Föreläsning 7: Återkoppling och enkla regulatorer

- Repetition
- P-, I- och D-reglering
- Egenskaper för det återkopplade systemet
- Modifiering av dynamik, polplacering
- Kvarstående fel
- Tolkning som tillståndsåterkoppling

Lärandemål:

- Förklara funktionen hos ett reglersystem, samt beskriva dess möjligheter och begränsningar; definiera begreppen återkoppling och framkoppling.
- Välja och dimensionera P/PI/PID-regulatorer så att önskade specifikationer uppfylls.

Repetition – LTI-modeller

Översikt av olika LTI-modeller, *interna* och *externa*:

$$
\begin{tikzcd}
a(\tfrac{d}{dt})y(t) = b(\tfrac{d}{dt})u(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \arrow[d, "G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}"] \\
y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau & Y(s) = G(s)U(s) \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"'] \\
\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \arrow[u, "g(t)=Ce^{At}B+D\delta(t)"] \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d] & \begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \arrow[u, "G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D"'] \\
x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau &
\end{tikzcd}
$$

Repetition – linjärisering

Den olinjära tillståndsmodellen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

kan linjäriseras kring en *stationär lösning* eller *jämviktslösning* (eng. *steady state, equilibrium*) $(x(t), u(t)) \equiv (x_0, u_0)$ som uppfyller $f(x_0, u_0) = 0$.

Den linjäriserade tillståndsmodellen beskriver systemet i en omgivning till jämviktslösningen
$\big(\Delta x(t) = x(t) - x_0, \Delta u(t) = u(t) - u_0, \Delta y(t) = y(t) - y_0, y_0 = g(x_0, u_0)\big)$:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t) \end{aligned}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, u_0)} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0, u_0)}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0, u_0)} \qquad D = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(x_0, u_0)}$$

Diskretisering och simulering av tillståndsmodeller

Anta vi har en tillståndsmodell för vår process (anta $D = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Approximera nu derivatan med en differenskvot:

$$\frac{1}{\Delta t}\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) = Ax(t) + Bu(t)$$

Låt nu $\Delta t = h$ och $t = k \cdot h,\ k = 1, 2, 3 \ldots$, dvs

$$x((k+1)h) = x(kh) + h\big(Ax(kh) + Bu(kh)\big)$$

Om vi slutligen väljer h som tidsenhet, så fås den *tidsdiskreta tillståndsmodellen*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I + hA)x(k) + hBu(k) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

som ger en algoritm för att simulera systemet!

Exempel: satellit styrd med PD-regulator

Med $x_1 = \theta$ och $x_2 = \dot{\theta}$ fås tillståndsmodellen:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

PD-regulator:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} K_p & K_d \end{bmatrix} x(t) + \theta_r(t)$$

Slutna systemet:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_r(t)$$

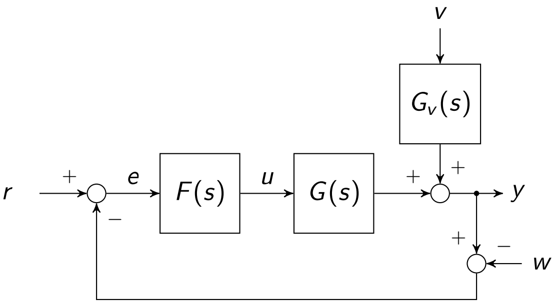
OBS! Karakteristiska polynomet är $s^2 + K_d s + K_d$, dvs polerna kan väljas genom att välja K_p, K_d.

Med valet $K_p = K_d = 1$ ger diskretisering med Euler (h är samplingsintervallet):

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1-h \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} \theta_r(k)$$

Återkoppling med enkla regulatorer

Det slutna systemets överföringsfunktioner:



$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)U(s) + G_v(s)V(s) \\
U(s) &= F(s)E(s) \\
E(s) &= R(s) - Y(s) + W(s) \\
L(s) &= F(s)G(s)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
Y &= \frac{L}{1+L}R + \frac{L}{1+L}W + \frac{G_v}{1+L}V \\
E &= \frac{1}{1+L}R + \frac{1}{1+L}W + \frac{G_v}{1+L}V
\end{aligned}
$$

Exempel – P-reglering

Example (P-reglering av tank)

P-reglering av en enkel tankprocess av 1:a ordningen. Högre förstärkning ger:

- Mindre kvarstående fel
- Snabbare respons (mindre tidskonstant)
- Större styrsignal

Detta kan i teorin drivas hur långt som helst, *då systemet är av 1:a ordningen*! Med en snabb pumpdynamik, så blir stegsvaret för höga förstärkningar oscillativt.

