Föreläsning 8: Stabilitet

- Repetition
- Stabilitet för återkopplade system
- Nyquistkriteriet
- Stabilitetsmarginaler

Lärandemål:

- Tillämpa Nyqvistkriteriet för att avgöra stabiliteten för ett återkopplat system.

Repetition

Återkoppling används för att

- Minska effekten av osäkerhet (processvariationer, störningar)
- Forma systemets dynamik (t ex snabba upp systemet, stabilisera)

För enkla regulatorer kan man studera hur det slutna systemets poler varierar, då en parameter i taget ändras (*rotorten*). Slutsatser från några enkla exempel:

- P-reglering ($F(s) = K_p$): ökat K_p ger mindre kvarstående fel, snabbare men "svängigare" respons och större styrsignaler
- I-reglering ($F(s) = \frac{1}{sT_i}$): tar bort kvarstående fel, minskat T_i ger större översläng
- PI-reglering ($F(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i}$): kombination av ovanstående

Exempel – PI-reglering

Example (PI-reglering av tank)

PI-reglering av en enkel tankprocess. PI-regulatorn parametriseras i allmänhet enligt följande:

$$F(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i})$$

Observationer:

- Slutna systemet är av 2:a ordningen:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KK_p(1 + sT_i)/(TT_i)}{s^2 + s \cdot (1 + KK_p)/T + KK_p/(TT_i)} = \frac{K_c(1 + sT_i)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Ökande K_p ger poler med större avstånd från origo (dvs ω_n)
- Minskande T_i ger poler med fix realdel och större imaginärdel (dvs större ω_n och lägre ζ)

Instabilitet

Återkoppling kan ge upphov till instabilitet – några exempel:

- P-reglering av Notes Server (tidsdiskret).
- P-reglering av systemet $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$.
  Detta kan vi undersöka med hjälp av *rotorten* (eng. root locus), dvs en plot av polernas lägen i det komplexa talplanet då förstärkningen K ökas. Matlab erbjuder kommandot *rlocus* för detta.
- Två (enkla) stabila system, sammankopplade med återkoppling, kan ge ett instabilt system.

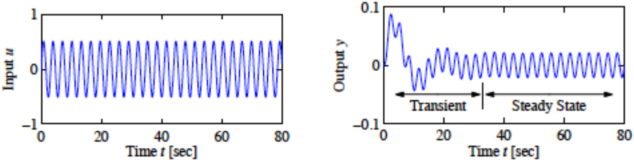
Metoder att avgöra stabilitet

- Lös den karakteristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$
- Routh-Hurwitz metod
- Rotort
- Nyquistkriteriet
- Simulering

Frekvenstrogenhet

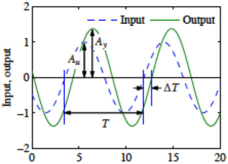
För ett stabilt LTI-system gäller:

- Om insignalen är en sinussignal, så är utsignalen *stationärt* en sinussignal med samma frekvens.



(a) Input (b) Output

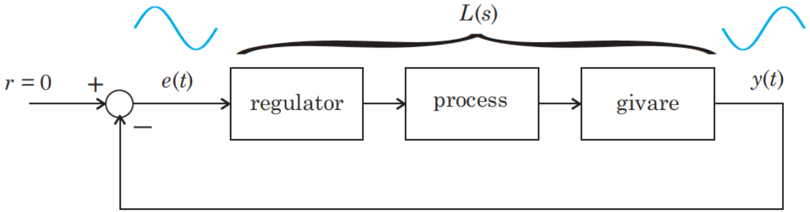
- Den stationära utsignalen karakteriseras av *förstärkningen* och *fasförskjutningen* relativt insignalen.



$$u(t) = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad y(t) \to |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

Villkor för självsvängning

Betrakta det återkopplade systemet nedan



Anta att $e(t) = \sin(\omega_\pi t)$, där $\arg L(i\omega_\pi) = -\pi$. Stationärt bör då

$$y(t) = |L(j\omega_\pi)| \sin(\omega_\pi t - 180^o).$$

Om $|L(j\omega_\pi)| = 1$ får vi

$$\begin{aligned} e(t) &= r - y(t) \\ &= -\sin(\omega_\pi t - 180^o) = \sin(\omega_\pi t) \end{aligned}$$

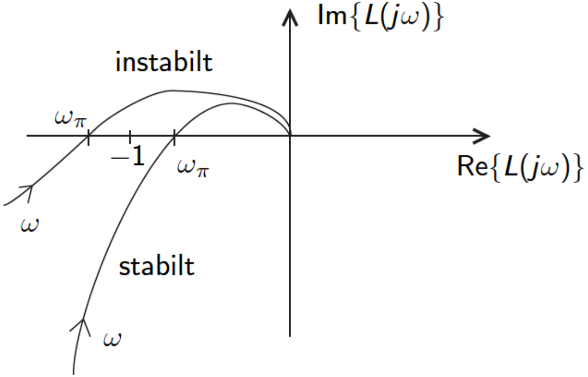
d.v.s. en sådan frekvenskomponent i signalen kommer 'snurra' runt i systemet med oförändrad amplitud.

