Föreläsning 9: Frekvensanalys

- Repetition
- Frekvenskurva
- Bodediagram

Lärandemål:

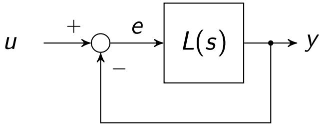
- Skissa frekvenskurvor i Bodediagram samt tolka frekvenskurvor i Bodediagram och Nyquistdiagram.

Repetition – metoder att avgöra stabilitet

- Lös den karakteristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$
- Routh-Hurwitz metod
- Rotort
- Nyquistkriteriet
- Simulering

Repetition – Nyquistkriteriet

När är det *återkopplade* systemet nedan stabilt?



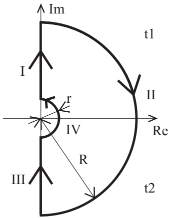
Nyquistkriteriet: Låt

Z = antal instabila poler hos slutna systemet

P = antal instabila poler hos L

N = antal medurs omslingringar av -1 för $L(s)$

då s genomlöper *Nyquists kontur*



Då gäller

$$Z = N + P$$

Repetition – Nyquistkriteriet

I många fall – då $L(s)$ är stabil och ser ut som figuren nedan – kan det *förenklade Nyquistkriteriet* användas:

Det återkopplade systemet är stabilt om och endast om Nyquistkurvan korsar den negativa realaxeln *till höger* om den kritiska punkten -1 i det komplexa talplanet.

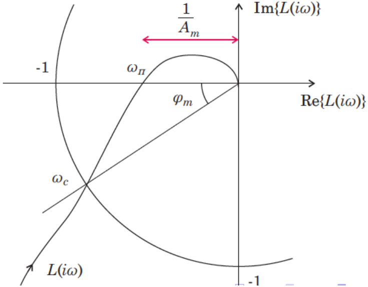
Om det återkopplade systemet är stabilt är *amplitudmarginalen A_m* och *fasmarginalen φ_m* mått på graden av stabilitet.

Amplitudmarginal:

$$A_m = 1/|L(i\omega_\pi)|$$

Fasmarginal:

$$\varphi_m = \pi + \arg L(i\omega_c)$$



Superpositionsprincipen

Superpositionsprincipen ger följande idé:

1. Approximera insignalen som en viktad summa av “enkla” signaler
2. Beräkna utsignalen för de enkla insignalerna
3. Beräkna linjärkombinationen (den viktade summan) av dessa utsignaler

Vi har redan använt detta recept:

- Approximera insignalen med en trappfunktion, dvs som en summa av tidsförskjutna pulser
- Addera en linjärkombination av tidsförskjutna pulssvar (OBS! endast *ett* pulssvar behöver beräknas!)
- Låt pulsbredden gå mot 0: den viktade summan blir en faltningsintegral!

Återblick: superposition

Ett LTI-system beskrivet av en diff-ekvation:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_n u(t)$$

Linjäritet ger:

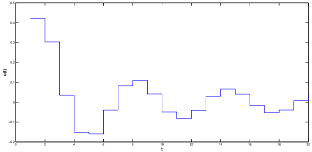
$$\begin{matrix} y_1 \text{ lösning då } u = u_1 \\ y_2 \text{ lösning då } u = u_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ lösning då } u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

Tidsinvarians ger:

$$y_0(t) \text{ lösning då } u(t) = u_0(t) \quad \Rightarrow \quad y_0(t-\tau) \text{ lösning då } u(t) = u_0(t-\tau)$$

(forts.)

Låt nu $u(t)$ vara en trappfunktion, som approximerar den ursprungliga, kontinuerliga insignalen:



$$u(t) = \sum_{k=0}^{t/h} c_k \Delta(t - kh)$$

$\Delta(t)$ är en enhetspuls av längd h

Linjäritets- och tidsinvariansegenskaperna medför då att en lösning ges av

$$y(t) = \sum_{k=0}^{t/h} c_k \frac{1}{h} y_\Delta(t - kh) \cdot h$$

där $\frac{1}{h} y_\Delta(t)$ är utsignalen då $u(t) = \frac{1}{h}\Delta(t)$. En gränsövergång ($h \to 0$) ger då

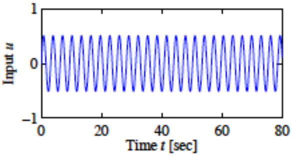
$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\sigma) u(t - \sigma) d\sigma$$

Alla utsignaler kan beräknas med hjälp av *en* utsignal, impulssvaret!

