
- c) Bestäm överföringsfunktionen från mätbruset w till skattningsfelen $\theta - \hat{\theta}$ och $\omega - \hat{\omega}$ som funktion av α . Ange speciellt motsvarande högfrekvensasymptoter, och det sätt på vilket dessa påverkas av dubbelpolens placering.

Övningstal 8.7 (E20)

Ett linjärt system definieras av differentialekvationen $\dot{y}(t) = u(t)$, där u är insignal och y är utsignal. Systemet skall regleras genom tillståndsåterkoppling med integrerande verkan, innebärande att den utvidgade systembeskrivningen blir av ordning två. Processens tillstånd betecknas x_1 och regulatorns tillstånd x_2 .

- (a) Utför design av en sådan tillståndsåterkoppling där det återkopplade systemets poler placeras i $-1 \pm i\nu$. Vilket värde på ν motsvaras av ett kritiskt dämpat återkopplat system?
- (b) Upprita ett tydligt schema över det återkopplade systemet, och bestäm istället parametern ν så att systemets fas-marginal blir 45 grader.

9 Tidsdiskreta system

Övningstal 9.1 (pir1)

Nedanstående fysikaliska system är givna med tidskontinuerliga överföringsfunktioner. Antag att systemen samplas och att insignalen är konstant över varje samplingsintervall h . Beräkna motsvarande tidsdiskretiserade överföringsfunktioner. Bestäm även de tidsdiskreta polerna i deluppgift a)-e). Jämför och kommentera!

a) $G(s) = \frac{3}{1+s} \quad h = 1 \text{ s}$

b) $G(s) = \frac{3}{1+s} \quad h = 0.5 \text{ s}$

c) $G(s) = \frac{3}{4+2s} \quad h = 2 \text{ s}$

d) $G(s) = \frac{3}{s^2} \quad h = 0.1 \text{ s}$

e) $G(s) = \frac{4}{s^2+9} \quad h = 0.5 \text{ s}$

f) $G(s) = \frac{5}{s(5s+2)} \quad h = 1 \text{ s}$

g) $G(s) = \frac{3s^2+5s+3}{s(s^2+s+1)} \quad h = 1 \text{ s}$

Övningstal 9.2 (pir2)

Man önskar hålla vattennivån, y , i en tank konstant. Den tidskontinuerliga överföringsfunktionen framgår nedan. Nu vill man reglera systemet med hjälp av en dator. Datorn samplar systemets utsignal (vattenhöjden) med jämna tidsintervall och styrsignalen som ska reglera systemet kan anses vara konstant mellan samplingstidpunkterna. Beräkna den diskretiserade överföringsfunktionen, dels om samplingsintervallet är 0.1 s och dels om samplingsintervallet är 0.5 s.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2+10s}$$

Övningstal 9.3 (pirLambda)

För en första ordningens process med döttid

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1+Ts}$$

utnyttjas följande regulator

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1+sT}{K(1+s\lambda T - e^{-sT_d})}$$

där $e(t)$ är insignalen till regulatorn, dvs. reglerfelet, och $u(t)$ är regulatorns utsignal, dvs. styrsignalen.

a) Visa att det återkopplade systemet från referenssignal till utsignal blir

$$G_{ry}(s) = \frac{e^{-sT_d}}{1+s\lambda T}$$

b) Skriv regulatorn på tidsform, dvs. ange en differentialekvation som då den Laplacetransformeras ger $F(s)$ ovan.

- c) För att implementera regulatorn i en dator behöver vi tidsdiskretisera regulatorn ovan eftersom datorn bara läser av felet $e(t)$ och beräknar styrsignalen $u(t)$ vid diskreta tidpunkter. Vi väljer samplingsintervallet h så att dödtiden T_d är en jämn multipel av h , dvs. $T_d = ch$, där c är ett heltal.

Kalla styrsignalen efter k samplingar $u(kh)$, felet $e(kh)$. Kalla på samma sätt styrsignalen efter $k-1$ samplingar för $u(kh-h)$ och felet för $e(kh-h)$. Bestäm $u(kh)$ som funktion av reglerfelet $e(kh)$ och tidigare styrsignaler och reglerfel.

Ledning: Ett enkelt sätt att göra en tidsdiskret approximation av en tidsderivata är

$$\dot{f}(t) \approx \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Övningstal 9.4 (pir3)

Processen

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

samplas med samplingsintervallet $h = \ln 2$. (Detta val visar sig ge enkla siffror!). Ställ upp en differensekvation som relaterar det tidsdiskreta systemets in- och utsignaler, $u(k)$ och $y(k)$ respektive, till varandra. Beräkna även $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ och $y(4)$ i det tidsdiskreta systemets stegsvar, där $u(k) = 1$ för $k \geq 0$. Antag att $u(k), y(k) = 0$ för $k < 0$.

Övningstal 9.5 (pir4)

Skissera stegsvaret för processen

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

genom att uppskatta dämpningen ζ och den odämpade resonansen ω_n för motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

vars stegsvar är välbekant. Samplingsintervallet $h = 1$.

Eftersom vi inte tagit hänsyn till det samplade nollställets placering fås endast i undantagsfall det exakta stegsvaret med denna metodik. Jämför därför det erhållna resultatet med den exakta lösningen som erhålls genom att iterera den aktuella differensekvationen.

Övningstal 9.6 (pirLFHF)

En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

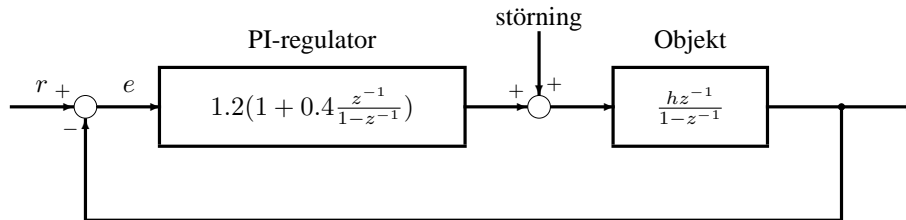
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

- Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$, och ange speciellt resultatet för samplingsintervallet $h = \ln 2$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h speciellt för korta och långa intervall.
- Bestäm den tidsdiskreta överföringsfunktionens lågfrekvensförstärkning för $\omega = 0$ och motsvarande högfrekvensförstärkning för $\omega = \omega_s/2 = \pi/h$ (Nyquist frekvensen) för ett godtyckligt samplingsintervall h . Jämför med motsvarande låg- respektive högfrekvensförstärkning för den kontinuerliga modellen $G(s)$. Kommentera jämförelsen speciellt för kortare samplingsintervall h .

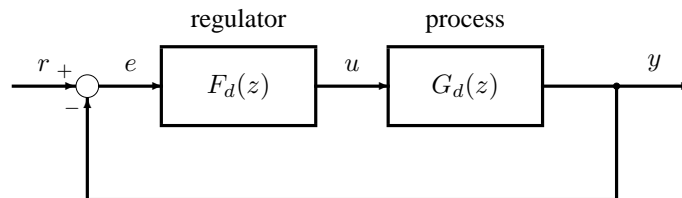
Övningstal 9.7 (pir5)

Ett objekt kan beskrivas med hjälp av en ren integration. På ingången till detta objekt uppträder långsamt varierande störningar. Ett reglersystem ska konstrueras så att utsignalen påverkas så lite som möjligt av dessa störningar. En PI-regulator kan då vara ett lämpligt val. Då systemet dimensioneras antas att samplingsintervallet $h = 1$. Slutna systemets poler hamnar då i $z \approx 0.4 \pm 0.3j$.



Studera för vilka samplingsintervall h som det återkopplade systemet är stabilt. (Regulatorns parametrar antas vara oberoende av samplingsintervallets längd.)

Övningstal 9.8 (pir6)



I figuren ovan visas hur en (samplad) instabil kemisk process regleras med en digital PI-regulator, där överföringsfunktionerna

$$G_d(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad F_d(z) = K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}}$$

- För vilka regulatorparametrar, K_p och K_i , är det slutna systemet stabilt?
- Markera det stabila området i ett K_p - K_i -plan, med angivande av intressanta skärningspunkter, kurvor etc.

Övningstal 9.9 (pirPregPol)

En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

där

$$G_1(s) = \frac{4}{s+1} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{4}{s+2}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att samplingsintervallet $h = \ln 2$ och att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

- Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h .
- Bestäm en tidsdiskret P-regulator så att de båda polerna för det tidsdiskreta återkopplade systemet placeras som en dubbelpol.

Övningstal 9.10 (pirDodMs)

En transportprocess modelleras som en ren fördröjning med döttiden T_d , d.v.s. överföringsfunktionen är $G(s) = e^{-sT_d}$. Denna process regleras med en PI-regulator

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En tidsdiskret PI-regulator implementeras med ett samplingsintervall $h = T_d$.

- Bestäm den tidsdiskreta kretsöverföringen $L_d(z) = G_d(z)F_d(z)$.
- Välj speciellt $T_i = T_d$ och bestäm kretsöverföringen $L_d(z)$ samt överföringsfunktionen $G_{ry}(z) = L_d(z)/(1 + L_d(z))$. Ange speciellt det återkopplade systemets polplacering och skissera motsvarande stegsvar för $K_p = 0.5$ och 1.
- Rita $L_d(e^{j\omega h})$ i uppgift b) i ett Nyquistdiagram. Visa speciellt att realdelen för $L_d(e^{j\omega h})$ är $-0.5K_p$, och att därmed den maximala känslighetsfunktionen

$$M_S = \max_{\omega} |S_d(e^{j\omega h})| = \max_{\omega} |1/(1 + L_d(e^{j\omega h}))| = 1/(1 - 0.5K_p)$$

- Ange speciellt M_S för $K_p = 0.5$ och 1 och kommentera kopplingen mellan stabilitetsmarginalen M_S och systemets snabbhet enligt uppgift b).

Övningstal 9.11 (pirMATLAB)

En process regleras med en tidsdiskret P-regulator. Ökad tillgång till datorkraft gör att man önskar undersöka effekten av att tredubbla samplingsfrekvensen från $f_s = 100\text{Hz}$ ($h = 1/f_s$) till $f_s = 300\text{Hz}$.

Följande MATLAB-kod simulerar en stegstörning för det nuvarande återkopplade systemet.

```
Nstep=50; % Antalet simuleringssteg
Kp=3; % P-förstärkning
a=0.905; % Processparameter
b=0.190; % -"-
y(0)=0; % Processens begynnelsevärde
v0=3; % Stegstörningens nivå
r0=0; % Referenssignalens nivå
for k=0:Nstep % Simulering
    u(k)=Kp*(r0-y(k)); % Styrlagen
    y(k+1)=a*y(k)+b*(u(k)+v0); % Uppdatering av processen
end
```

- Bestäm nuvarande processens överföringsfunktion, samt motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion.
- Ange de förändringar av koden som behövs för att simulera det återkopplade systemet för det kortare samplingsintervallet (under lika lång tidsperiod som nuvarande system).
- På vilket sätt förändras amplitudmarginalen då samma P-regulator ($K_p = 3$) utnyttjas för att styra processen med den snabbare samplingsfrekvensen?

Övningstal 9.12 (pirMATLAB2)

En process regleras med en tidsdiskret P-regulator med en samplingsfrekvens på $f_s = 100\text{ Hz}$ ($h = 1/f_s$). MATLAB-koden i föregående uppgift simulerar en stegstörning för det återkopplade systemet.

- Bestäm nuvarande processens överföringsfunktion, samt motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion.
- Ange de förändringar av koden som behövs för att simulera det återkopplade systemet då processen även inbegriper en transportfördröjning på ett samplingsintervall.

- c) Antag att processen i stället regleras med en tidsdiskret PI-regulator. Den tidskontinuerliga motsvarigheten har överföringsfunktionen

$$F(s) = \frac{5(1 + 0.05s)}{s}$$

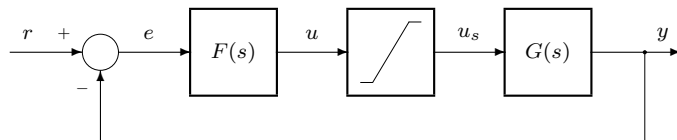
Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion då det antas att insignalen är styckvis konstant mellan samplingsögonblicken, samt modifiera MATLAB-koden så att P-regulatorn ersätts av denna tidsdiskreta PI-regulator.

Övningstal 9.13 (pirWindup)

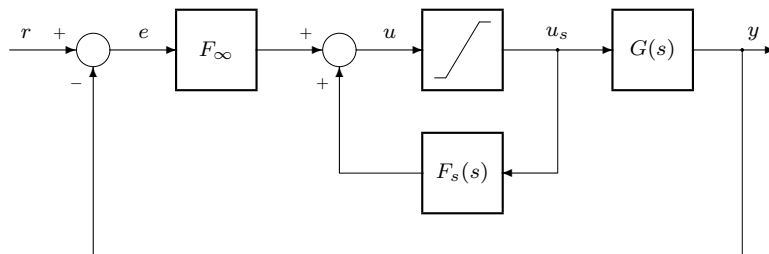
I praktiska reglersystem begränsas normalt den styrsignal som generas till processen via en begränsningsfunktion. Den begränsade styrsignalen $u_s(t)$ (s =saturation) kan då uttryckas som

$$u_s = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & u < u_{min} \end{cases}$$

Begränsningsfunktionen illustreras också i följande blockschema.



Då styrsignalen hamnar i begränsningsläget upphör återkopplingen temporärt att fungera, eftersom styrsignalen till processen $u_s(t)$ då är konstant (lika med u_{min} eller u_{max}). Detta leder till problem då regulatorn i sig är instabil, vilket gäller exempelvis i det vanligt förekommande fallet att regulatorn $F(s)$ är en PI-regulator. Ett sätt att råda bot på detta problem visas i följande blockschema, där den begränsade styrsignalen u_s återkopplas via positiv återkoppling.



Denna realisering ger ett väl fungerande system då överföringsfunktionen $F_s(s)$ är *stabil* och konstanten K_∞ väljs lika med regulatorns högfrekvensförstärkning, d.v.s. $K_\infty = F(\infty)$.

- a) Bestäm $F_s(s)$ då

$$F(s) = 3 \frac{s + 0.5}{s}$$

så att reglersystemen i de båda ovanstående figurerna får samma beteende så länge som styrsignalen u håller sig innanför begränsningarna u_{min} och u_{max} (med andra ord bortse från begränsningsfunktionen).

- b) Antag att $u_{max} = 10$ och att referenssignalen $r(t)$ varieras så att reglerfelet e hamnar på en konstant nivå $e = 5$. Ange för de båda regulatorstrukturerna det asymptotiska beteendet hos signalen $u(t)$ för stora värden på t efter att inledande transienter har klingat av. I det första fallet bortses från eventuella konstanta bidrag hos $u(t)$. Kommentera skillnaden i beteende mellan de båda reglerfunktionerna.

Övningsuppgifter i reglerteknik

Lösningar

10.1 Insignal-utsignalmodeller

- Lösning till 1.1

$$(1 - e^{-t})\sigma(t) \qquad (t - 1 + e^{-t})\sigma(t) \qquad (1 - e^{-t} - te^{-t})\sigma(t)$$

- Lösning till 1.2

$$P(s) = \frac{H}{s}(e^{-T_1 s} - e^{-T_2 s})$$

- Lösning till 1.3

$$P(s) = \frac{H}{Ts^2}(1 - e^{Ts})^2$$

- Lösning till 1.4

$$\frac{s + 5}{s^2 + 6s + 13}$$

- Lösning till 1.5

$$\left[1 - e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \sigma(t)$$

- Lösning till 1.6

$$e^{-t}J_0(2t)$$

- Lösning till 1.7

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 4$$

Det inses att det senare resultatet är felaktigt då partialbråksutvecklingen visar att motsvarande tidsfunktioner inte går mot noll och att de saknar gränsvärde ($\cos t$ och $\sin t$).

- Lösning till 1.8

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\sigma(t)$$

- Lösning till 1.9

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s^2 - s + 1)}$$
$$|u(t)| \rightarrow 0, |y(t)| \rightarrow \infty \text{ då } t \rightarrow \infty$$

• Lösning till 1.10

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_2(t) = \frac{2N}{3}$$

• Lösning till 1.11

$$t_r = 2\tau \ln 3 \approx 2.2\tau \quad (\text{oberoende av dödtiden})$$

• Lösning till 1.12

a)

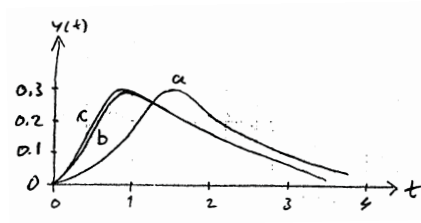
$$y(t) = \frac{1}{2}(\sigma(t) - \sigma(t-1)) - (e^{-t}\sigma(t) - e^{-(t-1)}\sigma(t-1)) + \frac{1}{2}(e^{-2t}\sigma(t) - e^{-2(t-1)}\sigma(t-1))$$

b)

$$y(t) = 5(\sigma(t) - \sigma(t-0.1)) - 10(e^{-t}\sigma(t) - e^{-0.1(t-0.1)}\sigma(t-0.1)) + 5(e^{-2t}\sigma(t) - e^{-2(t-0.1)}\sigma(t-0.1))$$

c)

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$



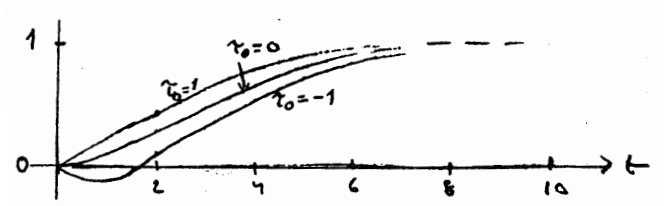
• Lösning till 1.13

$$e^{-t}, e^{-2t}, \sin \omega t, \cos \omega t \text{ finns i } y(t).$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \\ \angle G(j\omega) &= -\arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

• Lösning till 1.14

$$\begin{aligned} \tau_0 = 1 &\Rightarrow y(t) = 1 - (1 + t/4)e^{-t/2} \\ \tau_0 = 0 &\Rightarrow y(t) = 1 - (1 + t/2)e^{-t/2} \\ \tau_0 = -1 &\Rightarrow y(t) = 1 - (1 + 3t/4)e^{-t/2} \end{aligned}$$



• Lösning till 1.15

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1.74e^{-4.3s}}{1 + 12s}$$

• Lösning till 1.16

Om

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)^2}$$

matas med insignalen $u(t) = 3 \sin(2t) - e^{-t} \cos(0.5t)$ blir utsignalen

$$y(t) = 3|G(j2)| \sin(2t + \angle G(j2))$$

där

$$|G(j2)| = \frac{1}{(1 + (0.5 \cdot 2)^2)} = 0.5$$

och

$$\angle G(j2) = -2 \arctan 0.5 \cdot 2 = -\pi/2$$

dvs $y(t)$ blir

$$y(t) = 1.5 \sin(2t - \pi/2)$$

Notera att $e^{-t} \cos(0.5t)$ inte ger upphov till något värde i stationärtillståndet eftersom denna del går mot noll då t går mot oändligheten.

• Lösning till 1.17

a)

$$Y(s) = \frac{G_1(s)(G_2(s) - 1)U(s) - G_2(s)(G_1(s) + 1)V(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

b)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{s}{s^2 + 2s + 2} \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = -\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

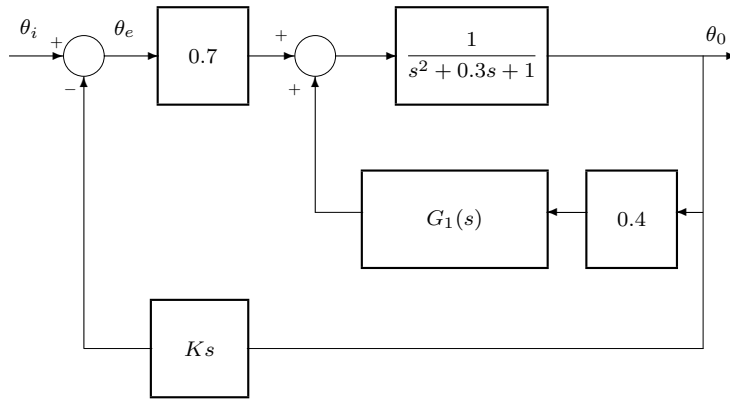
c)

$$y(t) = -e^{-t}(\cos t + 2 \sin t)\sigma(t)$$

• Lösning till 1.18

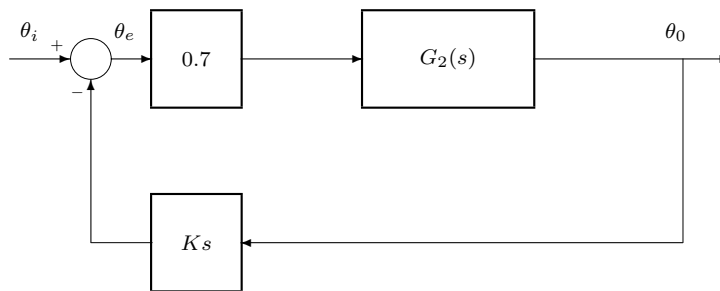
Bestäm överföringsfunktionen $\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}$ genom blockschematransformationer.

Återkoppling ger att $G_1(s)$ enligt figur blir



$$G_1(s) = \frac{-1}{\frac{1}{1+2s}} = \frac{-1}{1 + 0.5 \frac{1}{1+2s}} = \frac{-1}{1 + 2s + 0.5} = \frac{-1}{2s + 1.5} = \frac{-0.5}{s + 0.75}$$

På samma sätt fås $G_2(s)$ enligt figur som



$$G_2(s) = \frac{1}{\frac{s^2 + 0.3s + 1}{1 + \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} \cdot 0.4 \frac{0.5}{s + 0.75}}} = \frac{s + 0.75}{(s^2 + 0.3s + 1)(s + 0.75) + 0.2} = \frac{s + 0.75}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95}$$

Slutligen fås $\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}$ genom ytterligare återkoppling

$$\begin{aligned} \frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} &= \frac{0.7G_2(s)}{1 + 0.7G_2(s)Ks} = \frac{0.7 \frac{(s + 0.75)}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95}}{1 + 0.7 \frac{(s + 0.75)}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95} Ks} \\ &= \frac{0.7(s + 0.75)}{s^3 + (1.05 + 0.7K)s^2 + (1.225 + 0.525K)s + 0.95} \end{aligned}$$

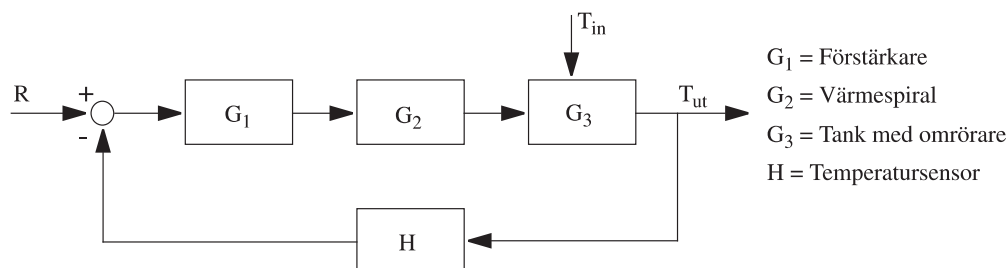
Kretsförstärkningen är

$$L(s) = 0.7G_2(s)Ks = 0.7 \frac{(s + 0.75)}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95} Ks$$

• Lösning till 1.19

Störningen är temperaturen på det ingående vattnet T_{in} . Se i övrigt nedanstående blockschema, där vi kan notera att

det är G_3 som representerar själva processen som ska regleras. Förstärkaren fungerar både som jämförare och som en P-regulator, där börvärdet ges av spänningen på potentiometern. Värmespiralen är aktuatoren som effektuerar styrsignalen.

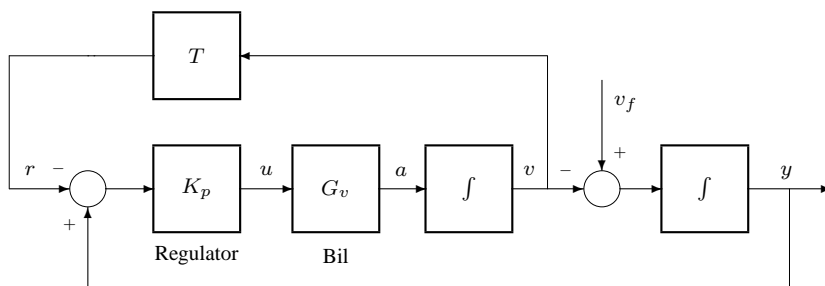


• Lösning till 1.20

Nedanstående blockschema ger lösningen, där vi speciellt noterar att börvärdet r , det önskade avståndet, beror av hastigheten v , vilket ger en extra återkoppling. Integrationssymbolen införs för att integrera fram hastigheten v från accelerationen, och avståndet $y = \int (v_f - v) dt$.

Den framförvarande bilens förändringar i hastighet är störningen som kan innebära avståndsvariationer som regulatorn försöker att kompensera.

Notera också den positiva återkopplingen, d v s ett ökat avstånd kräver en ökad acceleration, men däremot dyker det upp ett minustecken när avståndet y ska tas fram. Ett regelsystem innehåller i allmänhet en multiplikation med -1 någonstans i återkopplingsslingan, oftast i jämföraren mellan börvärde och ärvärde ($r - y$).



• Lösning till 1.21

a)

$$2\dot{y}(t) + 4y(t) = 8u(t)$$

- Överföringsfunktion: Laplacetransformation ger

$$\begin{aligned} 2sY(s) + 4Y(s) &= 8U(s) \\ Y(s)(4 + 2s) &= 8U(s) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{4 + 2s} = \frac{4}{2 + s} = \frac{2}{1 + 0.5s}$$

- pol: $s = -2$; inga nollställen
- tidskonstant: $T = 0.5$ sekunder

- *statisk förstärkning*: $K = 2$

- *viktfunction*: Den får vi genom att inverstransformera överföringsfunktionen, t.ex. med hjälp av formelsamlingen.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 4e^{-2t}$$

- *impulssvar*: Insignalen är i detta fall $u(t) = u_0\delta(t)$ vilket transformeras till $U(s) = u_0$. Utsignalen blir då

$$y(t) = g(t)u_0 = 4u_0e^{-2t}$$

- *stegsvar*: Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4u_0}{s(s+2)}\right\} \\ &= \frac{4u_0}{2}(1 - e^{-2t}) \\ &= 2u_0(1 - e^{-2t}) \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2u_0 = K \cdot u_0$.

b)

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t)$$

- *Överföringsfunktion*:
Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{0.5}{1 + \frac{5}{6}s + \frac{1}{6}s^2}$$

- *poler*: $s^2 + 5s + 6 = 0$ ger poler $s_1 = -2$ och $s = -3$; inga nollställen
- *tidskonstant*: $T_1 = 0.5, T_2 = \frac{1}{3}$
- *statisk förstärkning*: $K = 0.5$
- *stegsvar*: Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3u_0}{s(s+2)} - \frac{3u_0}{s(s+3)}\right\} \\ &= 3u_0\left(0.5(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\right) \\ &= u_0\left(0.5 - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}\right) \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.5u_0 = K \cdot u_0$.

c)

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$$

- *Överföringsfunktion*:
Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 6s + 9} = \frac{\frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3}s)}{(1 + \frac{1}{3}s)^2}$$

- *poler*: $(s + 3)^2 = 0$ ger poler $s_{1,2} = -3$;
nollställen: $2s + 3 = 0$ ger nollställe: $s = -\frac{3}{2}$
- *tidskonstant*: täljare: $T = \frac{2}{3}$; nämnare: $T_{1,2} = \frac{1}{3}$
- *statisk förstärkning*: $K = \frac{1}{3}$

- *stegsvar*: Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \rightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2u_0}{s(s+3)} - \frac{3u_0}{s(s+3)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2u_0}{s(s+3)} - \frac{u_0}{3s} + \frac{u_0}{3} \frac{1}{s+3} + u_0 \frac{1}{(s+3)^2}\right\} \\ &= \frac{2u_0}{3}(1 - e^{-3t}) - \frac{u_0}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} + u_0te^{-3t} \\ &= \frac{u_0}{3}(1 - e^{-3t}) + u_0te^{-3t} \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{u_0}{3} = K \cdot u_0$, eftersom e^{-3t} går snabbare mot noll än t går mot oändligheten.

d)

$$2\ddot{y}(t) + 4y(t) + 4\dot{u}(t) - 8u(t) = 0$$

- *Överföringsfunktion*:

Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8 - 4s}{2s + 4} = 2 \frac{(2 - s)}{(2 + s)} = 2 \frac{(1 - 0.5s)}{(1 + 0.5s)}$$

- *pol*: $2 + s = 0$ ger polen $s = -2$;
nollställe: $2 - s = 0$ ger nollställe: $s = 2$
- *tidskonstant*: nämnare: $T = 0.5$
- *statisk förstärkning*: $K = 2$
- *stegsvar*: Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \rightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2u_0}{s} + \frac{8u_0}{s(s+2)}\right\} \\ &= -2u_0 + 4u_0(1 - e^{-2t}) \\ &= 2u_0(1 - 2e^{-2t}) \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2u_0 = K \cdot u_0$.

- Lösning till 1.22

n/a

- Lösning till 1.23

- a) Insignal/Utsignalrelationen är given med hjälp av differentialoperatoren p . Detta motsvarar följande överföringsfunktion i Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Denna överföringsfunktion kan jämföras med den generella modellen för ett andra ordningens system.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Identifiering av de respektiva variablerna ger:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \zeta &= \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \\ K &= \frac{\frac{1}{m}}{\omega_n^2} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ökning av k leder till snabbare, mindre dämpat system med mindre stationär förstärkning.

Ökning av m leder till långsammare (ω_n) och mindre dämpat system.

Ökning av b leder till ett bättre dämpat system.

b) Enligt formler (2.26) och (2.27) i boken gäller:

$$\begin{aligned}\omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \\ a &= \omega_n \zeta = \frac{b}{2m}\end{aligned}$$

Med hjälp av dessa variabler kan överföringsfunktionen $G(s)$ även skrivas som

$$G(s) = \frac{K(a^2 + \omega_d^2)}{(s + a)^2 + \omega_d^2}$$

Processens poler kan nu beräknas genom att sätta nämnarpolynomet lika med noll.

$$s^2 + 2as + a^2 + \omega_d^2 = 0$$

Då fås polerna till

$$s_{1,2} = -a \pm j\omega_d$$

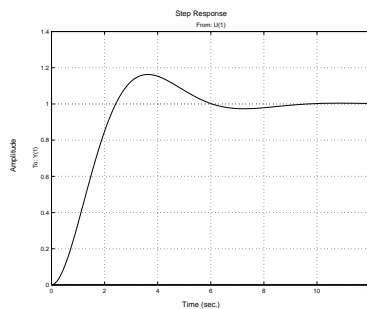
Detta innebär att a och ω_d anger det komplexa polparets real- ($-a$) och imaginärdel ($\pm\omega_d$).

Stegsvaret för systemet då $b = m = k = 1$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

medför att

$$\begin{aligned}\omega_n &= 1 \\ \zeta &= \frac{1}{2} \\ K &= 1\end{aligned}$$



• Lösning till 1.24

Pol diagram A: två poler i vänster halvplanet (VHP) innebär monotont ökande stegsvar med bestämt slutvärde, dvs stegsvar C.

Pol diagram B: komplexkonjugerat polpar i VHP innebär stegsvar med avklingande svängningar kring slutvärdet, dvs stegsvar A.

Pol diagram C: en pol i VHP och en i origo innebär stegsvar som asymptotiskt närmar sig kt för något k , dvs stegsvar B.

• Lösning till 1.25

Följande system är givet

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1 + Ts} = \frac{K}{T} \frac{e^{-sT_d}}{s + 1/T}$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{där} \quad U(s) = 1$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)} \theta(t-T_d) \quad \text{där} \quad y_0 = K/T$$

$\theta(t)$ är stegfunktionen. Ytan under impulssvaret är

$$A = \int_0^\infty y(t) dt = \int_{T_d}^\infty y_0 e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)} dt = y_0 \left[\frac{e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)}}{-\frac{1}{T}} \right]_{T_d}^\infty = y_0 T = K$$

Tidskonstanten T kan därför skattas genom $T = A/y_0$, dvs genom att dels mäta ytan A under impulssvaret och dels mäta y_0 vilket är värdet av $y(t)$ vid T_d enligt ovan.

Notera att ytan under impulssvaret är detsamma som gränsvärdet när tiden går mot oändligheten av stegsvaret, eftersom

$$A = \int_0^\infty y(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(\tau) d\tau = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) U(s), \quad \text{där} \quad U(s) = 1/s$$

Den näst sista likheten fås med slutvärdessatsen.

• Lösning till 1.26

I denna uppgift ska en andra ordningens process med två reella poler (tidskonstanter) approximeras av en första ordningens process. Detta är möjligt då de två tidskonstanterna är av olika storleksordning.

$$G_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+\tau s)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{1+\tau s}$$

Partialbråksuppdelning resulterar i

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{\frac{2}{1-\tau}}{1+s} - \frac{\frac{2\tau}{1-\tau}}{1+\tau s} \\ &= \frac{\frac{2}{1-\tau}}{1+s} - \frac{\frac{2}{1-\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{2}{1-\tau} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

Impuls- och stegsvar:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G_2(s)\} = g_2(t) \\ &= \frac{2}{1-\tau} \left(e^{-t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ y_s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{G_2(s)}{s} \right\} \\ &= \frac{2}{1-\tau} \left[(1 - e^{-t}) - \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \\ &= \frac{2}{1-\tau} \left[1 - \tau - e^{-t} + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \end{aligned}$$

Med $\tau = 0.01$ får vi

$$\begin{aligned} y_{i,0.01}(t) &= \frac{2}{1-0.01} [e^{-t} - e^{-100t}] \approx 2(e^{-t}) \\ y_{s,0.01}(t) &= \frac{2}{1-0.01} [1 - 0.01 - e^{-t} + 0.01e^{-100t}] \approx 2(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

och med $\tau = 100$

$$\begin{aligned} y_{i,100}(t) &= \frac{2}{1-100} [e^{-t} - e^{-0.01t}] \approx \frac{2}{100} (e^{-0.01t}) \\ y_{s,100}(t) &= \frac{2}{1-100} [1 - 100 - e^{-t} + 100e^{-0.01t}] \approx 2(1 - e^{-0.01t}) \end{aligned}$$

En generell första ordningens process har följande impuls- och stegsvar:

$$\begin{aligned}y_i &= \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \\y_s &= K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\end{aligned}$$

Den andra ordningens process kan därmed approximeras av följande första ordningens processer:

$$\begin{aligned}\tau = 0.01 & : G_1(s) = \frac{2}{1+s} \\ \tau = 100 & : G_1(s) = \frac{2}{1+\tau s} = \frac{2}{1+100s}\end{aligned}$$

Den långsammare tidskonstanten är alltså alltid dominerande och den snabbare tidskonstanten kan försummas om skillnaden mellan de två tidskonstanterna är tillräckligt stor.

• Lösning till 1.27

Låt $G(s)$ vara Laplacetransformen av viktfunctionen $g(t)$. Impulssvaret då ett extra nollställe i $s = -b$ inkluderas blir

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s+b)G(s)\} = g'(t) + bg(t).$$

Stegsvaret blir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+b)}{s}G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(1 + \frac{b}{s}\right)G(s)\right\} = g(t) + b \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Speciellt då $g(t) = te^{-t}$ fås

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{(s+b)G(s)\} &= -te^{-t} + e^{-t} + bte^{-t} = \{(b-1)t + 1\}e^{-t} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+b)}{s}G(s)\right\} &= te^{-t} + b \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = \{\text{partiell integration}\} \\ &= te^{-t} + b \left(\left[\frac{\tau e^{-\tau}}{-1} \right]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \right) \\ &= te^{-t} - bte^{-t} - be^{-t} + b \\ &= b - \{(b-1)t + b\}e^{-t}\end{aligned}$$

Notera att impulssvaret är derivatan av stegsvaret.

• Lösning till 1.28

a) Sökt $G(s) = \frac{V(s)}{U(s)}.$

Newtons lag ger ($ma = \Sigma F$)

$$\begin{aligned}m\dot{v}(t) &= u(t) - F_v(t) \\ m\dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) \\ \dot{v}(t) + \frac{b}{m}v(t) &= \frac{1}{m}u(t)\end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$sV(s) + \frac{b}{m}V(s) = \frac{1}{m}U(s)$$

vilket innebär att sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s + b/m} = \frac{1}{s + 0.25}$$

b) Beräkna $v(t)$ för $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$

Skriv $u(t)$ med hjälp av stegfunktioner

$$u(t) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) + 1\theta(t-1) = t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1)$$

Laplacetransformering av $u(t)$ ger

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{(1 - e^{-s})}{s^2}$$

$V(s)$ fås som produkten av $G(s)$ och $U(s)$ enligt

$$V(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s + 0.25)} \frac{(1 - e^{-s})}{s^2}$$

Genom att partialbråksuppdelar $V(s)$ kan dess inverstransform enkelt fås ur tabell. Därför ansätts

$$V(s) = \frac{(1 - e^{-s})}{s^2(s + 0.25)} = (1 - e^{-s}) \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 0.25} \right)$$

Koefficienterna identifieras genom att göra liknämngt och sätta likhet mellan vänster och höger led. Då fås (C kan bestämmas med handpåläggning)

$$As(s + 0.25) + B(s + 0.25) + Cs^2 \equiv 1$$

Sålunda måste följande vara uppfyllt

$$\begin{cases} s^2 : A + C = 0 \\ s^1 : 0.25A + B = 0 \\ s^0 : 0.25B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -16 \\ B = 4 \\ C = 16 \end{cases}$$

$V(s)$ kan därför skrivas som

$$\begin{aligned} V(s) &= (1 - e^{-s}) \left(-\frac{16}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{16}{s+0.25} \right) = \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{1}{s^2} - 4 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.25} \right) \right) - e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} - 4 \left(\frac{1}{s} - \frac{4}{s+0.25} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$v(t) = 4 \{ (t - 4(1 - e^{-0.25t}))\theta(t) - (t - 1 - 4(1 - e^{-0.25(t-1)}))\theta(t-1) \}$$

c) Beräkna $v(t)$ för $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/h & 0 \leq t \leq h \\ 0 & t > h \end{cases}$

Skriv $u(t)$ med hjälp av stegfunktioner

$$u(t) = \frac{1}{H}(\theta(t) - \theta(t-h))$$

Laplacetransformering av $u(t)$ ger

$$U(s) = \frac{1}{H} \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

och $V(s)$ fås som

$$\begin{aligned} V(s) &= G(s)U(s) = \frac{1}{s+0.25} \cdot \frac{1}{H} \frac{1-e^{-hs}}{s} = \frac{1}{H}(1-e^{-hs})\left(\frac{4}{s} - \frac{4}{s+0.25}\right) \\ &= \frac{4}{H} \left\{ \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.25}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.25}\right)e^{-hs} \right\} \end{aligned}$$

där näst sista likheten är en partialbråksuppdelning av $V(s)$ på samma sätt som ovan. Båda koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering av $V(s)$ ger

$$v(t) = \frac{4}{H} \{ (1 - e^{-0.25t})\theta(t) - (1 - e^{-0.25(t-h)})\theta(t-h) \}$$

För att studera vad som händer då $h \rightarrow 0$ definieras $f(t) = 4(1 - e^{-0.25t})\theta(t)$. $v(t)$ kan då skrivas som

$$v(t) = \frac{f(t) - f(t-h)}{H}$$

Gränsvärdet då $h \rightarrow 0$ (från höger) är detsamma som definitionen av derivata, dvs

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} v(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

Därför kan gränsvärdet beräknas genom att derivera $f(t)$. Då fås

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} v(t) &= \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \{ 4(1 - e^{-0.25t})\theta(t) \} \\ &= e^{-0.25t}\theta(t) + 4(1 - e^{-0.25t})\delta(t) \\ &= e^{-0.25t}\theta(t) + 4 \underbrace{(1 - e^0)}_0 \delta(t) \\ &= e^{-0.25t}\theta(t) \end{aligned}$$

Om $u(t)$ i stället är en impuls $u(t) = \delta(t)$ fås

$$V(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+0.25}$$

vars inverslaplacetransform är

$$v(t) = e^{-0.25t}\theta(t)$$

Gränsvärdet då $h \rightarrow 0$ för insignalen ovan och impulsfunktionssvaret ger med andra ord samma resultat.

- d) Linjära system innebär att signaler kan superponeras (adderas). Detta innebär att utseendemässigt ser alla signaler lika ut men värdena skiljer sig åt med en konstant faktor. I fallet då man utgår från hastigheten $v(t) = 20 \text{ m/s}$ och styrsignalen förändras lika mycket som innan, innebär detta att alla utsignaler är samma förutom att 20 m/s måste adderas till signalen $v(t)$.

• Lösning till 1.29

För ett fjäder-massa system är den hastighetsproportionella dämpningen inte alltför stor (beroende på friktion, luftmotstånd, mm). b är i alla fall större än eller lika med noll. Är systemet friktionsfritt så är $b = 0$.

a) Vi låter

$$u(t) = \sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Differentialekvationen Laplacetransformeras och vi får

$$sV(s) + bV(s) + \frac{1}{s}V(s) = U(s)$$

$$s^2V(s) + bsV(s) + V(s) = sU(s)$$

Överföringsfunktionen blir således

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + bs + 1}$$

och stegsvaret fås med hjälp av formelsamlingen som

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + bs + 1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}} e^{-\frac{b}{2}t} \sin \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} t \end{aligned}$$

b)

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + bs + 1}$$

Systemets poler ges av nämnarpolynomen

$$s^2 + bs + 1 = 0$$

och blir således

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$$

Systemet är alltså stabilt för alla $b > 0$.

Processen har ett nollställe i origo. Detta kan tolkas som att stegsvaret av $G(s)$ är derivatan av stegsvaret av systemet

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + bs + 1}$$

c)

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} V(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + bs + 1} \frac{1}{s} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jämförelse med resultatet i uppgift a) visar att detta stämmer enbart då $b > 0$, dvs. då svängningens amplitud avtar ($e^{-\frac{b}{2}t}$). I så fall går hastigheten mot noll och därmed positionen mot ett ändligt värde.

• Lösning till 1.30

Laplacetransformering av

$$\ddot{y} - y(t) = u(t) - b\dot{u}(t)$$

resulterar i

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - Y(s) = U(s) - b\{sU(s) - u(0)\}$$

Stegsvaret studeras allmänt i fallet då $u(0) = 0$ och $\dot{y}(0) = 0$. Då fås

$$(s^2 - 1)Y(s) = sy(0) + \frac{1}{s} - b = \frac{s^2y(0) - bs + 1}{s}$$

och följaktligen

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 y(0) - bs + 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{s^2 y(0) - (bs - 1)}{s(s + 1)(s - 1)} \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{y(0) + b + 1}{2} \frac{1}{s + 1} + \frac{y(0) - b + 1}{2} \frac{1}{s - 1} \end{aligned}$$

Den sista likheten är en partialbråksuppdelning av $Y(s)$. Koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \left(-1 + \frac{y(0) + b + 1}{2} e^{-t} + \frac{y(0) - b + 1}{2} e^t \right) \theta(t)$$

vilket resulterar i

- a) $y(0) = 0, b = 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + e^{-t})\theta(t)$
- b) $y(0) = 1, b = 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + 1.5e^{-t} + 0.5e^t)\theta(t)$
- c) $y(0) = 0, b \neq 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + \frac{b+1}{2}e^{-t} + \frac{-b+1}{2}e^t)\theta(t)$

Den instabila polen cancelleras bort i fallet när $y(0) - b + 1 = 0$.

