Föreläsning 2: Linjära system I

- Repetition
- Differential-ekvationer
- Laplace-transformen
- Överföringsfunktion
- Viktfunktion, impulssvar
- Klassificering av system

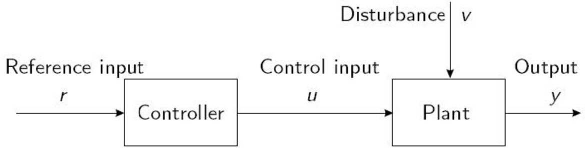
Lärandemål:

- Analysera linjära systems egenskaper i tids- och frekvensplanet och transformera mellan olika representationsformer.
- Förklara funktionen hos ett reglersystem, samt beskriva dess möjligheter och begränsningar; definiera begreppen återkoppling och framkoppling.

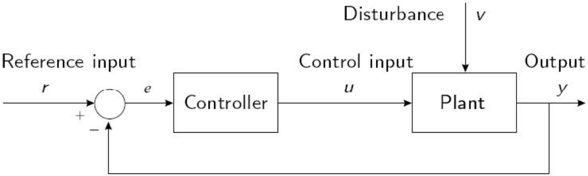
Repetition

Reglerteknik handlar om *styrning* av *dynamiska* system genom *återkoppling*

- Öppen styrning (*open-loop control*)



- Sluten/återkopplad styrning (*closed-loop control*)



Exempel: farthållare

Modell för exemplet:

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv(t)}{dt} &= F(t) - bv(t) - d(t) \\
\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{1}{T}\big(-F(t) + Ku(t)\big),
\end{aligned}
$$

där $v(t)$ är hastigheten, $F(t)$ är den framdrivande kraften, och $u(t)$ är gaspådraget (trottelvinkel).

- Öppen och sluten styrning (eng. *open-loop*, *closed-loop*)
- Återkoppling
- Reglerkretsens delar
- Börvärdes- och störningsrespons med P-, I- och PI-regulator

Varför reglerteknik?

Reglertekniken är ofta anonym och har också kallats “den gömda teknologin”, men ...

- styrning med återkoppling används “överallt”
- styrning med mikro-controllers eller datorer kräver reglertekniska algoritmer
- reglerteknikens metoder ger systemförståelse

Med återkoppling kan vi...

- minska effekten av osäkerhet (komponentvariationer, störningar)
- forma systemets dynamik (t ex snabba upp, stabilisera)

Differentialekvation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_n u(t)$$

Varje lösning kan skrivas

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

där $y_p(t)$ är partikulärlösningen och $y_h(t)$ är en lösning till den homogena ekvationen.

Karakteristiska polynomet:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Strukturen på lösningen till den homogena ekvationen ges av

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är de skilda nollställena till det karakteristiska polynomet och $n_1, \ldots, n_m$ deras multiplicitet; notera att dessa nollställen kan vara komplexa. p_k är godtyckliga polynom av grad $\leq n_k - 1$.

Systemet *stabilt* om alla λ_k ligger i VHP ($\mathrm{Re}\, \lambda_k < 0$).

En speciell insignal

Låt insignalen vara en (komplexvärd) exponentialfunktion:

$$u(t) = e^{st},$$

där $s = \sigma + i\omega$ är ett komplext tal, dvs insignalen är en dämpad sinussignal (om $\sigma < 0$). Då gäller:

$$u^{(k)}(t) = s^k e^{st}$$

och *en* lösning till differentialekvationen är (verifiera!)

$$y(t) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} e^{st} = \frac{b(s)}{a(s)} e^{st} = G(s) e^{st}$$

där $G(s)$ är systemets *överföringsfunktion*.

Slutsats: En exponentialfunktion som insignal ger samma exponentialfunktion som utsignal (dämpad/förstärkt och fasförskjuten).

Laplace-transformen

Överföringsfunktionen $G(s)$ kan faktiskt användas för att uttrycka systemets svar på en *godtycklig insignal*. Definiera *Laplace-transformen* av tidsfunktionen $f(t)$:

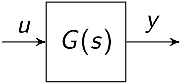
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\Big\{\frac{df(t)}{dt}\Big\} = sF(s) - f(0)$$

Om systemet är i vila vid $t = 0$ (alla tidsderivator lika med 0) så gäller:

$$Y(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots a_n} U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) = G(s)U(s)$$

Systemet kan representeras med överföringsfunktionen $G(s)$ i ett blockelement:



