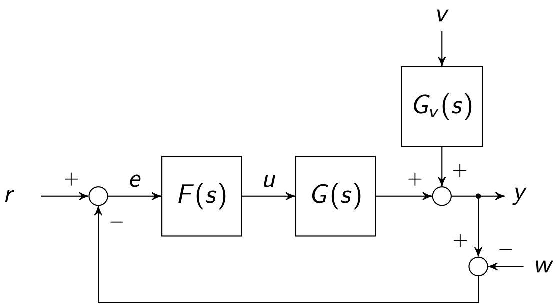
Föreläsning 13: Tillståndsåterkoppling

- Repetition
- Polplacering
- Återkoppling från mätbara tillstånd
- Styrbarhet
- Integralverkan

Lärandemål:

- Förstå och förklara alternativa designprinciper och regulatorstrukturer, såsom störningsframkoppling, kaskadreglering och tillståndsåterkoppling.

Repetition – slutna systemets överföringsfknr



$$Y(s) = T(s)\big[R(s) + W(s)\big] + S(s)G_v(s)V(s)$$

$$E(s) = S(s)\big[R(s) + W(s) - G_v(s)V(s)\big]$$

$$U(s) = \frac{T(s)}{G(s)}\big[R(s) + W(s) - G_v(s)V(s)\big]$$

$$\frac{dT/T}{dL/L} = S(s)$$

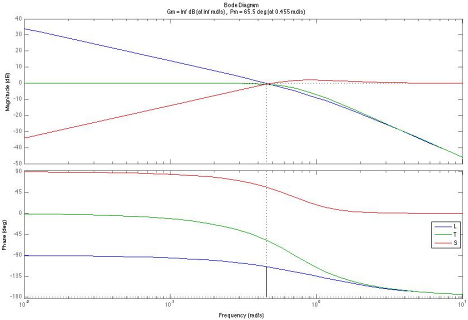
$$L(s) = F(s)G(s)$$

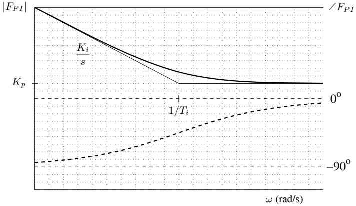
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

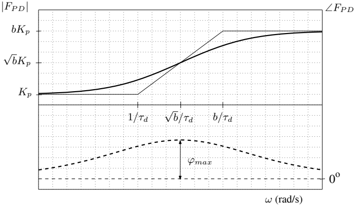
$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$S(s) + T(s) = 1$$

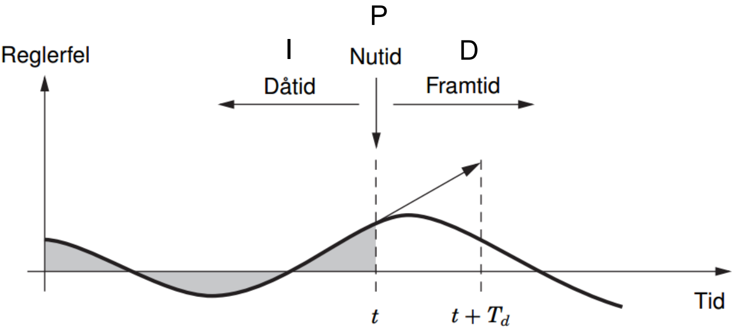
Repetition: dimensionering i frekvensplanet







Repetition – PID-regulatorns delar



Repetition – PID-regulatorns delar

P-regulator

+ Enkel
- Dålig statisk nogrannhet, d v s om r konstant så blir i regel $y \neq r$ (kan förbättras med börvärdesfaktor $e = k_r r - y$)

PI-regulator

+ God statisk nogrannhet, d v s om r konstant blir i regel $y = r$
+ Långsamma processtörningar regleras bort väl
- Försämrade stabilitetsmarginaler (I-verkan medför ökad negativ fasvridning)

D-verkan

+ Förbättrad stabilitet
+ Snabbare reglering möjlig
- Ökad känslighet för mätstörningar

OBS1: en ren D-verkan $K_d \frac{de}{dt}$ kan i praktiken inte realiseras eftersom det kräver oändliga styrsignaler.

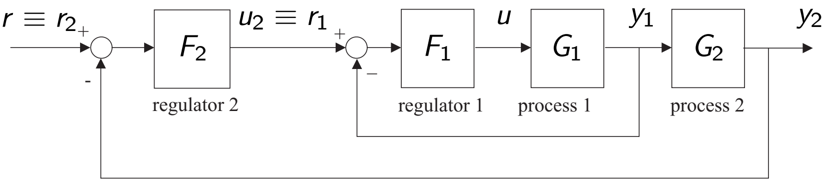
OBS2: Vid börvärdesändring kan D-verkan orsaka alltför häftiga styrsignalförändringar. För att undvika detta kan man låta D-delen endast verka på y:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau - K_d \frac{d}{dt} y(t)$$

Repetition – kaskadreglering

Om en process består av delsystem i serie (kaskad) med möjlighet att mäta mellan delsystemen använder man dessa mätningar för en intern återkoppling.

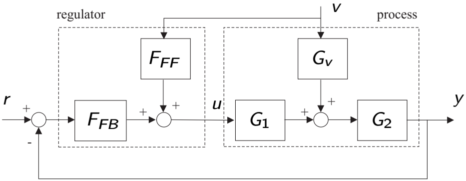
$\Rightarrow$ Snabbare system totalt.