• Lösning till 1.31

Insignal till termometern är $u(t) = kt$, där $k = 0.1$. Laplacetransformering ger $U(s) = 0.1/s^2$. Termometern har tidskonstant $T=20$ sekunder, vilket motsvarar en överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1 + 20s}$$

Felvisningen $\Delta T(t)$ är skillnaden mellan verklig och mätt temperatur, vilket innebär

$$\begin{aligned} \Delta T(s) &= U(s) - G(s)U(s) = (1 - G(s))U(s) \\ &= \left(1 - \frac{1}{1 + 20s}\right) \frac{0.1}{s^2} = \frac{1 + 20s - 1}{1 + 20s} \frac{0.1}{s^2} = \frac{0.1 \cdot 20s}{s^2(1 + 20s)} = \frac{2}{s(1 + 20s)} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{40}{1 + 20s} \end{aligned}$$

Den sista likheten fås genom partialbråksuppdelning. Koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering ger

$$\Delta T(t) = 2(1 - e^{-t/20})\theta(t)$$

och den stationära felvisningen blir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(t) = 2$$

Detta resultat kan alternativt erhållas också genom att tillämpa slutvärdessatsen på $\Delta T(s)$.

• Lösning till 1.32

Ur figurerna fås

- a) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$, reella poler, inga nollställen i högra halvplanet.
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1.5$, reella poler, minst ett nollställe i högra halvplanet.
- c) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$, komplexkonjugerat polpar och gradtal i nämnare som är större än 2.

Slutvärdessatsen ger $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s)$

Överföringsfunktion	$\lim_{s \rightarrow 0} Y(s)$	Poler	Nollställe
(1)	2	$-0.5, -3$	2
(2)	2	$-0.5, -2/3$	–
(3)	1	$-0.4 \pm \sqrt{0.84}$	–
(4)	1.5	$-2/3, -0.5$	–
(5)	1.5	$-2, -3$	2
(6)	1	$-1/3, -0.05 \pm \sqrt{0.9975}$	–

Uteslutningsmetoden ger

- a) och (2)
- b) och (5)
- c) och (6)

• Lösning till 1.33

10.2 Tillståndsmodeller

• Lösning till 2.1

a)

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) + u(t) = -x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

b)

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) - 5u(t) = 0$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = \frac{1}{2}(-2y(t) - 3\dot{y}(t) + 5u(t)) = -x_1(t) - \frac{3}{2}x_2(t) + \frac{5}{2}u(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}4\dot{v}(t) + 5v(t) &= 2u(t) \\ \dot{y}(t) + 2y(t) &= 5v(t)\end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v(t) \\x_2(t) &= y(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{v}(t) = \frac{1}{4}(-5v(t) + 2u(t)) = -\frac{5}{4}x_1(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = 5v(t) - 2y(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -5/4 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) + 2v(t) &= 3u(t) \\ \ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 4y(t) &= 5v(t)\end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= v(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t) \\x_3(t) &= y(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{v}(t) = -2v(t) + 3u(t) = -2x_1(t) + 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 5v(t) - 4y(t) - 7\dot{y}(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t) - 7x_3(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

e)

$$y^3(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= y^3(t) = -4y(t) - 3\dot{y}(t) - \ddot{y}(t) + 2u(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + 2u(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

f)

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{u}(t) + 10u(t)$$

Låt exempelvis

$$x_1(t) = y(t) - 2u(t)$$

Derivering ger

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) - 2\dot{u}(t) = -3y(t) + 10u(t) = -3(y(t) - 2u(t)) + 4u(t) = -3x_1(t) + 4u(t)$$

vilket är samma som

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x(t) + 4u(t) \\ y(t) &= x(t) + 2u(t)\end{aligned}$$

• Lösning till 2.2

a)

$$G(s) = \frac{4s+8}{2s^2+6s+4} = \frac{2s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{0}{s+2}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Notera att det sker en pol/nolställeskancellation för $s = -2$. Tillståndsformen kan därför reduceras med bibehållet in/ut-signal samband.

b)

$$G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+4)} = \frac{3/2}{s+2} - \frac{3/2}{s+4}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

c)

$$G(s) = \frac{s+1}{s+3} + \frac{2}{s+4} = \frac{s+3}{s+3} - \frac{2}{s+3} + \frac{2}{s+4} = 1 - \frac{2}{s+3} + \frac{2}{s+4}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)\end{aligned}$$

d)

$$G(s) = \frac{2s^2 + 10s + 4}{s^2 + 3s + 1} = \frac{2(s^2 + 3s + 1)}{s^2 + 3s + 1} + \frac{4s + 2}{s^2 + 3s + 1} = 2 + \frac{4s + 2}{s^2 + 3s + 1}$$

Tillståndsmodell på styrbar kanonisk form:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + 2u(t)\end{aligned}$$

e)

$$y^3(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Laplace-transformering ger (det är möjligt att direkt välja tillstånd som i uppgift 2.1. Vi väljer dock här att Laplace-transformera först):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 4}$$

Tillståndsmodell på styrbar kanonisk form:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

• Lösning till 2.3

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{4}{1+2s} X(s) \\ X(s) &= \frac{1.5}{1+0.5s} U(s)\end{aligned}$$

a) Motsvarande differentialekvationer är:

$$\begin{aligned}2\dot{y}(t) + y(t) &= 4x(t) \\ 0.5\dot{x}(t) + x(t) &= 1.5u(t)\end{aligned}$$

Låt tillstånden vara

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = \frac{1}{2}(-y(t) + 4x(t)) = -\frac{1}{2}x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{x}(t) = \frac{1}{0.5}(-x(t) + 1.5u(t)) = -2x_2(t) + 3u(t)\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1/2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

b)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{4}{1+2s} \frac{1.5}{1+0.5s} = \frac{6}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{6}{s^2 + 2.5s + 1}$$

Tilståndsmodell på observerbar kanonisk form:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

c)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{4}{s+0.5} - \frac{4}{s+2}$$

Tilståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

• Lösning till 2.4

Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A , B , C och D matriser ger:

$$\begin{aligned}G(s) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 0 \\ -3 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-4)} \begin{bmatrix} 2(s-4) + 3 & -(s-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{2s-5-2s+4}{(s-2)(s-4)} + 1 = -\frac{1}{(s-2)(s-4)} + 1 = \frac{s^2-8s+7}{(s-2)(s-4)}\end{aligned}$$

• Lösning till 2.5

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) + \sigma_1 \dot{\theta}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) &= n\delta(t) \\ \ddot{x}(t) + \sigma_2 \dot{\theta}(t) + \alpha_2 \dot{x}(t) - g\theta(t) &= g\delta(t)\end{aligned}$$

a) Välj exempelvis tillstånden:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \theta(t) \\ x_2(t) &= \dot{\theta}(t) \\ x_3(t) &= x(t) \\ x_4(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned}$$

och låt $u(t) = \delta(t)$ och $y(t) = \theta(t)$. Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = -\sigma_1 \dot{\theta}(t) - \alpha_1 \dot{x}(t) + n\delta(t) = -\sigma_1 x_2(t) - \alpha_1 x_4(t) + nu(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \dot{x}(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \ddot{x}(t) = -\sigma_2 \dot{\theta}(t) - \alpha_2 \dot{x}(t) + g\theta(t) + g\delta(t) = gx_1(t) - \sigma_2 x_2(t) - \alpha_2 x_4(t) + gu(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & -\sigma_2 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ g \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

- b) Överföringsfunktionen kan beräknas med $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. När dimensionen är större eller lika med tre blir det dock ganska mödosamt att invertera matrisen $(sI - A)$ för hand. Vi löser därför detta tal genom att Laplacetransformera båda differentialekvationerna och sedan eliminera $X(s)$.

$$\begin{aligned} s^2\theta(s) + \sigma_1 s\theta(s) + \alpha_1 sx(s) &= n\delta(s) &\Rightarrow sx(s) &= \frac{1}{\alpha_1} (-s^2\theta(s) - \sigma_1 s\theta(s) + n\delta(s)) \\ s^2x(s) + \sigma_2 s\theta(s) + \alpha_2 sx(s) - g\theta(s) &= g\delta(s) &\Rightarrow sx(s)(s + \alpha_2) &= -\sigma_2 s\theta(s) + g\theta(s) + g\delta(s) \end{aligned}$$

Stoppa in den första ekvationen i den andra ger:

$$\frac{1}{\alpha_1} (-s^2\theta(s) - \sigma_1 s\theta(s) + n\delta(s)) (s + \alpha_2) = -\sigma_2 s\theta(s) + g\theta(s) + g\delta(s)$$

vilket är ekvivalent med

$$-s^3\theta(s) - (\sigma_1 + \alpha_2)s^2\theta(s) - \sigma_1\alpha_2 s\theta(s) + ns\delta(s) + n\alpha_2\delta(s) = -\alpha_1\sigma_2 s\theta(s) + g\alpha_1\theta(s) + g\alpha_1\delta(s)$$

eller

$$(s^3 + (\sigma_1 + \alpha_2)s^2 + (\alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2)s + g\alpha_1)\theta(s) = (ns + n\alpha_2 - g\alpha_1)\delta(s)$$

Överföringsfunktionen blir:

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{ns + n\alpha_2 - g\alpha_1}{s^3 + (\sigma_1 + \alpha_2)s^2 + (\alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2)s + g\alpha_1}$$

• Lösning till 2.6

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) - y(t) + 2x(t) &= u(t) \end{aligned}$$

- a) Låt tillstånden vara

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = -2x(t) + y(t) + u(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1] x(t) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A , B , C och D matriser ger:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{-2+s+1}{(s+1)(s-1)} = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

- b) Stabiliteten hos tillståndsmodellen bestäms av polerna som ges av $\det(sI - A) = 0$, vilket i detta fall blir $s = -1$ och $s = 1$, vilket implicerar att systemet är instabilt ty en pol i högra halvplanet.

Stabiliteten hos överföringsfunktionen ges av polerna, vilket i ovanstående fall med kancerad pol i högra halvplanet innebär ett stabilt system ty den återstående polen ligger i vänstra halvplanet.

Skillnaden är att tillståndsmodellen är en intern representation av systemet där samtliga poler ingår. Överföringsfunktioner beskriver enbart relationen mellan insignal till utsignal och därmed inte alltid systemets fullständiga dynamiska beteende, som illustrerats i detta exempel genom cancellationen av den instabila polen.

• Lösning till 2.7

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} sX(s) &= -X(s) + 2U(s) \\ sY(s) &= Y(s) - X(s) + U(s) \end{aligned}$$

x löses ut ur första ekvationen och sättes in den andra. Då fås

$$(s-1)Y(s) = -\frac{2U(s)}{s+1} + U(s) = \frac{-2+s+1}{s+1}U(s) = \frac{s-1}{s+1}U(s)$$

Sökt överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+1)}$$

Det är möjligt att kancellera bort polen och nollstället i $s = 1$, vilket resulterar i den in-utsignal stabila överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Emellertid är systemet inte internt stabilt eftersom den instabila polen förkortas bort.

• Lösning till 2.8

Laplacetransformering av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -2y + x + u \end{aligned}$$

resulterar i

$$sX(s) = -X(s) + U(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$sY(s) = -2Y(s) + X(s) + U(s)$$

Insättes första uttrycket i andra fås

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + U(s) = \frac{s+2}{s+1}U(s)$$

dvs

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Systemet är stabilt ty pol i vänstra halvplanet.

Rampsvaret blir

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) \quad \text{där} \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

vilket, efter partialbråksuppdelning, resulterar i

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

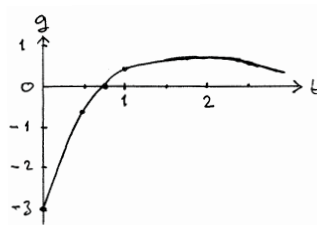
Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})\theta(t)$$

• Lösning till 2.9

$$g(t) = (4t - 3)e^{-t}\sigma(t)$$

Eftersom $g(t)$ är begränsad för $t \geq 0$ och $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ är systemet stabilt.



• Lösning till 2.10

Ur figuren fås:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{1+5s}X_2(s) \\ X_2(s) &= \frac{1}{1+2s}(10U(s) - 0.6X_1(s)) \\ Y(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

Motsvarande differentialekvationer är:

$$\begin{aligned} x_1(t) + 5\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ x_2(t) + 2\dot{x}_2(t) &= 10u(t) - 0.6x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.2x_1(t) + 0.2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.3x_1(t) - 0.5x_2(t) + 5u(t) \end{aligned}$$

som på matrisform blir

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ -0.3 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Eigenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$, vilket ger:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} = 0$$

eller

$$(\lambda + 0.2)(\lambda + 0.5) + 0.06 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 0.7\lambda + 0.16 = 0$$

som har lösningen

$$\lambda = -0.35 \pm j\sqrt{0.0375}$$

Systemet är stabilt ty båda eigenvärdena (polerna) ligger i vänstra halvplanet.

• Lösning till 2.11

$$\begin{aligned}\ddot{r}(t) + \frac{k}{r^2(t)} - r(t)\omega^2(t) &= u_1(t) \\ \frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt}(r^2(t)\omega(t)) &= u_2(t)\end{aligned}$$

a) Genom att utföra deriveringen i den andra ekvationen fås:

$$\frac{1}{r(t)}(2r(t)\dot{r}(t)\omega(t) + r^2(t)\dot{\omega}(t)) = u_2(t) \Rightarrow \dot{\omega}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\omega(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t)$$

Välj exempelvis tillstånden

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) \\ x_2(t) &= \dot{r}(t) \\ x_3(t) &= \omega(t)\end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{r}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{r}(t) = -\frac{k}{r^2(t)} + r(t)\omega^2(t) + u_1(t) = -\frac{k}{x_1^2(t)} + x_1(t)x_3^2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}(t) = -\frac{2x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{1}{x_1(t)}u_2(t)\end{aligned}$$

eller på (olinjär) matrisform (ingen utsignal angiven)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{x_1^2(t)} + x_1(t)x_3^2(t) + u_1(t) \\ -\frac{2x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{1}{x_1(t)}u_2(t) \end{bmatrix}$$

b) Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

där $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta u(t) = u(t) - u_0$ och

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

x_0 och u_0 är arbetspunkten, vilket i detta exempel är en jämviktpunkt vilket innebär att $f(x_0, u_0) = 0$. Den sistnämnda relationen ger:

$$\begin{aligned}x_{20} &= 0 \\ -\frac{k}{x_{10}^2} + x_{10}x_{30}^2 + u_{10} &= 0 \\ -\frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}} + \frac{1}{x_{10}}u_{20} &= 0\end{aligned}$$

vilket med $u_{10} = u_{20} = 0$ ger följande värden på x_{10} och x_{20} :

$$\begin{aligned} x_{20} &= 0 \\ -\frac{k}{x_{10}^2} + x_{10}x_{30}^2 + u_{10} &= 0 \Rightarrow x_{10} = (k/x_{30}^2)^{1/3} \\ -\frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}} + \frac{1}{x_{10}}u_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Beräkning av A och B ger (där $x_{30} = \omega_0$):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2k/x_1^3 + x_3^2 & 0 & 2x_1x_3 \\ 2x_2x_3/x_1^2 - u_2/x_1^2 & -2x_3/x_1 & -2x_2/x_1 \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2x_{10}x_{30} \\ 0 & -2x_{30}/x_{10} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2(k\omega_0)^{1/3} \\ 0 & -2k^{-1/3}\omega_0^{5/3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/x_1 \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & (k/\omega_0^2)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

Eigenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$ vilket ger

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & -2(k\omega_0)^{1/3} \\ 0 & 2k^{-1/3}\omega_0^{5/3} & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

vilket är ekvivalent med

$$\lambda(\lambda^2 + 4\omega_0^2) - 3\omega_0^2\lambda = \lambda^3 + \omega_0^2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

dvs egenvärdena är $\lambda = 0$, $\lambda = \pm j\omega_0$. Insättning av $\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ i ovanstående ger lösningen.

• Lösning till 2.12

a) Ur figur fås bakre hjulens hastighet $v_b(t) = v \cos u(t)$. Definitionerna på sinus och cosinus ger:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_b(t) \sin \varphi(t) = v \cos \varphi(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{x}_2 &= v \sin(u(t) + \varphi(t)) \\ \dot{x}_3 &= v \cos(u(t) + \varphi(t)) \end{aligned}$$

där

$$\sin \varphi(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\ell}$$

b) Linjärisering för små vinklar $u(t)$ och $\varphi(t)$ innebär att $\cos u(t) \approx 1$ och $\sin(u(t) + \varphi(t)) \approx u(t) + \varphi(t)$, vilket ger:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\ell} = -\frac{v}{\ell}x_1(t) + \frac{v}{\ell}x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= vu(t) + v\varphi(t) = -\frac{v}{\ell}x_1(t) + \frac{v}{\ell}x_2(t) + vu(t) \\ \dot{x}_3 &= v \end{aligned}$$

Vid beräkning av överföringsfunktionerna noteras att tredje ekvationen enbart beror av den konstanta hastigheten v medans den första och andra ekvationen inte beror av $x_3(t)$. Om vi därför väljer

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

vilket är matrisformen när sista tillståndet negligeras, så kan överföringsfunktionerna beräknas med $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, där $G_{ux_1}(s)$ fås med $y(t) = x_1(t) = C_1x(t) = [1 \ 0]x(t)$ och $G_{ux_2}(s)$ fås med $y(t) = x_2(t) = C_2x(t) = [0 \ 1]x(t)$, vilket blir

$$\begin{aligned} G_{ux_1}(s) &= [1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \\ &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{v}{\ell} & -\frac{v}{\ell} \\ \frac{v}{\ell} & s - \frac{v}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s - \frac{v}{\ell})(s + \frac{v}{\ell}) + \frac{v^2}{\ell^2}} [1 \ 0] \begin{bmatrix} s - \frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & s + \frac{v}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{v^2}{\ell} \\ vs + \frac{v^2}{\ell} \end{bmatrix} = \frac{v^2/\ell}{s^2} \\ G_{ux_2}(s) &= \frac{1}{s^2} [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{v^2}{\ell} \\ vs + \frac{v^2}{\ell} \end{bmatrix} = \frac{vs + v^2/\ell}{s^2} \end{aligned}$$

Insatt med siffrorna $\ell = 5$ och $v = 8$ blir

$$\begin{aligned} G_{ux_1}(s) &= \frac{12,8}{s^2} \\ G_{ux_2}(s) &= \frac{8(s+1,6)}{s^2} \end{aligned}$$

Båda polernas placering i origo innebär att systemet är en dubbelintegrator, vilket är rimligt ty ändring i styrvinkel ger upphov till en acceleration av trucken. Förklaringen till nollstället $s = -v/\ell$ i den senare överföringsfunktionen kommer sig av att framhjulen är styrbara, vilket ger ett extra bidrag pga hjulens vridning.

• Lösning till 2.13

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) + p(t) &= q^3(t)u(t) \\ \varepsilon \dot{q}(t) + q(t) &= e^{q(t)}u^2(t) \\ y(t) &= p(t)q(t) \end{aligned}$$

a) Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= p(t) \\ x_2(t) &= q(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{p}(t) = -p(t) + q^3(t)u(t) = -x_1(t) + x_2^3(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{q}(t) = -\frac{1}{\varepsilon}q(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{q(t)}u^2(t) = -\frac{1}{\varepsilon}x_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_2(t)}u^2(t) \end{aligned}$$

eller på (olinjär) matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + x_2^3(t)u(t) \\ -\frac{1}{\varepsilon}x_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_2(t)}u^2(t) \end{bmatrix} = f(x, u)$$

Utsignalen blir $y(t) = p(t)q(t) = x_1(t)x_2(t) = g(x_1, x_2)$.

Då $\varepsilon = 0$ ändras dynamiken så snabbt hos $x_2(t) = q(t)$ att ändringen kan antas inträffa ögonblickligen. Detta får till följd att vi kan betrakta relationen $q(t) = e^{q(t)}u^2(t)$ eller $x_2(t) = e^{x_2(t)}u^2(t)$ som statisk och antalet tillståndsvariabler reduceras till enbart en som ges av ekvationen

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t)u(t)$$

där $x_2(t) = e^{x_2(t)}u^2(t)$.

b) Arbetspunkten (p_0, q_0, u_0) där $p_0 = x_{10} = 0.5$ är ett stationärtillstånd fås genom att sätta alla derivator till noll i tillståndsformen. Detta resulterar i

$$\begin{aligned} -x_{10} + x_{20}^3 u_0 &= 0 \\ -x_{20} + e^{x_{20}} u_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{x_{10}}{x_{20}^3} \\ e^{x_{20}} &= \frac{x_{20}}{u_0^2} = \frac{x_{20}^7}{x_{10}^2} \end{aligned}$$

eller insatt med värden $e^{x_{20}} = 4x_{20}^7$, som enligt uppgift har lösningen $x_{20} = 0.9380$. Detta resulterar i $u_0 = \frac{x_{10}}{x_{20}^3} = 0.6058$.

c) Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$\Delta \dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

där $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta u(t) = u(t) - u_0$ och

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}$$

Beräkning av A , B och C ger

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} -1 & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{x_{20}} u_0^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix}$$

Eigenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix} = 0$$

dvs $\lambda = 1$ och $\lambda = -\frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) = -\frac{0.0620}{\varepsilon}$. Då $\varepsilon \rightarrow 0$ går $\lambda \rightarrow -\infty$.

d) Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A , B , C och D matriser resulterar i

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1 & -3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \begin{bmatrix} x_{20}(s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20})) & 3x_{20}^3 u_0 + x_{10}(s + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon} e^{x_{20}} u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{x_{20}^4 (s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20})) + \frac{6}{\varepsilon} x_{20}^3 e^{x_{20}} u_0^2 + \frac{2}{\varepsilon} x_{10}(s + 1) e^{x_{20}} u_0}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} = \frac{x_{20}^4 (s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20})) + \frac{6}{\varepsilon} x_{20}^4 + \frac{2}{\varepsilon} (s+1) x_{20}^4}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \\ &= x_{20}^4 \frac{((1 + \frac{2}{\varepsilon})s + \frac{1}{\varepsilon}(9 - x_{20}))}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} = x_{20}^4 \frac{((2 + \varepsilon)s + (9 - x_{20}))}{(s+1)(\varepsilon s + (1 - x_{20}))} \end{aligned}$$

Tidskonstanterna blir 1, $\frac{\varepsilon}{1-x_{20}}$ och $\frac{2+\varepsilon}{9-x_{20}}$. Då $\varepsilon \rightarrow 0$ reduceras alltså systemets dimension med 1, motsvarande egenvärde går mot ∞ och tidskonstanten mot 0 vilket innebär ett statiskt samband.

Notera att $G(s)$ har ett nollställe i $s = -\frac{9-x_{20}}{2+\varepsilon}$ som blir $s = -\frac{9-x_{20}}{2}$ då $\varepsilon \rightarrow 0$. Anledningen till att detta nollställe är kvar då $\varepsilon \rightarrow 0$ är att $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ där $x_2(t)$ är en statisk funktion av $u(t)$. Denna direktterm i utsignalen $y(t)$ visar sig med ett nollställe i överföringsfunktionen $G(s)$.

• Lösning till 2.14

Lösningen till en modell på tillståndsform är

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}BU(s)\}$$

Då $u(t)$ är en impuls, dvs $U(s) = 1$, och $y(t) = \sin t$ blir resultatet

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(C(sI - A)^{-1}B) = \sin t$$

eller vid Laplacetransformering

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Vidare gäller att systemet är av andra ordningen samt att $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ enligt uppgift. Vi kan därför ansätta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Vi får därmed att

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2+1} &= C(sI - A)^{-1}B = [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -a_1 & s - a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s(s-a_2)-a_1} [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} s - a_2 & 1 \\ a_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 - a_2s - a_1} [c_1(s - a_2) + c_2a_1 \ c_1 + c_2s] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{b_1c_1(s-a_2) + a_1b_1c_2 + b_2c_1 + b_2c_2s}{s^2 - a_2s - a_1} \end{aligned}$$

Följande relationer måste därför vara uppfyllda

$$\begin{cases} b_1c_1 + b_2c_2 = 0 \\ -a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2 + b_2c_1 = 1 \\ -a_2 = 0 \\ -a_1 = 1 \end{cases}$$

Detta ger lösningarna $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ samt

$$\begin{cases} b_1c_1 + b_2c_2 = 0 \\ -b_1c_2 + b_2c_1 = 1 \end{cases}$$

Detta är ett ekvationssystem med 4 obekanta och 2 ekvationer, vilket leder till en mängd olika lösningar. Exempelvis kan C väljas till $C = [1 \ 0]$, vilket resulterar i $B = [0 \ 1]^T$.

• Lösning till 2.15

Dynamiken hos massan fås genom att utnyttja sig av rörelsemomentbalansen som säger att

$$\begin{bmatrix} \text{Ändring av} \\ \text{rörelsemängdsmoment} \\ \text{per tidsenhet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Drivande} \\ \text{krafter} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Belastande} \\ \text{krafter} \end{bmatrix}$$

Då underlaget är friktionsfritt finns inga belastande krafter. Om $y(t)$ anger massans position från väggen fås följande dynamik ($y(t)$ och $F(t)$ är riktade bort från väggen):

$$m\ddot{y}(t) = F(t)$$

Väljer vi exempelvis tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

ger derivering att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = F(t)/m \end{aligned}$$

Om $u(t) = F(t)$ blir detta på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Kroppen befinner sig vid tidpunkten $t = 0$ på ett avstånd $y(t) = x_1(t) = 1$ meter från väggen med hastigheten $\dot{y}(t) = x_2(t) = 1$ meter per sekund, dvs initialtillståndet är

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kroppen skall styras in mot väggen så att den efter $t_f = 10$ sekunder befinner sig exakt vid väggen, $x_1(t_f) = 0$, med noll i hastighet, $x_2(t_f) = 0$, dvs

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen till tillståndsekvationerna är

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau$$

där

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Styrsignalen är enligt figur

$$u(t) = -1\{\sigma(t) - \sigma(t-t_1)\} + \{\sigma(t-t_2) - \sigma(t-t_f)\}$$

Denna styrsignal insatt i lösningen ovan där $t = t_f$ ger på matrisform

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} (-1)d\tau + \int_{t_1}^{t_f} \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} 1d\tau$$

där integralen har delats upp i de två delarna där styrsignalen är -1 respektive 1 . Matrismultiplikering samt lösning av integralen elementvis ger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + t_f x_2(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} t_f \tau - \tau^2/2 \\ \tau \end{bmatrix}_0^{t_1} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} t_f \tau - \tau^2/2 \\ \tau \end{bmatrix}_{t_2}^{t_f}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + t_f x_2(0) - \frac{1}{m}(t_f t_1 - t_1^2/2) + \frac{1}{m}(t_f^2 - t_f^2/2 - t_f t_2 + t_2^2/2) \\ x_2(0) - \frac{1}{m}t_1 + \frac{1}{m}(t_f - t_2) \end{bmatrix}$$

Insatt med värdet $t_f = 10$ fås ekvationerna

$$\begin{cases} 11 - 10t_1 + t_1^2/2 + 50 - 10t_2 + t_2^2/2 &= 0 \\ 11 - t_1 - t_2 &= 0 \end{cases}$$

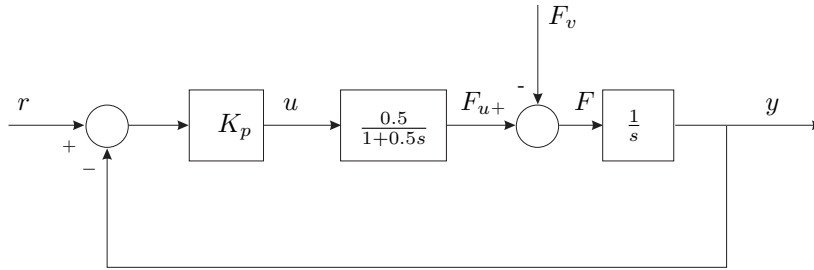
Ur andra ekvationen fås $t_1 = 11 - t_2$, vilket insatt i första ekvationen efter förenkling ger

$$t_2^2 - 11t_2 + 11.5 = 0$$

med lösning $t_2 = 5.5 \pm \sqrt{18.75} = 9.83$ sekunder. t_1 blir då $t_1 = 11 - 5.5\sqrt{18.75} = 1.17$ sekunder.

• Lösning till 2.16

a) Följande blockschema ger lösningen.



Tillståndsmodell för den öppna icke-reglerade processen och styrdon

Processen är given av

$$\dot{y}(t) = F(t) = F_u(t) - F_v(t)$$

där $F_u(t)$ är utsignal från styrdonet med överföringsfunktion

$$G_u(s) = \frac{F_u(s)}{U(s)} = \frac{0.5}{1 + 0.5s}$$

Motsvarande differentialekvationer är

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5u(t) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= F_u(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{F}_u(t) = -2F_u(t) + u(t) = -2x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = F_u(t) - F_v(t) = x_1(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Tillståndsmodell för det återkopplade systemet

I detta fall tillkommer $u(t) = r(t) - y(t)$, vilket resulterar i

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5(r(t) - y(t)) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5(r(t) - y(t)) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

Låt som ovan tillstånden vara

$$\begin{aligned} x_1(t) &= F_u(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{F}_u(t) = -2F_u(t) + r(t) - y(t) = -2x_1(t) - x_2(t) + r(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = F_u(t) - F_v(t) = x_1(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

b) Öppna icke-reglerade processen

Polerna ges av $\det(sI - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+2) = 0$$

dvs polerna ligger i $s = 0$ och $s = -2$.

Övergångsmatrisen ges av

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0.5(1 - e^{-2t}) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Initialtillstånden $y(0) = x_2(0) = 1$ och $\dot{y}(0) = F(0) = F_u(0) - F_v(0) = x_1(0) - 0 = 1$ tillsammans med alla insignaler som är noll ger en lösning till tillståndsekvationen

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0.5(1 - e^{-2t}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0.5(3 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Återkopplade processen

Polerna ges av $\det(SI - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+2) + 1 = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$$

dvs dubbelpol i $s = -1$.

Övergångsmatrisen ges av

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+1-1}{(s+1)^2} & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s+1+1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lösning till tillståndsekvationen blir i detta fall (samma initialtillstånd som tidigare)

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ (1+2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

• Lösning till 2.17

Insignalen $u(t)$ kan betraktas som om den vore genererad som utsignalen från en modell $G_u(s)$ som drivs av en impulssignal $\delta(t)$. Om $G_u(s)$ beskrivs av en tillståndsrepresentation A_u, B_u, C_u , och A, B, C och D är den ursprungliga tillståndsrepresentationen, erhålls följande utökade tillståndsmodell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BC_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix} \delta(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C \\ DC_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tidssvaret kan därefter som vanligt beräknas med (initialtillstånden antas vara noll)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x(0) \\ x_u(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \Phi(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix} \delta(\tau) d\tau = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix}$$

där

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((sI - \begin{bmatrix} A & BC_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix}) \right)^{-1} \right\}$$

Då $u(t) = t\sigma(t)$ blir $U(s) = \frac{1}{s^2}$, dvs $G_u(s) = \frac{U(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{s^2}$ vilket blir $s^2U(s) = \delta(s)$ eller i tidsplanet $\ddot{u}(t) = \delta(t)$. Välj exempelvis

$$\begin{aligned} x_{u1}(t) &= u(t) \\ x_{u2}(t) &= \dot{u}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u1}(t) &= \dot{u}(t) = x_{u2}(t) \\ \dot{x}_{u2}(t) &= \ddot{u}(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\dot{x}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

Då $u(t) = \cos(\omega t)\sigma(t)$ blir $U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, dvs $G_u(s) = \frac{U(s)}{\delta(s)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ vilket blir $s^2U(s) + \omega^2U(s) = s\delta(s)$ eller i tidsplanet $\ddot{u}(t) + \omega^2u(t) = \dot{\delta}(t)$. Välj exempelvis

$$\begin{aligned} x_{u1}(t) &= u(t) \\ x_{u2}(t) &= \dot{u}(t) - \delta(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u1}(t) &= \dot{u}(t) = x_{u2}(t) + \delta(t) \\ \dot{x}_{u2}(t) &= \ddot{u}(t) - \dot{\delta}(t) = -\omega^2u(t) = \omega^2x_{u1}(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\dot{x}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} x_u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

• Lösning till 2.18

Systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

regleras med en PI-regulator

$$U(s) = \frac{K_i + K_p s}{s} (R(s) - Y(s))$$

som i tidsplanet blir

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Om vi inför ett tillstånd

$$x_e(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

fås

$$\dot{x}_e(t) = r(t) - y(t)$$

och vi kan skriva

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i x_e(t) = K_p(r(t) - Cx(t)) + K_i x_e(t)$$

Vi får därför

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + B(K_p(r(t) - Cx(t)) + K_i x_e(t)) = (A - BK_p C)x(t) + K_i x_e(t) + BK_p r(t) \\ \dot{x}_e(t) &= r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

vilket kan skrivas på tillståndsform som

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK_p C & K_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10.3 Modellering

• Lösning till 3.1

a) Vid jämvikt gäller

$$k(y_0 - \ell_0) = mg + u_0$$

dvs

$$y_0 = \frac{mg + k\ell_0 + u_0}{k}$$

b) Avvikelser från jämviktspunkten påverkar massan ($\Delta u = u - u_0$, $\Delta y = y - y_0$)

$$m\ddot{y} = \Delta u - k\Delta y - b\dot{y}$$

Utnyttja att $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}$ och $\Delta\dot{y} = \dot{y}$. Laplacetransformering ger

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Relativ dämpning $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$ och odämpad egenvinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• Lösning till 3.2

Newtons lag ($ma = \Sigma F$) ger

$$m\ddot{y} = b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y)$$

Notera att vid jämvikt, $y = 0$, är fjädern uttänjd med längden $y_0 = -mg/k$ pga tyngdkraften mg

Laplacetransformering ger

$$ms^2Y(s) = b(sX(s) - sY(s)) + k(X(s) - Y(s))$$

dvs

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)X(s).$$

Den sökta överföringsfunktion blir

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

• Lösning till 3.3

a)

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - k(y - u), \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{ms^2 + bs + k}$$

b)

$$b\dot{y} = -k(y - u), \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{bs + k}$$

c)

$$b(\dot{z} - \dot{y}) + k_1(y - u) = 0$$

$$b(\dot{z} - \dot{y}) + k_2z = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{(k_1 + k_2)bs + k_1k_2}$$

• Lösning till 3.4

$$(a) \frac{\Omega(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Js+B}, \frac{\Phi(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

$$(b) \frac{\Omega_1(s)}{\tau(s)} = \frac{Js^2+D}{BJs^2+DJs+BD}, \frac{\Omega(s)}{\tau(s)} = \frac{D}{BJs^2+DJs+BD}.$$

• Lösning till 3.5

Låt y vara sträckan bilen rört sig. Massan m flyttar sig sträckan x relativt y , dvs $x + y$ med absolut referenspunkt enligt figur

a) Newtons lag ($ma = \Sigma F$) ger

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = b(\dot{y} - (\dot{x} + \dot{y})) + k(y - (x + y))$$

dvs med $a = \ddot{y}$

$$m(\ddot{x} + a) = -b\dot{x} - kx$$

Laplacetransformering

$$m(s^2 X(s) + A(s)) = -bsX(s) - kX(s)$$

dvs

$$\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)X(s) = -A(s).$$

Sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = -\frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

b) Identifiering $s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ger att $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ och $2\zeta\omega_0 = b/m$, dvs $b = 2\zeta\omega_0 \cdot m = 2\zeta\sqrt{k/m} \cdot m = 2\zeta\sqrt{km}$. Med numeriska värden fås $b = 2\sqrt{10 \cdot 0,1} = 2$

$$G(s) = -\frac{1}{s^2 + 20s + 100} = -\frac{1}{(s + 10)^2}$$

Stegsvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{1}{(s + 10)^2} \frac{1}{s} = -\frac{1/100}{s} + \frac{1/100}{s + 10} + \frac{1/10}{(s + 10)^2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = -\frac{1}{100}(1 - e^{-10t} - 10te^{-10t})\theta(t)$$

• Lösning till 3.6

Newtons lag för de båda delsystemen ger

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= b(\dot{y}_1 - \dot{y}) + k(y_1 - y) \\ m_1\ddot{y}_1 &= -b(\dot{y}_1 - \dot{y}) - k(y_1 - y) + k_1(u - y_1) \end{aligned}$$

Laplaceformering ger

$$\begin{aligned}A(s)Y(s) &= B(s)Y_1(s) \\ A_1(s)Y_1(s) &= B(s)Y(s) + k_1U(s)\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}A(s) &= ms^2 + bs + k \\ A_1(s) &= m_1s^2 + bs + k + k_1 \\ B(s) &= bs + k\end{aligned}$$

Genom att multiplicera första ekvationen med $A_1(s)$ och den andra med $B(s)$ erhålls

$$A(s)A_1(s)Y(s) = B(s)A_1(s)Y_1(s) = B^2(s)Y(s) + k_1B(s)U(s)$$

vilket slutligen ger överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1B(s)}{A(s)A_1(s) - B^2(s)}$$

• Lösning till 3.7

Newtons lag för roterande system kan skrivas som

$$\frac{d}{dt}(\text{rörelsemängdsmoment} / \text{tidsenhet}) = \sum \text{yttre moment}$$

Rörelsemängdsmomentet H för systemet är givet, $H = J\dot{\omega} + J_0\dot{\phi}$. Det yttre momentet bestäms av tyngdpunktens obalansvinkel ϕ , $T_d = mgh \sin \phi$, dvs tyngdkraftens momentgivande komponent. Balansekvationen för små vinklar blir då

$$\frac{dH}{dt} = J\dot{\omega} + J_0\ddot{\phi} = mgh \sin \phi \approx mgh\phi$$

Svänghjulets moment är styrsignal

$$u = J\dot{\omega}$$

Vi får ekvationen

$$u + J_0\ddot{\phi} = mgh\phi$$

Välj tillståndsvariabler $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$. Det ger tillståndsmodellen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_0}(mghx_1 - u) = 1 \cdot (5 \cdot 10 \cdot 0.5 x_1 - u) \\ &= 25x_1 - u\end{aligned}$$

I matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= Cx = [1 \quad 0]x\end{aligned}$$

Ta fram överföringsfunktion genom Laplacetransform av $u + J_0\ddot{\phi} = mgh\phi$

$$(s^2 - 25)\Phi(s) = -U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{-1}{(s+5)(s-5)}$$

vilket visar att systemet har en instabil pol i $s = 5$.

$G(s)$ kan också fås genom tillståndsmodellen, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

• Lösning till 3.8

Krafter som verkar på massan

$$\begin{aligned} F_1 &= mg \\ F_2 &= 2 \cdot 10^3 y + 10^6 y^3 && \text{(fjäder)} \\ F_3 &= b \cdot \dot{y} && \text{(dämpning)} \\ F_4 &= u && \text{(extern kraft)} \end{aligned}$$

a) Kraftjämvikt

$$m\ddot{y} = mg - (2 \cdot 10^3 y + 10^6 y^3) - b\dot{y} + u$$

Jämviktsläge då $u(t) = 0$, sätt $\ddot{y} = \dot{y} = 0$

$$0 = mg - 2 \cdot 10^3 y_0 - 10^6 y_0^3 \Rightarrow y_0 = 0.0323$$

b) Linjärisera $f(y) = 2 \cdot 10^3 y + 10^6 y^3$ runt arbetspunkten y_0

$$\begin{aligned} f(y) &\approx f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0) = f(y_0) + \Delta f \\ \Delta f &= (2 \cdot 10^3 + 10^6 \cdot 3y_0^2) \Delta y = 5.13 \cdot 10^3 \Delta y \end{aligned}$$

För små variationer runt arbetspunkten

$$\begin{aligned} m\Delta\ddot{y} &= -(2 \cdot 10^3 + 10^6 \cdot 3y_0^2) \Delta y - b\Delta\dot{y} + \Delta u \\ \Delta\ddot{y} + \frac{b}{m} \Delta\dot{y} + \frac{5.13 \cdot 10^3}{m} \Delta y &= \frac{\Delta u}{m} \\ \Delta\ddot{y} + 10\Delta\dot{y} + 513\Delta y &= 0.1\Delta u \end{aligned}$$

Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{0.1}{(s^2 + 10s + 513)}$$

Resonansfrekvens $\omega_n = \sqrt{513} = 22.6 \text{ rad/s}$ och relativ dämpning $\zeta = 0.22$

• Lösning till 3.9

För att markera att positioner och hastigheter är avvikelser från arbetspunkten ($y_{10} = 0, y_{20} = 0$ etc.) ersätts y_1 och y_2 med $\Delta y_1 = y_1 - y_{10}$ och $\Delta y_2 = y_2 - y_{20}$ etc. Notera att loket kör med konstant hastighet vilket innebär att lokets avvikelser från arbetspunkten är noll ($\Delta y_{Lok} = y_{Lok} - y_{Lok0} = 0$).

$$\Delta\dot{y}_1 = \Delta v_1, \quad \Delta\dot{y}_2 = \Delta v_2$$

$$\begin{aligned} m\Delta\dot{v}_1 &= -k\Delta y_1 - b\Delta v_1 + k(\Delta y_2 - \Delta y_1) + b(\Delta v_2 - \Delta v_1) \\ m\Delta\dot{v}_2 &= -k(\Delta y_2 - \Delta y_1) - b(\Delta v_2 - \Delta v_1) + F \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y}_1 \\ \Delta\dot{v}_1 \\ \Delta\dot{y}_2 \\ \Delta\dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & -\frac{2b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} = \Delta y_1 - \Delta y_2$$

• Lösning till 3.10

a)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ m\ell^2\dot{\omega} &= mg\ell \sin \theta - m\ell \cos \theta u\end{aligned}$$

Tillståndsmodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{u}{\ell} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Linjärisera kring (θ_0, u_0)

Arbetspunkt:

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0 = 0 \quad \dot{\omega}_0 = g \sin \theta_0 - u_0 \cos \theta_0 = 0$$

vilket ger

$$u_0 = g \tan \theta_0$$

Den linjära modellen blir

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} \cos \theta_0 + \frac{u_0}{\ell} \sin \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \cos \theta_0 \end{bmatrix} \Delta u$$

b)

$\theta_0 = 0$ och $\theta_0 = \pi$ motsvarar $u_0 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \mp \frac{g}{\ell} & s \end{bmatrix} = s^2 \mp \frac{g}{\ell} = 0 \Rightarrow s = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}}, & \theta_0 = 0 \\ \pm j \sqrt{\frac{g}{\ell}}, & \theta_0 = \pi \end{cases}$$

• Lösning till 3.11

a) Spänningsdelning ger att

$$Y(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}} \cdot U(s)$$

dvs sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}} = \frac{(s + \frac{1}{R_1 C})}{(s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C})}$$

Nollstället ges av

$$s = -\frac{1}{R_1 C}$$

Polen ges av

$$s = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -\frac{1}{R_1 C} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Om $R_1 \neq 0$ ligger polen till vänster om nollstället i det komplexa talplanet.