Några räkneregler för Laplace-transformen

- Superposition

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- Derivering

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - \left\{s^{n-1} f + s^{n-2}\frac{df}{dt} \cdots \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right\}_{t=0}$$

Speciellt om $f(0) = f'(0) = \dots f^{(n-1)}(0) = 0$ är $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$

- Integration

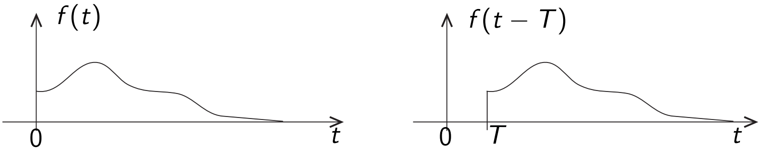
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(\tau) d\tau dt_{n-1} \dots dt_1\right\} = \frac{1}{s^n} F(s)$$

Speciellt för $n = 1$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Några räkneregler, forts.

- Förskjutningssatsen



$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}F(s)$$

förutsatt att $f(t) = 0,\ t < 0$. Tiden T kallas *dödtid*.

- Begynnelsevärdessatsen

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- Slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(under förutsättning att $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existerar, alternativt att $sF(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet).

Viktfunktion

Laplace-transformen uppfyller *faltningssatsen*

$$\mathcal{L}\Big\{ \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \Big\} = \mathcal{L}\{g(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\} = G(s)F(s)$$

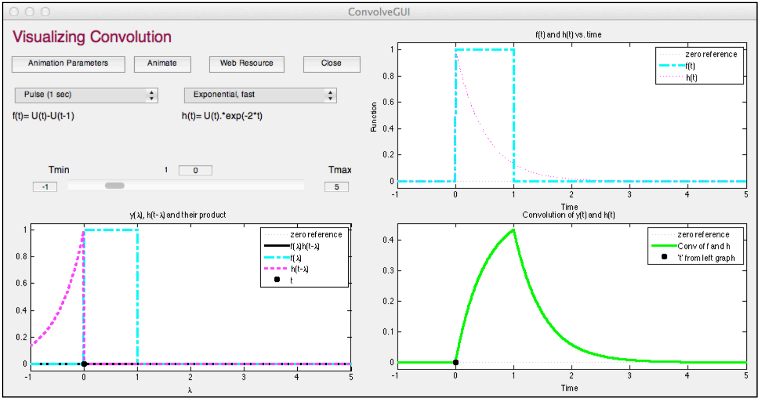
vilket tillsammans med relationen $Y(s) = G(s)U(s)$ ger (byt f mot u):

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s)e^{st} ds$$

- $g(t)$ är systems *viktfunktion* – utsignalen ges av en "viktad summa" av gamla insignalvärden.
- Om $u(t) = \delta(t)$ (en Dirac-funktion eller impuls), så följer att $y(t) = g(t)$. Viktfunktionen kallas därför också *impulssvaret*.

Viktfunktion



LTI-system: egenskaper

Faltningsintegralen igen:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Av detta följer några viktiga egenskaper för ett *linjärt, tidsinvariant (LTI) system*:

- Dynamik: utsignalen beror i princip av *alla* gamla värden på insignalen.
- Kausalitet: utsignalen $y(t)$ beror *inte* på framtida insignaler, $u(\tau)$, $\tau > t$.
- *Superpositionsprincipen*:

$$u_1(\cdot) \to y_1(\cdot), u_2(\cdot) \to y_2(\cdot) \Rightarrow \alpha_1 u_1(\cdot) + \alpha_2 u_2(\cdot) \to \alpha_1 y_1(\cdot) + \alpha_2 y_2(\cdot)$$

Användning: studera svaret (responsen) på börvärdesändringar resp. störningar var för sig!

Externa modeller

Sammanfattning av vad vi gjort så här långt:

$$
\begin{array}{ccc}
a(\frac{d}{dt})y(t) = b(\frac{d}{dt})u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\
 & & \Big\downarrow G(s)=\frac{b(s)}{a(s)} \\
y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s)
\end{array}
$$

- Differentialekvationen och faltningsintegralen är modellbeskrivningar i *tidsdomänen*.
- Överföringsfunktionen är en modellbeskrivning i *Laplace-domänen*.
- Samtliga modeller är *externa* eller *insignal/utsignal-modeller*.
- Nollställena till $b(s)$ kallas systemets *nollställen*.
- Nollställena till karakteristiska polynomet $a(s)$ kallas systemets *poler* (som alltså bestämmer systemets stabilitet).