Example (Farthållare med P-reglering)

Farthållaren med P-reglering. Analys av poler, tidssvar, simulering. Specifikationer i tidsplanet. Observationer:

- Slutna systemet är av 2:a ordningen med reella poler för små värden på K_p
- För högre värden på K_p fås så småningom två komplexkonjugerade poler med fix realdel och ökande imaginärdel
- För det senare fallet fås med ökande K_p konstant insvängningstid, kortare stigtid men större översläng

Tidsförlopp, stegsvar

- Ett första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

har stegsvaret $y(t) = K(1 - e^{-t/T})$. Utsignalen når c:a 2/3 av sitt slutvärde efter tiden T (*tidskonstanten*).

- Ett andra ordningens system

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

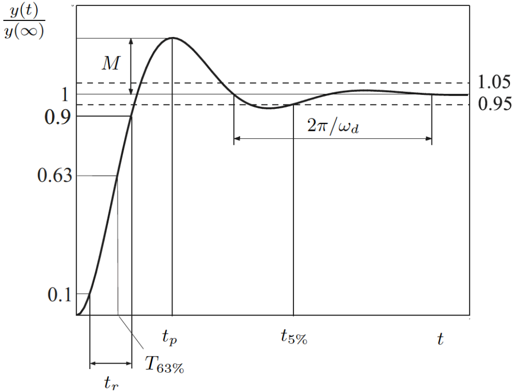
har i fallet $0 < \zeta < 1$ komplexvärda, stabila poler och stegsvaret är

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \arccos\zeta)\right)$$

Notera tolkningarna av den *relativa dämpningen* ζ och den *odämpade självsvängningsfrekvensen* ω_n!

Specifikationer i tidsplanet

- *Stigtiden* t_r (eng. *rise time*)
- *Insvängningstiden* $t_{5\%}$ *(settling time)*
- *Ekvivalent tidskonstant* $T_{63\%}$
- *(Relativ) överläng* M *(overshoot)*
- *Dämpad självsvängningsfrekvens* $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$



Integrerande verkan

Om man önskar en konstant utsignal $y \neq 0$ från en icke integrerande process, så krävs normalt en stationär insignal $u \neq 0$. Med endast P-reglering kräver det i sin tur ett reglerfel $e \neq 0$.

För att undvika sådana kvarstående fel används integrerande verkan i regulatorn (en faktor $1/s$):

$$F(s) = \frac{F^*(s)}{s}$$

som använd på en process $G(s)$ ger det slutna systemet (från börvärde till ärvärde)

$$Y(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} R(s) = \underbrace{\frac{F^*(s)G(s)}{s + F^*(s)G(s)}}_{T(s)} R(s)$$

Om vi gör en stegändring ΔR i börvärde får vi med slutvärdessatsen

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sT(s)R(s) = \lim_{s \to 0} sT(s)\frac{\Delta R}{s} = T(0)\Delta R = \Delta R$$

På samma sätt kan man visa att effekten av stegstörningar i regel också kompenseras bort.

Exempel – I/PI-reglering

Example (I-reglering av tank)

I-reglering av en enkel tankprocess. Observationer:

- Integrerande regulator ger kvarstående felet 0.
- Slutna systemet är av 2:a ordningen med poler som rör sig på samma sätt som för farthållaren med P-regulator.

Example (PI-reglering av tank)

PI-reglering av en enkel tankprocess. PI-regulatorn parametriseras i allmänhet enligt följande:

$$F(s) = K_p(1 + \frac{1}{sT_i})$$

Observationer:

- Slutna systemet är av 2:a ordningen
- Ökande K_p ger poler med större avstånd från origo (dvs ω_n)
- Minskande T_i ger poler med fix realdel och större imaginärdel (dvs större ω_n och lägre ζ)

Sammanfattning

Återkoppling används för att

- Minska effekten av osäkerhet (processvariationer, störningar)
- Forma systemets dynamik (t ex snabba upp systemet, stabilisera)

Enkla regulatorer:

- P-reglering – ökat K_p ger mindre kvarstående fel, snabbare men "svängigare" respons och större styrsignaler
- I-reglering – tar bort kvarstående fel, minskat T_i ger större översläng
- PI-reglering – kombination av ovanstående