Stegsvaret ges av (använd PBU)

$$Y(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \frac{1}{s} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{1}{s} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{1}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \theta(t)$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} = \frac{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} + \frac{\frac{1}{R_1 C} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} = 1 - \frac{\frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \delta(t) - \left(\frac{1}{R_2 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \theta(t)$$

(Fås alternativt genom att derivera stegsvaret)

C beter sig som ledare initialt, vilket innebär att en impuls i u implicerar en impuls i y .

b) Kirchoff ger

$$\begin{aligned} -U + RI + \frac{1}{sC} I &= 0 \\ -U + RI + Y + RI &= 0 \end{aligned}$$

I kan exempelvis lösas ut ur första ekvationen och sättas in i den andra, så fås

$$Y = U - 2RI = U - 2R \frac{U}{R + \frac{1}{sC}} = \left(1 - \frac{2s}{s + \frac{1}{RC}} \right) U = -\frac{\left(s - \frac{1}{RC} \right)}{\left(s + \frac{1}{RC} \right)} U$$

Sökt överföringsfunktion är, med $RC = 2$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{(s - 0.5)}{(s + 0.5)}$$

Nollstället ges av

$$s = 0.5$$

Polen

$$s = -0.5$$

Stegsvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{(s - 0.5)}{(s + 0.5)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s + 0.5}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = (1 - 2e^{-0.5t})\theta(t)$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{(s - 0.5)}{s + 0.5} = -\frac{(s + 0.5)}{s + 0.5} + \frac{1}{s + 0.5}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = -\delta(t) + e^{-0.5t}\theta(t).$$

(Fås alternativt genom att derivera stegsvaret)

- Lösning till 3.12
- Kirchoff's 2:a lag ger

$$\begin{aligned}U &= RI + E \\U &= RI + \alpha RI + Y \\Y &= -A(s)E\end{aligned}$$

Löses E ut ur första ekvationen och I ur den andra fås

$$Y(s) = -A(s)(U(s) - RI(s)) = -A(s)\left(U(s) - R \frac{U(s) - Y(s)}{R(\alpha + 1)}\right)$$

dvs

$$\left(1 + \frac{A(s)}{\alpha + 1}\right)Y(s) = -A(s)\left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right)U(s)$$

Sökt överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{\alpha}{\alpha + 1}A(s)}{1 + \frac{A(s)}{\alpha + 1}}$$

Med $A(s) = \frac{K}{1 + Ts}$ fås

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{\alpha}{\alpha + 1}\left(\frac{K}{1 + Ts}\right)}{1 + \frac{1}{\alpha + 1}\left(\frac{K}{1 + Ts}\right)} = -\frac{\alpha K}{(\alpha + 1)(1 + Ts) + K} = -\frac{\frac{\alpha K}{1 + \alpha + K}}{1 + \frac{(\alpha + 1)T}{1 + \alpha + K}s}$$

Då $K \rightarrow \infty$ fås överföringsfunktionen $\frac{Y(s)}{U(s)} = -\alpha$, dvs $Y(t) = -\alpha U(t)$. Tidskonstanten τ är

$$\tau = \frac{(\alpha + 1)T}{1 + \alpha + K}$$

För stora värden på K kan τ approximeras med

$$\tau \approx \frac{(\alpha + 1)T}{K}$$

Speciellt för $\alpha = 0$ fås $\tau = T/K$, och då $\alpha = 1$ fås $\tau \approx 2T/K$ vilket med insatta värden ger $\tau \approx 2 \cdot 0.01/10^5 = 2 \cdot 10^{-7}$.

- Lösning till 3.13

Med införandet av beteckningen x för utgångsspänningen från den första operationsförstärkaren gäller att

$$X(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}U(s)$$

där Z_1 (impedansen i framkopplingen) och Z_2 (impedansen i återkopplingen) för den första operationsförstärkaren bestäms av sambandena

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R_3(R_1 + \frac{1}{C_1 s})} \\ \frac{1}{Z_2} &= \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_4 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_4(R_2 + \frac{1}{C_2 s})}\end{aligned}$$

För den andra operationsförstärkaren erhålls på samma sätt direkt

$$Y(s) = -\frac{R_6}{R_5}X(s)$$

Eliminering av X ger följande resultat för hela kretsen

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{-R_6}{R_5} \cdot \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_4(R_2 + \frac{1}{C_2s})}{R_4 + R_2 + \frac{1}{C_2s}} \cdot \frac{R_3 + R_1 + \frac{1}{C_1s}}{R_3(R_1 + \frac{1}{C_1s})} \\ &= \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_2R_4(1 + \frac{1}{R_2C_2s})}{(R_2 + R_4)(1 + \frac{1}{(R_2+R_4)C_2s})} \cdot \frac{(R_1 + R_3)(1 + \frac{1}{(R_1+R_3)C_1s})}{R_1R_3(1 + \frac{1}{R_1C_1s})} \\ &= \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1R_3} \cdot \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{(s + \frac{1}{R_2C_2})(s + \frac{1}{(R_1+R_3)C_1})}{(s + \frac{1}{(R_2+R_4)C_2})(s + \frac{1}{R_1C_1})}\end{aligned}$$

Parametrarna $K, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ ges av detta uttryck.

• Lösning till 3.14

a) Materialbalans ger att

$$\text{upplagrad molmängd} = \text{molflöde in} - \text{molflöde ut}$$

dvs

$$\dot{n} = \dot{n}_1 - \dot{n}_2 \quad (1)$$

Allmänna gaslagen gäller i tanken

$$pV = nR\theta \quad \text{eller} \quad n = \frac{pV}{R\theta}$$

där θ är konstant (isotermiska förhållanden) och V är konstant.

Derivering medför att

$$\dot{n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{pV}{R\theta} \right) = \frac{V}{R\theta} \dot{p}$$

Tillsammans med ekvation (1) och

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= k_1 \sqrt{p_1 - p} \\ \dot{n}_2 &= k_2 u^2 \sqrt{p - p_2}\end{aligned}$$

fås

$$\dot{p} = f(p, u) = \frac{R\theta}{V} \left(k_1 \sqrt{p_1 - p} - k_2 u^2 \sqrt{p - p_2} \right)$$

b) Stationärvärden ges av $f(p_0, u_0) = 0$, dvs

$$k_1 \sqrt{p_{10} - p_0} - k_2 u_0^2 \sqrt{p_0 - p_{20}} = 0$$

vilket medför att

$$u_0 = \sqrt{\frac{k_1 \sqrt{p_{10} - p_0}}{k_2 \sqrt{p_0 - p_{20}}}}$$

c) Linjärisering innebär att

$$\dot{p} = f(p, u) \approx f(p_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_0, u_0} (p - p_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{p_0, u_0} (u - u_0)$$

$$\text{Låt } a = -\left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_0, u_0} \quad \text{och} \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{p_0, u_0}, \quad \Delta p = p - p_0, \quad \Delta u = u - u_0$$

Eftersom $\Delta \dot{p} = \dot{p}$ fås

$$\Delta \dot{p} = -a\Delta p + b\Delta u$$

Laplacetransformering ger att

$$s\Delta P(s) = -a\Delta P(s) + b\Delta U(s)$$

dvs

$$(s + a)\Delta P(s) = b\Delta U(s)$$

eller

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s + a}$$

a och b blir

$$\begin{aligned} a &= -\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p_0, u_0} = -\frac{1}{2} \frac{R\theta}{V} \left(-k_1 \frac{1}{\sqrt{p_{10} - p_0}} - k_2 u_0^2 \frac{1}{\sqrt{p_0 - p_{20}}} \right) \\ b &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p_0, u_0} = -2 \frac{R\theta}{V} k_2 u_0 \sqrt{p_0 - p_{20}} \end{aligned}$$

Sökt överföringsfunktion med värden är därför

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-2 \frac{R\theta}{V} k_2 u_0 \sqrt{p_0 - p_{20}}}{s + \frac{1}{2} \frac{R\theta}{V} \left(k_1 \frac{1}{\sqrt{p_{10} - p_0}} + k_2 u_0^2 \frac{1}{\sqrt{p_0 - p_{20}}} \right)}$$

vilket med u_0 ovan ger

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-2 \frac{R\theta}{V} \sqrt{k_1 k_2 \sqrt{p_{10} - p_0} \sqrt{p_0 - p_{20}}}}{s + \frac{1}{2} \frac{R\theta}{V} \frac{k_1}{\sqrt{p_{10} - p_0}} \left(1 + \frac{(p_{10} - p_0)}{(p_0 - p_{20})} \right)}$$

• Lösning till 3.15

Allmänna gaslagen

$$pV = nR\theta$$

R = gaskonstant, n = antal mol, nR är konstant för en given gasmängd.

$$\text{Låt } \begin{cases} \Delta p &= p - p_0 \\ \Delta \theta &= \theta - \theta_0 \\ \Delta V &= V - V_0 \end{cases} \quad \text{vara avvikelser från önskad arbetspunkt, } p_0 = nR \frac{\theta_0}{V_0}$$

Serietutveckla, dvs linjärisera uttrycket för trycket

$$p \approx p_0 + \left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_{\theta_0, V_0} \underbrace{(\theta - \theta_0)}_{\Delta \theta} + \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{\theta_0, V_0} \underbrace{(V - V_0)}_{\Delta V}$$

För gascylindern gäller att $\frac{\partial p}{\partial \theta} = nR \frac{1}{V}$ samt $\frac{\partial p}{\partial V} = nR\theta \left(\frac{-1}{V^2} \right)$, dvs

$$\Delta p = \frac{nR}{V_0} \Delta \theta - \frac{nR\theta_0}{V_0^2} \Delta V$$

• Lösning till 3.16

För den tunna plåten gäller

$$\text{energiinnehåll} / \text{m}^2 = \rho c d \theta_1, \quad [\gamma / \text{m}^2]$$

Ändringen i energin fås genom Boltzmanns lag

$$\rho c d \frac{d\theta_1}{dt} = \sigma(\theta_0^4 - \theta_1^4)$$

Linjärisera kring arbetspunkten θ (ugn och plåt samma temperatur)

$$\begin{aligned}\Delta\theta_1 &= \theta_1 - \theta \\ \Delta\theta_0 &= \theta_0 - \theta\end{aligned}$$

$$\rho c d \frac{d\Delta\theta_1}{dt} = \sigma 4\theta^3 (\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1)$$

Laplacetransformering

$$\frac{\Delta\Theta_1(s)}{\Delta\Theta_0(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{där} \quad \tau = \frac{\rho c d}{4\sigma\theta^3}$$

Då arbetstemperaturen θ ökar blir systemet snabbare.

• Lösning till 3.17

$$\begin{aligned}E &= \text{Energiinnehåll} \quad [\text{J}] \\ V &= \text{Volym} \quad [\text{m}^3] \\ q &= \text{Flöde} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \\ \theta &= \text{Temperatur} \quad [\text{K}] \\ \rho &= \text{Densitet} \quad [\text{kg}/\text{m}^3] \\ c_p &= \text{Värmekapacitet} \quad 4.18 \text{ [kJ/kgK]}\end{aligned}$$

Ändring i upplagrad energi beror på volym och temperaturändring i tanken

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(V\rho c_p\theta_2) = \frac{dV}{dt}\rho c_p\theta_2 + V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt} = (q_1 - q_2)\rho c_p\theta_2 + V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt}$$

Ändringen kan även formuleras som skillnaden mellan tillförd och bortförd effekt

$$\frac{dE}{dt} = q_1\rho c_p\theta_1 - q_2\rho c_p\theta_2 + P$$

Kombineras uttrycken fås ett uttryck för systemdynamiken

$$\begin{cases} V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt} = -(q_1 - q_2)\rho c_p\theta_2 + (q_1\theta_1 - q_2\theta_2)\rho c_p + P \\ \frac{dV}{dt} = q_1 - q_2 \end{cases}$$

Dynamiken förenklas genom antagandet $q_1 = q_2 = q$, dvs V konstant

$$V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt} = q\rho c_p(\theta_1 - \theta_2) + P$$

a) Val av stationärpunkt ($\dot{\theta}_2 = 0$), $\theta_{10} = 20^\circ\text{C}$, $\theta_{20} = 40^\circ\text{C}$, dvs

$$P_0 + q\rho c_p(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = 0.01 \cdot 10^3 \cdot 4.18 \cdot 10^3 \cdot 20 = 8.4 \cdot 10^5 \text{ [W]}$$

b) Laplacetransformera

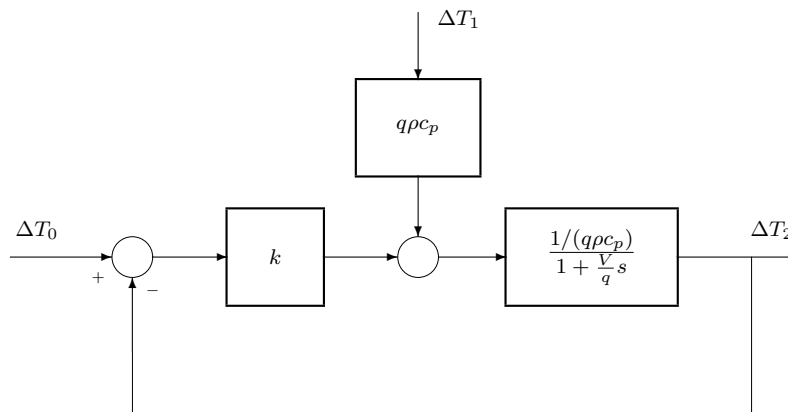
$$V\rho c_p s\Delta\Theta_2(s) = q\rho c_p(\Delta\Theta_1(s) - \Delta\Theta_2(s)) + \Delta P(s)$$

där $\Delta P(s) = k(\Delta\Theta_0(s) - \Delta\Theta_2(s))$

efter omflyttning

$$\Delta\Theta_2(s) = \frac{1}{q\rho c_p + (V\rho c_p)s} (q\rho c_p\Delta\Theta_1(s) + k(\Delta\Theta_0(s) - \Delta\Theta_2(s)))$$

Se blockschema på nästa sida.



- c) Givaren beskrivs med överföringsfunktionen $H(s) = \frac{1}{1 + 2s}$
Jämför med tidskonstanten i tanken

$$T_{\text{tank}} = \frac{V}{q} = 100 \text{ [sek]}$$

Temperaturgivarens dynamik är snabb i jämförelse med tankens dynamik, $T_{\text{tank}} \gg 2$. Givarens dynamik kan därför approximeras med en konstant.

• Lösning till 3.18

Vi vill studera det termiska energiflödet per areaenhet genom väggen. Energiflödet mellan omgivningen och ytskiktet ges av värmeövergångstalet α medan flödet mellan angränsande skikt bestäms av materialets värmekonduktivitet λ .

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ändring} \\ \text{av energi} \\ \text{per areaenhet} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Effekt} \\ \text{per areaenhet} \\ \text{in} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Effekt} \\ \text{per areaenhet} \\ \text{ut} \end{array} \right\}$$

För det första skiktet av väggen fås då

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\{c\rho dx_1\}}_{\text{Ändring av energi}} = \underbrace{\alpha u + \frac{\lambda}{d}x_2}_{\text{Effekt in}} - \underbrace{\alpha x_1 - \frac{\lambda}{d}x_1}_{\text{Effekt ut}} = \alpha(u_1 - x_1) + \frac{\lambda}{d}(x_2 - x_1)$$

Enligt uppgift är c, ρ konstanta och vi får

$$\dot{x}_1 = \left(-\frac{\alpha}{c\rho d} - \frac{\lambda}{c\rho d^2}\right)x_1 + \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_2 + \frac{\alpha}{c\rho d}u$$

På liknande sätt fås för resten av väggen

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_1 - \frac{2\lambda}{c\rho d^2}x_2 + \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_2 + \left(-\frac{\alpha}{c\rho d} - \frac{\lambda}{c\rho d^2}\right)x_3 \\ y &= \alpha x_3 \end{aligned}$$

Formulera på tillståndsform

$$\dot{x} = \frac{1}{cpd} \begin{bmatrix} -\alpha - \frac{\lambda}{d} & \frac{\lambda}{d} & 0 \\ \frac{\lambda}{d} & -\frac{2\lambda}{d} & \frac{\lambda}{d} \\ 0 & \frac{\lambda}{d} & -\alpha - \frac{\lambda}{d} \end{bmatrix} x + \frac{\alpha}{cpd} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\dot{x} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2.1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2.1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{1500} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x$$

• Lösning till 3.19

De krafter som verkar på flottören är

$$\begin{aligned} \uparrow F_1 &= A(u - y)\rho g && (\text{lyftkraft, undanträngd vattenmängd}) \\ \downarrow F_2 &= Ah(\rho/2)g && (Ah\rho/2 = \text{flottörans tyngd}) \\ \uparrow F_3 &= c(\dot{u} - \dot{y}) && (\text{dämpning}) \end{aligned}$$

a) Kraftjämvikt

$$m\ddot{y} = F_1 - F_2 + F_3$$

$$Ah\frac{\rho}{2}\ddot{y} = A(u - y)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g + c(\dot{u} - \dot{y})$$

b) Antag att systemet är i vila, dvs $\ddot{y} = \dot{y} = \dot{u} = 0$
Jämviktsnivåerna ges av

$$A(u_0 - y_0)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g = 0$$

$$\Rightarrow u_0 - y_0 = h/2$$

c) Små förändringar kring jämviktsläget $y = y_0 + \Delta y$, $u = u_0 + \Delta u$

Eftersom $\ddot{y} = \Delta\ddot{y}$, $\dot{y} = \Delta\dot{y}$ och $\dot{u} = \Delta\dot{u}$ fås

$$Ah\frac{\rho}{2}\Delta\ddot{y} = A(\Delta u - \Delta y)\rho g + c(\Delta\dot{u} - \Delta\dot{y}) + [A(u_0 - y_0)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g]$$

Valet att ligga runt jämviktsläget gör att sista parentesen blir noll, dvs man behöver inte ta hänsyn till u_0, y_0 , bara avvikelserna $\Delta u, \Delta y$.

$$\frac{Ah\rho}{2}\Delta\ddot{y} + c\Delta\dot{y} + A\rho g\Delta y = c\Delta\dot{u} + A\rho g\Delta u$$

Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{(cs + A\rho g)}{(\frac{Ah\rho}{2}s^2 + cs + A\rho g)} = \frac{1 + \frac{c}{A\rho g}s}{1 + \frac{c}{A\rho g}s + \frac{H}{2g}s^2}$$

$$d) \Delta x = \begin{bmatrix} -\frac{2c}{\rho h A} & -\frac{2g}{h} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u, \quad \Delta y = \begin{bmatrix} \frac{2c}{\rho h A} & \frac{2g}{h} \end{bmatrix} \Delta x$$

• Lösning till 3.20

a) Flödesbalans innebär att

$$\text{upplagrad volym} / \text{tidsenhet} = \text{flöde in} - \text{flöde ut}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(V) = u - w$$

Eftersom

$$V = Ah$$

där A är konstant och $w = av$, där $v = \sqrt{2gh}$ enligt Bernoulli, fås

$$A\dot{H} = u - a\sqrt{2gh}$$

eller

$$\dot{H} = \frac{1}{A}(u - a\sqrt{2gh}) = f(h, u)$$

vilket med insatta värden ger

$$\dot{H} = \frac{1}{0.5}(u - 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot h}) = 2u - 1.789 \cdot 10^{-3} \sqrt{H}$$

b) Linjärisering innebär att

$$\dot{H} = f(h, u) \approx f(h_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h_0, u_0} (h - h_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{h_0, u_0} (u - u_0)$$

där $f(h_0, u_0) = 0$ är arbetspunkten. Låt

$$a = -\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h_0, u_0}, \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{h_0, u_0}, \quad \Delta h = h - h_0, \quad \Delta u = u - u_0$$

Eftersom $\dot{H} = \Delta \dot{H}$ fås

$$\Delta \dot{H} = -a\Delta h + b\Delta u$$

eller

$$(s + a)\Delta H(s) = b\Delta U(s)$$

vilket medför att överföringsfunktionen blir

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s + a}$$

a och b blir

$$\begin{aligned} a &= -\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h_0, u_0} = \frac{a}{A} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2gh_0}} 2g = \frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{1}{\sqrt{h_0}} \\ b &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{h_0, u_0} = \frac{1}{A} \end{aligned}$$

dvs sökt överföringsfunktion är

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1/A}{s + \frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{1}{\sqrt{h_0}}}$$

I fallet $h_0 = 0.4$ fås

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{s + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.5} \sqrt{\frac{10}{2} \frac{1}{\sqrt{0.4}}}}} = \frac{2}{s + 1,41 \cdot 10^{-3}}$$

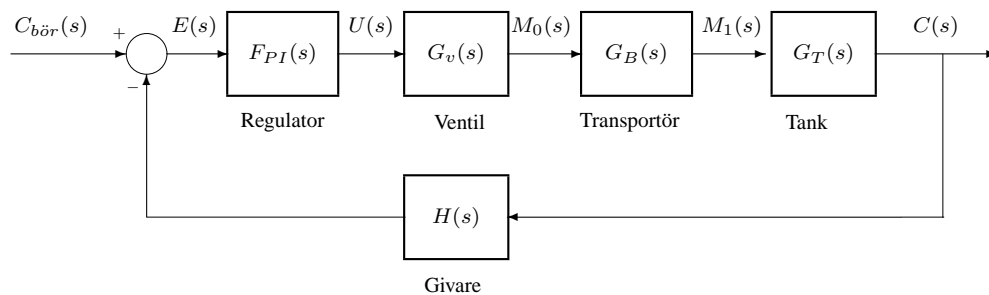
och för $h_0 = 0.8$ fås

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{s + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.5} \sqrt{\frac{10}{2} \frac{1}{\sqrt{0.8}}}}} = \frac{2}{s + 1 \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{Tidskonstanten } T = \frac{1}{\frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_0}}} = \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h_0}$$

• Lösning till 3.21

Blockschema över systemet ser ut som



beteckningar

$C_{bör}(s)$ är börvärdeskoncentrationen

$C(s)$ är koncentrationen i blandningstanken och även i utflödet eftersom ideal omrörning antas.

$E(s)$ är skillnaden mellan $C_{bör}(s)$ och mätt koncentration. Givaren antas ideal (utan dynamik), dvs $H(s) = 1$, vilket innebär att $E(s) = C_{bör}(s) - C(s)$.

$U(s)$ är styrsignalen från regulatören till ventilen. Det antas att $U(s)$ är samma som $M_0(s)$, dvs $G_v(s) = 1$. Eventuell förstärkning kan "lyftas" in i regulatören.

$M_0(s)$ Pulvrets massflöde ut från ventilen.

$M_1(s)$ Pulvrets massflöde ner i tanken

Överföringsfunktioner enligt nedan:

Regulatören given enligt uppgift.

$$F_{PI}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

Bandtransportören fördröjd 2 minuter innebär att

$$m_1(t) = m_0(t - 2)$$

Laplace-transformering ger

$$M_1(s) = M_0(s)e^{-2s}$$

Materialbalans i tanken innebär att

$$\text{upplagrad massa / tidsenhet} = \text{massflöde in} - \text{massflöde ut}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(VC) = m_1 - qC$$

eller

$$V \frac{dC}{dt} = m_1 - qC$$

eftersom V är konstant. Laplacetransformering ger

$$VsC(s) = M_1(s) - qC(s)$$

eller

$$(Vs + q)C(s) = M_1(s)$$

dvs

$$G_T(s) = \frac{C(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{q + Vs} = \frac{1/q}{1 + (V/q)s}$$

vilket med värden ger

$$G_T(s) = \frac{10}{1 + 5s}$$

• Lösning till 3.22

$$[a] \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$(b) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

(c) Stationärt ger $u = 2$ V strömmen $i_L = 1$ A och spänningen $v_C = 1$ V. Kortslutningen innebär en stegändring av insignalen av -2 V. Responsen är $i_L(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$, $v_C(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t)$.

• Lösning till 3.23

$$(a) \quad x(t) = \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t).$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{(1+RCs)^2}{1+3RCs+(RCs)^2}$$

• Lösning till 3.24

• Lösning till 3.25

• Lösning till 3.26

a)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_1}{A}}{\frac{K_2 M}{A^2} s^2 + s}$$

b) Massan rör sig $K_1 B/A$ längdenheter.

c) $|y(t)| \rightarrow \infty$, vilket i praktiken innebär att massan “flyttar sig” tills det blir stopp!

d)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{A^2}{MK_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{AK_1}{MK_2} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

e) Elementet a_{22} blir $-\left(\frac{K_3}{M} + \frac{A^2}{MK_2}\right)$. I övrigt identiskt!

• Lösning till 3.27

a) Instorheter: q, T_3 . Utstorheter: T_1 . Tillståndstorheter: T_1 och T_2 (t ex).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}A_{12}+k_{13}A_{13}}{C_1} & \frac{k_{12}A_{12}}{C_1} \\ \frac{k_{12}A_{12}}{C_2} & -\frac{k_{12}A_{12}+k_{23}A_{23}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{13}A_{13}}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{k_{23}A_{23}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ T_3 \end{bmatrix} \\ y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$G(s) = [G_{11}(s) \quad G_{12}(s)]$$

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{\frac{k_{12}A_{12}}{C_1 C_2}}{\left(s + \frac{k_{12}A_{12}+k_{13}A_{13}}{C_1}\right) \left(s + \frac{k_{12}A_{12}+k_{23}A_{23}}{C_2}\right) - \frac{k_{12}^2 A_{12}^2}{C_1 C_2}} \\ G_{12}(s) &= \frac{\frac{k_{23}A_{23}}{C_1} s + \frac{k_{12}A_{12}k_{13}A_{13}+k_{12}A_{12}k_{23}A_{23}+k_{13}A_{13}k_{23}A_{23}}{C_1 C_2}}{\left(s + \frac{k_{12}A_{12}+k_{13}A_{13}}{C_1}\right) \left(s + \frac{k_{12}A_{12}+k_{23}A_{23}}{C_2}\right) - \frac{k_{12}^2 A_{12}^2}{C_1 C_2}} \end{aligned}$$

$G_{11}(s)$ och $G_{12}(s)$ visar hur bågarterperaturen dynamiskt påverkas av effekten q respektive omgivningstemperaturen T_3 . Systemet har två poler.

c) A övergår från dim 2×2 till 3×3 och B från dim 2×2 till 3×1 beroende på att T_3 övergår från att vara instorhet till att vara tillståndstorhet. Systemet får nu tre poler!

d)

$$y(t) = \left(92.9 + 13.9e^{-t/3.2} - 106.8e^{-t/24.4}\right) \sigma(t)$$

e) $q = 1.2 \text{ kW} \Rightarrow T_1 \rightarrow 111.5^\circ\text{C} > 100^\circ\text{C}$, då ju vatten kokar vid atmosfärstryck. Kokningsfenomenet har ej beaktats i modellen! Detta skulle innebära en materialbalans för kokning då 100°C uppnåtts.

• Lösning till 3.28

a)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q_1+Q_2}{V_1} & \frac{Q_2}{V_2} \\ \frac{Q_2}{V_1} & -\frac{Q_2}{V_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}}_{=x} + \begin{bmatrix} 0 & \rho c_p Q_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ T_0 \end{bmatrix}}_{=u}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{=y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho c_p V_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho c_p V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

b)

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Med

$$D(s) = \left(s + \frac{Q_1 + Q_2}{V_1} \right) \left(s + \frac{Q_2}{V_2} \right) - \frac{Q_2^2}{V_1 V_2}$$

fås

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{Q_2}{\rho c_p V_1 V_2} && (\text{effekt} \rightarrow \text{temp. kar 1}) \\ G_{12}(s) &= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{Q_1}{V_1} \left(s + \frac{Q_2}{V_2} \right) && (\text{intemp.} \rightarrow \text{temp. kar 1}) \\ G_{21}(s) &= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{\rho c_p V_2} \left(s + \frac{Q_1 + Q_2}{V_1} \right) && (\text{effekt} \rightarrow \text{temp. kar 2}) \\ G_{22}(s) &= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{V_1 V_2} && (\text{intemp.} \rightarrow \text{temp. kar 2}) \end{aligned}$$

c)

$$\frac{T_1(s)}{T_0(s)} = \frac{1 + 50s}{1 + 175s + 5000s^2}$$

• Lösning till 3.29

a)

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{q_1}{A_1} - \frac{a}{A_1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad h_1 \geq h_2 \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{a}{A_2} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad h_1 \geq h_2 \\ M_1 &= A_1 \rho h_1 + M_{10}, \quad M_2 = A_2 \rho h_2 + M_{20} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{a^2 g}{A_1 Q} & \frac{a^2 g}{A_1 Q} \\ \frac{a^2 g}{A_2 Q} & -\frac{a^2 g}{A_2 Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 \rho & 0 \\ 0 & A_2 \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$G(s) = \frac{\rho}{s \left(s + \frac{a^2 g}{A_1 Q} + \frac{a^2 g}{A_2 Q} \right)} \begin{bmatrix} s + \frac{a^2 g}{A_2 Q} & -\frac{a^2 g}{A_2 Q} \\ \frac{a^2 g}{A_1 Q} & -\left(s + \frac{a^2 g}{A_1 Q} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
G_{11}(s) : \text{Inflöde} &\rightarrow \text{Nivå tank 1.} \\
G_{12}(s) : \text{Utflöde} &\rightarrow \text{Nivå tank 1.} \\
G_{21}(s) : \text{Inflöde} &\rightarrow \text{Nivå tank 2.} \\
G_{22}(s) : \text{Utflöde} &\rightarrow \text{Nivå tank 2.}
\end{aligned}$$

• Lösning till 3.30

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(H_B) = F + L - W - V \\ \frac{d}{dt}(H_B X_B) = (F + L)X_0 - VY_B - WX_B \end{cases}$$

$$\frac{\Delta X_B(s)}{\Delta Q(s)} = - \frac{(\bar{Y}_B - \bar{X}_B)(k_1 + 2k_2\bar{Q})}{\bar{H}_B s + \bar{W} + \frac{V\bar{Y}_B^2}{\alpha\bar{X}_B^2}}$$

• Lösning till 3.31

a)

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= \frac{q_1}{A_1} - \frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} \\
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{a_1}{A_2} \sqrt{2gh_1} - \frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2}
\end{aligned}$$

b)

$$h_{10} = \frac{Q^2}{2ga_1^2}, \quad h_{20} = \frac{Q^2}{2ga_2^2}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{ga_1^2}{QA_1} & 0 \\ \frac{ga_1^2}{QA_2} & -\frac{ga_2^2}{QA_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad (\text{ty } h_2 \text{ mäts})$$

d)

$$\frac{\Delta h_2(s)}{\Delta q_1(s)} = \frac{\frac{ga_1^2}{QA_1A_2}}{\left(s + \frac{ga_1^2}{QA_1}\right)\left(s + \frac{ga_2^2}{QA_2}\right)}$$

e)

$$\omega_0 = \frac{ga_1a_2}{Q\sqrt{A_1A_2}} \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \cdot \frac{a_1}{a_2} + \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \cdot \frac{a_2}{a_1} \right)$$

Om $\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \cdot \frac{a_1}{a_2} = 1$ fås $\xi = 1$, vilket är minimum.

f) Sätt

$$\nu_1 = \frac{ga_1^2}{QA_1}, \quad \nu_2 = \frac{ga_2^2}{QA_2}$$

Fall 1:

$$\begin{aligned}
\Delta h_1(t) &= \frac{\Delta V}{A_1} e^{-\nu_1 t} \\
\Delta h_2(t) &= \frac{\Delta V a_1^2}{A_1 a_2^2 - A_2 a_1^2} (e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t})
\end{aligned}$$

Fall 2:

$$\Delta h_1(t) \equiv 0, \quad \Delta h_2(t) = \frac{\Delta V}{A_2} e^{-\nu_2 t}$$

• Lösning till 3.32

a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{F_1+F_2}{V_1} + k_A\right) & \frac{F_2}{V_2} \\ \frac{F_2}{V_1} & -\left(\frac{F_2}{V_2} + k_A\right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

b)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F_1(sV_2 + F_2 + k_A V_2)}{(sV_1 + F_1 + F_2 + k_A V_1)(sV_2 + F_2 + k_A V_2) - F_2^2}$$

• Lösning till 3.33

$$\frac{V}{Q} \frac{d\Delta c}{dt} = \Delta c_i - \Delta c - \frac{r_0 x_0}{k + c_0} \left(1 - \frac{c_0}{k + c_0}\right) \Delta c - \frac{r_0 c_0}{k + c_0} \Delta x$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C(s)}{\Delta C_i(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{ar_0 x_0 k}{Q(k+c_0)^2 + \frac{V}{Q}}} \\ \frac{\Delta C(s)}{\Delta X(s)} &= -\frac{r_0 c_0}{k + c_0} \cdot \frac{\Delta C(s)}{\Delta C_i(s)} \end{aligned}$$

• Lösning till 3.34

$$G(s) = \frac{L/\lambda}{\sqrt{\frac{\rho c_P L^2 s}{\lambda}} \sinh \sqrt{\frac{\rho c_P L^2 s}{\lambda}}}$$

10.4 Återkopplade system i tidsplanet

- Lösning till 4.1

Antag enligt uppgiften ett första ordningens system, som allmänt har formen

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1 + Ts}$$

Med de standardmässiga in- och utsignalbeteckningarna $u(t)$ och $y(t)$ blir stegsvaret då insignalen ändras från nivån u_0 till u_1 vid tidpunkten noll (visa själv)

$$y(t) = y_0 + K(1 - e^{-(t-T_d)/T})\sigma(t - T_d)(u_1 - u_0)$$

där y_0 är den konstanta nivån som insignalen u_0 orsakar.

En uppritning av stegsvaret givet data i uppgiften, se heldragen linje i fig. 10.1, visar att starten är lite mjuk och försiktig, vilket beror på att dynamiken i realiteten är av högre ordning (ytterligare tidskonstanter). Ett approximativt sätt att fånga upp denna dynamik är att modellera den med en transportfördröjning motsvarande den tid det tar för stegsvaret att nå upp till 10% av dess slutvärde. Om vi utgår från att utsignalen förändras från 50 till 80, motsvarar 10%-nivån $50 + 0.1 \cdot 30 = 53$, vilket inträffar efter drygt 3 minuter. Vi väljer därför transportfördröjningen $T_d = 3$.

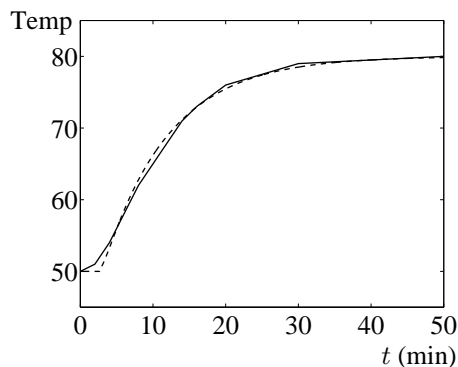
Tidskonstanten T läses av vid 63% av slutnivån, d v s vid nivån $50 + 0.63 \cdot 30 \approx 69$. Denna nivå inträffar efter drygt 12 minuter. Avdrag av transportfördröjningen ger då $T = 12 - T_d = 9$ minuter.

Slutligen bestäms den statiska förstärkningen K genom kvoten mellan skillnaden i sluttemperatur och initialtemperatur och skillnaden i slutvärdet av styrsignalen och initialvärdet, dvs

$$K = \frac{80 - 50}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \quad [^\circ\text{C}/\text{mA}]$$

Överföringfunktionen blir med dessa värden

$$G(s) = \frac{7.5e^{-3s}}{1 + 9s}$$



Figur 10.1: Verkligt stegsvar (heldragen linje) och modellens stegsvar (streckad linje).

- Lösning till 4.2

- Lösning till 4.3

- Lösning till 4.4

Stabiliteten avgörs av rötterna till karakteristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$ eftersom dessa är poler i det återkopplade systemet.

Med överföringsfunktioner enligt uppgift fås

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s(1 + 0.1s)} = 0$$

eller

$$(1 + Ts)s(1 + 0.1s) + K = 0$$

vilket är samma som

$$0.1Ts^3 + (0.1 + T)s^2 + s + K = 0$$

Koefficienterna i Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 0.1T & 1 \\ s^2 & 0.1 + T & K \\ s^1 & c_0 & 0 \\ s^0 & d_0 & \end{array}$$

där c_0 och d_0 är

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{(0.1 + T)1 - K \cdot 0.1T}{0.1 + T} = 1 - K \frac{T}{1 + 10T} \\ d_0 &= \frac{c_0 \cdot K - 0(0.1 + T)}{c_0} = K \end{aligned}$$

Enligt uppgift är $K > 0$ och $T > 0$ vilket innebär att $0.1T > 0$, $0.1 + T > 0$ och $d_0 = K > 0$. Stabiliteten beror alltså på c_0 .

Routh-Hurwitz ger att systemet är stabilt om även $c_0 > 0$

$$1 - K \frac{T}{1 + 10T} > 0$$

dvs

$$K < \frac{10T + 1}{T} = 10 + \frac{1}{T}$$

Förstärkningen för att systemet ska vara marginellt stabilt ges av likheten

$$K = 10 + \frac{1}{T}$$

För att få en amplitudmarginal till stabilitetsgränsen minskas K

$$K = (10 + \frac{1}{T})/A_m = 5 + \frac{1}{2T}$$

där $A_m = 2$ är amplitudmarginalen 2 ggr.

Speciellt fås

$$\begin{aligned} K &\rightarrow 5 \quad \text{då} \quad T \rightarrow \infty \\ K &\rightarrow \infty \quad \text{då} \quad T \rightarrow 0 \end{aligned}$$

• Lösning till 4.5

Stabiliteten avgörs av rötterna hos $1 + L(s) = 0$ eftersom de är poler hos det slutna systemet.

Studera därför

$$1 + \frac{50}{s(s^2/\omega_0^2 + 0.02s + 1)} = 0$$

eller, efter att ha skrivit uttrycket med gemensam nämnare

$$s(s^2/\omega_0^2 + 0.02s + 1) + 50 = 0$$

dvs

$$\frac{1}{\omega_0^2}s^3 + 0.02s^2 + s + 50 = 0$$

Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1/\omega_0^2 & 1 \\ s^2 & 0.02 & 50 \\ s^2 & c_1 & \\ s^0 & d_1 & \end{array}$$

där

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{0.02 \cdot 1 - 50/\omega_0^2}{0.02} = 1 - \frac{2500}{\omega_0^2} \\ d_1 &= \frac{c_1 \cdot 50 - 0 \cdot 0.02}{c_1} = 50 \end{aligned}$$

Routh-Hurwitz kriterium innebär att systemet är stabilt om alla koefficienter i första kolumnen är strikt positiva, dvs

$$c_1 = 1 - \frac{2500}{\omega_0^2} > 0$$

vilket implicerar att

$$\omega_0 > \sqrt{2500} = 50$$

Systemet stabilt för $\omega_0 \geq 50$, marginellt stabilt om $\omega_0 = 50$.

• Lösning till 4.6

a)

$$\begin{aligned} F &= \text{den kraft som verkar på pendelen i vridningspunkten} \\ h &= \text{massans höjdkoordinat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= F \sin \theta \\ M\ddot{H} &= F \cos \theta - Mg \end{aligned}$$

För små θ är $\ddot{H} \approx 0$ och $\cos \theta \approx 1$, vilket leder till $F = Mg$, och

$$M\ddot{y} = Mg \sin \theta = Mg \frac{y - u}{\ell}.$$

Laplace transformering ger

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-g/\ell}{s^2 - g/\ell} = \frac{-9.81}{(s + \sqrt{9.81})(s - \sqrt{9.81})}$$

Systemet är instabilt med en pol i $s = \sqrt{9.81}$.

b) Kretsöverföringen med PD-regulator

$$L(s) = -\frac{9.81K_p(1 + T_d s)}{s^2 - 9.81}$$

Slutna systemet

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-9.81K_p(1 + T_d s)}{s^2 - 9.81 - 9.81K_p - 9.81K_p T_d s}$$

Karakteristiska ekvationen

$$s^2 - 9.81K_p T_d s - 9.81(1 + K_p) \equiv s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

2:a ordningens system, dvs stabilt då

$$\begin{aligned} -(1 + K_p) &> 0 \\ -K_p T_d &> 0 \end{aligned}$$

Detta kräver att

$$K_p < -1 \quad \text{och} \quad T_d > 0$$

För minimal amplitudmarginal $A_m = 0.5$ välj

$$K_p = \frac{-1}{0.5} = -2$$

dvs krets förstärkningens belopp ($|L|$) tillåts minska med en faktor 2 (minimal amplitudmarginal) innan systemet blir instabilt. Bestäm T_d för att få önskad dämpning

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{-9.81(1 + K_p)} = \sqrt{9.81} \\ 2\zeta\omega_0 &= -9.81K_pT_d = 2 \cdot 9.81T_d \\ T_d &= \frac{2\zeta\omega_0}{2 \cdot 9.81} = \frac{0.7\sqrt{9.81}}{9.81} = \frac{0.7}{\sqrt{9.81}}\end{aligned}$$

- c) Det finns en undre gräns för förstärkningens belopp eftersom systemet blir instabilt då ingen återkoppling förekommer (regulatorförstärkning = 0)

• Lösning till 4.7

Felet $E(s)$ är definierat som

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

I det återkopplade systemet är $Y(s) = L(s)E(s)$, vilket ger

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s) \quad \text{där} \quad L(s) = \frac{K}{s+2} \frac{1}{s(s+1)}$$

Enligt uppgift skall felet $e(t)$ vara litet då utsignalen $y(t)$ följer ett börvärde som växer linjärt med hastigheten 0.2 volt/sekund, dvs

$$r(t) = 0.2t, \quad t \geq 0$$

Laplacetransformering

$$R(s) = \frac{0.2}{s^2}$$

Felet blir då

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s+2} \frac{1}{s(s+1)}} \cdot \frac{0.2}{s^2} = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + K} \frac{0.2}{s^2}$$

Under förutsättning att systemet är stabilt ger slutvärdessatsen det stationära felet

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + K} \frac{0.2}{s^2} = \frac{0.4}{K}$$

För ett fel som är mindre än 10mV krävs att

$$e_s = \frac{0.4}{K} < 10 \cdot 10^{-3} \Rightarrow K > 40$$

Stabiliteten kontrolleras med Routh-Hurwitz. Stabiliteten avgörs av rötterna hos $1 + L(s) = 0$ eftersom de är poler hos det slutna systemet. $1 + L(s)$ är ekvivalent med nämnarpolynomet till $E(s)/R(s)$

$$\begin{aligned}s(s+1)(s+2) + K &= 0 \\ s^3 + 3s^2 + 2s + K &= 0\end{aligned}$$

Routh-Hurwitz tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & c_1 & \\ s^0 & d_1 & \end{array}$$

där

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{3 \cdot 2 - K \cdot 1}{3} = 2 - \frac{K}{3} \\d_1 &= \frac{c_1 \cdot K - 0 \cdot 3}{c_1} = K\end{aligned}$$

Systemet är enligt Routh-Hurwitz stabilt om första kolumnens koefficienter är strikt positiva, vilket implicerar att

$$\begin{aligned}c_1 &= 2 - K/3 > 0 \\d_1 &= K > 0\end{aligned}$$

dvs

$$0 < K < 6$$

Systemet är därför instabilt för $K > 40$. Kravet på ett stationärt fel mindre än 10mV kan därför inte uppfyllas.

• Lösning till 4.8

a) Approximativ kretsöverföring

$$\tilde{L}(s) = \frac{(0.3K)}{(0.3s + 1)} \frac{(2 - 2s)}{(2 + 2s)}$$

K införs för att kunna bestämma amplitudmarginalen med Routh-Hurwitz. Karakteristisk ekvation

$$\begin{aligned}0.3K(2 - 2s) + (0.3s + 1)(2 + 2s) &= 0 \\0.6s^2 + s(2.6 - 0.6K) + 0.6K + 2 &= 0\end{aligned}$$

Rouths tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 0.6 & 2 + 0.6K \\ s^1 & 2.6 - 0.6K & 0 \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

För stabilt system krävs

$$2.6 - 0.6K > 0 \quad \text{och} \quad 2 + 0.6K > 0$$

vilket innebär att $-3.3 < K < 4.3$ dvs det går att öka förstärkningen i det ursprungliga systemet 4.3 gånger innan det blir instabilt. Amplitudmarginalen blir därför

$$A_m = 4.3$$

b) Utan approximationen innebär dödtiden att Nyquists kriterium måste användas

$$L(s) = \frac{0.3}{1 + 0.3s} e^{-2s}$$

Bodediagram eller numerisk räkning ger

$$\begin{aligned}\angle L(j\omega_\pi) &= -\arctan(0.3\omega_\pi) - 2\omega_\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ \\ \Rightarrow w_\pi &= 1.38 \\ A_m &= \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{\sqrt{1 + 0.3^2 \omega_\pi^2}}{0.3} = 3.61\end{aligned}$$

Kommentar: med Padé-approximationen får man för liberala marginaler.