Om man kan göra den inre loopen snabb (i förhållande till $G_2(s)$), så kan man vid designen av den yttre approximera den inre loopen med överföringsfunktionen 1.

Repetition – framkoppling av störsignaler

Mätning av en störning utnyttjas för att bättre kompensera bort effekterna av störningen, t ex mätning av utomhustemperatur vid reglering av inomhustemperatur.



Vi ser att störningen v kompenseras bort fullständigt om

$$F_{FF} G_1 + G_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{FF} = -G_v / G_1$$

Problem:

1. Känslighet för modellfel.
2. F_{FF} stabil $\Rightarrow$ nollställena till G_1 måste ligga i VHP.
3. F_{FF} kausal $\Leftrightarrow$ dödtid hos $G_v \geq$ dödtid hos G_1.
4. F_{FF} proper $\Leftrightarrow$ grad(nämnare) $\geq$ grad(täljare).

(1) Gör en försiktig kompensering.
(2-4) Sträva efter att minimera påverkan i störningarnas huvudsakliga frekvensområde.
Är störningarna lågfrekventa ger ofta $F_{FF} = -G_v(0)/G_1(0)$ ändå en markant förbättring.

Reglerdesign – sammanfattning

Dimensionering i frekvensplanet, enkla inställningsregler (Z/N, λ):

+ Ingenjörsmässigt
+ Fungerar väl för enkla regulatorer (dessa ofta tillräckligt bra!)
+ Frekvenskurva räcker som modell
- Svårt med mer komplicerad dynamik
- Regulatorn måste vara enkel, dvs ha få parametrar
- Svårt att generalisera till system med flera in- och utsignaler

Användbara reglerstrukturer med enkla "byggstenar":

- Kaskadreglering
- Framkoppling från mätbara störningar

Tillståndsåterkoppling

Då tillstånden är mätbara kan vi använda *tillståndsåterkoppling*:

$$\begin{array}{rcl} \text{Processen} & : & \begin{cases} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{cases} \\ \text{Regulatorn} & : & \quad u \quad = \quad -L_u x + K_r r(t), \end{array}$$

där $L = [l_1 \;\; l_2 \;\; \ldots \;\; l_n]$ och K_r är en skalär.

Det återkopplade systemet ges nu av

$$\begin{cases} \dot{x} & = & (A - BL_u)x + BK_r r(t) \\ y & = & Cx \end{cases}$$

- Bestäm $l_1, \ldots l_n$ så att det återkopplade systemet får önskade poler, där polerna ges av egenvärdena till matrisen $A - BL_u$.
- Bestäm K_r, t ex för att ge korrekt statisk förstärkning, dvs $G_{ry}(0) = 1$.

Styrbarhet

Anta att vi vill använda tillståndsåterkoppling:

- Är det alltid möjligt att bestämma L_u, oberoende av valet av poler för det slutna systemet, dvs egenvärden till $A - BL_u$?

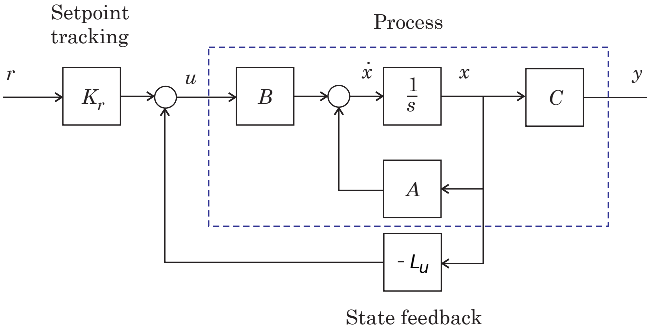
Svar: Ja, under förutsättning att den så kallade *styrbarhetsmatrisen*

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

där n är antalet tillstånd, har full rang (d.v.s. n linjärt oberoende rader). Systemet kallas i detta fall *styrbart*.

Om det sker förkortningar då man beräknar $G(s)$ (dvs man får en överföringsfunktion av lägre ordning än n), så är detta en indikation på att systemet inte är styrbart.

Tillståndsåterkoppling

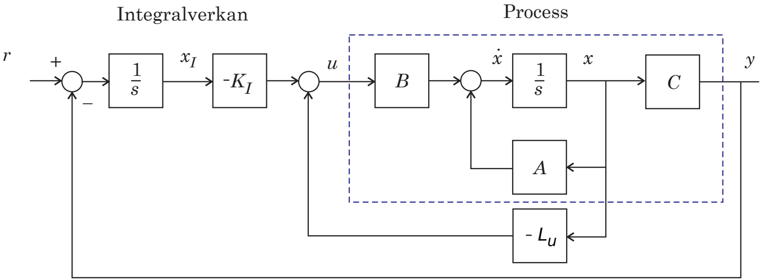


Laplacetransformering av återkopplade systemets tillståndsekvation ger

$$\begin{aligned} sX(s) &= (A - BL_u)X(s) + BK_rR(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G_{ry}(s) = C[sI - A + BL_u]^{-1}BK_r$$

Korrekt stationär förstärkning, d.v.s. $G_{ry}(0) = I$, ger $K_r = 1/(C(BL_u - A)^{-1}B)$.

Tillståndsåterkoppling med integralverkan



Inför integraltillstånd

$$x_I(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau$$

och skapa en utökad tillståndsmodell

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

för vilken återkopplingsmatrisen $\begin{bmatrix} L_u & K_i \end{bmatrix}$ beräknas.