Nyquists förenklade kriterium

Vi inser också intuitivt att:

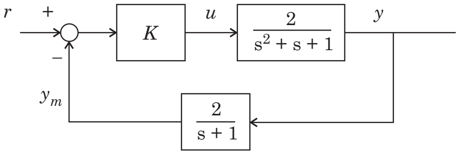
- $|L(i\omega_\pi)| < 1$: Amplituden minskar för varje varv signalen går genom loopen.
- $|L(i\omega_\pi)| > 1$: Amplituden ökar för varje varv signalen går genom loopen.

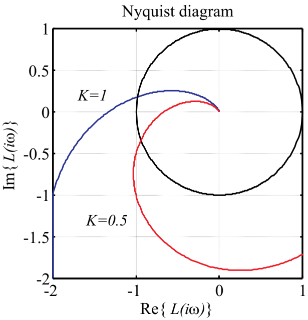
Eftersom $|L(i\omega_\pi)|$ är avståndet till 0 vid vinkeln -180^o får vi stabilitetsvillkoret att $L(i\omega)$ ej får passera till vänster om punkten -1 i komplexa talplanet.

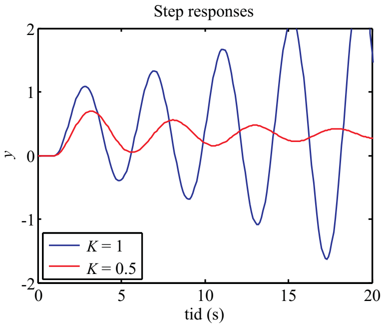


Exempel: Nyquist

Anta att vi i det tidigare exemplet inför en variabel förstärkning K:







Stabilitetsmarginaler

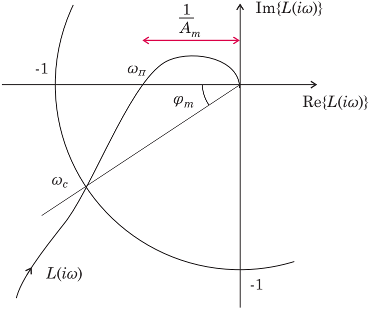
Eftersom alla modeller är behäftade med fel vill vi ha marginaler som gör att systemet är robust mot modellfel. Robustheten har ingen klar koppling till polernas placering. Däremot har avståndet för $L(i\omega)$ till den kritiska punkten -1 stor betydelse.

Fasmarginal:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg L(i\omega_c)$$

Amplitudmarginal:

$$A_m = 1/|L(i\omega_\pi)|$$



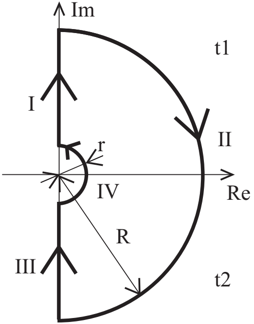
Nyquists fullständiga stabilitetskriterium

Om L har poler i HHP måste fullständiga Nyquist-kriteriet användas. Kriteriet bygger på argumentvariationsprincipen som ger en relation mellan argumentet för en funktion längs en sluten kurva och antalet nollställen och singulariteter hos funktionen i området som omsluts av kurvan.
Låter man funktionen vara $1 + L$ och området hela HHP får man

$$Z = N + P$$

$$\begin{aligned}
Z &= \text{antal nollställen i HHP hos } 1 + L \\
&= \text{``} \quad \textit{instabila} \text{ poler hos slutna systemet} \\
P &= \text{``} \quad \textit{instabila} \text{ poler hos } L \\
N &= \text{``} \quad \text{medurs omslingringar av } -1 \text{ för } L(s) \\
& \qquad\quad \text{då } s \text{ genomlöper Nyquists kontur:}
\end{aligned}$$

Nyquists kontur



$$
\begin{array}{lll}
\text{I:} & s = j\omega, & \omega = 0 \to \infty \\
\text{II:} & s = Re^{j\varphi}, & R \to \infty, \\
 & & \varphi = \frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{\pi}{2} \\
\text{III:} & s = -j\omega, & \omega = \infty \to 0 \\
\text{IV:} & s = re^{j\varphi}, & r \to 0, \\
 & & \varphi = -\frac{\pi}{2} \curvearrowleft \frac{\pi}{2}
\end{array}
$$

Exempel

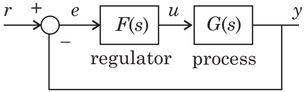
En instabil process som beskrivs av modellen

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

skall regleras med en PI-regulator

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \qquad \Leftrightarrow \qquad F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Nedan visas ett fullständigt Nyquistdiagram. Är systemet stabilt?




```
s = tf('s')
G = 1/(s-1);
Kp = 0.5;
Ki = 1;
F  = Kp+Ki/s;
nyquist(F*G)
```