• Lösning till 4.9

Kvarstående fel vid ”störning”, $v(t) = v_0$

$$\frac{E}{V} = \frac{G}{1 + L}, \quad \text{där} \quad L = FK \cdot \frac{1}{ms^2 + bs}$$

a) $F = K_p$ (proportionell reglering)

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{ms^2 + bs} \cdot \frac{1}{1 + K_p k \cdot \frac{1}{ms^2 + bs}} = \frac{1}{ms^2 + bs + K_p K}$$

Använd slutvärdessatsen då $V(s) = v_0/s$, kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_0}{ms^2 + bs + K_p K} = \frac{v_0}{K_p K}$$

b) $F = K_p + \frac{K_i}{s}$ (integralverkan)

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{ms^2 + bs} \cdot \frac{1}{1 + K \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{1}{ms^2 + bs}} = \frac{s}{s(ms^2 + bs) + K(K_p s + K_i)}$$

Slutvärdessatsen med $V(s) = v_0/s$ ger det kvarstående felet

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{sv_0}{0 + KK_i} = 0$$

• Lösning till 4.10

Felet ges av överföringsfunktionen

$$\frac{E}{\theta_r} = \frac{1}{1 + L} = S$$

där kretsöverföringen

$$L = \frac{0.4 \cdot 3 \cdot 2}{(1 + 0.5s)s(s + 1)}$$

Känslighetsfunktionen

$$S = \frac{s(s + 1)(1 + 0.5s)}{s(s + 1)(1 + 0.5s) + 2.4}$$

Målet är att följa börvärdet $\theta_r = \frac{30}{s^2}$. Det kvarstående felet blir

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{30S(s)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{30(s + 1)(1 + 0.5s)}{s(s + 1)(1 + 0.5s) + 2.4} = \frac{30}{2.4} = 12.5 [^\circ] \end{aligned}$$

• Lösning till 4.11

a) 1. Vid kompensering med serielänk

$$\begin{aligned} \frac{Y}{R} &= \frac{F_{PDG}}{1 + F_{PDG}} = \frac{2.5(1 + s)}{s^2(1 + s/6)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2.5(1 + s)}{s^2(1 + s/6)}} \\ &= \frac{2.5(1 + s)}{s^2(1 + s/6) + 2.5(1 + s)} = \frac{15(1 + s)}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \end{aligned}$$

2. I fallet med parallelllänk

$$\begin{aligned}\frac{Y}{R} &= \frac{G}{1 + F_{PD}G} = \frac{2.5}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2.5(1+s)}{s^2(1+s/6)}} \\ &= \frac{2.5(1+s/6)}{s^2(1+s/6) + 2.5(1+s)} = \frac{15(1+s/6)}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}\end{aligned}$$

I första fallet ger nollstället nära origo, $s = -1$, en översläng.

b) Referenssignalen $R = \frac{1}{s^2}$

För fall 1:

$$\begin{aligned}E = R - Y &= \frac{1}{s^2} - \frac{15(1+s)}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^3 + 6s^2}{s(s^3 + 6s^2 + 15s + 15)} \\ e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 6s}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} = 0\end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}E = R - Y &= \frac{1}{s^2} - \frac{2.5(s+6)}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^3 + 6s^2 + 12.5s}{s(s^3 + 6s^2 + 15s + 15)} \\ e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 6s + 12.5}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} &= \frac{12.5}{15} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

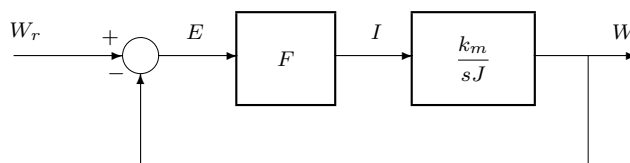
Slutsats: Vid stegsvaret fås i första fallet både en stor styrsignal och en påtaglig översväng, vilket undviks då kompenseringslänken placeras i återkopplingen. I gengäld får man i det andra fallet kvarstående fel vid börvärdesramper.

• Lösning till 4.12

Laplace-transformering av ekvationen för roboten ger

$$J \cdot sW = k_m I \Rightarrow \frac{W}{I} = \frac{k_m}{sJ}$$

Inför en regulator F



a) Felet ges av överföringsfunktionen E/W_r där $F = K$ är en proportionell regulator

$$\frac{E}{W_r} = \frac{1}{1 + K \frac{k_m}{Js}}$$

För $W_r = 1/s^2$ fås det stationära felet med slutvärdessatsen

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + K \frac{k_m}{J}} = \frac{J}{K k_m} < 0.05$$

dvs

$$K > \frac{J}{0.05 k_m} = 0.08$$

- b) Inför integralverkan, $F = K_p + K_i/s$. Behåll högfrekvensförstärkningen från a) $|F|_{HF} = K$, dvs låt $K_p = K = 0.08$. Det slutna systemets karakteristiska ekvation

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{k_m}{sJ} = 0$$

$$Js^2 + K_p k_m s + K_i k_m = 0$$

$$s^2 + \frac{K_p k_m}{J} s + \frac{K_i k_m}{J} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering ger

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_i k_m}{J}} = \frac{K_p k_m}{2\zeta J} \Rightarrow K_i = \frac{K_p^2 k_m}{4\zeta^2 J} = 0.816$$

• Lösning till 4.13

För det återkopplade systemet gäller

$$L = F(s)G(s) = F(s)\frac{K}{s}\overline{G}(s)$$

$$S = \frac{1}{1+L} = \frac{s}{s + F(s)K\overline{G}(s)}$$

$$T = \frac{L}{1+L} = \frac{F(s)K\overline{G}(s)}{s + F(s)K\overline{G}(s)}$$

$$FS = \frac{F}{1+L} = \frac{sF(s)}{s + F(s)K\overline{G}(s)}$$

$$GS = \frac{G}{1+L} = \frac{K\overline{G}(s)}{s + F(s)K\overline{G}(s)}$$

Högfrekvensasymptoterna är lika i a) och b)

Asymptoterna för regulatorerna vid låga frekvenser är givna som, a) $F(s) \rightarrow k_p$, b) $F(s) \rightarrow k_i/s$. För processen gäller att $|G|_{LF} = K\overline{G}(0)/s = K/s$. Asymptoterna för amplitudfunktionerna

	$\omega \rightarrow 0$, a)	$\omega \rightarrow 0$, b)	$\omega \rightarrow \infty$
$ L $	$\frac{k_p K}{\omega}$	$\frac{k_i K}{\omega^2}$	$k_\infty G(j\omega) $
$ S $	$\frac{\omega}{k_p K}$	$\frac{\omega^2}{k_i K}$	1
$ T $	1	1	$k_\infty G(j\omega) $
$ FS $	$\frac{\omega}{K}$	$\frac{\omega}{K}$	k_∞
$ GS $	$\frac{1}{k_p}$	$\frac{\omega}{k_i}$	$ G(j\omega) $

Kvarstående fel då $V(s) = \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}$. $E(s) = -GS \cdot V(s)$, använd slutvärdessatsen

$$\text{a) Steg: } e_s = \lim_{s \rightarrow 0} -sGS \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{k_p}$$

$$\text{Ramp: } e_s = \lim_{s \rightarrow 0} -sGS \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{1}{sk_p} \rightarrow \infty$$

$$\text{b) Steg: } e_s = \lim_{s \rightarrow 0} -sGS \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s}{k_i} = 0$$

$$\text{Ramp: } e_s = \lim_{s \rightarrow 0} -sGS \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{k_i}$$

• Lösning till 4.14

System med dödtid 10 sek.

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

Omedelbart efter referensändringen kommer dödtiden medföra att återkopplingen inte inverkar på styrsignalen $u(t)$, dvs för referenssteget på 10° C fås

$$U(s) = F_{PID}(s) \cdot \frac{10}{s} = 10K_p \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{T_i s^2} + \frac{T_d}{1 + T_f s} \right)$$

Inverslaplacetransformera till tidsplanet

$$u(t) = 10K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} t + \frac{T_d}{T_f} e^{-t/T_f} \right)$$

$$u(0^+) = 10K_p \left(1 + 0 + \frac{T_d}{T_f} \right) = 10K_p \left(1 + \frac{T_d}{T_f} \right)$$

Alternativt: använd begynnelsevärdessatsen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F_{PID}(s) \cdot \frac{10}{s} \\ &= 10K_p \left(1 + 0 + \frac{T_d}{T_f} \right) \end{aligned}$$

Med insatta värden: $T = 30, T_d = 6, T_f = 1, K_p = 0.2 \Rightarrow u(0^+) = 14$

• Lösning till 4.15

A-3: Initialt ger steget upphov till hopp i A

B-1: Filtrerad signal A

C-2: Filtrerad signal B

D-4: Integrerad signal C med slutvärde 1 som steget

• Lösning till 4.16

a) Återkoppling ger

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_p \frac{\frac{K}{1+sT}}{1 + K_d \frac{K}{1+sT}} \frac{1}{s}}{1 + K_p \frac{\frac{K}{1+sT}}{1 + K_d \frac{K}{1+sT}} \frac{1}{s}} = \frac{K_p K / T}{s^2 + \frac{1 + K_d K}{T} s + \frac{K_p K}{T}}$$

Identifiering av nämnaren med en dubbelpol i $s = -\alpha$ ger

$$s^2 + \frac{1 + K_d K}{T} s + \frac{K_p K}{T} \equiv (s + \alpha)^2 \quad \text{där} \quad K = 3, T = 0.5$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} \frac{1 + K_d K}{T} = 2\alpha & \Rightarrow K_d = \frac{2\alpha T - 1}{K} = \frac{\alpha - 1}{3} \\ \frac{K_p K}{T} = \alpha^2 & \Rightarrow K_p = \frac{\alpha^2 T}{K} = \frac{\alpha^2}{6} \end{cases}$$

Sålunda fås

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{\alpha^2}{6} \cdot \frac{3}{0.5}}{(s + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{(s + \alpha)^2}$$

b) Stegsvaret är

$$\theta(s) = \frac{\alpha^2}{(s + \alpha)^2} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \alpha)} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2}$$

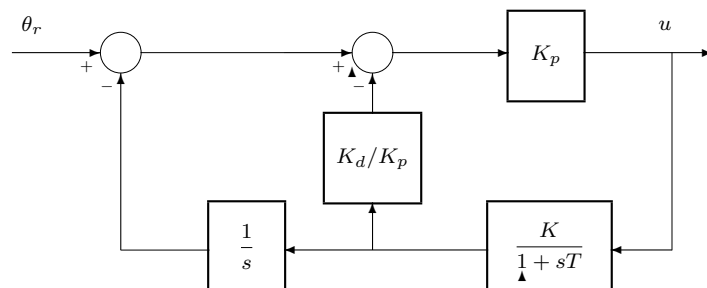
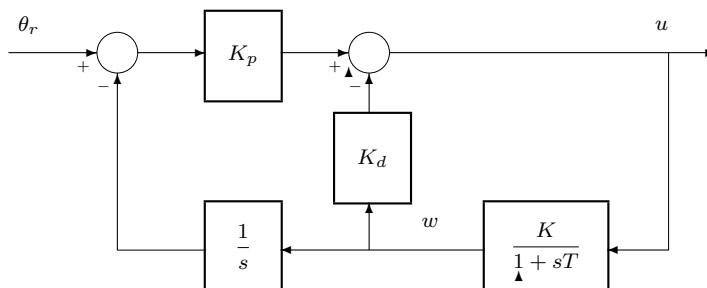
Den sista likheten är en partialbråksuppdelning av $Y(s)$. Inverslaplacetransformering ger

$$\theta(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$$

vilket innebär att

$$\begin{aligned} \alpha = 1 & \Rightarrow \theta(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t}, t \geq 0 \\ \alpha = 5 & \Rightarrow \theta(t) = 1 - e^{-5t} - 5t e^{-5t}, t \geq 0 \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen mellan referenssignalen $\theta_r(s)$ och styrsignalen $U(s)$ kan fås genom blochschematransformationer enligt



vilket resulterar i

$$\frac{U(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_p}{1 + K_p \left(\frac{K_d}{K_p} + \frac{1}{s} \right) \frac{K}{1+sT}} = \frac{s K_p (s + 1/T)}{(s + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{6} \frac{s(s + 2)}{(s + \alpha)^2}$$

Stegsvaret är

$$U(s) = \frac{\alpha^2}{6} \frac{s(s + 2)}{(s + \alpha)^2} \frac{1}{s} = \frac{\alpha^2}{6} \frac{s + \alpha - \alpha + 2}{(s + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{6} \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\alpha^2}{6} \frac{2 - \alpha}{(s + \alpha)^2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$u(t) = \frac{\alpha^2}{6}e^{-\alpha t} + \frac{\alpha^2}{6}(2 - \alpha)te^{-\alpha t}, t \geq 0$$

vilket innebär att

$$\alpha = 1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}te^{-t}, t \geq 0$$

$$\alpha = 5 \Rightarrow u(t) = \frac{25}{6}e^{-5t} - \frac{25}{2}te^{-5t}, t \geq 0$$

Speciellt är initialvärdet

$$u(0) = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, & u(0) = 1/6 \\ \alpha = 5, & u(0) = 25/6 \end{cases}$$

Motsättningen som råder är att ju snabbare system (α större) desto högre styrsignalsaktivitet.

• Lösning till 4.17

- a) Låt $L(s) = F(s)G(s)$ beteckna kretsöverföringsfunktionen. Då fås följande överföringsfunktioner med hjälp av återkoppling

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{4}{1+4s} \frac{K_p s + K_i}{s}}{1 + \frac{4}{1+4s} \frac{K_p s + K_i}{s}} = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i} \\ G_{ru}(s) &= \frac{F(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{K_p s + K_i}{s}}{1 + \frac{4}{1+4s} \frac{K_p s + K_i}{s}} = \frac{K_p s^2 + \frac{4K_i + K_p}{4}s + \frac{K_i}{4}}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i} \\ G_{vy}(s) &= -\frac{G(s)}{1 + L(s)} = -\frac{\frac{4}{1+4s}}{1 + \frac{4}{1+4s} \frac{K_p s + K_i}{s}} = \frac{-s}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i} \end{aligned}$$

- b) Felet $E(s) = R(s) - Y(s)$ beror på $R(s)$ och $V(s)$ enligt

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + L(s)}V(s) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4}{1+4s} \left(\frac{K_p s + K_i}{s} \right)}R(s) + \frac{\frac{4}{1+4s}}{1 + \frac{4}{1+4s} \left(\frac{K_p s + K_i}{s} \right)}V(s) \\ &= \frac{1}{4} \frac{s(1+4s)}{\left(s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i \right)}R(s) + \frac{s}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i}V(s) \end{aligned}$$

vilket fås genom återkoppling. Kvarstående felet är

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

där sista likheten enbart gäller för stabila system. I fallen börvärdesändringar och laststörningar fås följande.

- I) Börvärdesändringar, $v(t)$ sätts lika med 0.

$$R(s) = 1/s \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = 0 \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s = \frac{1}{1 + 4K_p})$$

$$R(s) = 1/s^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4K_i} \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s \rightarrow \infty)$$

II) Laststörningar, $r(t)$ sätts lika med 0.

$$V(s) = 1/s \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = 0 \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s = \frac{4}{1 + 4K_p})$$

$$V(s) = 1/s^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{1 + L(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_i} \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s \rightarrow \infty)$$

c) Styrsignalens startvärde ges av begynnelsevärdessatsen

$$u(0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_{ru}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{ru}(s) = K_p$$

Följande slutsatser kan dras

- Ju större K_p desto högre styrsignalsaktivitet ($u(0)$) för både P och PI-reg.
- I fallet P-reg, ju större K_p desto mindre kvarstående fel vid steg i r eller v . Dock går felet mot oändligheten vid rampformade börvärden och laststörningar.
- I fallet PI-reg, integralverkan innebär 0 i kvarstående fel vid steg i r eller v , och ett konstant värde för ramp. Det konstanta värdet är mindre ju högre K_i är.

• Lösning till 4.18

a) Öppna systemet

Överföringsfunktionen från $R(s)$ till $Y(s)$ är

$$G_{ry}(s) = K_r \frac{K}{(1+s)^m}$$

Stationärvärdet y_s för konstant börvärde fås med slutvärdessatsen enligt

$$y_s = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ry} \frac{r}{s} = rG_{ry}(0)$$

vilket skall vara ekvivalent lika med r enligt uppgift. Detta innebär att $G_{ry}(0) = 1$, dvs lågfrekvensförstärkningen måste vara 1. Eftersom $G_{ry}(0) = K_r K$ innebär detta att $K_r = 1/K = 0.5$.

b) Öppna systemet

Slutvärdessatsen ger att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ry}(s) \frac{1}{s} = G_{ry}(0) = 0.5K$$

Slutna systemet

För det slutna systemet blir överföringsfunktionen

$$G_{ry}(s) = \frac{K_p \frac{K}{(1+s)^m}}{1 + K_p \frac{K}{(1+s)^m}} = \frac{K_p K}{(1+s)^m + K_p K}$$

Slutvärdessatsen ger

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ry}(s) \frac{1}{s} = G_{ry}(0) = \frac{K_p K}{1 + K_p K}$$

Följande skillnader mellan öppna och slutna systemet fås

- Öppna systemets slutvärde ökar med ökande K ,

- Slutna systemet slutvärde går mot 1 när $K_p K$ är stort, dvs genom att ha hög förstärkning K_p i regulatoren så är slutna systemets slutvärde nära 1.

c) Felet är definierat enligt

$$E(s) = R(s) - Y(s) = -Y(s)$$

där sista likheten följer eftersom inverkan av laststörningar skall studeras vilket innebär att $R(s) = 0$.

Öppna systemet

$Y(s)$ beror av $V(s)$ enligt

$$Y(s) = -G_{vy}(s)V(s) \quad \text{där} \quad G_{vy} = \frac{K}{(1+s)^m}$$

och följaktligen fås

$$E(s) = G_{vy}(s)V(s)$$

Det kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{(1+s)^m} \frac{1}{s} = K$$

Slutna systemet

För det slutna systemet beror $Y(s)$ av $V(s)$ enligt

$$Y(s) = -G_{vy}(s)V(s), \quad \text{där} \quad G_{vy}(s) = \frac{\frac{K}{(1+s)^m}}{1 + K_p \frac{K}{(1+s)^m}} = \frac{K}{(1+s)^m + K_p K}$$

och följaktligen fås

$$E(s) = G_{vy}(s)V(s)$$

Det kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{(1+s)^m + K_p K} \frac{1}{s} = \frac{K}{1 + K_p K}$$

under förutsättning att systemet är stabilt. Systemet är stabilt om $K_p K + 1 > 0$ för både $m = 1, 2$ (dvs $K_p > 0$, $K > 0$ tillräckligt för stabilitet).

d) återkopplade system med $m = 2$; $K_p = 99$ och $K = 1$

Nämnarpolynomen för det återkopplade systemet ges av

$$99 + 1 + 2s + s^2 = s^2 + 2s + 100$$

Detta kan jämföras med en generell 2:a grads polynom

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Identifiering av koefficienterna ger

$$\omega_n = 10$$

$$\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = 0.1$$

återkopplade system med $m = 1$, resten som ovan

Nämnarpolynomen för det slutna system ges i detta fall av

$$99 + s + 1 = s + 100$$

Systemet har alltså en reell pol i $s = -100$, dvs. systemet svänger inte och har en fasmarginal av minst 90 grader.

öppna systemet

Oberoende hur vi väljer m så kommer det öppna systemet i vårt fall alltid ha reella poler och därmed en dämpning $\zeta \geq 1$. Systemet kommer alltså aldrig att svänga.

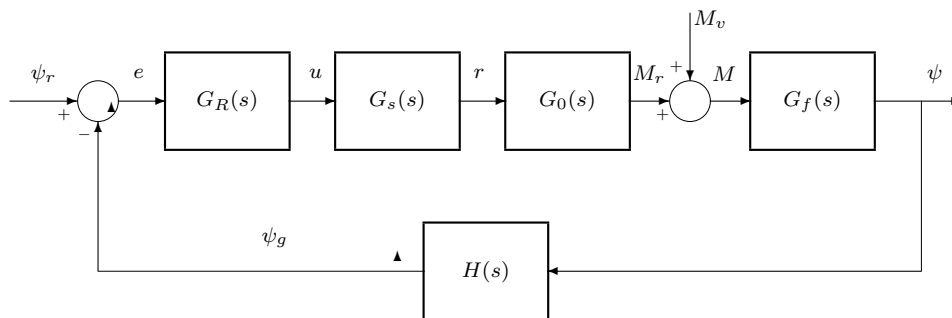
e) Följande slutsatser kan dras

- Fördelar öppen styrning: Inga stabilitetsproblem om processen stabil
- Nackdelar öppen styrning: Känslig för parametervariationer och störningar
- Fördelar återkoppling: Okänslig för parametervariationer vid hög kretsförstärkning ($K_p K$); och störningar för hög regulatorförstärkning (K_p).
- Nackdelar återkoppling: För hög kretsförstärkning ($K_p K$) minskar stabilitetsmarginalerna och kan leda till instabilitet.

En första ordningens process som styrs av en ren P-regulator kan aldrig få en dämpning som är mindre än 1. Fasmarginalen kommer alltid att vara minst 90 grader.

Däremot kan en första ordningens system snabbas upp med hjälp av P-reglering jämfört med öppen styrning.

• Lösning till 4.19



Regulator: $u = 0.5e \Rightarrow G_R(s) = 0.5$

Roderservo: $5\dot{r} + r = 0.1u \Rightarrow G_s(s) = \frac{0.1}{5s + 1} = \frac{0.02}{s + 0.2}$

Fartyget: $100\ddot{\psi} + \dot{\psi} = 0.1M \Rightarrow G_f(s) = \frac{0.1}{100s^2 + s} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s + 0.01)}$

Givare: $\psi_g = 0.1\psi \Rightarrow H(s) = 0.1$

Omv. faktor: $M_r = 1 \cdot 10^3 r \Rightarrow G_0(s) = 1 \cdot 10^3$

• Kretsöverföringen $L(s)$ är

$$L(s) = G_R(s)G_s(s)G_0(s)G_f(s)H(s) = 0.5 \frac{0.02}{s + 0.2} 1 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s + 0.01)} 0.1$$

dvs alla överföringsfunktioner i återkopplingen

Utsignalen $\psi(s)$ beror av $\psi_r(s)$ och $M_v(s)$ enligt

$$\psi(s) = G_1(s)\psi_r(s) + G_2(s)M_v(s)$$

där $G_1(s)$ och $G_2(s)$ sökes.

- $G_1(s) = \frac{\psi(s)}{\psi_r(s)}$; $M_v = 0$, Genom återkoppling fås

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{G_R G_s G_0 G_f}{1 + G_R G_s G_0 G_R H} = \frac{0.5 \frac{0.02}{s+0.2} 1 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}}{1 + 0.5 \frac{0.02}{s+0.2} 1 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)} 0.1} \\ &= \frac{0.01}{s(s+0.2)(s+0.01) + 0.001} = \frac{0.01}{s^3 + 0.21s^2 + 0.002s + 0.001} \\ &= \frac{5}{500s^3 + 105s^2 + s + 0.5} \end{aligned}$$

Sambandet mellan ψ och ψ_r kan även beskrivas med en differentialekvation

$$500\ddot{\psi} + 105\dot{\psi} + \dot{\psi} + 0.5\psi = 5\dot{\psi}_r$$

- $G_2(s) = \frac{\psi(s)}{M_v(s)}$; $\psi_r = 0$, Genom återkoppling fås

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{G_f}{1 + G_R G_s G_0 G_R H} = \frac{\frac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}}{1 + 0.5 \frac{0.02}{s+1.2} 1 \cdot 10^3 \frac{1 \cdot 10^3}{s(s+0.01)0.1}} \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-3}(s+0.2)}{s(s+0.2)(s+0.09) + 0.0001} = \frac{0.5(s+0.2)}{500s^3 + 105s^2 + s + 0.5} \end{aligned}$$

Motsvarande differentialekvation

$$500\ddot{\psi} + 105\dot{\psi} + \dot{\psi} + 0.5\psi = 0.5\dot{M}_v + 0.1M_v$$

• Lösning till 4.20

Låt $P(s) = A(s)C(s) + B(s)D(s)$. Återkoppling ger att

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= K_r \frac{\frac{D(s)}{C(s)} \frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{D(s)}{C(s)} \frac{B(s)}{A(s)}} = K_r \frac{B(s)D(s)}{P(s)} \\ G_{vy}(s) &= \frac{\frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{D(s)}{C(s)} \frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{B(s)C(s)}{P(s)} \\ G_{ru}(s) &= K_r \frac{\frac{D(s)}{C(s)}}{1 + \frac{D(s)}{C(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)}} = K_r \frac{A(s)D(s)}{P(s)} \\ G_{vu}(s) &= \frac{-\frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{D(s)}{C(s)}}{1 + \frac{D(s)}{C(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)}} = -\frac{B(s)D(s)}{P(s)} \end{aligned}$$

Förstärkning K_r

Lågfrekvensförstärkning 1 från r till y innebär att

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{ry}(s) = G_{ry}(0) = K_r \frac{B(0)D(0)}{P(0)} = 1$$

vilket medför att

$$K_r = \frac{P(0)}{B(0)D(0)}$$

Egenskaper $C(s)$

Kvarstående fel efter stegstörningar skall undvikas. Detta medför att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{vy}(s) \frac{1}{s} = 0$$

vilket innebär att

$$G_{vy}(0) = \frac{B(0)C(0)}{P(0)} = 0$$

dvs $C(0) = 0$ (integralverkan i regulatorn). Slutvärdessatsen ovan gäller under förutsättning att systemet är stabilt, dvs $P(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet.

Då

$$\frac{D(s)}{C(s)} = \frac{2(s+1)}{s}, \quad \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

blir

$$P(s) = (s+1)^2 s + 1 \cdot 2(s+1) = (s+1)(s^2 + s + 2) = (s+1) \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} \right)$$

dvs poler i -1 och $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

• Lösning till 4.21

a) $K_a K_p K > 0$ och $T > \tau > 0$

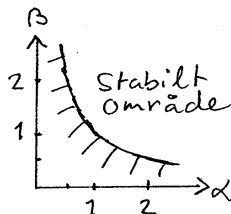
b) Nej!

c) Nej!

d) Nej!

• Lösning till 4.22

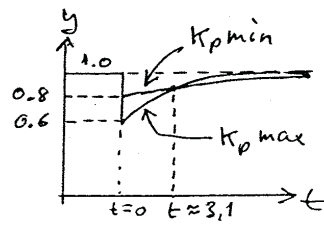
Stabilt för $\beta > \frac{1}{\alpha} > 0$



• Lösning till 4.23

a) $K_r = 5.5$

b) $y(t) = 1 - 5K_p e^{-5.5K_p t}$



c) Vid hög processförstärkning blir systemet instabilt och fungerar därför inte!

• Lösning till 4.24

$t_s \approx 17$ sekunder.

• Lösning till 4.25

a) $K = 1$ och $T = 1.5$.

b) $K = 0.6$ och $T = 0.9$.

10.5 Återkopplade system i frekvensplanet

- Lösning till 5.1
Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{s(1 + s/2)}$$

kan delas upp i

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \text{ där } G_1(s) = 5, G_2(s) = \frac{1}{s} \text{ och } G_3(s) = \frac{1}{1 + s/2}$$

I de tre fallen gäller att

$G_1(s)$ Lågfrekvensasymptot 5

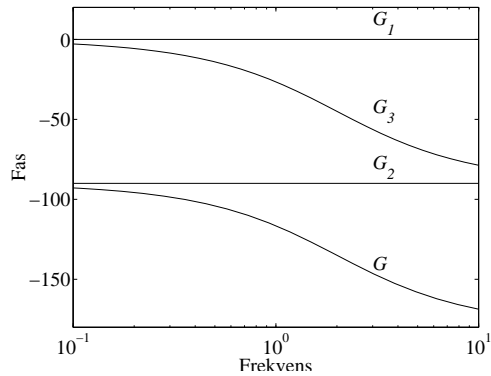
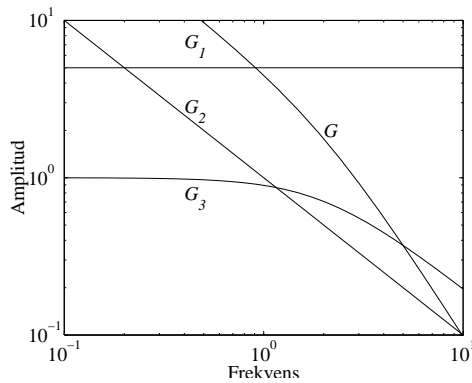
$$\angle G_1(j\omega) = 0$$

$G_2(s)$ Lågfrekvensasymptot $1/s$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{1}{\omega}|_{\omega=1} = 1$

$$\angle G_2(j\omega) = -90^\circ$$

$G_3(s)$ Lågfrekvensasymptot 1. Brytfrekvens $\omega = 2$, ner, enkel. Korrigera

$$\angle G_3(j\omega) = -\arctan(\omega/2)$$



- Lösning till 5.2

a)

$$G(s) = \frac{2(1 + s/0.5)}{s(1 + s/4)}$$

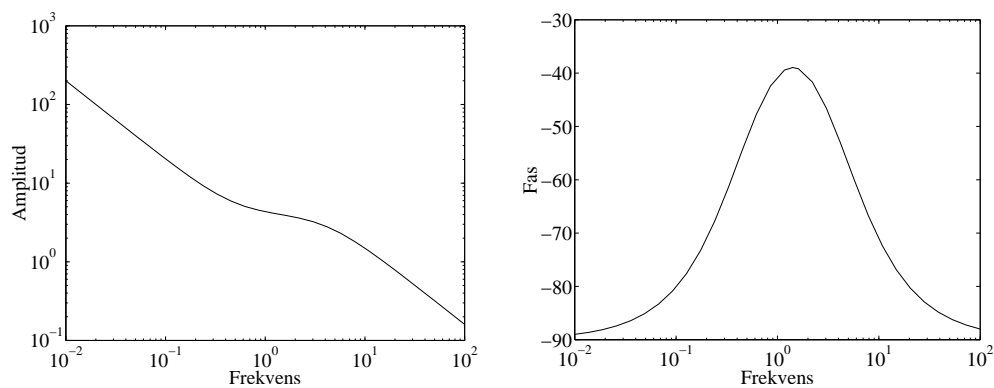
- Lågfrekvensasymptot $2/s$. Punkt på asymptotkurvan $|2/\omega|_{\omega=2} = 1$

- Brytfrekvenser

$$\begin{array}{lll} \omega_1 & = & 0.5 \quad \text{upp, enkel} \\ \omega_2 & = & 4 \quad \text{ner, enkel} \end{array}$$

- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Faktorn $(1 + s/0.5)$ korrigeras med +3 dB vid $\omega = 0.5$ och +1 dB vid $\omega = 0.25$ och 1. Faktorn $(1 + s/4)$ korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8.

- $\angle G(j\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega/0.5) - \arctan(\omega/4)$



$$\omega_c = 14 \text{ rad/s}, \phi_m = 105^\circ$$

b)

$$G(s) = \frac{16}{(s+4)(s^2+0.8s+4)} = \frac{1}{(1+0.2s+(s/2)^2)(1+s/4)}$$

- Lågfrekvensasymptot 1

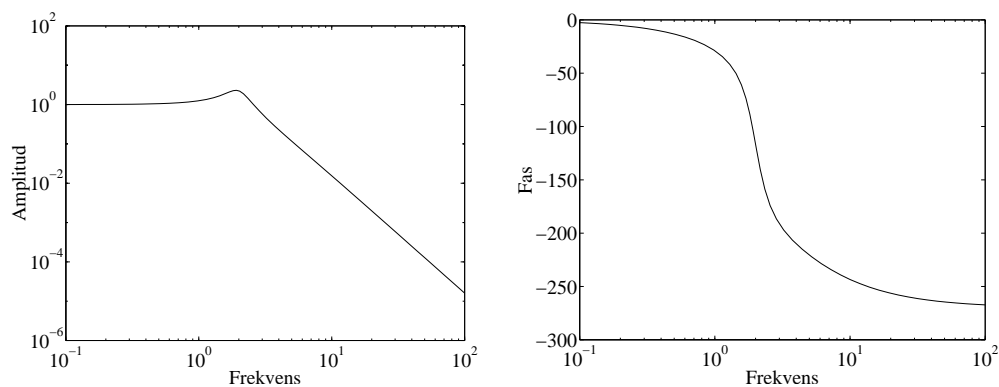
- Brytfrekvenser

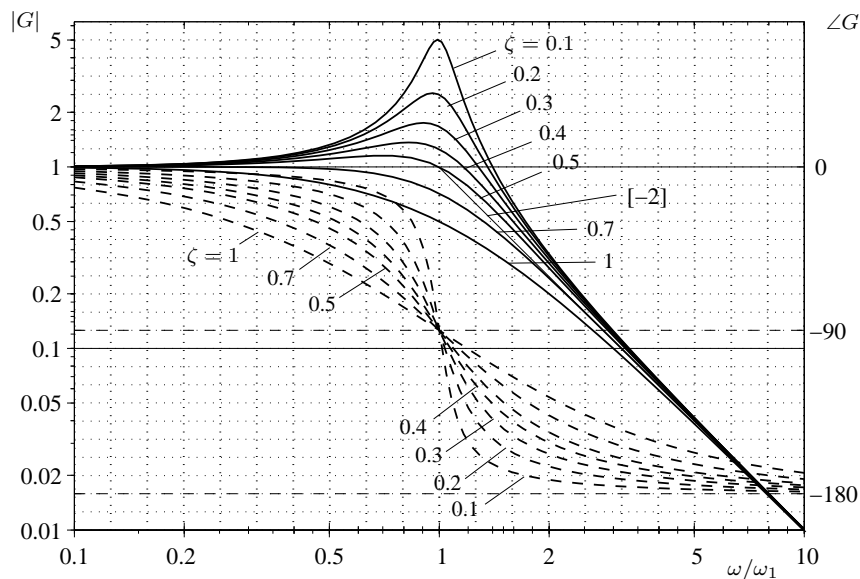
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2 \text{ ner, dubbel} \\ \omega_2 &= 4 \text{ ner, enkel} \end{aligned}$$

- Korrigera till “korrekta” amplitudkurvan. Andragradsuttrycket korrigeras med hjälp av fig. 10.2 för kurvan $\zeta = 0.2$, vilket ger korrigeringen +2.2 dB vid halva brytfrekvensen $\omega = 1$, +8 dB vid brytfrekvensen $\omega = 2$ och +2.2 dB vid dubbla brytfrekvensen $\omega = 4$ (asymptoten har här sjunkit med $-2 \cdot 6$ dB).

Förstgradsuttrycket korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8. Korrigeringarna adderas för brytpunkter “nära” varandra, i detta fallet för $\omega = 2$ och 4.

- $\angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{0.2\omega}{1-(0.5\omega)^2}\right) - \arctan(\omega/4) \quad (-180^\circ \text{ för } \omega > \omega_1).$





Figur 10.2: Bodediagram inklusive asymptoter för överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$. Belopp heldragen linje, fasvridning steckad linje. En ruta motsvarar 2 dB och 10° .

c)

$$G(s) = \frac{4(s + 0.5)}{s(s + 4)(s^2 + s + 1)} = \frac{0.5(1 + s/0.5)}{s(1 + s/4)(1 + s + s^2)}$$

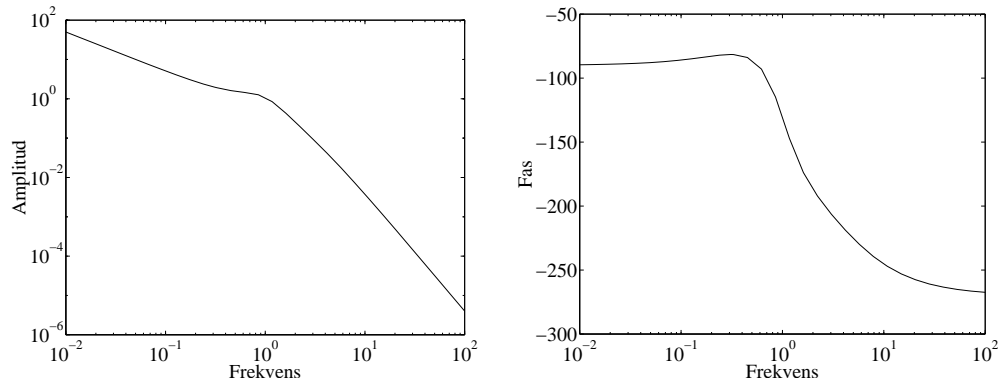
- Lågfrekvensasymptot $0.5/s$. Punkt på asymptotkurvan $\left| \frac{0.5}{\omega} \right|_{\omega=0.5} = 1$

- Brytfrekvenser

ω_1	=	0.5	upp,	enkel
ω_2	=	1	ner,	dubbel
ω_3	=	4	ner,	enkel

- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Andragradsuttrycket korrigeras med hjälp av fig. 10.2 för kurvan $\zeta = 0.5$, vilket ger +1 dB vid halva brytfrekvensen $\omega = 0.5$, 0 dB vid brytfrekvensen $\omega = 1$ och +1 dB vid dubbla brytfrekvensen $\omega = 2$ (asymptoten har här sjunkit med $-2 \cdot 6$ dB). Förstagsuttrycket $(1 + s/0.5)$ korrigeras med +3 dB vid $\omega = 0.5$ och +1 dB vid $\omega = 0.25$ och 1. Förstagsuttrycket $(1 + s/4)$ korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8. Korrigeringarna adderas för brytpunkter "nära" varandra, i detta fallet för $\omega = 0.5, 1$ och 2.

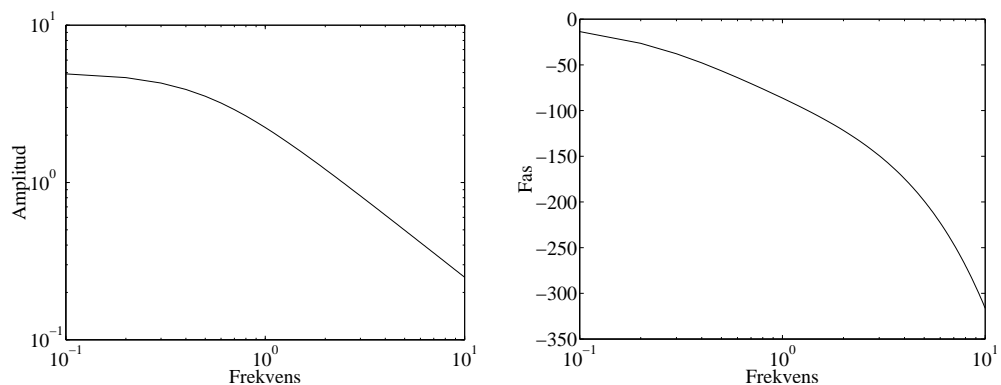
- $\angle G(j\omega) = \arctan(\omega/0.5) - 90^\circ - \arctan(\omega/4) - \arctan\left(\frac{\omega}{1 - \omega^2}\right) \quad (-180^\circ \text{ för } \omega > \omega_2)$



d)

$$G(s) = \frac{2.5e^{-0.4s}}{s + 0.5} = \frac{5e^{-0.4s}}{1 + s/0.5}$$

- Lågfrekvensasymptot 5
- Brytfrekvenser $\omega_1 = 0.5$ ner, enkel
- Korrigera amplitudkurvan med -3 dB vid $\omega = 0.5$ och -1 dB vid $\omega = 0.25$ och 1 .
- $\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega/0.5) - 0.4\omega \frac{180}{\pi}$

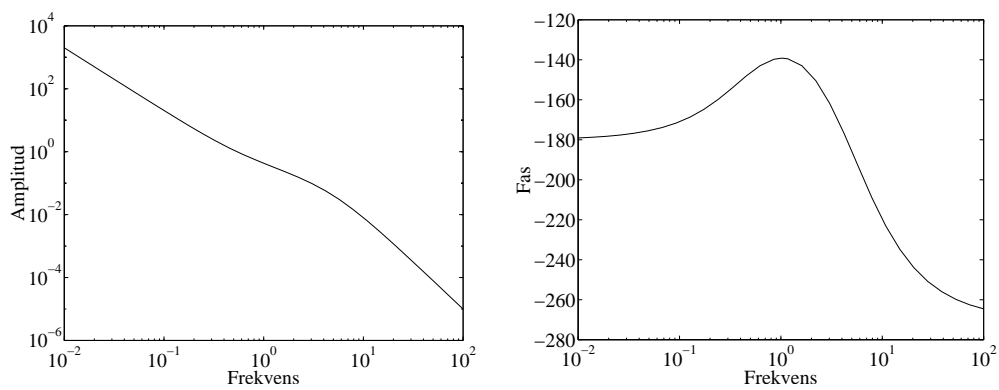


$$\omega_c = 2.3 \text{ rad/s}, \phi_m = 45^\circ, \omega_\pi = 4.2 \text{ rad/s}, A_m = 5 \text{ dB}$$

e)

$$G(s) = \frac{10(s + 0.5)}{s^2(s + 5)^2} = \frac{0.2(1 + s/0.5)}{s^2(1 + s/5)^2}$$

- Lågfrekvensasymptot $0.2/s^2$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{0.2}{\omega^2}|_{\omega=\sqrt{0.2}} = 1$.
- Brytfrekvenser
 - $\omega_1 = 0.5$ upp, enkel
 - $\omega_2 = 5$ ner, dubbel
- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Faktorn $(1 + s/0.5)$ korrigeras med $+3$ dB vid $\omega = 0.5$ och $+1$ dB vid $\omega = 0.25$ och 1 . Faktorn $(1 + s/5)$ korrigeras med -6 dB vid $\omega = 5$ och -2 dB vid $\omega = 2.5$ och 10 .
- $\angle G(j\omega) = \arctan(\omega/0.5) - 2 \cdot 90^\circ - 2 \arctan(\omega/5)$



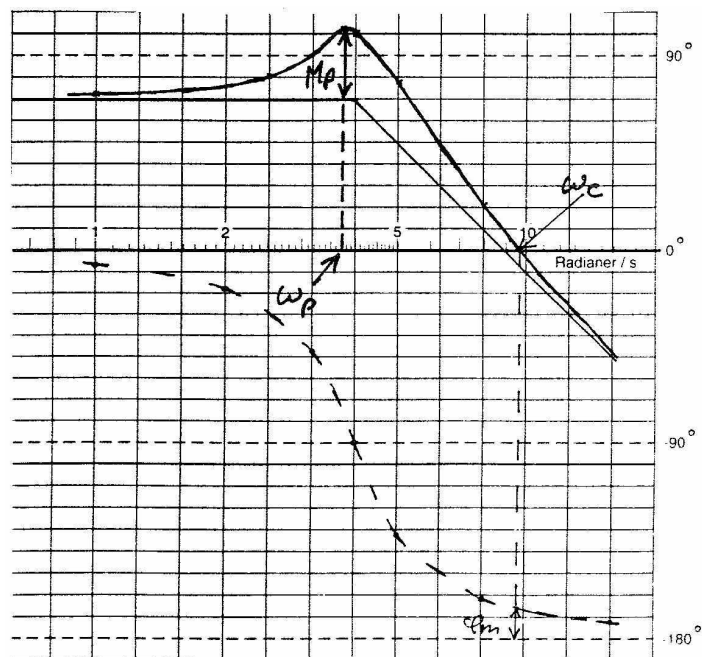
$$\omega_c = 0.55 \text{ rad/s}, \phi_m = 35^\circ, \omega_\pi = 4.5 \text{ rad/s}, A_m = 24 \text{ dB}$$

f) Man finner att $\omega_0 = 4$ och $\zeta = 0.25$, varför

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{16})^2 + \frac{\omega^2}{64}}} \quad \omega_p = 3.74 \text{ rad/s}$$

$$M_p = 6.3 \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\omega}{16-\omega^2}\right) & \omega \leq 4 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{2\omega}{\omega^2-16}\right) & \omega > 4 \end{cases}$$



$$\omega_c = 9.5 \text{ rad/s}, \phi_m = 14^\circ, M_p \approx 6 \text{ dB}$$

• Lösning till 5.3

- Lågfrekvensasymptoten är $1/s^2$ enligt bodediagrammet.
- Brytfrekvenserna är

$$\omega_1 = 0.5 \quad \text{upp, dubbel}$$

$$\omega_2 = 2 \quad \text{ner, enkel}$$

$$\omega_3 = 5 \quad \text{ner, enkel}$$

Eftersom systemet är stabilt, utan dödtid och icke-minfas nollställen blir överföringsfunktionen således

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{(1 + 2\zeta(s/0.5) + (s/0.5)^2)}{(1 + s/2)(1 + s/5)}$$

• Lösning till 5.4

Med pol-nollställesdiagram enligt figur blir överföringsfunktionen

$$G(s) = K \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+3)} = \frac{K(1+1/s)(1+5/s)}{(1+3/s)}$$

där K bestäms genom informationen att högfrekvensasymptoten är 0.5, vilket innebär att

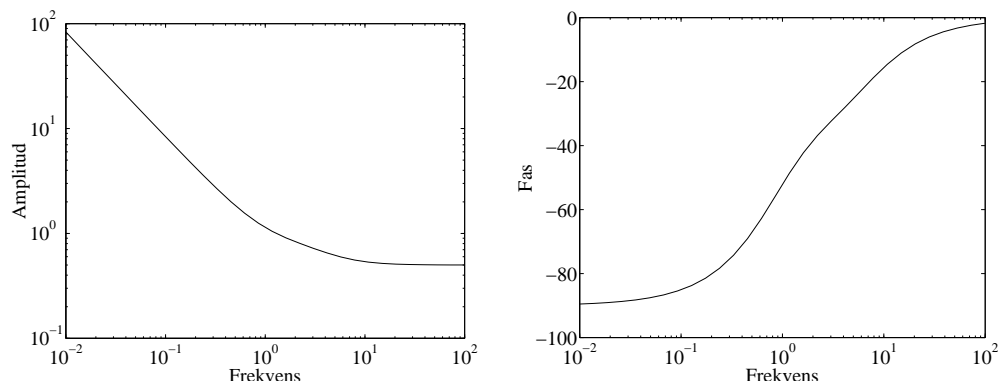
$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = K \equiv 0.5$$

dvs $K = 0.5$. Överföringsfunktionen är alltså

$$G(s) = \frac{0.5(s+1)(s+5)}{s(s+3)} = \frac{2.5/3}{s} \frac{(1+s)(1+s/5)}{(1+s/3)}$$

Bodediagram

- Lågfrekvensasymptot $\frac{2.5/3}{s}$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{2.5/3}{\omega}|_{\omega=2.5/3} = 1$
- Brytfrekvenser
 - $\omega_1 = 1$ upp, enkel
 - $\omega_2 = 3$ ner, enkel
 - $\omega_3 = 5$ upp, enkel
- Korrigera
- $\angle G(j\omega) = \arctan(\omega) + \arctan(\omega/5) - 90^\circ - \arctan(\omega/3)$



- Lösning till 5.5
I överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{1+s}$$

är döttiden $T_d = 1/3$. Faktorn $e^{-T_d s}$ approximeras med en Padé-approximation

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1 - sT_d/2}{1 + sT_d/2} = \frac{1 - s/6}{1 + s/6}$$

Med denna approximation fås

$$\hat{G}(s) = \frac{1 - s/6}{(1+s)(1+s/6)}$$

Bode

- Lågfrekvensasymptoten 1 i båda fall.