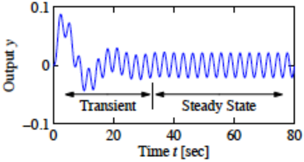
Frekvenstrogenhet

För ett stabilt LTI-system gäller:

- Om insignalen är en sinussignal, så är utsignalen *stationärt* en sinussignal med samma frekvens.

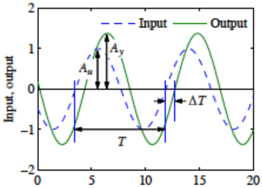


(a) Input



(b) Output

- Den stationära utsignalen karakteriseras av *förstärkningen* (*gain*) och *fasförskjutningen* (*phase*) relativt insignalen.



Frekvensanalys

Frekvensanalysen bygger på användning av superpositionsprincipen:

1. Approximera insignalen som en viktad summa av "enkla" signaler: för en *periodisk* signal med perioden $T = 2\pi/\omega_0$ kan vi använda en *Fourier-serie*:

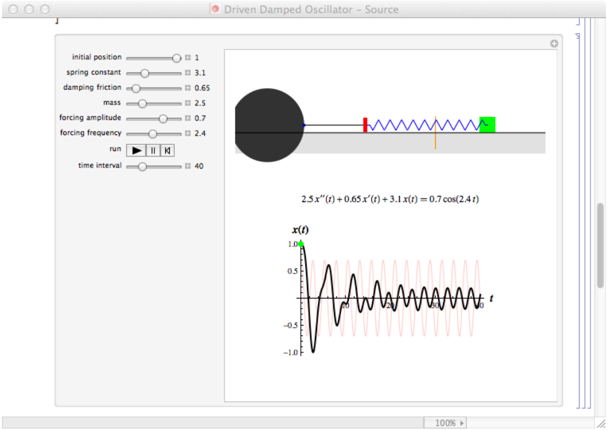
$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

2. Beräkna utsignalerna för de enkla insignalerna, dvs i detta fallet sinussignaler
3. Beräkna linjärkombinationen (den viktade summan) av dessa utsignaler

- För icke-periodiska signaler får vi använda Fourier-transformen.
- För steg 2 ovan räcker det för stabila system att bestämma förstärkning $|G(i\omega)|$ och fasförskjutning $\arg G(i\omega)$:

$$u(t) = \sin \omega t \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

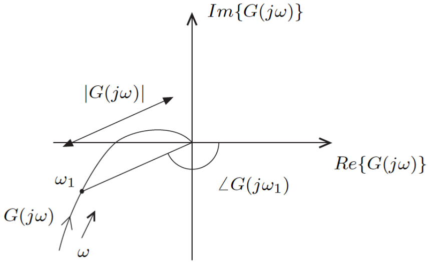
Frekvenssvar



http://demonstrations.wolfram.com/DrivenDampedOscillator/

Frekvenskurva

Frekvensanalysen bygger på kunskap om *frekvenskurvan* $G(i\omega)$, $\omega \in [0, \infty]$. Denna kan åskådliggöras som en kurva i det komplexa talplanet, ett *Nyquist-diagram*:



- Används vid stabilitetsundersökningar med Nyquistkriteriet.
- En nackdel med Nyquistdiagrammet är att beroendet av ω inte framgår explicit.

Bodediagram

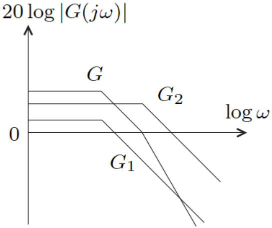
Frekvenskurvan kan också visas i ett *Bodediagram*, som i två grafer visar hur den komplexa funktionen $G(i\omega)$ beror av ω:

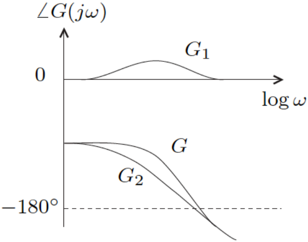
1. Amplituddiagram: $20\log|G(i\omega)|$ (dB) mot $\log\omega$
2. Faskurva: $\arg G(i\omega)$ mot $\log\omega$

I Bodediagrammet adderas produkter av överföringsfunktioner i "y-led":

$$G(i\omega) = G_1(i\omega)G_2(i\omega) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 20\log|G(i\omega)| &= 20\log|G_1(i\omega)| + 20\log|G_2(i\omega)| \\ \arg G(i\omega) &= \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) \end{aligned}$$





Stabilitetsmarginaler