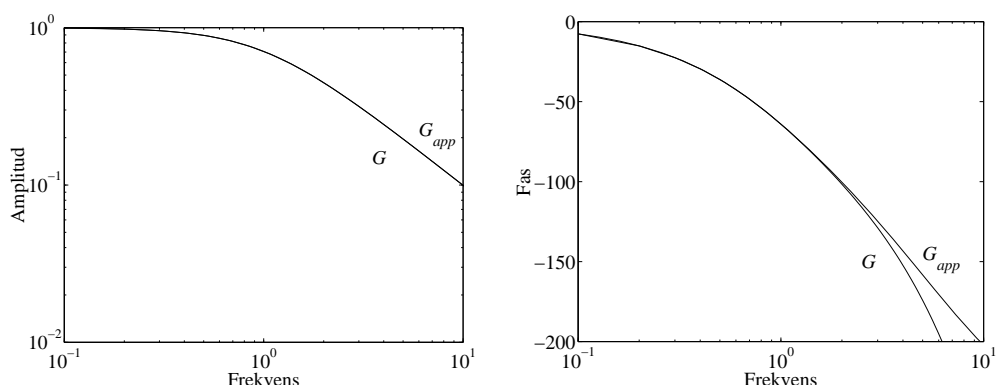
- Brytfrekvens

$$\omega_1 = 1 \quad \text{ner, enkel (för båda)}$$

$$\text{Notera att } |1 - s/6| = |1 + s/6|.$$

- Korrigera
- Fasvridning

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= -\arctan(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{180}{\pi} && \text{för exakta} \\ \angle \hat{G}(s) &= -\arctan(\omega) - 2\arctan(\omega/6) && \text{för approximationen} \end{aligned}$$



Slutsatser: $|G(s)|$ och $|\hat{G}(s)|$ samma men faserna $\angle G(j\omega)$ och $\angle \hat{G}(j\omega)$ skiljer sig för högre frekvenser

Stegsvar

Exakta

$$Y(s) = \frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{1+s} \frac{1}{s} = e^{-\frac{1}{3}s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right)$$

$$y(t) = (1 - e^{-(t-1/3)})\theta(t - 1/3)$$

Approximation

$$Y(s) = \frac{1-s/6}{(1+s)(1+s/6)} \frac{1}{s} = \frac{6-s}{(1+s)(s+6)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1.4}{s+1} + \frac{0.4}{s+6}$$

$$y(t) = (1 - 1.4e^{-t} + 0.4e^{-6t})\theta(t)$$

• Lösning till 5.6

Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^4}$$

skall approximeras med

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{(1+Ts)^2}$$

så att lågfrekvensförstärkningen och fassen vid -90° överensstämmer.

Lågfrekvensförstärkning i de båda fallen är

$$G(0) = \frac{8}{16} = 0.5, \quad \text{och} \quad \hat{G}(0) = K$$

vilket innebär att $K = 0.5$

Fasvridningen -90° för det exakta systemet ges av

$$\angle G(j\omega) = -4 \arctan \omega/2 = -90^\circ$$

vilket ger frekvensen

$$\omega = 2 \tan 22.5^\circ = 0.83$$

Fasvridningen -90° för approximationen ges av

$$\angle \hat{G}(j\omega) = -2 \arctan \omega T = -90^\circ$$

vilket för $\omega = 2 \tan 22.5^\circ$ implicerar att

$$T = \frac{1}{\omega} \tan 45^\circ = \frac{1}{2 \tan 22.5} = 1.2$$

Överföringsfunktionen för approximationen blir sålunda

$$\hat{G}(s) = \frac{0.5}{(1+1.2s)^2}$$

Bode

Exakta

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^4} = \frac{0.5}{(1+s/2)^4}$$

- Lågfrekvensasymptot 0.5
- Brytfrekvens
 $\omega_1 = 2$, ner, 4 ggr
- Korrigera
- $\angle G(j\omega) = -4 \arctan(\omega/2)$

Approximation

$$\hat{G}(s) = \frac{0.5}{(1+(1/0.82)s)^2}$$

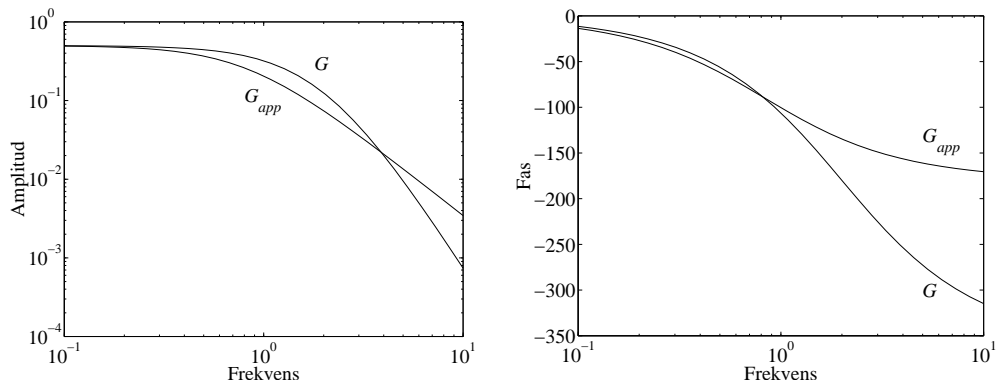
- Lågfrekvensasymptot 0.5

- Brytfrekvens

$$\omega_1 = 0.82, \text{ ner, dubbel}$$

- Korrigera

- $\angle G(j\omega) = -2 \arctan(1.2\omega)$



Stegsvar

Exakta

$$Y(s) = \frac{8}{(s+2)^4} \frac{1}{s} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{4}{(s+2)^4}$$

$$y(t) = (0.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-2t} - t^2e^{-2t} - \frac{4}{6}t^3e^{-2t})\theta(t)$$

Approximation

$$Y(s) = \frac{0.343}{(s+0.828)^2} \frac{1}{s} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+0.828} - \frac{0.414}{(s+0.828)^2}$$

$$y(t) = (0.5 - 0.5e^{-0.828t} - 0.414te^{-0.828t})\theta(t)$$

Kommentar: Noggrannheten hos approximationen sämre för högre frekvenser, vilket beloppskurvan och stegsvaret visar.

- Lösning till 5.7

Enligt uppgift 2.11 är följande överföringsfunktioner givna (se lösning uppgift 2.11)

$$G_{\theta_r\theta} = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2} = \frac{1}{(1+s/\alpha)^2}$$

$$G_{\theta_r u} = \alpha^2/6 \frac{s(s+2)}{(s+\alpha)^2} = \frac{1}{3} \frac{s(1+s/2)}{(1+s/\alpha)^2}$$

För de två överföringsfunktioner fås

$$G_{\theta_r \theta} = \frac{1}{(1 + s/\alpha)^2} \quad G_{\theta_r u} = \frac{1}{3} \frac{s(1 + s/2)}{(1 + s/\alpha)^2}$$

• Lågfrekvensasymptot

$$1 \quad s/3. \text{ Punkt på asymptotkurvan } \left| \frac{\omega}{3} \right|_{\omega=3} = 1$$

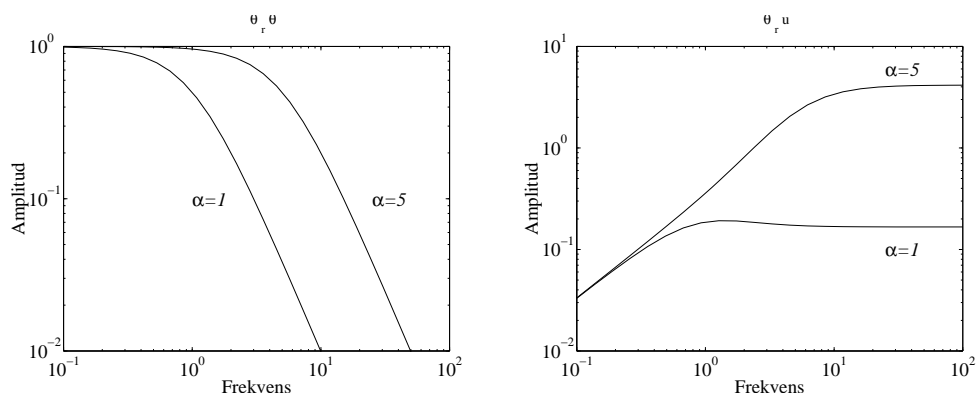
• Brytfrekvens

$$\omega_1 = \alpha, \text{ ner, dubbel} \quad \omega_1 = \alpha, \text{ ner, dubbel}$$

$$\omega_2 = 2, \text{ upp, enkel}$$

• Korrigera

Amplituddiagram för $\alpha = 1, 5$ för de två överföringsfunktionerna enligt figurer.



Slutsatser: Ju högre α desto högre bandbredd ω_b (snabbhet), men ju högre α desto högre styrsignalsaktivitet.

• Lösning till 5.8

För överföringsfunktionen

$$G_{LP_1}(s) = \frac{1}{(1 + s)^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot 1
- Brytfrekvens $\omega_1 = 1$, ner, dubbel
- Korrigera

Amplituddiagram, se figur nedan. Bandbredden fås ur

$$|G_{LP_1}(j\omega_b)| = \frac{1}{1 + \omega_b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = 0.64$$

För överföringsfunktionen

$$G_{LP_2}(s) = \frac{1}{1 + 1.4s + s^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot 1
- Brytfrekvens $\omega_1 = 1$, ner, dubbel

- Korrigera, $s^2 + 1.4s + 1 \equiv s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2$ implicerar att $\zeta = 0.7$.

Bandbredden fås ur

$$|G_{LP_2}(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_b^2)^2 + (1.4\omega_b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = 1.01$$

Amplituddiagram, se figur nedan.

Slutsatser: fördel med komplexkonjugerade poler är att bandbredden ökar.

För överföringsfunktionen

$$G_{BP}(s) = \frac{4s^2}{(1 + s/0.5)^2(1 + s/10)^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot $4s^2$. Punkt på asymptotkurvan $|4\omega^2|_{\omega=0.5} = 1$
- Brytfrekvenser

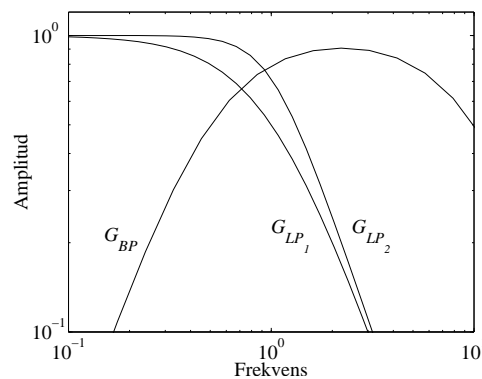
ω_1	=	0.5	ner,	dubbel
ω_2	=	10	ner,	dubbel
- Korrigera

Bandbredd fås ur (intervallet som beloppsskurvan inte är 3 dB under 1).

$$|G(j\omega_b)| = \frac{4\omega_b^2}{(1 + (\frac{\omega_b}{0.5})^2)(1 + (\frac{\omega_b}{10})^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = \begin{cases} 0.785 \\ 6.37 \end{cases}$$

dvs

$$\omega_b = [0.785 \quad 6.37]$$



- Lösning till 5.9

- Lösning till 5.10

Den öppna kretsförstärkningen

$$L(s) = \frac{Ke^{-s}}{1 + 5s}$$

har inga poler i högra halvplanet, dvs stabiliteten kan studeras med hjälp av Nyquist förenklade kriterium. Kriteriet säger att systemet inte är instabilt om

$$|L(j\omega_\pi)| \leq 1$$

där ω_π ges av

$$\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

Detta kan avgöras grafiskt i ett Bode, alternativt Nyquistdiagram, där $L(s)/K$ uppritas och amplitudmarginalen avläses vilket ger K . I följande lösning löses dock detta numeriskt med hjälp av de två ekvationerna ovan. Börjar därför med att beräkna ω_π

$$\begin{aligned} \angle L(j\omega_\pi) &= -\omega \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - \arctan 5\omega = -180^\circ \\ \Rightarrow \omega_\pi &= 1.69 \end{aligned}$$

Beloppet av krets förstärkningen för ω_π

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (5\omega_\pi)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + (5 \cdot 1.69)^2}} \leq 1$$

sätter en gräns för K

$$K \leq 8.5$$

Likhet ger det maxvärde som K kan ha för att systemet inte skall vara instabilt, dvs $K_{\max} = 8.5$. Varken Routh-Hurwitz eller polbestämning kan avgöra stabiliteten eftersom systemet innehåller död tid.

• Lösning till 5.11

Allmänt kan ett godtyckligt $L(s)$ skrivas på formen

$$L(s) = \frac{K}{s^n} \frac{a(s)}{b(s)}$$

där a och b polynomen är normerade så att $a(0)/b(0) = 1$. K/s^n är lågfrekvensasymptoten, där K är krets förstärkningen och n är kretsens typsiffra, dvs antalet integrationer hos $L(s)$.

Fasvridningen blir

$$\angle L(j\omega) = \angle K - n \cdot 90^\circ + \angle a(j\omega) - \angle b(j\omega)$$

Enligt figur har krets förstärkningen $L(s)$ en fasvridning på -270° för $\omega = 0$.

Då krets förstärkningen K är positiv fås $\angle K = 0$, dvs

$$\angle L(j0) = -n \cdot 90^\circ = -270^\circ - k360^\circ$$

Typsiffran $n = 3 + 4k$, där $k = 0, 1, 2, \dots$

Stabiliteten studeras med fullständiga Nyquist kriteriet, där polerna i origo undviks genom

$$s = re^{j\theta}, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, r \ll 1,$$

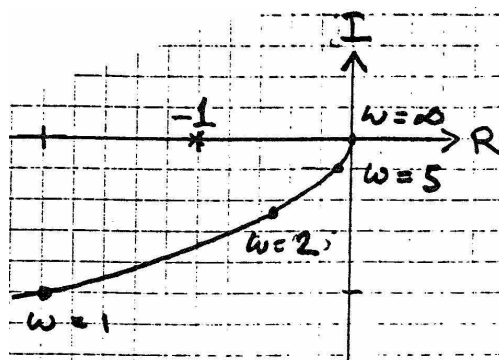
Det innebär $n \cdot 1/2$ varv med medurs omslingringar kring origo, vilket ger totalt antal omslingringarna kring -1 som $N = -1 + \frac{n-1}{2} = 2k$ stycken. Då inga poler ligger i högra halvplanet hos $L(s)$ är $P = 0$.

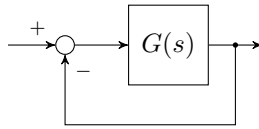
$$Z = N + P = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$$

dvs systemet är stabilt då $k = 0$ ty då är $Z = 0$, men instabilt då $k = 1, 2, \dots$, ty då är $Z > 0$.

• Lösning till 5.12

a)

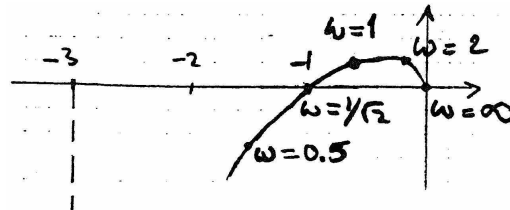




Stabilt system!

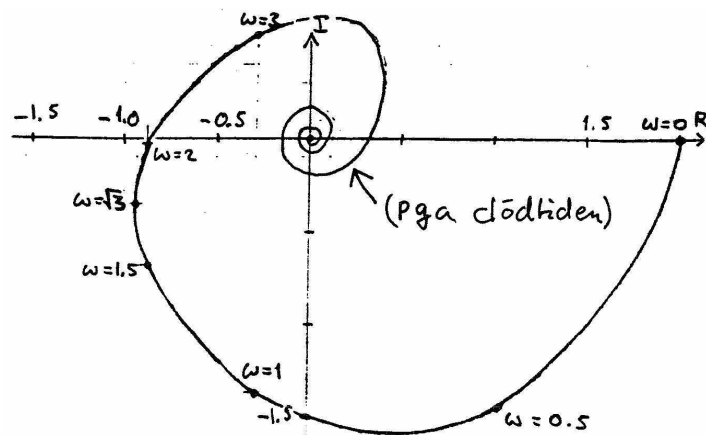
Nyqvist förenklade kriterium OK, ty öppna systemet, G , stabilt ($P=0$).

b)



($P=0$) Systemet marginellt stabilt!

c)



($P=0$) Stabilt system!

Då $P=0$ kan i samtliga fall Nyqvist förenklade kriterium användas.

• Lösning till 5.13

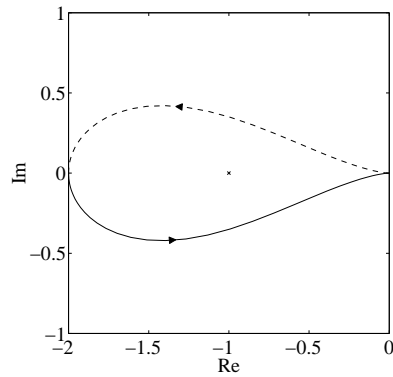
Notera att Nyqvist fullständiga kriterium måste användas i både a), b) och c) eftersom alla överföringsfunktioner har en pol i högra halvplanet, dvs $P = 1$.

a)

$$L(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$$

$$L(j\omega) = -\frac{4}{(1-j\omega)(j\omega+2)} = -\frac{4(2+\omega^2)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} - j\frac{4\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel.



Ur figur fås

$$N = -1$$

vilket innebär att

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

dvs systemet är stabilt enligt Nyqvist kriterium.

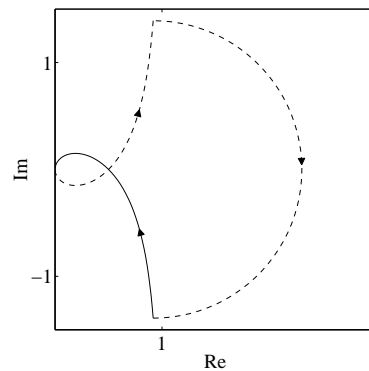
b)

$$L(s) = \frac{2+s}{s(2-s)}$$

$$L(j\omega) = \frac{2+j\omega}{j\omega(2-j\omega)} = \frac{4}{(4+\omega^2)} - j \frac{(4-\omega^2)}{\omega(4+\omega^2)}$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. För $s = re^{j\theta}$ där $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $r \ll 1$ fås

$$L(re^{j\theta}) \rightarrow \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$



Ur figur fås

$$N = 0$$

vilket innebär att

$$Z = N + P = 0 + 1 = 1$$

dvs systemet är instabilt ty 1 pol ligger i högra halvplanet hos det slutna systemet enligt Nyqvist kriterium.

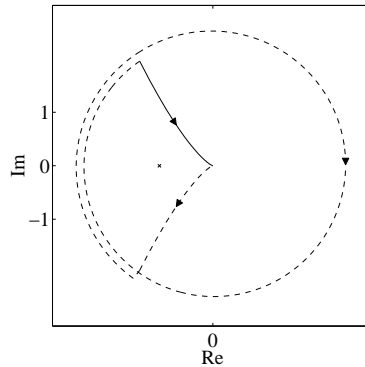
c)

$$L(s) = \frac{1}{s^3(1-s)}$$

$$L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3(1-j\omega)} = -\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} + j \frac{1}{\omega^3(1+\omega^2)}$$

där sista likheten fås genom komplex konjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. För $s = re^{j\theta}$ där $90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $r \ll 1$ fås

$$L(re^{j\theta}) \rightarrow \frac{1}{r^3} e^{-j3\theta}$$



Ur figur fås $N = 2$ vilket innebär att

$$Z = N + P = 2 + 1 = 3$$

dvs systemet är instabilt med 3 poler i högra halvplanet hos det slutna systemet, enligt Nyquist kriterium.

• Lösning till 5.14

Kretsförstärkningen är

$$L(s) = KG(s) = K \frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}$$

Stabiliteten skall studeras med Nyquist kriterium. Eftersom $L(s)$ har en pol i högra halvplanet, $P = 1$, måste Nyquist fullständiga kriterium tillämpas.

För att det återkopplade systemet skall vara stabilt enligt Nyquist kriterium måste

$$Z = N + P = 0$$

dvs $N = -P = -1$, vilket innebär en moturs omslingring av -1 .

Värdena på K som ger ett stabilt system kan bestämmas genom att avbilda $L(s)$ för $K = 1$ (dvs $G(s)$) längst Nyquist väg

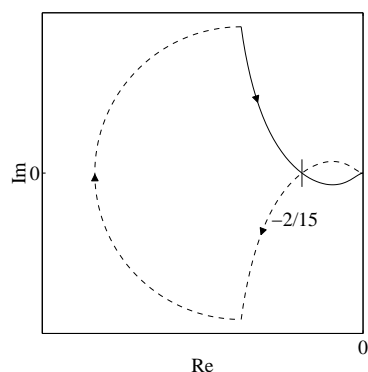
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega - 1)(j\omega + 6)} = -\frac{(11 + \omega^2)}{(1 + \omega^2)(36 + \omega^2)} + j\frac{(6 - 4\omega^2)}{\omega(1 + \omega^2)(36 + \omega^2)}$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. Eftersom gradtalet i täljaren är strikt mindre än i närmaren ger $s = Re^{j\theta}$, $90^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$, $R \gg 1$ att

$$G(Re^{j\theta}) \rightarrow 0$$

För $s = -j\omega$ fås spegelbilden av $G(j\omega)$ kring real-axeln. För $s = re^{j\theta}$ där $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ $r \ll 1$ fås

$$G(re^{j\theta}) = -\frac{e^{-j\theta}}{6r}$$



För $K = 1$ är systemet instabilt ty $N = 1$.

Vi vill att skärningen med real-axeln skall vara till vänster om -1. Detta inträffar då

$$\frac{6 - 4\omega^2}{\omega(1 + \omega^2)(36 + \omega^2)} = 0$$

dvs för $\omega^2 = 6/4 = 3/2$, vilket medför att

$$-\frac{K(11 + 3/2)}{(1 + 3/2)(36 + 3/2)} = -\frac{2K}{15} < -1$$

dvs $K_{\min} = 15/2$. Om $K < K_{\min}$ blir $N = 1$, om $K > K_{\min}$ kommer $N = -1$, dvs systemet är då stabilt. Jämför nu med Routh-Hurwitz kriterium. Karakteristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$ resulterar i

$$1 + K \frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)} = 0$$

eller

$$s^3 + 5s^2 + (-6 + K)s + K = 0$$

Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & -6 + K \\ s^2 & 5 & K \\ s^1 & c_1 & \\ s^0 & d_1 & \end{array}$$

där

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{5(-6 + K) - K}{5} = -6 + \frac{4K}{5} \\ d_1 &= \frac{c_1 K - 0 \cdot 5}{c_1} = K \end{aligned}$$

Systemet är alltså stabilt enligt Routh-Hurwitz om $K > 0$ och

$$c_1 = -6 + \frac{4K}{5} > 0$$

dvs

$$K > \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

• Lösning till 5.15

Observationerna ger följande information

ω	$ G(j\omega) $	φ
0.4	1.0	-90°
1.5	0.3	-135°
2.0	0.5	-180°

Överkorsningsfrekvensen bestämmer fasmarginalen

$$\omega_c = 0.4$$

$$\varphi = -90^\circ \rightarrow \varphi_m = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Beloppet vid fasen -180° bestämmer amplitudmarginalen

$$\omega_\pi = 2$$

$$|G(j\omega_\pi)| = 0.5 \rightarrow A_m = 2$$

Nyquists förenklade kriterium visar att det återkopplade systemet är stabilt.

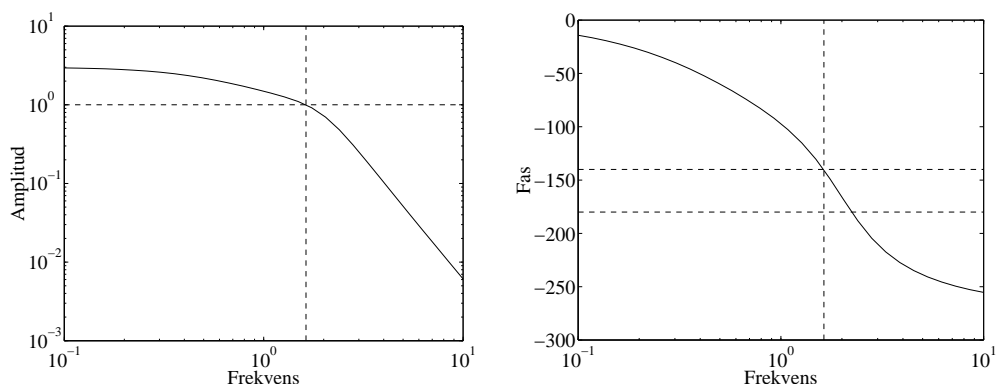
• Lösning till 5.16

Kretsöverföring

$$L(s) = G_A(s)K_2(s)G_1(s)K_p = \frac{1}{s(1+0.5s)+2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{0.1+0.2s} \cdot 0.2$$

$$= \frac{3}{\left(1 + \frac{s}{0.5}\right)\left(1 + 2 \cdot 0.5 \frac{s}{2} + \frac{s^2}{2^2}\right)}$$

Det komplexkonjugerade polparet har $\omega_0 = 2$ och $\zeta = 0.5$



Avläsning i Bodediagram ger $\varphi_m = 40^\circ$ och $\omega_c = 1.6$ rad/s. En grov uppskattning av stigtiden t_r fås med relationen $t_r \omega_c \approx 1$, vilket ger

$$t_r \approx \frac{1}{\omega_c} = 0.6 \text{ s}$$

Den verkliga stigtiden är c:a 0.7 s.

• Lösning till 5.17

Kretsöverföringen $L(s)$ blir

$$L(s) = \frac{K_i}{s} K e^{-sT_d} \quad \text{där } K = 200 \text{ kg/sek och } T_d = 10 \text{ sek}$$

dess belopp och fas

$$|L(j\omega)| = K_i \frac{K}{\omega}$$

$$\angle L(j\omega) = -90^\circ - \omega T_d \cdot \frac{180}{\pi}$$

Kravet $\varphi_m \geq 40^\circ$
Enligt definition är

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \omega_c T_d \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \geq 40^\circ \Rightarrow \omega_c \leq \frac{50\pi}{180T_d}\end{aligned}$$

Eftersom ω_c ges av $|L(j\omega_c)| = 1$ fås

$$K_i \frac{K}{\omega_c} = 1 \quad \text{dvs} \quad K_i = \frac{\omega_c}{K} \leq \frac{50\pi}{180T_d K}$$

vilket med insatta värden ger

$$K_i \leq \pi/7200 = 4.36 \cdot 10^{-4}$$

Kravet $A_m > 2.5$ ggr
Enligt definition är

$$\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ, \quad A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

Första ekvationen implicerar att

$$-90^\circ - \omega_\pi T_d \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ \Rightarrow \omega_\pi = \frac{\pi}{2T_d}$$

dvs kravet $A_m \geq 2.5$ ger

$$A_m = \frac{1}{K_i \frac{K}{\omega_\pi}} = \frac{\pi}{2T_d K_i K} \geq 2.5 \quad \text{dvs} \quad K_i \leq \frac{\pi}{5T_d K}$$

vilket med insatta värden ger

$$K_i \leq \frac{\pi}{10000} = 3.14 \cdot 10^{-4}$$

Av de två kraven ställer $A_m \geq 2.5$ ggr strängare krav på K_i , dvs om $K < K_i^{max}$ där

$$K_i^{max} = 3.14 \cdot 10^{-4}$$

så uppfylls båda kraven.

• Lösning till 5.18

a) Inför beteckningen

$$r(\omega) = |1 + L(j\omega)| \Rightarrow |S(j\omega)| = \frac{1}{r(\omega)}$$

$$\begin{aligned}|T(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{r(\omega_c)} = \frac{1}{r(\omega_c)} = |S(j\omega_c)| \\ &= \frac{1}{2 \cdot r(\omega_c)/2} = \frac{1}{2 \sin(\varphi_m/2)}\end{aligned}$$

b)

$$\max(\min r(\omega)) \Leftrightarrow \min(\max 1/r(\omega)) = \min(\max |S(j\omega)|)$$

c) $L(j\omega)$ innanför $B \Rightarrow r(\omega) < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| > 1$

Dessutom kommer $L(j\omega)$ att passera cirkeln med en fas motsvarande $\varphi_m < 60^\circ$

$\max |S(j\omega)| \leq 1 \Rightarrow L(j\omega)$ ej hamnar innanför cirkeln $B \Rightarrow \varphi_m \geq 60^\circ$ och $A_m = \infty$

• Lösning till 5.19

Eftersom tjockleken x mäts med en givare placerad d meter från fräshjulet och materialet rör sig med hastigheten $v = 1.25$ cm/sek, är tjockleken x fördröjd d/v sek.

Kretsöverföringen $L(s)$ blir därför

$$L(s) = \frac{0.1}{s(1 + 0.1s)} e^{-(d/1.25)s}$$

Stabilitet studeras med Nyquist förenklade kriterium. Detta implicerar att systemet är stabilt om

$$|L(j\omega_\pi)| < 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{0.1}{\omega_\pi \sqrt{1 + (0.1\omega_\pi)^2}} < 1$$

eller, om ω_π löses ut, $\omega_\pi > \sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}$. Eftersom, enligt definition, $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$ fås

$$-\frac{d\omega_\pi}{1.25} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_\pi) = -180^\circ$$

För ett stabilt system, då $\omega_\pi > \sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}$, gäller att

$$-\frac{d\sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}}{1.25} \cdot \frac{180}{\pi} - 90^\circ - \arctan(0.1\sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}) > -180^\circ$$

dvs, d ska uppfylla

$$d < \left(90^\circ - \arctan(0.1\sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}) \right) \cdot \frac{1.25\pi}{180^\circ \sqrt{-50 + \sqrt{50^2 + 1}}} = 19.5$$

dvs för $d < 19.5$ cm är systemet stabilt.

• Lösning till 5.20

Utan reglering

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

För låga frekvenser ($s \rightarrow 0$), $G(s) \approx 1$. Reglering ska dämpa störningen 50 ggr. Vid reglering antas stor krets förstärkning vid störningsfrekvensen, $K_p G(s) \gg 1$, dvs

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1 + K_p G(s)} \approx \frac{1}{K_p} < \frac{1}{50}$$

dvs $K_p > 50$

• Lösning till 5.21

Då en process utsätts för laststörningar blir utsignalen vid återkopplad reglering (closed loop) $Y_{cl}(s) = S(s)Y_{ol}(s)$, där $Y_{ol}(s)$ är processens utsignal utan återkoppling (open loop) och $S(s)$ är det återkopplade systemets känslighetsfunktion.

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + K}$$

En reduktion av lågfrekventa laststörningar $\omega \leq 0.5$ rad/s med en faktor 3 motsvarar därför ett krav på

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}} < \frac{1}{3}$$

för $\omega \leq 0.5$ rad/s. För låga frekvenser är $|S|$ en växande funktion med avseende på ω ($|S| \approx \omega/K$). Därför studeras olikheten vid $\omega = 0.5$ rad/s, d.v.s.

$$\begin{aligned} 3\omega\sqrt{\omega^2 + 1} &< \sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2} \\ 9 \cdot 0.5^2(0.5^2 + 1) &< K^2 - 2 \cdot 0.5^2 K + 0.5^4 + 0.5^2 \\ K^2 - 0.5K - 8(0.5^4 + 0.5^2) &> 0 \\ K &> 0.25 + \sqrt{0.25^2 + 2.5} = 1.85 \end{aligned}$$

Kravet på undertryckning av lågfrekventa laststörningar ger därför en undre gräns för $K > 1.85$.

Mätbrusets inverkan på utsignalen $|Y/W|$ ska reduceras i förhållande till inverkan på den uppmätta utsignalen ($|Y_m/W| = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{Y}{W} &= \frac{L}{1 + L} = T \\ T &= \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + s + K} \end{aligned}$$

För höga frekvenser ($\omega > 3$) gäller $|T| \approx |T|_{HF} = K/\omega^2$ (om brytfrekvensen $\sqrt{K} < 3$). Kravet på ett litet $|T|$ vid högre frekvenser ger en övre gräns för K

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}} < \frac{1}{4}$$

dvs

$$\begin{aligned} 4K &< \sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2} \\ 16K^2 &< K^2 - 2 \cdot 3^2 K + 3^4 + 3^2 \\ K^2 + \frac{18}{15}K - \frac{90}{15} &< 0 \\ K &< -0.6 + \sqrt{0.6^2 + 6} = 1.92 \end{aligned}$$

De båda kraven ger ett intervall för värden på K

$$1.85 < K < 1.92$$

• Lösning till 5.22

Kretsöverföringen $L(s) = F_{r1} \cdot G \cdot F_{r2}$, $G = \frac{1}{(s+1)^2}$

I.

$$\begin{aligned} L &= \frac{7}{(s+1)^2} \\ S &= \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + 7} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 8} \\ T &= \frac{7}{(s+1)^2 + 7} = \frac{7}{s^2 + 2s + 8} \\ GS &= \frac{1}{(s+1)^2 + 7} = \frac{1}{s^2 + 2s + 8} \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
 L &= 1.4 \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1.4}{s(s+1)} \\
 S &= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+1.4} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1.4} \\
 T &= \frac{1.4}{s(s+1)+1.4} = \frac{1.4}{s^2+s+1.4} \\
 GS &= \frac{s}{(s+1)(s(s+1)+1.4)} = \frac{s}{(s+1)(s^2+s+1.4)}
 \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}
 S &= 1 \\
 T &= 0 \\
 GS &= \frac{1}{(s+1)^2}
 \end{aligned}$$

Asymptoterna för frekvensfunktionerna

	$ S _{LF}$	$ S _{HF}$	$ T _{LF}$	$ T _{HF}$	$ GS _{LF}$	$ GS _{HF}$
I.	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{\omega^2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{\omega^2}$
II.	$\frac{\omega}{1.4}$	1	1	$\frac{1.4}{\omega^2}$	$\frac{\omega}{1.4}$	$\frac{1}{\omega^2}$
III.	1	1	0	0	1	$\frac{1}{\omega^2}$

Vid referenssignaländringar med återkoppling gäller

$$\left| \frac{E}{R} \right| = \left| \frac{1}{1+L} \right| = |S|$$

Vid referenssignaländringar och öppen styrning ($F_{r2} = 0$)

$$\begin{aligned}
 Y &= F_{r1}G \cdot R \\
 \frac{E}{R} &= 1 - F_{r1}G = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+1}
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{E}{R} \right|_{LF} = 2\omega, \quad \left| \frac{E}{R} \right|_{HF} = 1$$

Vid processtörningar (V) och mätfel (W), $R = 0 \Rightarrow E = R - Y = -Y$

$$\left| \frac{E}{V} \right| = \left| \frac{Y}{V} \right| = \left| \frac{G}{1+L} \right| = |GS|$$

$$\left| \frac{E}{W} \right| = \left| \frac{Y}{W} \right| = \left| \frac{L}{1+L} \right| = |T|$$

Eftersom brytpunkterna för S, T och GS ligger väl separerade från $\omega = 0.05, 20$, så räcker det att titta på LF, HF-asymptoterna.

	I	II	III*)
a) $v = \text{enhetssteg}$ $ GS_{LF}(0) $	0.125	0	1
b) $v = \sin(\omega t)$ $ GS_{LF}(j0.05) $ $ GS_{HF}(j20) $	0.125 0.0025	0.0036 0.0025	1 0.0025
c) $w = \sin(\omega t)$ $ T_{LF}(j0.005) $ $ T_{HF}(j20) $	0.875 0.018	1 0.0035	0 0
d) $r = \text{enhetssteg}$ $ S_{LF}(0) $	0.125	0	0
e) $r = \sin(\omega t)$ $ S_{LF}(j0.05) $ $ S_{HF}(j20) $	0.125 1	0.036 1	0.1 1
*) Öppen styrning			

Lågfrekventa processtörningar och stegstörningar kompenseras via återkoppling, men ej vid öppen styrning. Den effektivaste kompenseringen erhålls vid PI-reglering då kvarstående fel undviks vid stegstörningar. Högfrekventa processtörningar påverkas inte alls av återkopplingen, men kompenseras väl av processen.

Högfrekventa mätstörningar kompenseras via återkoppling, medan lågfrekventa mätstörningar ej kompenseras av återkopplingsmekanismen.

Referenssignalsteg ger kvarstående fel vid P-reglering men ej vid PI-reglering och öppen styrning. Lågfrekventa referenssignalvariationer kompenseras mest effektivt vid PI-reglering, medan högfrekventa referenssignalvariationer ej följs av någon styrstrategi.

• Lösning till 5.23

Enligt figur

$$L = \frac{K_p}{s(s+1)}, \quad G = \frac{1}{s(s+1)}$$

a) Bodediagram, LF: $\frac{K_p}{s}$, brytfrekvens $\omega = 1$

$$\angle L(j\omega) = -90^\circ - \arctan(\omega)$$

Bestäm överkorsningsfrekvens ω_c och ta fram fasmarginalen φ_m

$$\begin{aligned} |L(j\omega_c)| = 1 &\Rightarrow K_p = \omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1} \\ K_p^2 &= \omega_c^4 + \omega_c^2 \\ \omega_c^2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + K_p^2} \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c)$$

Högre $K_p \rightarrow$ Högre $\omega_c \rightarrow$ Mindre φ_m

b)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1+L} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+K_p} & |S|_{LF} &= \frac{\omega}{K_p} & |S|_{HF} &= 1 \\ T &= \frac{L}{1+L} = \frac{K_p}{s^2+s+K_p} & |T|_{LF} &= 1 & |T|_{HF} &= \frac{K_p}{\omega^2} \\ GS &= \frac{G}{1+L} = \frac{1}{s^2+s+K_p} & |GS|_{LF} &= \frac{1}{K_p} & |GS|_{HF} &= \frac{1}{\omega^2} \\ FS &= \frac{F}{1+L} = \frac{K_p s(s+1)}{s^2+s+K_p} & |FS|_{LF} &= \omega & |FS|_{HF} &= K_p \end{aligned}$$

Följning av referenssignal: $E/R = 1/(1+L) = S$, stort K_p ger bra fölning vid lägre frekvenser eftersom $|S|$ då blir liten.

Processtörningar: $Y/V = G/(1+L) = GS$, stort K_p ger bra kompensering, eftersom $|GS|$ då är liten.

Mätstörningar: $Y/W = L/(1+L) = T$, bra kompensering då $|T|$ är litet, dvs då K_p är litet.

Styrsignalens känslighet för mätstörningar: $U/W = F/(1+L) = FS$, höga nivåer för högt FS och därmed stort K_p .

c) Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + s + K_p \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering av ζ och ω_n ger

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{K_p} \\ \zeta &= \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{K_p}} \end{aligned}$$

Polerna ges av

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K_p} \\ K_p = 0.25 : \quad s_{1,2} &= -0.5, \quad \zeta = 1 \\ K_p = 1 : \quad s_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta = 0.5 \\ K_p = 4 : \quad s_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}, \quad \zeta = 0.25 \end{aligned}$$

Minskad dämpning ger mindre fasmarginal. Ökad överkorsningsfrekvens ger i allmänhet ökad snabbhet. En enkel approximation är att $t_r\omega_c \approx 1$, där t_r är stigtiden.

• Lösning till 5.24

a) Kretsöverföringen är

$$L = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \frac{4}{s} = \frac{4(K_i + sK_p)}{s^2}$$

Polerna ges av den karakteristiska ekvationen

$$1 + L = 0 \Rightarrow s^2 + 4K_p s + 4K_i \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering ger

$$\omega_n = 2\sqrt{K_i}, \quad \zeta = \frac{4K_p}{2\omega_n} = \frac{K_p}{\sqrt{K_i}} = 0.7$$

Sambandet mellan K_p och K_i

$$K_p^2 = 0.49K_i$$

Överkorsningsfrekvensen ω_c ges av

$$|L(j\omega_c)| = \left| \frac{4(K_i + j\omega_c K_p)}{-\omega_c^2} \right| = 1 \Rightarrow 4\sqrt{K_i^2 + K_p^2 \omega_c^2} = \omega_c^2$$

$$16(K_i^2 + 0.49K_i\omega_c^2) = \omega_c^4$$

$$\omega_c^4 - 7.84K_i\omega_c^2 - 16K_i^2 = 0$$

$$\omega_c^2 = (3.92 + 5.60)K_i$$

$$\omega_c = 3.086\sqrt{K_i}$$

Beräkna fasmarginalen

$$\begin{aligned} \angle L(j\omega_c) &= \arctan\left(\frac{K_p\omega_c}{K_i}\right) - 180^\circ = \arctan\left(\frac{\sqrt{0.49K_i} \cdot 3.086\sqrt{K_i}}{K_i}\right) - 180^\circ \\ &= 65.2^\circ - 180^\circ \end{aligned}$$

dvs $\varphi_m = 65^\circ$

b) Referenssignal: $E/R = 1/(1+L) = S$

Processtörningarnas inverkan ges av: $Y/V = G/(1+L) = GS$

Mätstörningar: $Y/W = L/(1+L) = T$

Styrsignalens känslighet för mätstörning: $U/W = F/(1+L) = FS$

$$S = \frac{1}{1+L} = \frac{s^2}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \quad |S|_{LF} = \frac{\omega^2}{4K_i}$$

d.v.s. stort K_i förbättrar följningen av lågfrekventa referenssignaländringar.

$$GS = \frac{G}{1+L} = \frac{4s}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \quad |GS|_{LF} = \frac{\omega}{K_i}$$

d.v.s. stort K_i ger en effektivare kompensering av processtörningar.

$$T = \frac{L}{1+L} = \frac{4(K_i + K_p s)}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \quad |T|_{HF} = \frac{4K_p}{\omega}$$

d.v.s. stort K_p ger sämre kompensering av mätstörningar.

$$FS = \frac{F}{1+L} = \frac{s(K_i + K_p s)}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \quad |FS|_{HF} = K_p$$

d.v.s. stort K_p ökar känsligheten för mätstörningar hos styrsignalen.

c) Enligt a) gäller sambandet

$$\frac{1}{K_i} = \frac{\zeta^2}{K_p^2}$$

Detta samband samt resultaten i uppgift b) visar att det råder motstridiga krav när det gäller önskemålen att samtidigt uppnå t.ex. god kompensering av processtörningar (stort K_i), liten känslighet för mätstörningar (litet K_p) och väl dämpning (stort ζ , goda stabilitetsmarginaler). En förbättring av prestanda, d.v.s. en ökning av K_i , kräver antingen en minskning av ζ (sämre dämpning) eller en ökning av K_p (ökad känslighet för mätstörningar).

a) För återkopplat system

$$\frac{Y}{V} = \frac{\frac{K}{1+s}}{1 + \frac{2K}{s(s+1)}} = \frac{sK}{s^2 + s + 2K} = G_{vy1}(s)$$

Utan återkoppling

$$\frac{Y}{V} = \frac{K}{1+s} = G_{vy2}(s)$$

b) Bättre kompensering med återkoppling om $|G_{vy1}(j\omega)| < |G_{vy2}(j\omega)|$, dvs

$$\frac{|j\omega|K}{|2K - \omega^2 + j\omega|} < \frac{K}{|1 + j\omega|} \Rightarrow |2K - \omega^2 + j\omega| > |j\omega||1 + j\omega|$$

Kvadrering ger

$$4K^2 + \omega^4 - 4K\omega^2 + \omega^2 > \omega^2(1 + \omega^2)$$

$$4K^2 > 4K\omega^2, \quad \begin{cases} K = 1 \Rightarrow \omega < 1 \\ K = 2 \Rightarrow \omega < \sqrt{2} \approx 1.4 \end{cases}$$

Avläsning med hjälp av asymptotiskt Bodediagram (vid handräkning): Det återkopplade system ges i Bodeform av

$$G_{vy1}(s) = \frac{0,5s}{1 + \frac{1}{2K}s + \frac{1}{2K}s^2}$$

och har en brytfrekvens vid $\sqrt{2K}$.

Enligt de asymptotiska amplitudkurvorna för det öppna och det återkopplade systemet ger det återkopplade system bättre kompensering fram till återkopplade systemets brytfrekvens $\sqrt{2K}$. Lägg märke till att vi inte har tagit hänsyn till de verkliga amplitudkurvorna, som för det återkopplade systemet ju är beroende av dess dämpning.

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{2K}{s(s+1)}} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 2K}, \quad |S(j\omega)| = \frac{|j\omega||j\omega+1|}{|2K - \omega^2 + j\omega|}$$

Om återkoppling är bättre gäller enligt ovan $|2K - \omega^2 + j\omega| > |j\omega||j\omega+1|$, dvs $|S| < 1$. Större K medför att återkoppling är fördelaktigt upp till högre frekvenser. I gengäld ökar $\max |S|$ (enligt Bodediagram eller Bodes integralsats) vilket försämrar kompenseringen av processtörningar för det reglerade systemet i motsvarande frekvensområde.

• Lösning till 5.26

a) Öppet: $Y = G \cdot V$

$$\text{Slutet: } Y = \frac{G}{1 + F \cdot G} \cdot V$$

Minskningen av störningens inverkan genom återkoppling ges av

$$\frac{(Y/V)_{\text{slutet}}}{(Y/V)_{\text{öppet}}} = \frac{1}{1 + F \cdot G} = S$$

b) Slutna systemet ger bättre reglering än det öppna om $|S(j\omega)| < 1$, $\forall \omega$. Detta kan formuleras som

$$|S(j\omega)| < 1, \forall \omega \Leftrightarrow \frac{1}{|1 + F(j\omega)G(j\omega)|} < 1, \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$|F(j\omega)G(j\omega) - (-1)| > 1, \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$F(j\omega)G(j\omega) = L(j\omega) \text{ ligger utanför cirkeln med centrum i } -1 \text{ och radien } 1$$

• Lösning till 5.27

Systemet utsätts för störningar v kring frekvensen ω_0 , dvs

$$V(s) = \frac{B(s)}{s^2 + \omega_0^2} \quad (\text{Om } v(t) = \sin \omega_0 t \text{ är } V(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2})$$

Enligt interna modellprincipen införs nämnarpolynomet $s^2 + \omega_0^2$ i kretsöverföringen. Eftersom störningen ligger innan processen måste man även kompensera för processens inverkan på störningen, dvs inför $\frac{s+2}{s^2 + \omega_0^2}$ i kretsöverföringen

$$L(s) = K(s+1) \cdot \frac{s+2}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{K(s+1)}{s^2 + \omega_0^2}$$

Karakteristisk ekvation

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + \omega_0^2 + Ks + K = 0$$

En dubbelpol: $(s+a)^2 \equiv s^2 + Ks + \omega_0^2 + K$, $a > 0$

Beräkna a och K

$$\begin{cases} 2a = K \\ a^2 = \omega_0^2 + K \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2a - \omega_0^2 = 0$$

dvs

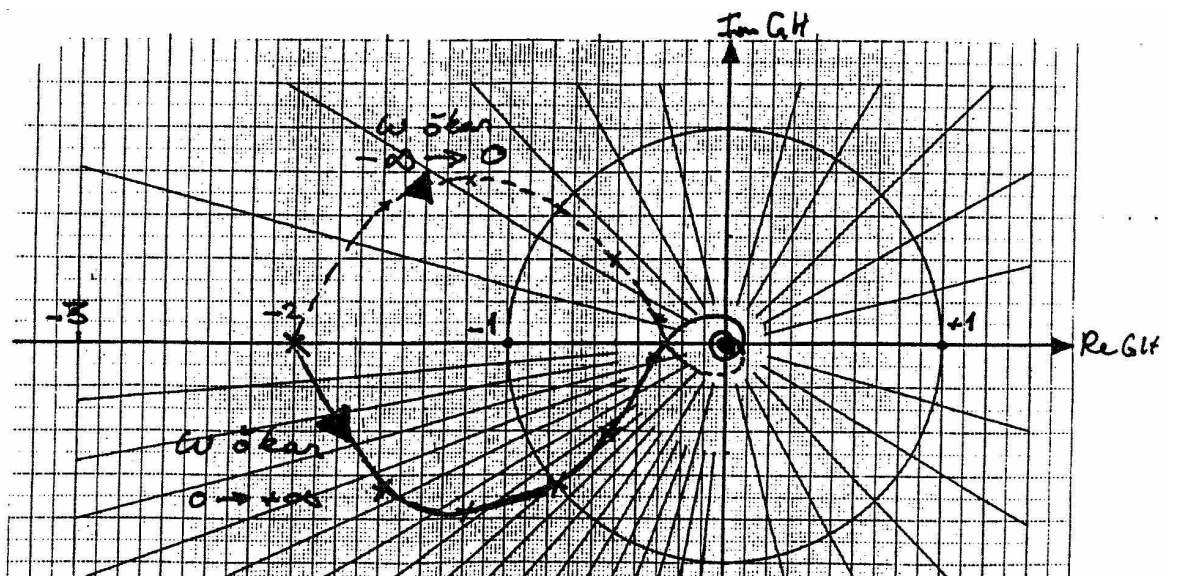
$$\begin{aligned} a &= 1 + \sqrt{1 + \omega_0^2} = 2.02 \quad (\omega_0 = 0.2) \\ K &= 2a = 4.04 \end{aligned}$$

Sökta överföringsfunktioner blir

$$\begin{aligned} G_{ry} &= \frac{K(s+1)}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(s+1)}{s^2 + \omega_0^2}} = \frac{K(s+1)}{s^2 + Ks + K + \omega_0^2} = \frac{4.04(s+1)}{(s+2.02)^2} \quad (\text{dubbelpol enligt ovan}) \\ G_{vy} &= \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(s+1)}{s^2 + \omega_0^2}} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{(s+2)(s^2 + Ks + K + \omega_0^2)} = \frac{s^2 + 0.2^2}{(s+2)(s+2.02)^2} \\ &\approx \frac{s^2 + 0.2^2}{(s+2)^3} \\ G_{ru} &= \frac{K(s+2)(s+1)}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(s+1)}{s^2 + \omega_0^2}} = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2 + Ks + K + \omega_0^2} = \frac{4.04(s+1)(s+2)}{(s+2.02)^2} \\ &\approx \frac{4.04(s+1)}{(s+2)} \end{aligned}$$

• Lösning till 5.28

$P = 1, N = -1 \Rightarrow Z = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ Stabilt system!



10.6 Design av regulatorer i frekvensplanet

• Lösning till 6.1

Då $F(s)$ har ren I-verkan

$$L(s) = \frac{K_i}{s} \frac{1}{s(2+s)}, \quad \angle L(j\omega) < -180^\circ$$

dvs, går ej att få stabilt system: A, E går inte.

Kvarstående fel vid störning

$$\frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Proportionell reglering, $F = K_p$

$$\frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{1}{s(2+s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p}{s(2+s)}} = -\frac{1}{s^2 + 2s + K_p}$$

Slutvärdessatsen, $v(t) = 2t$

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{2}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{s} \right) \cdot \frac{1}{K_p} \rightarrow \infty$$

dvs, B, C går inte. Välj D!

Kvarstående fel för fall D

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{V(s)} &= -\frac{1}{s(2+s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{20}{s} \cdot \frac{5s+1}{s(2+s)}} = -\frac{s}{s^3 + 2s^2 + 20(5s+1)} \\ e_s &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{2}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{s} \right) \cdot \frac{s}{20} = -0.1 \end{aligned}$$

Stabilitet

$$L(s) = \frac{20(5s+1)}{s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{20}{s^2} \frac{(5s+1)}{(s+2)}$$

Ta fram ω_c ur Bode-diagram

Alternativ: Titta på högfrekvensasymptoten

$$L_{HF}(s) = \frac{100}{s^2}, \quad |L_{HF}(j\omega)| = \frac{100}{\omega^2} = 1 \quad \text{för} \quad \omega = 10$$

Brytfrekvenserna 0.2 och 2 är mycket mindre än 10 dvs. $\omega_c \approx 10$

$$\angle L(j\omega_c) = \angle L(j10) = -80^\circ + \arctan(5 \cdot 10) - \arctan(0.5 \cdot 10) = -170^\circ$$

Stabilt med $\varphi_m = 10^\circ$

• Lösning till 6.2

Ta fram ω_{G150} för $G(s) = \frac{5}{(1+10s)^3}$

$$\angle G(j\omega_{G150}) = -3 \arctan(10\omega_{G150}) = -150^\circ$$

$$\arctan(10\omega_{G150}) = 50^\circ \Rightarrow \omega_{G150} = 0.119$$

dvs, välj $\omega_c = 0.0476$. Processens amplitud och fas vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c

$$|G(j\omega_c)| = \frac{5}{(1+100\omega_c^2)^{3/2}} = 3.68$$

$$\angle G(j\omega_c) = -3 \arctan 10\omega_c = -76.4^\circ$$

Dessa data erhålls också enkelt med hjälp av ett Bodediagram för $G(s)$. Betrakta PI-regulatorn

$$F(s) = \frac{K_i}{s}(1 + T_i s)$$

Vid frekvensen ω_c önskas följande fas och amplitud på kretsöverföringen

$$\begin{aligned}\angle L(j\omega_c) &= -180^\circ + \varphi_m = -130^\circ \\ |L(j\omega_c)| &= 1\end{aligned}$$

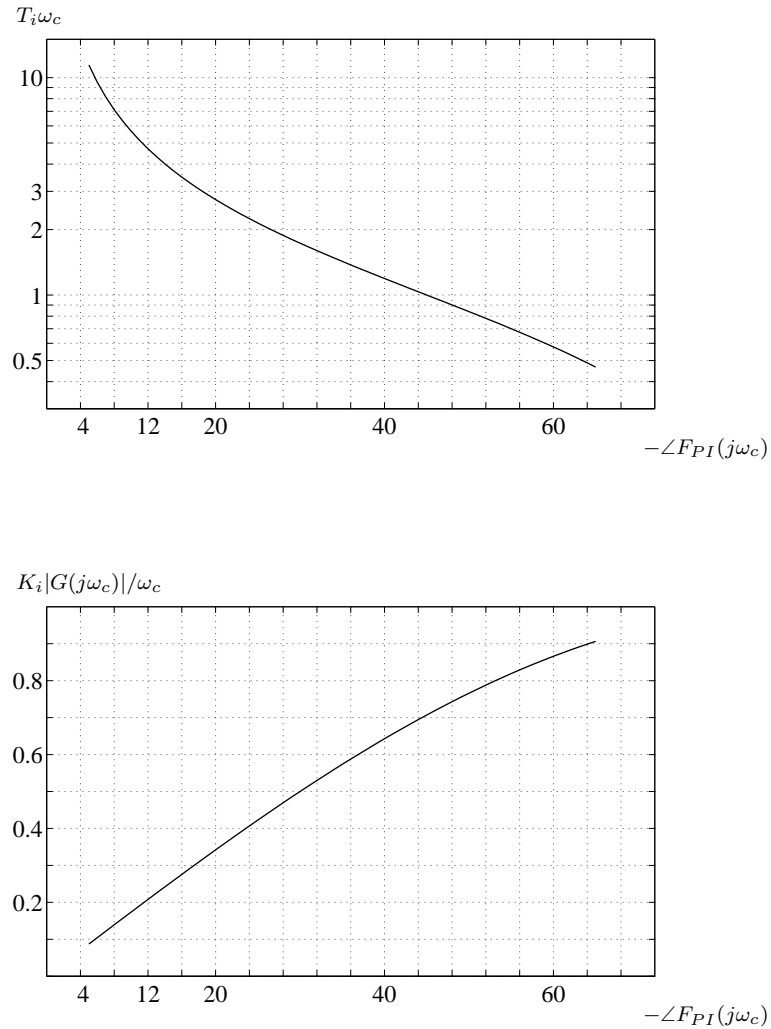
Regulatorns fas och amplitud vid ω_c

$$\begin{cases} \angle F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan T_i \omega_c \\ \angle F(j\omega_c) = \angle L(j\omega_c) - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 76.4^\circ = -53.6^\circ \end{cases}$$

$$T_i \omega_c = \tan 36.4^\circ \Rightarrow T_i = 15.5$$

$$\begin{cases} |F(j\omega_c)| = \frac{K_i}{\omega_c} \sqrt{1 + (T_i \omega_c)^2} = \frac{K_i}{\omega_c} \sqrt{1 + \tan^2 36.4^\circ} \\ |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{1}{3.68} \end{cases}$$

Dessa samband ger integralförstärkningen $K_i = 0.0104$ och högfrekvensförstärkningen $K_\infty = K_i T_i = 0.161$. Alternativt bestäms T_i och K_i via fig. 10.3.



Figur 10.3: $T_i \omega_c$ och $K_i |G(j\omega_c)| / \omega_c$ som funktion av önskad fasförändring hos regulatorn $\angle F_{PI}(j\omega_c)$ vid överkorsningfrekvensen ω_c .

• Lösning till 6.3

Identifiering utifrån stegsvaret ger $T_d = 2$, $T = 2$, $K = 3$

$$G(s) = \frac{K e^{-T_d s}}{1 + T s} = \frac{3 e^{-2s}}{1 + 2s}$$

a) Bestäm ω_{G150}

$$\angle G(j\omega_{G150}) = -2\omega_{G150} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - \arctan 2\omega_{G150} = -150^\circ$$

Numerisk lösning (alt ritande av Bodediagram) ger $\omega_{G150} = 0.802$, dvs välj $\omega_c = 0.321$. Vid den önskade överkorsningsfrekvensen ω_c , gäller för processen

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| &= \frac{3}{\sqrt{1 + 4\omega_c^2}} = 2.52 \\ \angle G(j\omega_c) &= -\arctan 2\omega_c - 2\omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -69.5^\circ \end{aligned}$$

Designa PI-regulator

$$F(s) = \frac{K_i}{s}(1 + T_i s)$$

Önskad fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$ innebär att fasen på regulatoren vid ω_c ska vara

$$\begin{cases} \angle F(j\omega_c) = \angle L(j\omega_c) - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 69.5^\circ = -60.5^\circ \\ \angle F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan T_i \omega_c = -60.5^\circ \end{cases}$$

$$\tan 29.5^\circ = T_i \omega_c \Rightarrow T_i = 1.76$$

Kretsens amplitud ska vara 1 vid ω_c

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{K_i}{\omega_c} \sqrt{1 + T_i^2 \omega_c^2} = \frac{K_i}{\omega_c} \sqrt{1 + \tan^2 29.5^\circ} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{1}{2.52} \\ &\Rightarrow K_i = 0.111 \end{aligned}$$

Alternativ: PI-design genom kurvavläsning i diagrammen i fig. 10.3

$$\text{Diagram 1)} \quad \angle F(j\omega_c) = -60.5^\circ \Rightarrow T_i \omega_c = 0.57 \Rightarrow T_i = 1.8$$

$$\text{Diagram 2)} \quad \angle F(j\omega_c) = -60.5^\circ \Rightarrow \frac{K_i |G(j\omega_c)|}{\omega_c} = 0.87 \Rightarrow K_i = 0.11$$

b) Variera ω_c , ta fram $\max K_i$. Arbetsgång: för givet ω_c , räkna ut $|G(j\omega_c)|$ och $\angle G(j\omega_c)$. Fasmarginalen ger det önskade $\angle F(j\omega_c)$, vilket bestämmer K_i . Vid handräkning ger diagrammen i fig. 10.3 följande resultat

ω_c	$ G $	φ_G	φ_F	K_i
0.3	2.57	-65.3	-64.7	0.105
0.4	2.34	-84.5	-45.5	0.122
0.5	2.12	-102.3	-27.7	0.110

Det optimala värdet på ω_c erhålls genom att skriva en MATLAB-rutin som bestämmer parametrarna i tabellen för önskat ω_c . En sökning för olika ω_c ger snabbt det optimala värdet $\omega_c = 0.41$, för vilket $K_i = 0.122$ och $T_i = 2.56$.

Observera att vi i denna optimering inte kontrollerar M_S . För de tre överkorsningsfrekvenserna $\omega_c = 0.3, 0.4$ och 0.5 blir $M_S = 1.8, 2.2$ och 2.9 . Rekommenderad övre gräns är $M_S \leq 1.7$, vilket visar att ovan genomförda optimering bör kompletteras med en övre gräns för M_S , se nästa deluppgift.

• Lösning till 6.4

- a) För överföringsfunktionen $G(s) = 5/(1 + 10s)^3$ gäller att $G(0) = 5$. Eftersom

$$\angle G(j\omega_{G180}) = -3 \arctan(10\omega_{G180}) = -180^\circ$$

gäller att

$$10\omega_{G180} = \tan 60^\circ = 1.73 \Rightarrow \omega_{G180} = 0.173$$

och $|G(j\omega_{G180})| = 5/(1 + 100\omega_{G180}^2)^{3/2} = 0.627$ (dessa data bestäms alternativt via Bodediagram). Kappatalet blir därför

$$\kappa_{180} = \frac{|G(j\omega_{G180})|}{G(0)} = \frac{0.627}{5} = 0.125$$

Enligt tabellen bestäms då PI-regulatorns parametrar till ($\tau = T_i$ för PI-reg.)

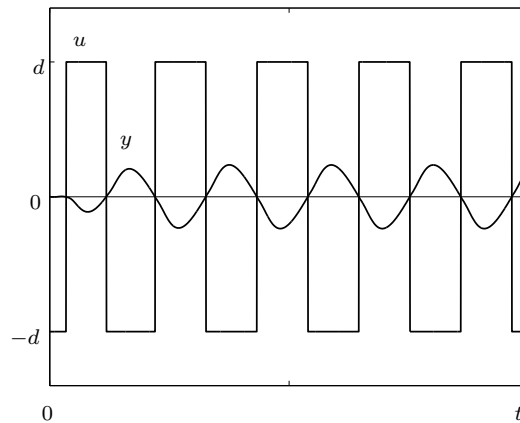
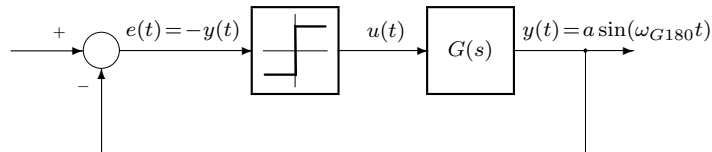
$$K_i = \omega_{G180}(0.33 - 0.15\kappa_{180})/G(0) = 0.173(0.33 - 0.15 \cdot 0.125)/5 = 0.0108$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_{G180}(0.18 + \kappa_{180})} = \frac{1}{0.173(0.18 + 0.125)} = 18.9$$

- b) Under förutsättning att processen har en negativ fasvridning på minst -180° erhålls självsvängning vid ren P-reglering då förstärkningen K_p höjs så att det återkopplade systemet blir marginellt stabilt. Detta innebär att kretsförstärkningen $K_p G(j\omega_{G180}) = -1$, vilket i sin tur tillsammans med den erhållna periodtiden för självsvängningen T_0 bestämmer

$$|G(j\omega_{G180})| = \frac{1}{K_p} \quad \omega_{G180} = \frac{2\pi}{T_0}$$

En begränsad självsvängning kan alternativt genereras med ett relä, se figurerna nedan.



Processens statiska förstärkning $G(0)$ bestäms med hjälp av ett stegsvar, där

$$G(0) = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Här är Δu insignaländringen från en konstant nivå u_0 till en annan nivå $u_0 + \Delta u$, och Δy den resulterande konstanta utsignaländringen efter att transienten har klingat av. Tillsammans ger detta $\kappa_{180} = |G(j\omega_{G180})|/G(0)$.

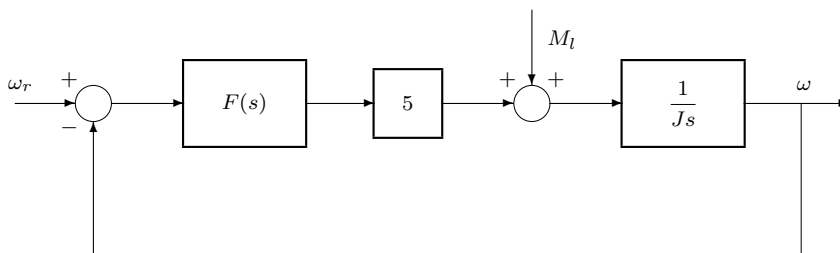
• Lösning till 6.5

Laplace-transformering ger

$$J \cdot sW(s) = k_m \cdot I(s) - M_l(s)$$

Inför regulatorn $F(s)$ som styr motorströmmen genom återkoppling av vinkelhastigheten

$$I(s) = F(s) (W_{\text{ref}}(s) - W(s))$$



i) Inget stationärt fel vid konstant lastmoment M_l kräver I -verkan

$$F_{PI}(s) = \frac{K_i}{s} (1 + sT_i)$$

ii) Kvarstående fel vid rampstörning

$$\frac{W(s)}{M_l(s)} = \frac{1}{100s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5K_i}{s}(1 + sT_i) \cdot \frac{1}{100s}}$$

Slutvärdessatsen då $M_l(t) = 10 \cdot t$ ger

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W(s)}{M_l(s)} \cdot \frac{10}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{100s + \frac{5K_i}{s}} \\ &= \frac{2}{K_i} \leq 0.5 \end{aligned}$$

dvs statiska förstärkningen $K_i \geq 4$

iii) Det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned} \frac{W(s)}{W_{\text{ref}}(s)} &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2}} \\ &= \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2 + 5K_iT_is + 5K_i} = \frac{1 + sT_i}{1 + T_is + \frac{100}{5K_i} \cdot s^2} \end{aligned}$$

Identifiera nämnarkoefficienterna i 2:a gradsuttrycket: $1 + 2\zeta T_n s + T_n^2 s^2$

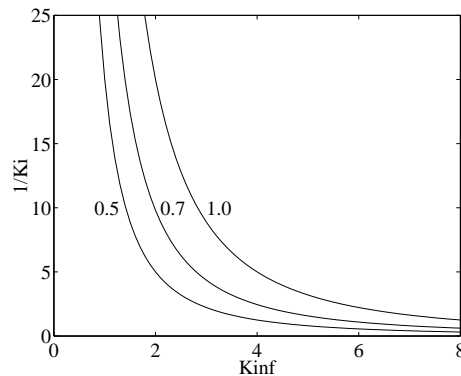
$$\zeta = \frac{T_i}{2\sqrt{\frac{100}{5K_i}}} = \frac{T_i\sqrt{K_i}}{4\sqrt{5}} \approx 0.112 T_i \sqrt{K_i}$$

a) En regulator som uppfyller i) – iii):

$$\text{Låt } K_i = 4, \quad \zeta = 0.7 \Rightarrow T_i = 3.13$$

b)

$$\begin{aligned} K_\infty &= K_i T_i = K_i \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{K_i}} \zeta = 4\sqrt{5} \zeta \sqrt{K_i} \\ K_\infty^2 &= 80\zeta^2 \cdot K_i \end{aligned}$$



c) Bra kompensering av laststörning vid lågt $\frac{1}{K_i}$ ger högt K_∞ , dvs höga styrsignaler och större kärlighet för mätstörningar. Både $\frac{1}{K_i}$ och K_∞ kan minskas om ζ väljs mindre; ett lägre ζ motsvarar lägre stabilitetsmarginaler.

• Lösning till 6.6
Dimensionera en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}, \quad G(s) = \frac{0.5}{s(1 + 2s)^2}$$

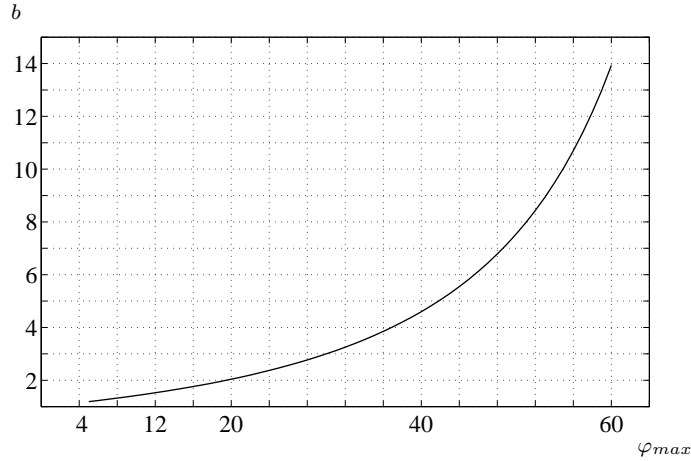
Önskad överkorsningsfrekvens given: $\omega_c = 0.4$. Vid ω_c gäller för processen

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| &= \frac{0.5}{0.4(1 + 4 \cdot 0.4^2)} = 0.762 \\ \angle G(j\omega_c) &= -90^\circ - 2 \arctan(2 \cdot 0.4) = -167.3^\circ \end{aligned}$$

a) $\varphi_m = 45^\circ$, kräver ett faslyft $\angle F_{PD} = 32.3^\circ$ vid ω_c . Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 10.4:
 $b = 3.3$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)| \sqrt{b}} = 0.72, \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 4.5$$

$$\begin{cases} \text{Lågfrekvensförstärkning : } K_p = 0.72 \\ \text{Högfrekvensförstärkning : } K_\infty = bK_p = 2.4 \end{cases}$$



Figur 10.4: Leadkvoten b relaterad till PD-regulatorns maximala faslyft φ_{max} , som inträffar vid mittfrekvensen $\omega_m = \sqrt{b}/\tau_d$.

b) $\varphi_m = 60^\circ$, kräver ett faslyft $\angle F_{PD} = 47.3^\circ$ vid ω_c . Enligt fig. 10.4: $b = 6.6$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)| \sqrt{b}} = 0.51, \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 6.4$$

$$\begin{cases} K_p = 0.51 \\ K_\infty = bK_p = 3.4 \end{cases}$$

Ökad stabilitetsmarginal ger högre K_∞ , d.v.s. högre styrsignaler med ökad känslighet för mätstörningar, och lågt K_p , d.v.s. sämre kompensering av processstörningar.

• Lösning till 6.7

Vid ω_c fås önskad fasmarginal. ω_c är också ett mått på systemets snabbhet. Använd en reglerstrategi (kompenseringslänk) som förskjuter ω_c med en faktor 5 med bibehållen faskaraktär. Regulatorn

$$F(s) = K_p \frac{1 + 5s}{1 + s}$$

kancellerar den långsamma polen och inför en snabbare, dvs förskjuter faskurvan med en faktor 5.

$$L(s) = K_p \frac{1 + 5s}{1 + s} \cdot \frac{1}{s(1 + 5s)} = \frac{K_p}{s(1 + s)}$$

Om det ursprungliga $\omega_c = \omega_{co}$, så har vi i första fallet utan kompensering

$$|0.5 G(j\omega_{co})| = \left| \frac{0.5}{j\omega_{co}(1 + 5j\omega_{co})} \right| = 1 \Rightarrow |j\omega_{co}(1 + 5j\omega_{co})| = 0.5 \quad (1)$$

Efter kompensering är $\omega_c = 5\omega_{co}$, dvs för kretsöverföringen med kompenseringslänk gäller

$$|L(j5\omega_{co})| = \left| \frac{K_p}{5j\omega_{co}(1 + 5j\omega_{co})} \right| = 1 \Rightarrow K_p = 5 |j\omega_{co}(1 + 5j\omega_{co})|$$

$$(1) \Rightarrow K_p = 5 \cdot 0.5 = 2.5.$$

Alternativ lösning: Rita Bodediagram för $L(s) = 0.5/(s(1 + 5s))$ (P-reglering) och bestäm $\omega_c = 0.29$. Rita Bodediagram för $1/(s(1 + s))$ och bestäm K_p så att $L(s) = K_p/(s(1 + s))$ får $\omega_c = 5 \cdot 0.29 = 1.43$. Detta erhålls då $K_p = 2.5$. Kontrollera att fasmarginalen är identisk i de båda fallen ($\varphi_m = 35^\circ$).

	<u>Efter kompensering</u>	<u>Innan kompensering</u>
Lågfrekvensförstärkning:	$K_p = 2.5$	$K = 0.5$
Högfrekvensförstärkning:	$K_\infty = 5 \cdot K_p = 12.5$	$K = 0.5$

• Lösning till 6.8

a) Eftersom $\frac{1}{Js^2}$ har fasen -180° ger varken P- eller PI-reglering tillräcklig fasmargin.

Använd PD för att lyfta fasen.

b) $\omega_c = 5$, $\varphi_m = 60^\circ$

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s/b}$$

$$\text{Vid önskat } \omega_c \text{ gäller för processen } G(s) = \frac{2}{Js^2} = \frac{8}{s^2}$$

$$\angle G(j\omega_c) = -180^\circ$$

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180^\circ + 60^\circ - -180^\circ = 60^\circ$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{8}{\omega_c^2} = 0.32$$

Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 10.4 på sid. 189

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = \varphi_{max} = 60^\circ \Rightarrow b = 14$$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)| \sqrt{b}} = 0.84$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 0.75$$

dvs

$$F_{PD}(s) = 0.84 \frac{(1 + 0.75s)}{(1 + 0.053s)}$$

• Lösning till 6.9

$$G(s) = \frac{0.4}{s(1 + 5s)} \quad \text{Tidsenhet [ms]}$$

a) P-regulator med $\varphi_m = 50^\circ$

$$F(s) = K_p \Rightarrow L(s) = \frac{0.4K_p}{s(1 + 5s)}$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{0.4K_p}{\omega_c \sqrt{1 + 25\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{\omega_c \sqrt{1 + 25\omega_c^2}}{0.4} \quad (1)$$

$$\angle L(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan(5\omega_c) = -130^\circ \quad (\text{ger } \varphi_m = 50^\circ)$$

$$\arctan 5\omega_c = 40^\circ \Rightarrow \omega_c = 0.2 \tan 40^\circ = 0.17$$

$$(1) \Rightarrow K_p = 0.55$$

För det reglerade systemet fås karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} s(1 + 5s) + 0.4K_p &= 0 \\ 5s^2 + s + 0.4 \cdot 0.55 &= 0 \end{aligned}$$

Identifiera parametrar ζ, ω_n

$$s^2 + 0.2s + 0.044 \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad , \quad \begin{cases} \omega_n = 0.21 \\ \zeta = 0.48 \end{cases}$$

Bandbredden blir

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}} = 1.3\omega_n = 0.27$$

Alternativt uppskattas ω_b från Bodediagrammet i fig. 10.2 på sid. 158. Stigtiden för detta system med komplexkonjugerade stabila poler blir

$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n}(1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) = 7.6 \quad [\text{ms}]$$

b)

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Snabba upp systemet med kancellering, dvs välj $\tau_d = 5$

$$L(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} \cdot \frac{0.4}{s(1 + 5s)} = \frac{0.4K_p}{s(1 + 5s/b)}$$

Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{b}s^2 + s + 0.4K_p = 0$$

Identifiera:

$$s^2 + \frac{b}{5}s + \frac{0.4bK_p}{5} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (2)$$

För den speciella kretsöverföringen på formen $L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$ med $0 < \zeta \leq 1$ i denna deluppgift gäller att fasmarginalen enbart beror på ζ enligt

$$\varphi_m = \arctan \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \right)$$

Bibehållen fasmarginal innebär därför att ζ ej förändras. Den önskade stigtiden $t_r = 2$ är därmed $7.6/2 = 3.8$ gånger snabbare än stigtiden vid P-reglering ($t_r = 7.6$). Med konstant $\zeta = 0.48$ innebär detta att ω_n ökar med en faktor 3.8 till

$$\omega_n = 3.8 \cdot 0.21 = 0.80$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad b = 10\zeta\omega_n = 10 \cdot 0.48 \cdot 0.8 = 3.8 \quad \text{sam} \quad K_p = \frac{5\omega_n^2}{0.4b} = \frac{5 \cdot 0.8^2}{0.4 \cdot 3.8} = 2.1 \quad \text{Kretsöverföringen blir}$$

då $L(s) = 0.84/(s(1 + 5s/3.8))$ och ett Bodediagram visar att $\omega_c = 0.64$ (vilket väl överensstämmer med det faktum att $\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$ ska öka på samma sätt som ω_n med en faktor 3.8 till $\omega_c = 3.8 \cdot 0.17 = 0.646$).

<u>PD-regulator</u>	<u>P-regulator från a)</u>
$K_\infty = K_p b = 8.0$	$K_\infty = K_p = 0.55$
$K_p = 2.1$	$K_p = 0.55$

c) Dimensionera med max faslyft vid $\omega_c = 0.64$

$$\angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan 5\omega_c = -162.6^\circ$$

För $\varphi_m = 50^\circ$ behövs faslyftet: $\angle F_{PD} = \varphi_m - 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 162.6^\circ = 32.6^\circ$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{0.4}{\omega_c \sqrt{1 + 25\omega_c^2}} = 0.186 \quad (\omega_c = 0.64)$$

Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 10.4 på sid. 189

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = \varphi_{max} = 32.6^\circ \Rightarrow b = 3.3$$

och

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)| \sqrt{b}} = 3.0$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 2.8$$

Lågfrekvensförstärkning: $K_p = 3.0$

Högfrekvensförstärkning: $K_\infty = K_p b = 9.9$

d) Stegformad börvärdesändring:

Eftersom det är integralverkan i processen blir det kvarstående felet 0

Laststörning:

$$\frac{E(s)}{V(s)} = \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{0.4}{s}}{1 + K_p \cdot \frac{0.4}{s}} = -\frac{0.4}{K_p \cdot 0.4} = -\frac{1}{K_p}$$

$$P_{reg} : |e_s| = 1.82$$

$$PD_b) : |e_s| = 0.48$$

$$PD_c) : |e_s| = 0.33$$

e) För $F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$ sker maximalt faslyft vid mittfrekvensen $\omega_m = \frac{\sqrt{b}}{\tau_d}$. Kvoten mellan låg/hög frekvensförstärkning är

$$\frac{K_p}{K_\infty} = \frac{K_p}{K_p b} = \frac{1}{b}$$

Denna kvot maximeras således då b minimeras.

Av de två PD-regulatorerna är därför den senare med maximalt faslyft vid ω_c att föredra framför kancellationsstrategin i uppgift b), eftersom både den statiska noggrannheten och faktorn b minskar i uppgift c).

• Lösning till 6.10

Processen från uppgift 6.3

$$G(s) = \frac{3e^{-2s}}{1 + 2s}$$

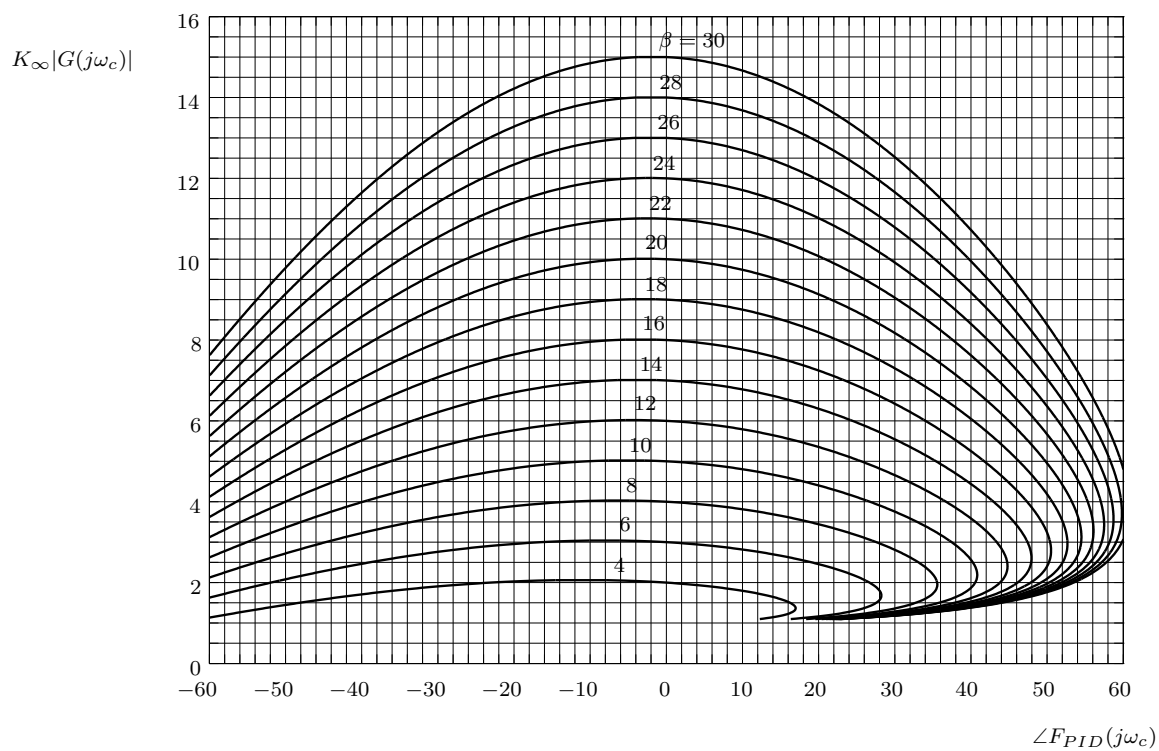
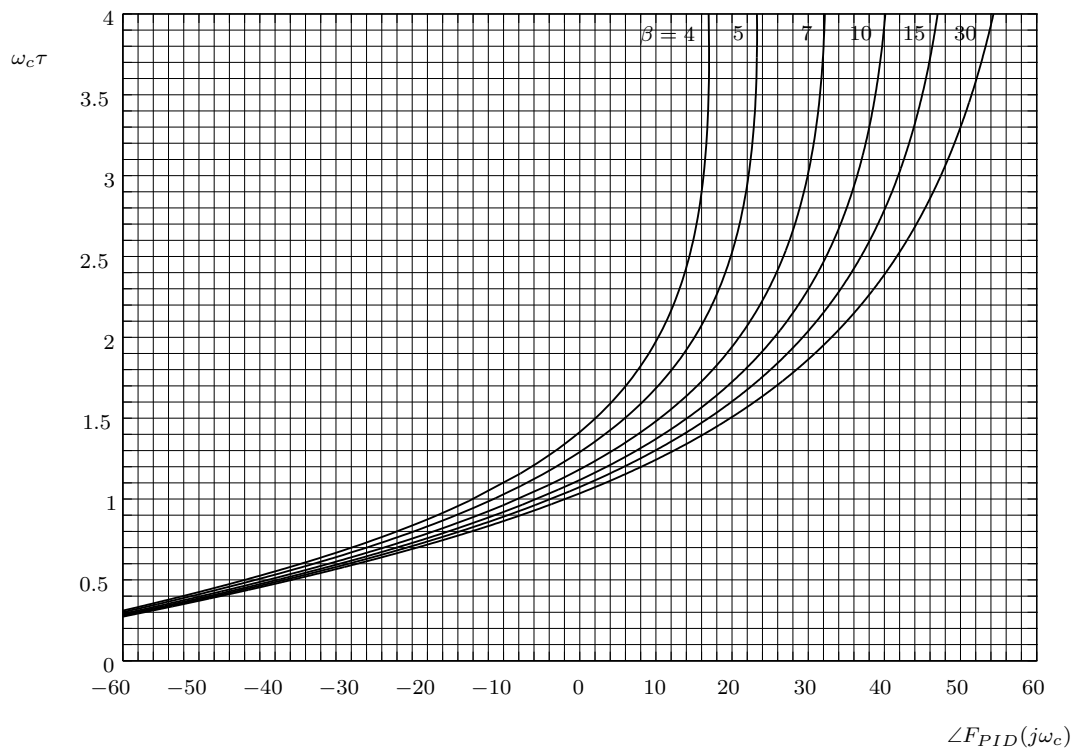
a) Designa en PID-regulator så att $\varphi_m = 50^\circ$, $\beta = 10$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. På samma sätt som i uppgift 6.3 bestäms $\omega_{G150} = 0.80$, vilket ger $\omega_c = 0.6\omega_{G150} = 0.48$. För processen gäller vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c att

$$|G(j\omega_c)| = \frac{3}{\sqrt{1 + 4\omega_c^2}} = 2.16$$

$$\angle G(j\omega_c) = -2\omega_c \frac{180^\circ}{\pi} - \arctan 2\omega_c = -98.8^\circ$$

Fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$ ger regulatorns fasvridning

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180^\circ + 50^\circ - -98.8^\circ = -31.2^\circ$$



Figur 10.5: (a) $\omega_c\tau$ och (b) $K_\infty|G(j\omega_c)|$ som funktion av önskad fasmarginal hos PID-regulatorn $\angle F_{PID}(j\omega_c)$ vid överkorsningsfrekvensen ω_c för $\zeta = 1$ och olika värden på β .

Från fig. 10.5(a) erhålls för $\beta = 10$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -31.2^\circ$ värdet $\omega_c\tau = 0.60$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.6/\omega_c = 0.6/0.48 = 1.25$$

Fig. 10.5(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 4.4$, vilket innebär att $K_\infty = 4.4/2.16 = 2.0$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{2.0}{10 \cdot 1.25} = 0.16$$

Regulatorn och dess hög/låg-frekvensasymptoter blir därför

$$F_{PID}(s) = \frac{0.16}{s} \cdot \frac{(1 + 1.25s)^2}{1 + 0.125s}, \quad \begin{cases} K_i = 0.16 \\ K_\infty = 2.0 \end{cases}$$

- b) Jämfört med PI-regulatorn i uppgift 6.3, där $K_i = 0.11$ och $K_\infty = 0.2$, ökar K_i med en faktor 1.45, medan K_∞ ökar med en faktor 10.

• Lösning till 6.11

Processen från uppgift 6.2

$$G(s) = \frac{5}{(1 + 10s)^3}$$

- a) Designa en PID-regulator så att $\varphi_m = 50^\circ$, $\beta = 5$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. På samma sätt som i uppgift 6.2 bestäms $\omega_{G150} = 0.119$, vilket ger $\omega_c = 0.6\omega_{G150} = 0.0714$. För processen gäller vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c att

$$|G(j\omega_c)| = \frac{5}{(1 + 100\omega_c^2)^{3/2}} = 2.70$$

$$\angle G(j\omega_c) = -3 \arctan 10\omega_c = -106.6^\circ$$

Fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$ ger regulatorns fasvridning

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180^\circ + 50^\circ - 106.6^\circ = -23.4^\circ$$

Från fig. 10.5(a) erhålls för $\beta = 5$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -23.4^\circ$ värdet $\omega_c\tau = 0.77$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.77/\omega_c = 0.77/0.0714 = 10.8$$

Fig. 10.5(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 2.45$, vilket innebär att $K_\infty = 2.45/2.7 = 0.907$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{0.907}{5 \cdot 10.8} = 0.0168$$

Regulatorn blir därför med $K_i = 0.017$

$$F_{PID}(s) = \frac{0.017}{s} \cdot \frac{(1 + 10.8s)^2}{1 + 2.16s}$$

Kontroll visar att $\varphi_m = 49.6^\circ$, $\omega_c = 0.0720$ och $K_\infty = 0.918$

- b) Samma som i a) men $\beta = 10$. Från fig. 10.5(a) erhålls för $\beta = 10$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -23.4^\circ$ värdet $\omega_c\tau = 0.71$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.71/\omega_c = 0.71/0.0714 = 9.94$$

Fig. 10.5(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 4.7$, vilket innebär att $K_\infty = 4.7/2.7 = 1.74$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{1.74}{10 \cdot 9.94} = 0.0175$$

Regulatorn blir därför

$$F_{PID}(s) = \frac{0.0175}{s} \cdot \frac{(1 + 9.94s)^2}{1 + 0.994s}$$

Kontroll visar att $\varphi_m = 50.3^\circ$, $\omega_c = 0.0709$ och $K_\infty = 1.74$

- c) Jämfört med PI-regulatorn i uppgift 6.2, där $K_i = 0.010$ och $K_\infty = 0.16$, ökar K_i (prestanda) med en faktor 1.7 för $\beta = 5$, medan K_∞ (styrsignalaktivitet) ökar med en faktor 5.7. För $\beta = 10$ blir ökningen av K_i en faktor 1.75, medan K_∞ ökar med en faktor 10.9.

• Lösning till 6.12

Sök stabilitetsgränsen genom att använda Routh-Hurwitz. Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K_p}{s(1+s)(1+Ts)} = 0$$

dvs

$$Ts^3 + (1+T)s^2 + s + K_p = 0$$

Routh-Hurwitz tablå

s^3	T	1
s^2	$1+T$	K_p
s^1	c_0	0
s^0	d_0	0

$$c_0 = \frac{1+T-K_p \cdot T}{1+T} = 1 - K_p \frac{T}{1+T}$$

$$d_0 = K_p$$

Stabilt system om $c_0 > 0$ och $K_p \frac{T}{1+T} < 1$

K_p är uppåt begränsad. För att uppnå önskad marginal $A_m = 2$, halveras K_p

$$(2K_p) \frac{T}{1+T} < 1 \Rightarrow 2K_p T < 1+T$$

Eftersom $2K_p > 1$ fås

$$T_{\max} = \frac{1}{2K_p - 1}, \quad K_p = 3 \Rightarrow T_{\max} = 0.2$$

• Lösning till 6.13

a) Multiplikativ osäkerhet

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{K_0 - K}{K}, \quad \text{där } K = 3$$

$G(s)$ är den nominella modellen medan $G_0(s)$ är det verkliga systemet. Hur mycket får det verkliga K_0 variera för garanterad stabilitet?

Komplementära känslighetsfunktionen för den nominella kretsöverföringen

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{0.5K}{s^2 + s + 0.5K}$$

Robusthetskravet ger

$$|T(j\omega) \cdot \Delta_m(j\omega)| = \frac{|0.5(K_0 - K)|}{|-\omega^2 + j\omega + 0.5K|} < 1$$

dvs

$$0.5|K_0 - 3| < \sqrt{(0.5 \cdot 3 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$0.25(K_0 - 3)^2 < \omega^4 - 2\omega^2 + 1.5^2 = (\omega^2 - 1)^2 - 1 + 1.5^2$$

Högerledet har sitt minimum då kvadraten är noll

$$(K_0 - 3)^2 < 4(1.5^2 - 1) = 5$$

$$\begin{cases} K_0 - 3 < \sqrt{5} \Rightarrow K_0 < 3 + \sqrt{5} \\ -(K_0 - 3) < \sqrt{5} \Rightarrow K_0 > 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

dvs

$$0.764 < K_0 < 5.24$$

b) Karakteristiska ekvationen för det verkliga systemet ges av

$$1 + L(s) = 1 + \frac{0.5K_0}{s(s+1)} = 0$$

dvs $s^2 + s + 0.5K = 0$, vilket ger Routh-Hurwitz tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 0.5K_0 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & 0.5K_0 & \end{array}$$

Stabilt system om $K_0 > 0$

Slutsats: $|T \cdot \Delta_m| < 1$ är ett konservativt kriterium.

• Lösning till 6.14

Multiplikativ osäkerhet

$$\Delta_m(s) = \frac{e^{-sT_d} - e^0}{e^0} = e^{-sT_d} - 1$$

$$|\Delta_m(j\omega)|^2 = (\cos \omega T_d - 1)^2 + \sin^2 \omega T_d = 2 - 2 \cos \omega T_d$$

Robusthetskravet kan skrivas som

$$|\Delta_m(j\omega)|^2 < \frac{1}{|T(j\omega)|^2}$$

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{0.25K^2}{(0.5K - \omega^2)^2 + \omega^2}, \quad \text{där } K = 3$$

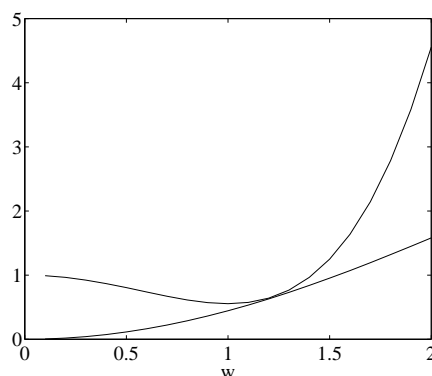
dvs

$$2 - 2 \cos \omega T_d < \frac{(1.5 - \omega^2)^2 + \omega^2}{0.25 \cdot 3^2}$$

Med datorhjälp fås

$$T_d < 0.68$$

I figuren visar den undre kurvan $|\Delta_m(j\omega)|^2$ för $T_d = 0.68$ och den övre visar $|T(j\omega)|^{-2}$.



Nyquist kriterium:

Överkorsningsfrekvensen ω_c bestäms från kretsöverföringen

$$|L(j\omega_c)| = \frac{0.5K}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1}} = 1$$

$$\omega_c^2(\omega_c^2 + 1) = 1.5^2$$

$$\omega_c^2 = -0.5 + \sqrt{0.25 + 1.5^2} \Rightarrow \omega_c = 1.040$$

För stabilt system gäller att

$$\angle L(j\omega_c) = -\omega_c T_d \frac{180^\circ}{\pi} - 90^\circ - \arctan \omega_c > -180^\circ$$

$$\Rightarrow T_d < \frac{\pi}{180^\circ \cdot 1.04} (90^\circ - \arctan(1.04)) = 0.736$$

$T_d < 0.736$ stämmer bra överens med det föregående resultatet, vilket visar att $|T \cdot \Delta_m| < 1$ ger ett bra mått på stabilitetsområdet. Detta beror på att dödtiden ger mer osäkerhet för höga frekvenser där $|T \cdot \Delta_m| < 1$ är ett bra stabilitetsmått.

• Lösning till 6.15

Den multiplikativa osäkerheten blir

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{1 - Ts - 1}{1} = -Ts$$

Designa en PI-regulator för det nominella $G(s) = \frac{1}{1 + 5s}$

$$F_{PI}(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}$$

Den nominella kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{K_p(1 + sT_i)}{sT_i(1 + 5s)}, \quad \text{låt } T_i = 5 \Rightarrow L(s) = \frac{K_p}{5s}$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K_p}{5s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p}{5s}} = \frac{1}{1 + \frac{5s}{K_p}}$$

Eftersom $|T(0)| = 1$ fås bandbredden som

$$|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{5\omega_b}{K_p}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = \frac{K_p}{5}$$

Multiplitera med osäkerheten

$$T(s)\Delta_m(s) = \frac{-Ts}{1 + \frac{s}{\omega_b}}$$

Betrakta motsvarande asymptotiska amplituddiagram: LF-asymptoten har lutningen +20dB/dekad, vid brytfrekvensen ω_b blir lutningen 0dB. Den exakta amplitudkurvan kommer att vara växande med ett maximum då $\omega \rightarrow \infty$. Robusthets kravet blir då

$$\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| = T\omega_b < 1$$

dvs den nominella bandbredden är begränsad till

$$\omega_b < \frac{1}{T}$$

- Lösning till 6.16
(Jmf. uppgift 5.5)

Ta fram den multiplikativa osäkerhetsfaktorn

$$\begin{aligned}\Delta_m(s) &= \frac{F(s)}{F(s)} \cdot \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{L_0(s) - L(s)}{L(s)} = \frac{\frac{1}{1 + 0.02 + (s/\omega_n)^2} - \frac{1}{1 + 0.02s}}{\frac{1}{1 + 0.02s}} \\ &= \frac{1 + 0.02s}{1 + 0.02s + (s/\omega_n)^2} - 1 = \frac{-(s/\omega_n)^2}{1 + 0.02s + (s/\omega_n)^2}\end{aligned}$$

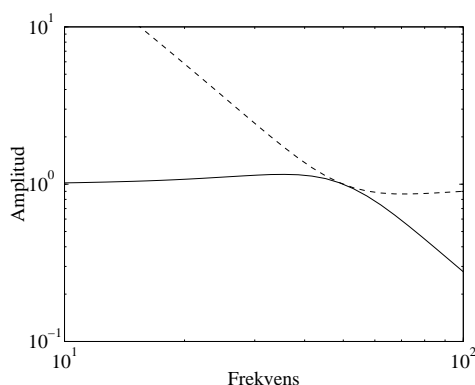
Den komplementära känslighetsfunktionen

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{50}{s(1 + 0.02)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{50}{s(1 + 0.02s)}} = \frac{50}{0.02s^2 + s + 50}$$

Robusthetskravet är uppfyllt om

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta(j\omega)|}$$

Uppgift 5.5 gav stabilitetsgränsen $\omega_n > 50$ genom Routh-Hurwitz. I amplitud diagrammet är $|T(j\omega)|$ och $|\Delta_m(j\omega)|^{-1}$ uppritade för $\omega_n = 50$.



Robustetskriteriet ger alltså samma gränsvärde på ω_n

- Lösning till 6.17

a) Den slutna överföringsfunktionen

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{\frac{K(s+2)}{s(s+a)}}{1 + \frac{K(s+2)}{s(s+a)}} = \frac{K(s+2)}{s(s+a) + K(s+2)}$$

Välj K och a så att systemet får en dubbelpol i $s = -2$

$$s(s+a) + K(s+2) \equiv (s+2)^2 \Rightarrow a = 2, K = 2$$

b) Kretsöverföringen blir

$$L(s) = F(s)G(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+2)} = \frac{2}{s}$$

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{2}{s+2} \\ G_{vy}(s) &= \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{s}{s^2 + 0.1s + 1} \end{aligned}$$

Nackdel: De svagt dämpade polerna (resonans) finns med i störningsdynamiken

c) Använd robusthetskravet $\max_w |T(j\omega) \cdot \Delta_m(j\omega)| < 1$

$$|T(j\omega) \cdot \Delta_m(j\omega)| = \left| G_{ry}(j\omega) \cdot \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| < \sqrt{\frac{4}{4+\omega^2}} \cdot \sqrt{\frac{4\omega^2}{4+\omega^2}} = \frac{4\omega}{4+\omega^2} < 1, \quad \text{då } \omega > 0$$

Den sista olikheten inses genom likheten $\frac{4\omega}{4+\omega^2} = 1 - \frac{(\omega-2)^2}{4+\omega^2}$

• Lösning till 6.18

Nominell överföringsfunktion: $G(s)$, verklig: $G_0(s) = G(s)\tilde{G}(s)$

Den multiplikativa osäkerheten

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \tilde{G}(s) - 1$$

Antag att reglering av systemet ger

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2}$$

Bandbredden ges av $|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eftersom $|T(0)| = 1$. Kvadrering ger

$$\begin{aligned} |T(j\omega)|^2 &= \frac{(\omega_0^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega_0\omega)^2} = \frac{1}{2} \\ 2\omega_0^4 &= \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_b^2 + \omega_b^4 + \omega_0^2\omega_b^2 = 2\omega_0^4 \\ \omega_b^4 - \omega_0^2\omega_b^2 - \omega_0^4 &= 0 \Rightarrow \omega_b^2 = \frac{\omega_0^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_0^4}{4} + \omega_0^4} \\ \omega_b^2 &= \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow \omega_b = 1.272\omega_0 \end{aligned}$$

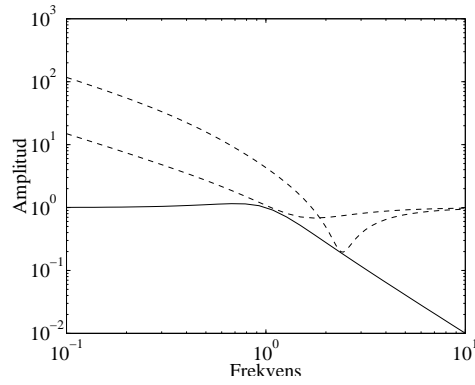
Robusthetskrav

$$|T(j\omega) \cdot \Delta_m(j\omega)| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\Delta_m(j\omega)|} > |T(j\omega)|$$

Välj ω_0 så högt som möjligt utan att kurvorna korsas

a)

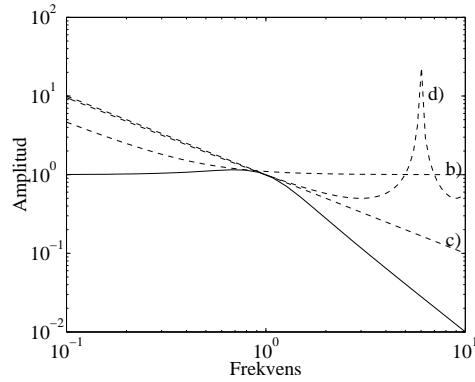
$$\tilde{G}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \Delta_m(s) = -\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



I figuren är kurvorna $|T(j\omega/\omega_0)|$ och $\frac{1}{|\Delta_m(j\omega)|}$ ritade för

- i) $\zeta = 0.5, \omega_n = 1.5$ dvs $\omega_n > 1.5 \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega_b < 0.85\omega_n$
 ii) $\zeta = 0.1, \omega_n = 2.4$ dvs $\omega_n > 2.4 \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega_b < 0.53\omega_n$

b)



$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1 + Ts} \Rightarrow \Delta_m(s) = -\frac{Ts}{1 + Ts}$$

I figuren är $T = 2.2$, dvs

$$\frac{1}{T} > \frac{1}{2.2} \omega_0 \Rightarrow \omega_b < \frac{2.8}{T}$$

c)

$$\tilde{G}(s) = 1 - Ts \Rightarrow \Delta_m(s) = -Ts$$

I figur, $T = 1.0$

$$\frac{1}{T} > \frac{1}{1.0} \omega_0 \Rightarrow \omega_b < \frac{1.3}{T}$$

d)

$$\tilde{G}(s) = e^{-sT_d} \Rightarrow \Delta_m(s) = e^{-sT_d} - 1$$

$$\begin{aligned} |\Delta_m(j\omega)|^2 &= |\cos \omega T_d - j \sin \omega T_d - 1|^2 = \sin^2 \omega T_d + (\cos \omega T_d - 1)^2 \\ &= 2 - 2 \cos \omega T_d \end{aligned}$$

Figuren visar kurvan för $T_d = 1.05$

$$\frac{1}{T_d} > \frac{1}{1.05} \omega_0 \Rightarrow \omega_b < \frac{1.3}{T_d}$$

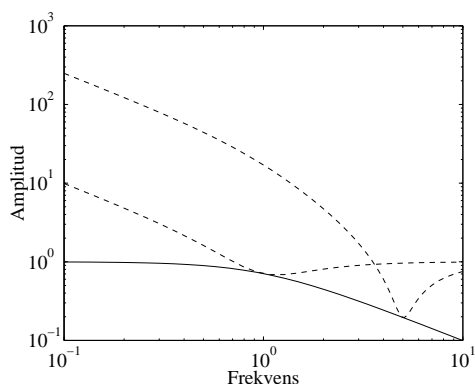
• Lösning till 6.19

Den komplementära känslighetsfunktionen

$$T(s) = \frac{\omega_b}{s + \omega_b}$$

där $\omega = \omega_b$ är bandbredden

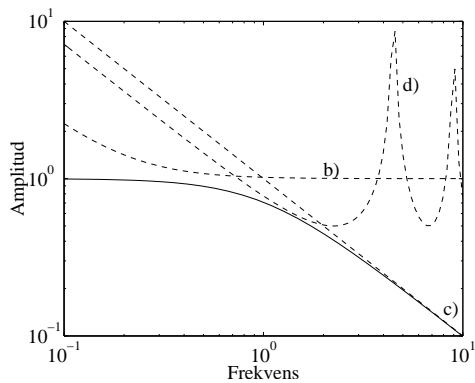
a)



I figuren är $|T(j\omega/\omega_b)|$ och $|\Delta_m(j\omega)|^{-1}$ uppritade för

$$\begin{aligned} \zeta = 0.5, \omega_n = 1 &\Rightarrow \omega_n > 1 \cdot \omega_b, \quad \omega_b < \omega_n \\ \zeta = 0.1, \omega_n = 5 &\Rightarrow \omega_n > 5 \cdot \omega_b, \quad \omega_b < 0.2\omega_n \end{aligned}$$

b)



ω_b godtyckligt eftersom $\frac{1}{|\Delta_m(j\omega)|} > |T(j\omega)|$ för alla ω

c) $T = 1 : \quad \frac{1}{T} > 1 \cdot \omega_b$

d) $T_d = 1.4 : \quad \frac{1}{T_d} > \frac{1}{1.4} \omega_b$

• Lösning till 6.20

a) Öppet system: $G_{vy}^{\ddot{o}}(s) = G(s)$

$$\text{Slutet system: } G_{vy}^s(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Störningens påverkan på utsignalen för det slutna systemet ska vara mindre jämfört med det öppna. För störning med frekvensen ω_v fås

$$\left| \frac{G_{vy}^s(j\omega_v)}{G_{vy}^{\ddot{o}}(j\omega_v)} \right| = \frac{1}{|1 + F(j\omega_v)G(j\omega_v)|} < 1$$

dvs

$$|F(j\omega_v)G(j\omega_v) - (-1)| > 1$$

Om detta skall gälla oberoende av ω_v så måste kretsöverföringens frekvenskurva ligga utanför en cirkel med medelpunkt i -1 och radien 1

b) I allmänhet gäller Bodes integralsats: $\int \log |S(j\omega)| d\omega = 0$

$S(s) = 1/(1 + F(s)G(s))$ måste alltså ha belopp såväl mindre som större än 1 för varierande ω , dvs kravet kan inte uppfyllas för alla ω .

• Lösning till 6.21

a)

$$G(s) = \frac{e^{-0.4s}}{(1+s)^3}$$

Vid dödtid kan systemet inte bli snabbare än e^{-sT_d}

$$\omega_c \leq \frac{1}{T_d} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

b)

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)^3}$$

Ett nollställe i högra halvplanet i $s = b$ medför att systemet inte kan bli snabbare än $\frac{b-s}{s+b}$.

$G(s)$ har nollställe i $s = 1$

$$\omega_c \leq \frac{b}{2} = 0.5$$

• Lösning till 6.22

$$T_i = 3.732, T_d = 0.933, K_r = 5.6$$

Försök med

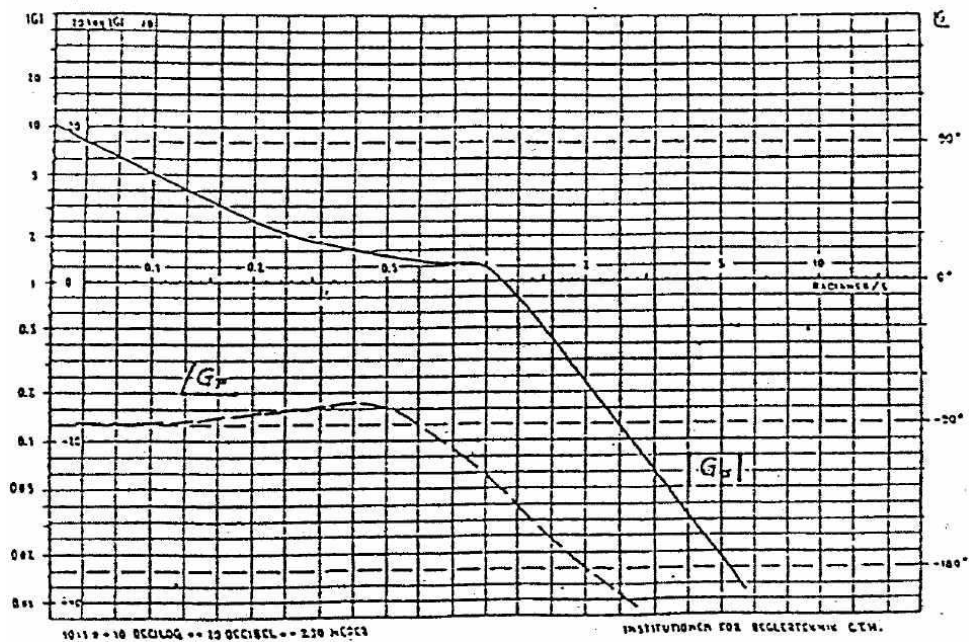
$$G_{PID}(s) = \frac{1.6(1+2s)^2}{s(1+0.1s)}$$

(Detta get $\phi_m \approx 40^\circ$)

• Lösning till 6.23

$$K_r = 2.7, T_i = 1.6 \text{ och } T_d = 0.4$$

- Lösning till 6.24

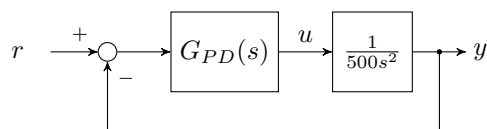


(frekvens i radianer/dödtid)

$$A_m = 5 \text{ dB}, \phi_m = 23^\circ$$

Marginalerna är för små! (De borde ökas med faktor 1.5!)

- Lösning till 6.25



$$G(s) = 112000 \frac{s + 4.5}{s + 22.5}$$

- Lösning till 6.26

$$G_{PD}(s) = 3.2 \frac{s + 0.44}{s + 2.26}$$

- Lösning till 6.27

$$G_{PIPD}(s) = 3.2 \frac{(s + 0.44)(s + 1)}{s(s + 2.26)}$$

- Lösning till 6.28

$$A_m = 3.2$$

För stabilitet krävs högre hastighet än 170 m/minut.

- Lösning till 6.29

$$G_{PID}(s) = \frac{(1 + \frac{s}{0.4})(1 + \frac{s}{0.45})}{s(1 + \frac{s}{9})}$$

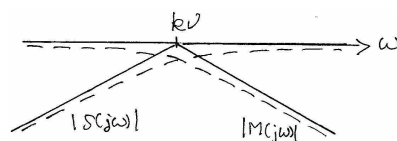
- Lösning till 6.30

$$\begin{aligned} \phi_m = 45^\circ &\Rightarrow \omega_c \leq 3.7 \text{ rad/s} \\ \phi_m = 60^\circ &\Rightarrow \omega_c \leq 2.7 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

(I praktiken ligger ω_c alltid betydligt lägre!)

- Lösning till 6.31

a) Känslighetsfunktionen, S , och komplementära känslighetsfunktionen, M , i figur.

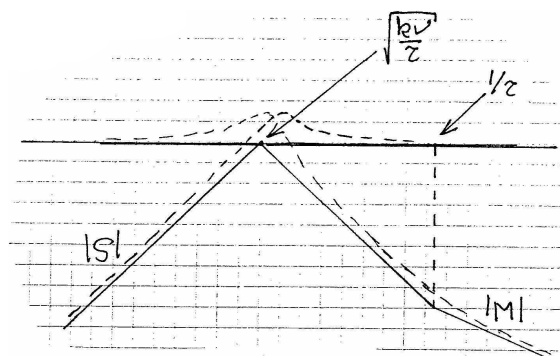


b)

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{kv}} = T(s), \quad \frac{y(s)}{n(s)} = \frac{-1}{1 + \frac{s}{kv}} = -T(s), \quad \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{k} T(s) = \frac{v}{s} S(s)$$

- Lösning till 6.32

Man visar enkelt att $|T(j\sqrt{\frac{kv}{\tau}})|^2 = 1 + \frac{1}{kv\tau} > 1$ (Detta visar existensen av en “resonastopp”, men själva “resonansfrekvensen” är något lägre än $\omega = \sqrt{\frac{kv}{\tau}}$!). Känslighetsfunktionen, S , och komplementära känslighetsfunktionen, M , i figur.

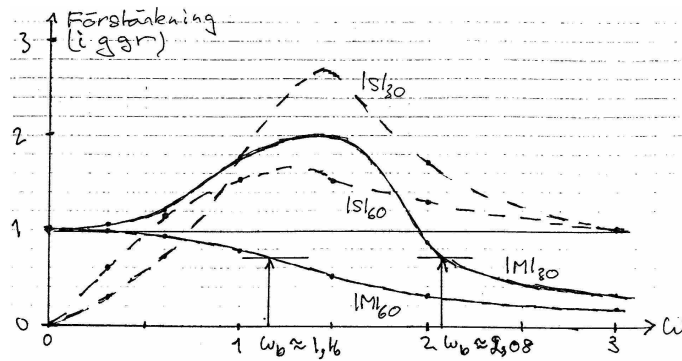


$$\omega_b^2 = \frac{kv}{\tau} \left[1 + \frac{kv\tau}{2} + \sqrt{2 + kv\tau + \frac{(kv\tau)^2}{4}} \right]$$

Stort k -värde höjer bandbredden, liksom litet τ -värde (hög I-verkan). Litet τ -värde försämrar dock stabiliteten!.

• Lösning till 6.33

Känslighetsfunktionen, S , och komplementära känslighetsfunktionen, M , i figur.



• Lösning till 6.34

a) $\tau = 1$

Hög bandbredd innebär att mätbrusets inverkan blir stor då detta normalt är högfrekvent.

b) T ex $\sigma=2.3$ och $\tau=4.1$

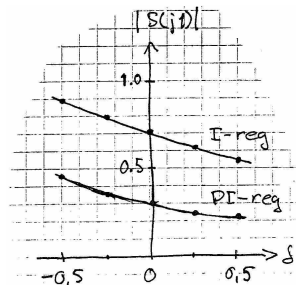
För att $\tau^2 > 0$ skall gälla (vilket man ju gärna ser!!), måste $1 + 2\sigma - \sigma^2 > 0 \Rightarrow \sigma < 1 + \sqrt{2}$

$$|S(j\omega_b)|^2 = \frac{1}{2 + 4\sigma} \geq \frac{1}{2 + 4(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{6 + 4\sqrt{2}}$$

$$(\omega_b = 1)$$

$\therefore |S|_{min} = 0.293$, varför lägre värde än 0.30 är orealistiskt.

c)



• Lösning till 6.35

(a) $\Delta_G(s) = \tau s$

(b) $\omega_B < \sqrt{2}/\tau$

• Lösning till 6.36

Kretsöverföringen: $L(s) = G(s)F(s)$

Fel vid börvärdesändringar: $\frac{E(s)}{R(s)} = -\frac{1}{1+L(s)}$

Störningens inverkan: $\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1+L(s)}$

a) $L(s) = \frac{10}{s}, \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{0.1s}{1+0.1s}, \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{0.1s}{(1+0.1s)(1+s)}$

b) $L(s) = \frac{10}{s}, \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{0.1s}{1+0.1s}, \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \frac{s+2}{s^2+0.1s+1}$

c) $L(s) = \frac{10(s-1+\varepsilon)(s-2)}{s(s-2+\varepsilon)(s-1)},$

$$\frac{E(s)}{R(s)} \approx \frac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \frac{(s-2+\varepsilon)(s-1)}{(s-1+\varepsilon)(s-2)}, \quad \frac{Y(s)}{V(s)} \approx \frac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \frac{(s-1)}{(s-2)}$$

Eftersom allmänt $\frac{E}{R} = \frac{1}{1+L}$ medan $\frac{Y}{V} = \frac{G}{1+L}$ kommer processens dynamik att finnas kvar vid processtörningar trots pol-nollställes förkortning i kretsöverföringen L .

Dessutom gäller att instabila poler och nollställen ej kan förkortas bort eftersom en exakt cancellation ej kan genomföras i praktiken på grund av osäkerheter i processmodellen.

10.7 Regulatorstrukturer

• Lösning till 7.1

En PID-regulator på generell form med dubbelnollställe

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)} = K_i \frac{1 + 2\tau s + \tau^2 s^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

kan skrivas som en PID-regulator på parallell form

$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_f} \right) = K_p \frac{sT_i(1 + sT_f) + 1 + sT_f + s^2T_iT_d}{sT_i(1 + sT_f)} \\ &= \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{1 + (T_i + T_f)s + (T_d + T_f)T_i s^2}{s(1 + sT_f)} \end{aligned}$$

Polen ger att: $T_f = \frac{\tau}{\beta}$

För dubbelnollstället fås ($T_d = bT_f$, $T_i = aT_d = abT_f$)

$$\begin{cases} 2\tau = T_i + T_f = (1 + ab)T_f = \frac{\tau}{\beta}(1 + ab) \\ \tau^2 = (T_d + T_f)T_i = (b + 1)ab \cdot T_f^2 = \frac{\tau^2}{\beta^2}(b + 1)ab \end{cases}$$

τ kan elimineras

$$\begin{cases} 2\beta = 1 + ab \Rightarrow a = \frac{2\beta - 1}{b} \\ \beta^2 = (b + 1)ab \end{cases}$$

dvs,

$$\begin{aligned} \beta^2 = (b + 1)(2\beta - 1) &\Rightarrow b = \frac{\beta^2}{2\beta - 1} - 1 = \frac{(\beta - 1)^2}{2\beta - 1} \\ &\Rightarrow a = \frac{1}{(\beta - 1)^2} \end{aligned}$$

$$T_d = bT_f, \quad T_i = aT_d$$

Lågfrekvensförstärkningen: $\frac{K_p}{T_i} = K_i \Rightarrow K_p = T_i K_i$

• Lösning till 7.2

a) Kretsöverföringen

$$L(s) = K_r \frac{1}{1 + 0.1s} \frac{1}{1 + \frac{K_d}{1 + 0.1s}} = \frac{K_r}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0.1s + K_d} = \frac{10K_r}{s^2 + 10(K_d + 1)s}$$

Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 10(K_d + 1)s + 10K_r = 0$$

Önskad karakteristisk ekvation genom polplacering

$$s^2 + 10(K_d + 1)s + 10K_r \equiv (s + 10 + 10j)(s + 10 - 10j) = s^2 + 20s + 200$$

ger $K_d = 1, K_r = 20$

b) $\omega_n = \sqrt{200}$, $2\zeta\omega_n = 20 \Rightarrow \zeta = 10/\sqrt{200} = 1/\sqrt{2}$

Kretsen bryts vid u vilket ger två slingar i återkopplingen. Kretsöverföringen då intern återföring används blir

$$L_i(s) = \frac{1}{1+0.1s} \left(\frac{K_r}{s} + K_d \right) = \frac{K_r + K_d s}{s(1+0.1s)} = \frac{20+s}{s(1+0.1s)}$$

$$|L_i(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{20^2 + \omega_c^2}}{\omega_c \sqrt{1+0.1^2\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow 400 + \omega_c^2 = \omega_c^2(1+0.01\omega_c^2)$$

$$\omega_c = 10\sqrt{2} \approx 14.1$$

$$\angle L_i(j\omega_c) = \arctan \frac{\omega_c}{20} - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) = -109^\circ$$

$$\varphi_m = 71^\circ$$

- c) Dimensionera en PD-regulator $F_{PD}(s) = K_p \frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$ utan intern återföring som ger samma ω_c och φ_m som i b). Vid önskat ω_c gäller för processen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)}$$

$$\angle G(\omega_c) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) = -144.7^\circ$$

$$|G(j\omega_c)| = 0.0408$$

För att uppnå samma φ_m som i b) krävs ett faslyft $\angle F_{PD}(j\omega_c) = 35.7^\circ$.
 b fås ur diagrammet för PD-dimensionering

$$b = 3.8, \quad K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = 12.6, \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 0.138$$

dvs regulatoren blir

$$F_{PD}(s) = 12.6 \frac{1+0.14s}{1+0.036s}$$

- d) För PD-regulatore i c) fås kretsöverföringen

$$L_{pd}(s) = F_{PD}(s)G(s) = K_p \frac{1+s\tau_d}{s(1+0.1s)(1+s\tau_d/b)}$$

Eftersom både L_i och L_{pd} innehåller en integrator $1/s$ så kommer $1+L(s) \rightarrow L(s)$ då $s \rightarrow 0$ och $1+L(s) \rightarrow 1$ då $s \rightarrow \infty$

Vid låga frekvenser $\omega \rightarrow 0$ gäller därför att

$$\frac{|S_{pd}|}{|S_i|} \approx \frac{|L_{pd}|^{-1}}{|L_i|^{-1}} \approx \frac{\omega/K_p}{\omega/K_r} = 1.6$$

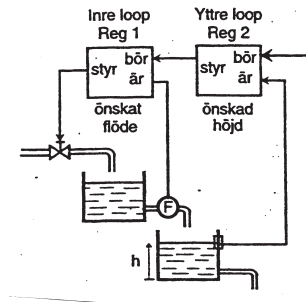
dvs lågfrekventa processtörningar kompenseras sämre med PD-reglering eftersom $|S_{pd}| > |S_i|$.

Robusthet vid högre frekvenser bestäms av komplementära känslighetsfunktionen, $\omega \rightarrow \infty$

$$\frac{|T_{pd}|}{|T_i|} \approx \frac{|L_{pd}|}{|L_i|} \approx \frac{K_p \cdot b \cdot 10/\omega^2}{K_d \cdot 10/\omega} = \frac{47.5}{\omega} = 3.4 \frac{\omega_c}{\omega}$$

dvs robustheten förbättras med PD-regulatore då $\omega \geq 3.4\omega_c$ eftersom $|T_{pd}|$ då är mindre än $|T_i|$.

• Lösning till 7.3



• Lösning till 7.4

a) Kretsens överföringsfunktion

$$L(s) = K_p \cdot \frac{1}{1 + sT_1} \cdot \frac{Ke^{-sT_d}}{(1 + sT_2)}$$

Från t.ex. Bode-diagram fås att förstärkningen $K_p \approx 0.15$ ger $A_m = 2.5$, $\varphi_m = 70^\circ$

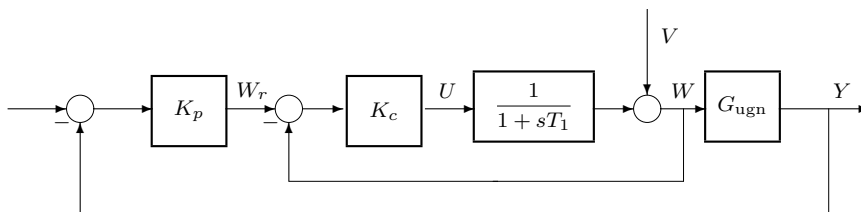
$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\frac{Ke^{-sT_d}}{1 + sT_2}}{1 + K_p K \frac{e^{-sT_d}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}}$$

För stationära fel $s \rightarrow 0$ fås

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K}{1 + K_p K} = \begin{cases} 20, & \text{oreglerat } (K_p = 0) \\ 5, & \text{reglerat } (K_p = 0.15) \end{cases}$$

dvs felet reduceras 4 ggr

b) Kaskadreglering:



$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{V(s)} &= \frac{Ke^{-sT_d}}{1 + sT_2} \cdot \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{K_p K e^{-sT_d}}{1 + sT_2}\right) \frac{K_c}{1 + sT_1}} \\ &= \frac{Ke^{-sL}(1 + sT_1)}{(1 + sT_1 + K_c)(1 + sT_2) + K_p K_c K e^{-sT_d}} \end{aligned}$$

En stegformad störning $s \rightarrow 0$ ska reduceras 2 ggr

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)} \right|_{LF} = \frac{K}{1 + K_c + K_p K_c K} = 0.5$$

$$K_p = 0.15, K = 20 \Rightarrow K_c = 9.75$$

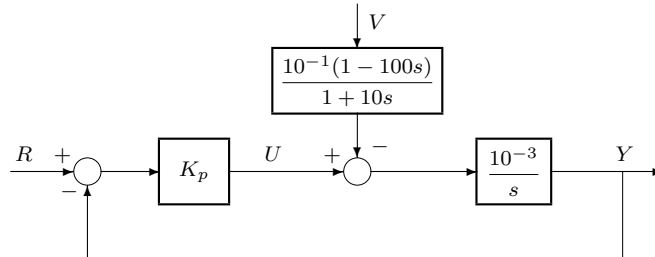
c) Utregleringen (transienten) blir betydligt snabbare, eftersom den inre återkopplingen inte påverkas av ugnens dödtid och tröghet.

• Lösning till 7.5

a)

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s}U(s) - \frac{10^{-4}(1-100s)}{s(1+10s)}V(s) = \frac{10^{-3}}{s} \left(U(s) - \frac{1-100s}{1+10s}V(s) \right)$$

Återkoppla nivån och inför en P-regulator. Resulterande blockschema



b)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_p \cdot 10^{-3}}{s}}$$

Ett börvärdessteg $R(s) = \frac{1}{s}$ ger ett begynnelsefel $e(0) = 1$

$$E(s) = \frac{s}{s + K_p \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s + K_p \cdot 10^{-3}} \subset e(t) = e^{-K_p 10^{-3} t}$$

Efter 60 sekunder ska enhetsfelet ha sjunkit till 0.25

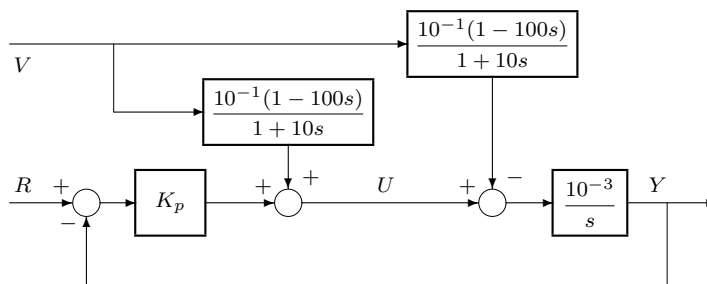
$$e(60) = e^{-0.06 \cdot K_p} = 0.25 \Rightarrow K_p = 23.1$$

$$\frac{E(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1-100s}{1+10s} \cdot \frac{10^{-4}}{s}}{1 + \frac{K_p \cdot 10^{-3}}{s}} = \frac{(1-100s) \cdot 10^{-4}}{(1+10s)(s + K_p \cdot 10^{-3})}$$

Kvarstående felet då $V(s) = 2/s$

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(1-100s)10^{-4}}{(1+10s)(s + K_p \cdot 10^{-3})} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{K_p \cdot 10^{-3}} \\ &= 8.66 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \end{aligned}$$

c) En modell av störningsdynamiken används för att addera en kompenseringsignal till styrsignalen



- d) Stabiliteten påverkas ej, eftersom framkopplingslänken ej ingår i återkopplingen.
Framkopplingslänken i sig måste dock vara stabil.

• Lösning till 7.6

Systemet ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_v V(s)$$

Inför framkoppling av den mätbara mätstörningen

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)[U(s) + F_f(s)V(s)] + G_v(s)V(s) \\ &= G(s)U(s) + [G(s)F_f(s) + G_v(s)]V(s) \end{aligned}$$

- a) Kompensera för störningens inverkan

$$\begin{aligned} F_f(s) &= -\frac{G_v(s)}{G(s)} = -\frac{s+b_v}{s+a_v} e^{-sT_{dv}} \cdot \frac{s+a}{s+b} e^{sT_d} \\ &= -\frac{(s+a)(s+b_v)}{(s+a_v)(s+b)} e^{-s(T_{dv}-T_d)} \end{aligned}$$

- b) För att framkopplingen ska vara stabil krävs att nollstället för $G(s)$ ligger i VHP (minfasnollställe) och att polen för $G_v(s)$ ligger i VHP, d.v.s. $b > 0$, $a_v > 0$.

Det går bara att realisera positiv dödtid, dvs $T_{dv} \geq T_d$

Om kraven ej är uppfyllda, använd en statisk förstärkning som bara tar hänsyn till LF-karakteristiken

$$F_f = -\frac{ab_v}{a_v b}$$

• Lösning till 7.7

- a) Störningens inverkan (sätt $R(s) = 0$)

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = [G_v(s) + F_f(s)G_u(s)]G_y(s) \frac{1}{1 + G_u(s)G_y(s)F_{PID}(s)}$$

Överföringsfunktionen blir noll om F_f väljs som

$$F_f(s) = -\frac{G_v}{G_u}$$

- b) G_u icke min-fas $\Rightarrow F_f$ instabil – problem!
 G_y icke min-fas \Rightarrow inga problem!
 G_v icke min-fas $\Rightarrow F_f$ icke min-fas men detta OK!

• Lösning till 7.8

- a) För det återkopplade systemet gäller

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kF(s)}{s(1+as)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kF(s)}{s(1+as)}} = \frac{kF(s)}{as^2 + s + kF(s)} \equiv \frac{1}{(1+\tau s)^2}$$

Lös ut $F(s)$

$$k(1 + \tau s)^2 F(s) = as^2 + s + kF(s)$$
$$F(s) = \frac{s(1 + as)}{k(2\tau s + \tau^2 s^2)} = \frac{1}{k\tau} \cdot \frac{1 + as}{2 + \tau s}$$

b) Beräkna överföringsfunktion

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{U(s)}{Y(s)} \cdot \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{(1 + \tau s)^2} = \frac{s(1 + as)}{k(1 + \tau s)^2}$$

Vid stegformade börvärdesändring inträffar i allmänhet regulatorns maximala styrsignal vid tiden $t = 0$. För börvärdessteget $R(s) = r_0/s$ gäller

$$U(s) = \frac{r_0(1 + as)}{k(1 + \tau s)^2}$$

Begynnelsevärdessatsen ger

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{r_0 s(1 + as)}{k(1 + \tau s)^2} = \frac{r_0}{k} \frac{a}{\tau^2}$$

$$\tau = 4, r_0 = 0.3, a = 5, k = 0.1 \Rightarrow u(0) = 15/16$$

$$\tau = 1 \Rightarrow u(0) = 15$$

Det snabbare systemet ($\tau = 1$) kräver betydligt högre styrsignaler.

c) Kretsöverföringen ges av

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{k}{s(1 + as)} \cdot \frac{1 + as}{k\tau(2 + \tau s)} = \frac{1}{\tau s(2 + \tau s)}$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{1}{\tau\omega_c\sqrt{4 + \tau^2\omega_c^2}} = 1$$

Beräkna $\tau\omega_c$

$$1 = \tau^2\omega_c^2(4 + \tau^2\omega_c^2)$$
$$\tau^2\omega_c^2 = -2 + \sqrt{5} = 0.236$$

Ta fram fasmarginalen

$$\frac{1}{L(j\omega_c)} = -90^\circ - \arctan(\tau\omega_c/2)$$
$$= -90^\circ - \arctan(\sqrt{0.236}/2) = -103.7^\circ$$

dvs $\varphi_m = 76.3^\circ$

d) Bandbredden ges av

$$|T(j\omega_b)| = |G_{ry}(j\omega_b)| = \frac{1}{1 + (\tau\omega_b)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = \frac{1}{\tau}(\sqrt{2} - 1)$$

dvs, bandbredden ökar 4 ggr

e) Litet τ ger ett snabbare system vilket kräver högre styrsignaler.

Den designade regulatorn ger konstanta stabilitetsmarginalerna oberoende av τ .

Högfrekvent modellosäkerhet beskrivs av den multiplikativa osäkerhetsfaktorn $\Delta_m(j\omega)$.

En hög bandbredd ger ett högt $|T(j\omega)|$ för höga frekvenser. Robusthetskravet $|T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| < 1$ innebär därför att ett snabbt system ger sämre robusthet.

• Lösning till 7.9

a) Otto Smith regulatorn

$$F_{\text{tot}}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{F(s)}{1 + [\hat{G}(s) - \hat{G}(s)e^{-s\hat{T}_d}]F(s)}$$

ger

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F_{\text{tot}}(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F_{\text{tot}}(s)G(s)e^{-sT_d}} \\ &= \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)[\hat{G}(s) - \hat{G}(s)e^{-s\hat{T}_d}] + F(s)G(s)e^{-sT_d}} \\ &= \{\hat{T}_d = T_d\} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)\hat{G}(s) + F(s)[G(s) - \hat{G}(s)]e^{-sT_d}} \end{aligned}$$

b) För att få statisk förstärkning 1 införs integralverkan

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Processmodell

$$\hat{G}(s) = G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{K_p \frac{1+sT_i}{sT_i} \cdot \frac{1}{1+s} e^{-s}}{1 + K_p \frac{1+sT_i}{sT_i} \cdot \frac{1}{1+s} + 0} = \frac{K_p(1+sT_i)e^{-s}}{s(s+1)T_i + K_p(1+sT_i)}$$

$$\text{Låt } T_i = 1 \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_p e^{-s}}{s + K_p}$$

Då $s \rightarrow 0$ fås LF-förstärkningen 1

Krav: $t_{5\%} \leq 2$. Eftersom dödtiden $T_d = 1$ så ska systemet utan dödtid ha stigtiden 1

$$e^{-K_p \cdot 1} = 0.05 \Rightarrow K_p \approx 3$$

dvs

$$F(s) = 3\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

• Lösning till 7.10

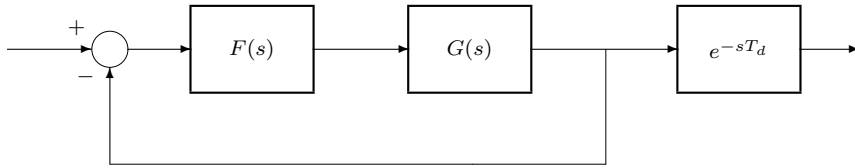
a)

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)[G(s)e^{-sT_d} + \hat{G}(s)(1 - e^{-s\hat{T}_d})]} \\ &= \{\hat{T}_d = T_d\} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)G(s) + F(s)[G(s) - \hat{G}(s)]e^{-sT_d}} \end{aligned}$$

b) Om processmodellen är exakt $\hat{G}(s) = G(s)$

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)G(s)}$$

Tidsfördröjningen har eliminerats i återkopplingsloopen



dvs länken $F(s)$ kan dimensioneras för $G(s)$ utan dödtid.

• Lösning till 7.11

a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

$$Y(s) = R(s) \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)KG(s) - Y(s)\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)KG(s)$$

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)KG(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)KG(s)} \\ &= \frac{(1 + sT_i)KG(s)}{sT_i + (1 + sT_i + s^2T_iT_d)KG(s)} \end{aligned}$$

Fördel: referenssignalen deriveras inte, snabba variationer i r kan annars ge höga styrsignalspikar (t.ex. vid börvärdessteg)

b)

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = F_f(s) \frac{\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)KG(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)KG(s)} \\ &= F_f(s) \frac{(1 + sT_i + s^2T_iT_d)KG(s)}{sT_i + (1 + sT_i + s^2T_iT_d)KG(s)} \end{aligned}$$

För att få samma G_{ry} som i a)

$$F_f(s) = \frac{1 + sT_i}{1 + sT_i + s^2T_iT_d} = \{T_i = 4T_d\} = \frac{1 + s4T_d}{(1 + s2T_d)^2}$$

När man inför $F_f(s)$ kancelleras dubbelnollstället i $s = -\frac{1}{2T_d}$ och ersätts med ett enkelnollställe i $s = -\frac{1}{4T_d}$, (samma poler i båda fallen).

c)

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{F_f(s)K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)}{1 + KG(s)\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)}$$

Eftersom $L(s) = KG(s)(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d)$ och komplementära känslighetsfunktionen $T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$ fås

$$G_{ru}(s) = \frac{\frac{F_f(s)}{G(s)}L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F_f(s)T(s)}{G(s)}$$

Antagande: vid höga frekvenser $T(j\omega) \rightarrow L(j\omega)$

$$G_{ru}(j\omega) \rightarrow F_f(j\omega) \frac{L(j\omega)}{G(j\omega)}$$

$$|G_{ru}(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = |F_f(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K|G(j\omega)|\omega T_d}{|G(j\omega)|}$$

Fall i) $F_f = 1$

$$|G_{ru}|_{HF} = K\omega T_d$$

Fall ii) F_f enligt b)

$$|G_{ru}|_{HF} = \frac{4\omega T_d}{4\omega^2 T_d^2} K\omega T_d = K$$

dvs, antalet nollställen nära $s = 0$ (jmf. b) är kritiskt med tanke på HF-egenskaperna.

• Lösning till 7.12

$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)} \\ F_{PID_f}(s) &= K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + 2\zeta s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2)} \end{aligned}$$

Båda regulatorerna har lågfrekvensasymptoten $\frac{K_i}{\omega}$ och brytpunkter $\frac{1}{\tau}$ och $\frac{\beta}{\tau}$

Bestäm $\max |F_{PID_f}(j\omega)|$ för $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ (eftersom β stort) dvs,

$$F_{PID_f}(j\omega) \approx K_i \frac{(j\omega \cdot \tau)^2}{(j\omega)(1 + 2\zeta j\omega \frac{\tau}{\beta} + (j\omega \frac{\tau}{\beta})^2)}$$

$$\begin{aligned} |F_{PID_f}(j\omega)|^2 &= K_i^2 \frac{(\omega\tau)^4}{\omega^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\omega\tau}{\beta}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega\tau}{\beta}\right)^2 \right]}, \quad \text{inför } \omega_0 = \frac{\omega\tau}{\beta} \\ &= K_i^2 \tau^2 \beta^2 \frac{\omega_0^2}{(1 - \omega_0^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2} = \frac{K_i^2 \tau^2 \beta^2 \cdot \omega_0^2}{\omega_0^4 + 2\omega_0^2(2\zeta^2 - 1) + 1} \end{aligned}$$

Hitta maximum: $\frac{\partial |F_{PID_f}|^2}{\partial \omega_0} = 0$

$$(K_i \tau \beta)^2 \frac{2\omega_0(\omega_0^4 + 2\omega_0^2(2\zeta^2 - 1) + 1) - \omega_0^2(4\omega_0^3 + 4\omega_0(2\zeta^2 - 1))}{(\dots)} = 0$$

$$2\omega_0\{\omega_0^4 + 2\omega_0^2(2\zeta^2 - 1) + 1\} - \omega_0^2\{4\omega_0^3 + 4\omega_0(2\zeta^2 - 1)\} = 0$$

$$1 - \omega_0^4 = 0$$

$$\omega_0 = 1$$

dvs max inträffar för $\omega_0 = 1$, dvs $\omega = \frac{\beta}{\tau}$

$$\begin{aligned}\max |F_{PID_f}(j\omega)|^2 &= (K_i\tau\beta)^2 \cdot \frac{1}{0 + 4\zeta^2} \\ \Rightarrow \max |F_{PID_f}(j\omega)| &= \frac{K_i\tau\beta}{2\zeta}\end{aligned}$$

Jämför med att hitta maximum genom att titta på HF-asymptoten:

$$|F_{PID_f}(j\omega)|_{HF} = K_i \frac{\omega^2\tau^2}{\omega \frac{\omega^2\tau^2}{\beta^2}} = \frac{K_i\beta^2}{\omega}$$

Ur amplituddiagrammet, max inträffar vid $\omega = \beta/\tau$, dvs

$$\max |F_{PID_f}(j\omega)|_{HF} = K_i\tau\beta$$

Kompensera med -6 dB för “dubbelpol” (brytning -40 dB)

$$\max |F_{PID_f}(j\omega)| = \frac{K_i\tau\beta}{2}$$

detta motsvarar den exakta amplituden för $\zeta = 1$

• Lösning till 7.13

a) Bestäm överföringsfunktionen från börvärde till utsignal

$$Y = G(F_{rf}R + F(R - Y))$$

dvs

$$G_{ry} = \frac{Y}{R} = \frac{GF_{rf} + GF}{1 + GF}$$

Välj F_{rf} så att $Y(s) = R(s)$, dvs $G_{ry} = 1$

$$GF_{rf} + GF = 1 + GF \Rightarrow F_{rf} = \frac{1}{G}$$

b) Låt $G = B/A$, $F = D/C$, $F_{rf} = \hat{A}/\hat{B}$ (modell av $1/G$)

$$\frac{Y}{R} = \frac{\hat{A}C + \hat{B}D}{AC + BD} \cdot \frac{B}{\hat{B}}, \quad \frac{U}{R} = \frac{\hat{A}C + \hat{B}D}{AC + BD} \cdot \frac{A}{\hat{B}}$$

För stabil framkoppling F_{rf} måste G :s nollställen vara stabila, dvs stabilt \hat{B} .

Dödtid i G innebär “negativ” dödtid i F_{rf} vilket inte går att realisera. För “normala” system gäller $G(\infty) = B(\infty)/A(\infty) = 0$, vilket medför att $|U/R| \rightarrow \infty$ för höga frekvenser.

c) Statisk framkoppling $F_{rf} = \frac{1}{G(0)} = 0.5$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)^2} (F_{rf} + 0.5 \frac{s+1}{s})}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{2s}{s+1} \cdot \frac{(F_{rf} + 0.5 \frac{s+1}{s})}{s^2 + s + 1}$$

$$F_{rf} = 0.5 : \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$F_{rf} = 0 : \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad (\text{ingen framkoppling})$$

Vid framkoppling kommer nollstället i $s = -0.5$ snabba på insvängningen vid bärvärdesändringar.

• Lösning till 7.14

- a) $t_s = 5$ s
b) $t_s \approx 1.5$ s

• Lösning till 7.15

- a) Framkopplingsfiltret ingår ej i KE, varför slutna systemets stabilitet ej påverkas.
b) $K = 0.08$
c)

$$F(s) = 0.5 \frac{s+1}{s+2}$$

• Lösning till 7.16

- a)

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_0(s)[G_1(s) - F_R(s)(G_1(s)G_2(s) - 1)]}{1 - F_R(s)G_2(s) + G_R(s)G_0(s)}$$

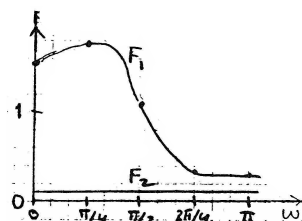
- b)

$$F_R(s) = \frac{G_1(s)}{G_1(s)G_2(s) - 1}$$

- c)

$$-\frac{1}{2} < K < 1$$

• Lösning till 7.17



För låga frekvenser (< 1 rad/s) ger kasadregleringen en 10-potens bättre resultat. (Vid högre frekvenser avtar fördelen succesivt.)

• Lösning till 7.18

a)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)P(s)e^{-\tau s}}{1 + K(s)P(s)}$$

b)

$$K(s) = 3\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

• Lösning till 7.19

$$\begin{aligned}\pi\theta &\leq (4\tau + 2\theta) \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \text{ eller} \\ \theta &\leq 0.384\tau\end{aligned}$$

10.8 Design av regulatorer på tillståndsform

• Lösning till 8.1

a)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -2x + y + u\end{aligned}$$

På matrisform:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s+1} \cdot U(s) \\ (s+1)Y(s) &= -2 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot U(s) + U(s) \\ Y(s) &= \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} \cdot U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot U(s)\end{aligned}$$

b) Styrbarhet:

$$\det \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

\therefore Ej styrbart

Observerbarhet:

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

\therefore Observerbart

c) Enligt tillståndsmodellen ges polerna av

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1) = 0$$

vilket ger ett instabilt system eftersom en pol hamnar i $s = 1$. Denna pol cancelleras i överföringsfunktionen vilket innebär att överföringsfunktionen ej beskriver hela dynamiken utan bara den del som är både styr- och observerbar. Den instabila moden är således enligt b) ej styrbar men observerbar.

d) Tillståndsåterkoppling går ej (kräver styrbarhet).

Observerbarhet går bra (kräver observerbarhet).

• Lösning till 8.2

a)

$$\ddot{\theta} = u - v$$

På matrisform:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B (u - v)$$

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BL_u) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_\theta & s + l_\omega \end{bmatrix} = s^2 + l_\omega s + l_\theta \\ &= (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2\end{aligned}$$

$$\therefore l_\omega = 2\alpha, \quad l_\theta = \alpha^2$$

$$\begin{aligned}s^2\theta(s) &= -l_\theta\theta(s) - l_\omega s\theta(s) + K_r\theta_r(s) \\ \theta(s) &= \frac{K_r}{s^2 + l_\omega s + l_\theta} \cdot \theta_r(s)\end{aligned}$$

$$\theta(0) = \theta_r(0) \Rightarrow K_r = l_\theta = \alpha^2$$

Styrlagen blir alltså:

$$u = \alpha^2(\theta_r - \theta) - 2\alpha\omega$$

b)

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2} \cdot U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{K_r s^2}{(s + \alpha)^2} \cdot \theta_r(s)$$

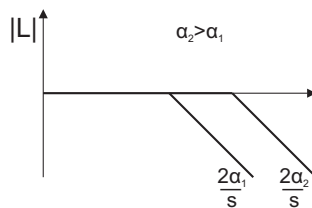
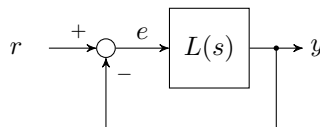
$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{K_r s^2}{(s + \alpha)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\theta_r(s)} = K_r = \alpha^2$$

c)

$$\theta_r = v = 0$$

$$U(s) = -(2\alpha s + \alpha^2)\theta(s) = \underbrace{-(2\alpha s + \alpha^2)}_{L(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot U(s)$$

$$L(s) \rightarrow \frac{2\alpha}{s} \text{ då } s \rightarrow \infty$$



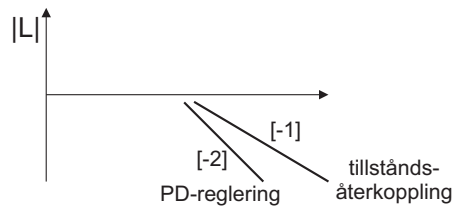
Stabilitet vid modellosäkerhet:

$$\Delta_m(s) \text{ garanteras då } |T\Delta_m| < 1$$

$|T| \rightarrow |L|$ då $s \rightarrow \infty \Rightarrow$ stort Δ_m för högre frekvenser kräver litet $|T|$ och därmed litet $|L|$. $|L|$ ökar då systemets snabbhet (α) ökar, vilket ökar risken för instabilitet p.g.a. modellosäkerhet.

d) Vid tillståndåterkoppling gäller $[-1]$ -lutning för $L(s)$ vid höga frekvenser ($\frac{2\alpha}{s}$) medan en PD-regulator ger $[-2]$ -lutning eftersom

$$L(s) = \frac{K_p(1 + s\tau)}{s^2(1 + s\tau/\beta)} \rightarrow \frac{K_p\beta}{s^2} \text{ då } s \rightarrow \infty$$



$\therefore |L|$ minskar mycket snabbare för högre frekvenser vid PD-reglering jämfört med tillståndsåterkoppling, vilket är positivt med tanke på robustheten för högfrekventa modellosäkerheter.

• Lösning till 8.3

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+0.1)}U(s)$$

Tillståndsmodell

$$sY(s) = \Omega(s)$$

$$(s+0.1)\Omega(s) = U(s)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix}$$

a) Tillståndsåterkoppling $L_u = [l_y \ l_w]$

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BL_u) &= \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [l_y \ l_w] \right) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_y & s+0.1+l_w \end{bmatrix} = \\ &= s^2 + (0.1+l_w)s + l_y = (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = \\ &= \longrightarrow \begin{cases} l_y = \alpha^2 \\ l_w = 2\alpha - 0.1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$G_{ry}(0) = C(-A + BL_u)^{-1}BK_r = 1 \Rightarrow K_r/l_y = 1, \ K_r = l_y = \alpha^2$$

b) Kretsöverföringen

$$\begin{aligned} L(s) &= L_u(sI - A)^{-1}B = [\alpha^2 \ 2\alpha - 0.1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+0.1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{[\alpha^2 \ 2\alpha - 0.1] \begin{bmatrix} s+0.1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 0.1s} = \frac{\alpha^2 + (2\alpha - 0.1)s}{s^2 + 0.1s} = \\ &= \longrightarrow \begin{cases} \alpha^2/s & s \rightarrow 0 \\ (2\alpha - 0.1)/s & s \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

α	$L(s)_{s \rightarrow 0}$	$L(s)_{s \rightarrow \infty}$
0.1	0.01/s	0.1/s
0.5	0.25/s	0.9/s

- c) Vid låga frekvenser ger större $L(j\omega)$, motsvarande ett högre α , en lägre känslighetsfunktion $|S(j\omega)| \approx 1/|L(j\omega)|$, dvs bättre prestanda.

Vid höga frekvenser ger lägre $|L(j\omega)|$, motsvarande ett mindre α , en lägre komplementär känslighetsfunktion $|T(j\omega)| \approx |L(j\omega)|$, dvs bättre robusthet och mindre styrsignalaktivitet (mindre K_r).

• Lösning till 8.4

$$G(s) = 1/s$$

$$\dot{x} = u, y = x$$

a)

$$u = -l_u + K_r r$$

$$\det(sI - A + BL_u) = \det(s + l_u) = s + 1 \Rightarrow l_u = 1$$

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL_u)^{-1}BK_r = \frac{K_r}{s+1}$$

$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow K_r = 1$$

b)

$$y_m = y - \omega$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y_m - C\hat{x}) = u + Ky_m - K\hat{x}$$

$$u = -l_u\hat{x} + K_r r = -\hat{x} + r$$

Regulatorn insatt i observatören ger

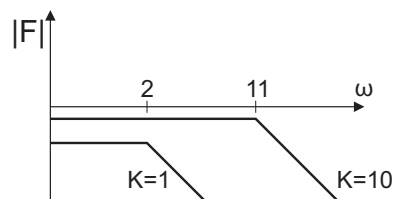
$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} + r + Ky_m - K\hat{x} = -(1+K)\hat{x} + Ky_m + r$$

$$u = -\hat{x} + r$$

Laplacetransformering med $r = 0$ ger

$$\hat{X}(s) = \underbrace{\frac{K}{s+1+K}}_{F(s)} Y_m(s) = \frac{K/(1+K)}{1+s/(1+K)} Y_m(s)$$

$$U(s) = -\hat{X}(s) \text{ (OBS! } U(s) = -F(s)Y_m(s))$$

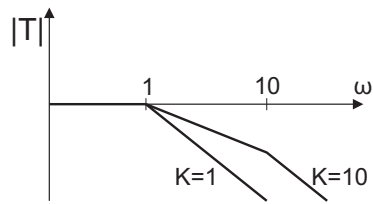


c)

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1+K)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K}{s^2 + (1+K)s + K} =$$

$$= K \times \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{tillståndsåterkopplingspol}} \times \underbrace{\frac{1}{s+K}}_{\text{observatörspol}} = \frac{1}{(1+s)(1+s/K)}$$



$K = 1$ ger mer lågpasfiltrering och därmed bättre kompensering av mätstörningar.

• Lösning till 8.5

a)

$$\begin{aligned} x &= [\theta \quad \omega]^T \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

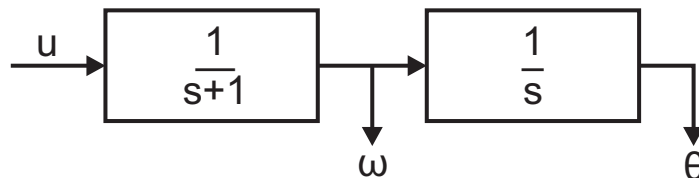
b)

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{s(s+1)}u = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) u \\ \omega &= \frac{1}{s+1}u \end{aligned}$$

Systemet kan beskrivas på diagonalform:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi \end{aligned}$$

Av denna tillståndsform framgår att båda moderna (polerna) är styrbara medan endast θ kan observera båda moderna vilket också är naturligt eftersom:



Blockscemat visar att u påverkar båda moderna medan ω observerar integralmoden.

Alternativ ansats: Undersök $\det \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$ och $\det \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$

c) Observatör $\theta = [1 \quad 0] x$

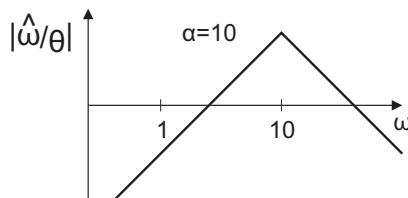
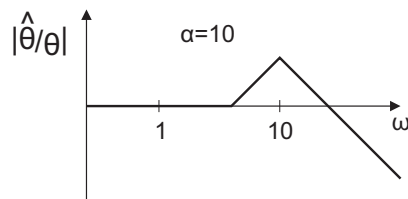
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K[\theta - C\hat{x}] = \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu + K\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(sI - A + KC) &= \det \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 1 \end{bmatrix} = \\
&= (s + k_1)(s + 1) + k_2 = s^2 + (1 + k_1)s + k_1 + k_2 \\
&= (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \text{ (Önskad observatörsdynamik)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = \alpha^2 & k_1 = 2\alpha - 1 \\ 1 + k_1 = 2\alpha & k_2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} &= (sI - A + KC)^{-1}(Bu + K\theta) = \\
&= \frac{1}{(s + \alpha)^2} \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ -k_2 & s + k_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \theta \right) = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(2\alpha - 1)(s + 1) + \alpha^2 - 2\alpha + 1}{(s + \alpha)^2} \theta + \frac{1}{(s + \alpha)^2} u \\ \frac{-k_1 k_2 + s k_2 + k_1 k_2}{(s + \alpha)^2} \theta + \frac{s + k_1}{(s + \alpha)^2} u \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= \frac{(s\alpha - 1)s + \alpha^2}{(s + \alpha)^2} \theta + \frac{1}{(s + \alpha)^2} u = \\
&= \frac{1 + \frac{s}{\alpha^2}}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2} \theta + \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2} u \\
\hat{\omega} &= s \frac{(\alpha - 1)^2}{(s + \alpha)^2} \theta + \frac{s + 2\alpha - 1}{(s + \alpha)^2} u = \\
&= s \frac{(1 - \frac{1}{\alpha})^2}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2} \theta + \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} \right) \frac{1 + \frac{s}{2\alpha - 1}}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2}
\end{aligned}$$



$\frac{\hat{\theta}}{\theta} \sim \text{LP-filter med bandbredd} \sim \alpha$

$\frac{\hat{\omega}}{\omega} \sim \text{Deriverande filter som bryter av vid } \omega = \alpha$

• Lösning till 8.6

$$\Theta(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{u}_u$$

$$y_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}}_x - w$$

a)

$$\begin{aligned} \det(sI - A + K_y C) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{bmatrix} s + k_\theta & -1 \\ k_\omega & s \end{bmatrix} = s^2 + k_\theta s + k_\omega = (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \end{aligned}$$

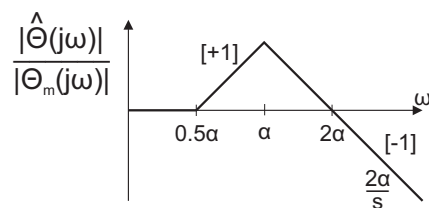
$$k_\theta = 2\alpha$$

$$k_\omega = \alpha^2$$

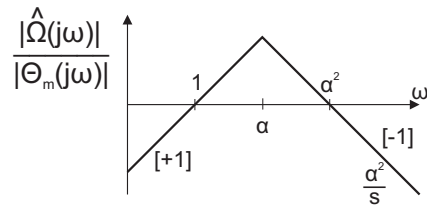
b)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_y(y_m - C\hat{x}) & y_m &= \theta_m \\ \hat{x}(s) &= (sI - A + K_y C)^{-1} K_y Y_m(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\Theta}(s) \\ \hat{\Omega}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s + k_\theta & -1 \\ k_\omega & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\omega \end{bmatrix} \Theta_m(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -k_\omega & s + k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\omega \end{bmatrix} \Theta_m(s) \\ &= \begin{bmatrix} k_\theta s + k_\omega \\ -k_\omega k_\theta + k_\omega s + k_\theta k_\omega \end{bmatrix} \frac{1}{(s + \alpha)^2} \Theta_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha s + \alpha^2}{(s + \alpha)^2} \\ \frac{\alpha^2 s}{(s + \alpha)^2} \end{bmatrix} \Theta_m(s) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 + \frac{s}{0.5\alpha}}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2} \\ \frac{s}{(1 + \frac{s}{\alpha})^2} \end{bmatrix} \Theta_m(s) \end{aligned}$$



LP-filter



Deriverande + LP-filter

Högfrekvensasymptoten ökar med α (minskad LP-filtrering, högre bandbredd)

c)

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - B\dot{u} - K_y(Cx - w - C\hat{x}) = \\ &= A\tilde{x} - K_yC\tilde{x} + K_yw\end{aligned}$$

$$\tilde{x}(s) = (sI - A + K_yC)^{-1}K_yW(s)$$

$$\therefore \frac{\Theta(s) - \hat{\Theta}(s)}{W(s)} = \frac{\hat{\Theta}(s)}{\Theta_m(s)} \qquad \frac{\Omega(s) - \hat{\Omega}(s)}{W(s)} = \frac{\hat{\Omega}(s)}{\Theta_m(s)}$$

Dessa överföringsfunktioner framgår därför av uppgift b)

• Lösning till 8.7

(a) $L = [\ell_1 \quad \ell_2] = [2 \quad -(1 + \nu^2)]$ där $\nu = 0$ ger ett kritiskt dämpat system.

(b) $\nu = \sqrt{4\sqrt{2} - 1}$

10.9 Tidsdiskreta system

• Lösning till 9.1

a)

$$G_d(z) = \frac{1.896}{z - 0.368}$$

b)

$$G_d(z) = \frac{1.1804}{z - 0.6065}$$

c)

$$G_d(z) = \frac{0.74}{z - 0.01832}$$

d)

$$G_d(z) = \frac{0.015(z+1)}{(z-1)^2}$$

e)

$$G_d(z) = \frac{0.413(z+1)}{z^2 - 0.1415z + 1}$$

f)

$$G_d(z) = \frac{0.4395(z+0.875)}{(z-1)(z-0.6703)}$$

g)

$$G_d(z) = \frac{3}{z-1} + \frac{0.34z+0.242}{z^2-0.786z+0.368}$$

• Lösning till 9.2

$$h = 0.1 \Rightarrow G_d(z) = \frac{0.0099}{z - 0.980}$$

$$h = 0.5 \Rightarrow G_d(z) = \frac{0.04758}{z - 0.905}$$

• Lösning till 9.3

a)

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{\frac{Ke^{-sT_d}}{1+Ts} \cdot \frac{1+Ts}{K(1+s\lambda T - e^{-sT_d})}}{1 + \frac{e^{-sT_d}}{1+s\lambda T - e^{-sT_d}}} \\ &= \frac{e^{-sT_d}}{1 + s\lambda T - e^{-sT_d} + e^{-sT_d}} = \frac{e^{-sT_d}}{1 + s\lambda T} \end{aligned}$$

b)

$$K(1 + s\lambda T - e^{-sT_d})U(s) = (1 + sT)E(s)$$

Invers Laplacetransformering ger

$$K(u(t) + \lambda T \dot{u}(t) - u(t - T_d)) = e(t) + T \dot{e}(t)$$

c)

$$u(t) = u(t - T_d) - \lambda T \dot{u}(t) + \frac{1}{K} e(t) + \frac{T}{K} \dot{e}(t)$$

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t) - u(t-h)}{H}$$

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(t) - e(t-h)}{H}$$

Differensapproximationen insatt i reglaturekvationen ger

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t - T_d) - \frac{\lambda T}{H} (u(t) - u(t-h)) + \frac{1}{K} e(t) + \frac{T}{Kh} (e(t) - e(t-h)) \\ &= \frac{H}{h + \lambda T} \left[u(t - T_d) + \frac{\lambda T}{H} u(t-h) + \frac{h+T}{Kh} e(t) - \frac{T}{Kh} e(t-h) \right] \end{aligned}$$

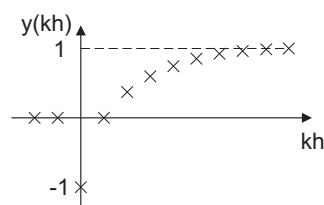
Låt $t = kh$ och $T_d = ch \Rightarrow$

$$u(kh) = \frac{H}{h + \lambda T} \left[u(kh - ch) + \frac{\lambda T}{H} u(kh - h) + \frac{h+T}{Kh} e(kh) - \frac{T}{Kh} e(kh - h) \right]$$

Denna differensekvation kan enkelt programmeras in i en dator och på det sättet implementera den önskade reglerfunktionen.

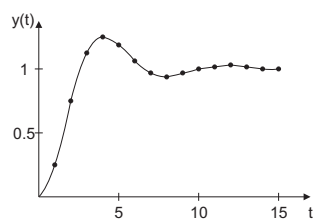
• Lösning till 9.4

$$\begin{aligned} y(kh) - 0.5y(kh - h) &= -u(kh) + 1.5u(kh - h) \\ y(0) &= -1 \\ y(kh) &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k > 0 \end{aligned}$$



• Lösning till 9.5

$$\omega_n = 0.858, \quad \zeta = 0.404$$



• = exakt stegsvar, - = uppskattat stegsvar med hjälp av ζ och ω_n .

• Lösning till 9.6

a)

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = 2.5 \left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \right)$$

$$\begin{aligned} G_d(z) &= 2.5 \left(\frac{2(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{(1-e^{-h})(1+e^{-h})}{z-e^{-2h}} \right) \\ &= 2.5(1-e^{-h}) \frac{2z-2e^{-2h}-z(1+e^{-h})+e^{-h}+e^{-2h}}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} \\ &= 2.5(1-e^{-h}) \frac{(1-e^{-h})z+e^{-h}(1-e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} \\ &= \frac{2.5(1-e^{-h})^2(z+e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} \end{aligned}$$

$$h = \ln 2 \Rightarrow G_d(z) = \frac{0.625(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

Polerna $\rightarrow z = 1$ då $h \rightarrow 0$

Polerna $\rightarrow z = 0$ då $h \rightarrow \infty$

b) $\omega = 0$:

$$G_d(e^{j\omega h}) = G_d(1) = \frac{2.5(1-e^{-h})^2(1+e^{-h})}{(1-e^{-h})(1-e^{-h})(1+e^{-h})} = 2.5$$

$$G(j\omega) = G(0) = 2.5 = G_d(1)$$

$$\omega = \frac{\pi}{H}:$$

$$\begin{aligned} G_d(e^{j\omega h}) &= G_d(-1) = \frac{2.5(1-e^{-h})^2(-1+e^{-h})}{(-1-e^{-h})(-1-e^{-2h})} \\ &= -\frac{2.5(1-e^{-h})^3}{(1+e^{-h})(1+e^{-2h})} \rightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$G(j\omega) = G(\infty) = 0 \text{ då } h = 0$$

$$|G_d(e^{j\omega h})|_{\omega=\frac{\pi}{H}} \rightarrow G(\infty) \text{ då } h \rightarrow 0$$

• Lösning till 9.7

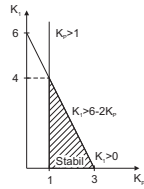
$$h < \frac{2}{0.96} = 2.08$$

• Lösning till 9.8

a)

$$K_i < 6 - 2K_p, \quad K_p > 1, \quad K_i > 0$$

b)



• Lösning till 9.9

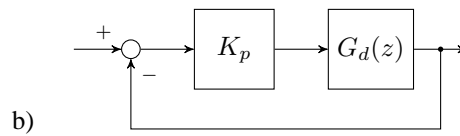
a)

$$G(s) = \frac{4}{s+1} \cdot \frac{4}{s+2} = \frac{16}{s+1} - \frac{16}{s+2}$$

$$\begin{aligned} G_d(z) &= \frac{16(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{8(1-e^{-2h})}{z-e^{-2h}} = \{h = \ln 2\} = \\ &= \frac{16(1-0.5)}{z-0.5} - \frac{8(1-0.25)}{z-0.25} = \frac{8}{z-0.5} - \frac{6}{z-0.25} \\ &= \frac{8z-2-6z+3}{(z-0.5)(z-0.25)} = \frac{2z+1}{z^2-0.75z+0.125} \end{aligned}$$

Polerna $\rightarrow 0$ då $h \rightarrow \infty$

Polerna $\rightarrow 1$ då $h \rightarrow 0$



Karakteristiska ekvationen: $1 + K_p G_d(z) = 0$

$$\begin{aligned} z^2 - 0.75z + 0.125 + K_p(2z+1) &= z^2 - (0.75 - 2K_p)z + K_p + 0.125 \\ &= (z - \alpha)^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 \end{aligned}$$

Identifiering ger

$$\begin{aligned} K_p + 0.125 &= \alpha^2 \Rightarrow K_p = \alpha^2 - 0.125 \\ 0.75 - 2K_p &= 2\alpha \end{aligned}$$

Insättning av K_p ger

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 - 0.25 + 2\alpha - 0.75 &= 0 \\ \alpha^2 + \alpha - 0.5 &= 0 \\ \alpha &= -\frac{1}{2} + \sqrt{0.25 + 0.5} \approx 0.35 \\ \Rightarrow K_p &= 0.35^2 - 0.125 \end{aligned}$$

• Lösning till 9.10

a)

$$G(s) = e^{-sT_d}, \quad h = T_d \Rightarrow G_d(z) = z^{-1}$$

$$F(s) = K_p + \frac{K_p/T_i}{s} \Rightarrow F_d(z) = K_p + \frac{K_p T_d/T_i z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$L_d(z) = G_d(z)F_d(z) = K_p \frac{1 + (T_d/T_i - 1)z^{-1}}{1 - z^{-1}} z^{-1}$$

b)

$$T_i = T_d \Rightarrow L_d(z) = K_p \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{K_p}{z - 1}$$

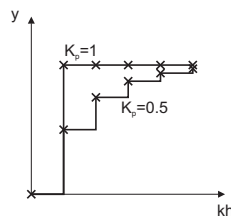
$$G_{ry}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{K_p}{z - (1 - K_p)}$$

Polplacering:

$$z = 1 - K_p = \begin{cases} 0.5, & \text{då } K_p = 0.5 \\ 0, & \text{då } K_p = 1 \end{cases}$$

Differensekvationen $y(kh + h) = (1 - K_p)y(kh) + K_p r(kh)$ ger tillsammans med att $r(kh) = 1$ för $k > 0$:

$y(kh), (K_p = 0.5)$	$y(kh), (K_p = 1)$
0	0
0.5	1
0.75	1
0.875	1



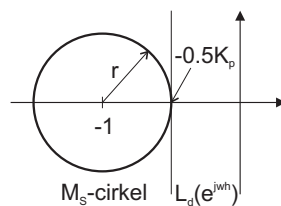
c)

$$\begin{aligned} L_d(e^{j\omega h}) &= \frac{K_p}{e^{j\omega h} - 1} = \frac{K_p}{\cos \omega h + j \sin \omega h - 1} \\ &= K_p \frac{\cos \omega h - 1 - j \sin \omega h}{(\cos \omega h - 1)^2 - j^2 \sin^2 \omega h} \\ &= K_p \frac{\cos \omega h - 1 - j \sin \omega h}{(\cos^2 \omega h + \sin^2 \omega h) + 1 - 2 \cos \omega h} \\ &= -K_p \frac{-1 - \cos \omega h + j \sin \omega h}{2(1 - \cos \omega h)} = -\frac{K_p}{2} - j \frac{K_p \sin \omega h}{1 - \cos \omega h} \end{aligned}$$

För små ω gäller:

$$\frac{\sin \omega h}{1 - \cos \omega h} \approx \frac{\omega h}{1 - 1 + \frac{(\omega h)^2}{2}} = \frac{2}{\omega h}$$

$$\text{Im}\{L_d\} \rightarrow \begin{cases} -\infty, & \text{då } \omega \rightarrow 0^+ \\ +\infty, & \text{då } \omega \rightarrow 0^- \end{cases}$$



$$\begin{aligned} r &= 1 - 0.5K_p \\ M_S &= \frac{1}{r} = \frac{1}{1 - 0.5K_p} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} K_p = 0.5 &\Rightarrow M_S = \frac{1}{1 - 0.25} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \\ K_p = 1 &\Rightarrow M_S = \frac{1}{1 - 0.5} = \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$

Ökad snabbhet (större K_p) ger sämre stabilitetsmarginal (ökat M_S).

• Lösning till 9.11

a)

$$y(k+1) = 0.905y(k) + 0.190u(k)$$

Z-transformering ger

$$zY(z) = 0.905Y(z) + 0.190U(z)$$

$$\begin{aligned} G_d(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.190}{z - 0.905} = \frac{2(1 - 0.905)}{z - 0.905} \\ &= \frac{2(1 - \alpha)}{z - \alpha}, \quad \alpha = e^{-h/T} = 0.905 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2}{1 + sT} \\ T &= -\frac{H}{\ln 0.905} \approx 10h = \left\{ h = \frac{1}{100} = 0.01 \right\} = 0.1 \end{aligned}$$

b)

$$h = \frac{1}{300} \Rightarrow G_d(z) = \frac{2(1 - e^{-\frac{1}{300 \cdot 0.1}})}{z - e^{-\frac{1}{300 \cdot 0.1}}} = \frac{0.0656}{z - 0.967} \triangleq \frac{b}{z - a}$$

Ändra $a = 0.967$, $b = 0.0656$ och $N_{\text{Step}} = 150$ (3 gånger fler sampel per tidsenhet).

c)

$$L_d(z) = \frac{K_p b}{z - a} = \frac{3b}{z - a}$$

Karakteristiska ekvationen: $1 + A_m L_d(z) = 0 \Rightarrow$ rot på stabilitetsgränsen.

$$z - a + A_m 3b = 0 \Rightarrow z = a - A_m 3b = -1$$

(Ökad förstärkning \Rightarrow roten passerar -1)

$$A_m = \frac{1 + a}{3b} = \begin{cases} 3.3, & \text{då } f_s = 100 \\ 10, & \text{då } f_s = 300 \end{cases}$$

• Lösning till 9.12

a)

$$y(kh + h) = ay(kh) + bu(kh)$$

Z-transformering ger

$$\begin{aligned} G_d(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{0.190}{z-0.905} \\ &= \frac{2(1-0.905)}{z-0.905} = \frac{2(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}} \quad h=0.01, \quad T=0.1 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{2}{1+Ts} = \frac{2}{1+0.1s}$$

b)

```
u1=0;
for k=1:Nstep+1
    u(k)=Kp*(r0-y(k));
    y(k+1)=a*y(k)+b*(u1+v0);
    u1=u(k);
end
```

c)

$$F(s) = \frac{5}{s} + 0.25$$

$$F_d(z) = \frac{0.05z^{-1}}{1-z^{-1}} + 0.25 = \frac{0.25 - 0.2z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$u(kh) = F_d(z)e(kh), \quad e(kh) = r_0 - y(kh)$$

$$u(kh) = u(kh-h) + 0.25e(kh) - 0.2e(kh-h)$$

Programkod:

```
u1=0;
e1=0;
for k=1:Nstep+1
    e(k)=r0-y(k);
    u(k)=u1+0.25*e(k)-0.2*e1;
    y(k+1)=a*y(k)+b*(u1+v0);
    u1=u(k);
    e1=e(k);
end
```

• Lösning till 9.13

a)

$$F(s) = \frac{K_\infty}{1-F_s(s)} \Rightarrow F(s) - K_\infty = F(s)F_s(s)$$

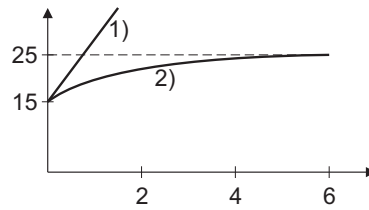
$$F_s(s) = 1 - \frac{K_\infty}{F(s)} = 1 - \frac{F(\infty)}{3(s+0.5)/s} = 1 - \frac{3s}{3(s+0.5)} = \frac{0.5}{s+0.5}$$

b) Fall 1:

$$\begin{aligned} e(t) = 5\sigma(t) &\Rightarrow U(s) = F(s)E(s) = \frac{3(s+0.5)}{s} \cdot \frac{5}{s} = \frac{15}{s} + \frac{7.5}{s^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(t) = (15 + 7.5t)\sigma(t) \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}
 u_s = 10 \Rightarrow U(s) &= \frac{5F(\infty)}{s} + F_s(s) \cdot \frac{10}{s} = \frac{5 \cdot 3}{s} + \frac{0.5 \cdot 10}{(s + 0.5)s} \\
 &= \frac{15}{s} + \frac{10}{s} - \frac{10}{s + 0.5} \Rightarrow \\
 \Rightarrow u(t) &= (25 - 10e^{-0.5t})\sigma(t) \rightarrow 25\sigma(t)
 \end{aligned}$$



I fall 1 integreras styrsignalen upp medan styrsignalen är begränsad i fall 2. Om $r(t)$ återgår till säg $r = 0$ så tar det lång tid att integrera bort felet i fall 1. Jmf Fig. 12.18 i läroboken.