TP d'EDO : ordre

GERGAUD Joseph

1 Introduction

Il est rappelé que les programmes doivent respecter les **bonnes pratiques de la programmation**. En particulier on vérifiera que les interfaces soient bien définies (paramètres en entrée, en sortie avec leurs types, les dimensions, ...). Dans le cas contraire on mettra des **points négatifs** pour un maximum de 4.

On trouvera une version pdf de ce document à l'adresse
`http://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/edo/edo_ordre.pdf`.

L'objectif de ce projet est de réaliser les graphiques de la figure 2 concernant l'ordre qui seront complétés avec les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauß à 2 étages (*cf.*cours sur les schémas implicites).

2 Rappels

2.1 Schémas de Runge-Kutta

On rappelle les schémas classiques

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$
Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$
Runge

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$
Heun

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$
La méthode RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$
RK4 3/8

$$\begin{array}{c|cc} 1/2-\sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4-\sqrt{3}/6 \\ 1/2+\sqrt{3}/6 & 1/4+\sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$
Gauss d'ordre 4

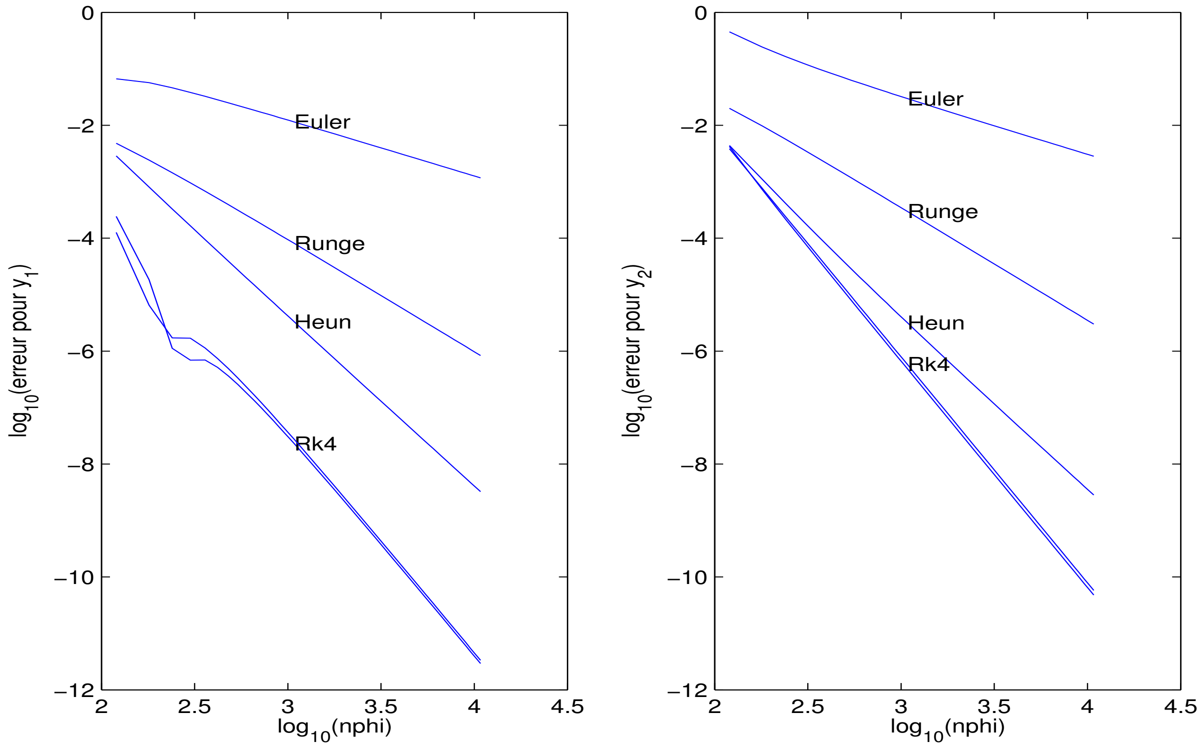

FIGURE 1 – *Erreur globale en fonction du nombre d'évaluations, E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 140,* $\log_{10}(err) = C_1 - p\log_{10}(nphi)$.

3 Travail demandé

3.1 Ordre

L'équation différentielle considérée est l'équation de Van der Pol

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = (1 - y_1^2(t))y_2(t) - y_1(t) \\ y_1(0) = 2.00861986087484313650940188 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$t_f = T = 6.6632868593231301896996820305$

La solution de ce problème de Cauchy est périodique de période T.

Les programmes seront effectués en MATLAB. On demande que les appels aux sous-programmes se fassent à la MATLAB.

– Pour les schémas explicites :
  `[T,Y] = ode_euler(@phi,[t0 tf],y0,N)` où `T` est un vecteur colonne de longueur $N+1$ et `Y` est de dimension $(N+1, n)$.

- Pour le schéma implicite de Gauß :
  `[T,Y,nphi,ifail] = ode_gauss(@phi,[t0 tf],y0,option)`, avec
  - `option(1)=N` ;
  - `option(2)=fp_iter_max`, nombre d'itérations maximum pour le point fixe ;
  - `option(3)=fp_eps`, ε pour le test d'arrêt pour le point fixe ;
  - `nphi`=nombre d'évaluations du second membre de l'équation différentielle ;
  - `ifail(i)`=1 si le point fixe a convergé pour le pas i et -1 sinon.
- L'interface pour la fonction `phi` sera :
  `ypoint = phi(t,y)`.

Les programmes d'intégration numérique par les méthodes explicites ne devront comporter d'une seule boucle.

On demande pour cette équation :
- de réaliser les figures qui tracent les deux composantes de la solution et le plan de phase pour $N = 25$ pas pour les schémas de Runge-Kutta explicite.
- de réaliser les graphiques de la figure 2. Pour les schémas explicites on mettra en abscisse le vecteur `[120:60:1080 1200:600:10800]`. On rajoutera sur ces graphiques les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauß en prenant comme pas le vecteur `[120:60:1080 1200:600:10800]/4` et comme valeurs pour les paramètres `fp_iter_max = 15` et `fp_eps = 1.e-12`.
- On fera une deuxième figure avec les résultats correspondant au schéma implicite de Gauß pour
  1. `fp_iter_max = 15` et `fp_eps = 1.e-12` ;
  2. `fp_iter_max = 2` et `fp_eps = 1.e-12` ;
  3. `fp_iter_max = 15` et `fp_eps = 1.e-6`.

3.2 Rendu

Le travail en TP est individuel. Un test sera effectué lors de la deuxième séance de TP (et de la dernière séance). Le rendu définitif à rendre le soir du dernier TP contiendra :
- les graphiques obtenus au format pdf ;
- les sources des programmes, ils seront mis dans un répertoire <noms>. le fichier contenant l'archive (<noms>.tar), sera envoyé à votre enseignant en TP. Dans le courriel vous mentionnerez le nom du fichier Matlab permettant d'obtenir les courbes résultats.

4 Résultats pour tests

Voici ci-après les résultats pour $N = 10$ pour les différents schémas. La première colonne est T et les deux suivantes Y.

```
Euler

[T Y] =

   1.0e+03 *

         0    0.0020         0
    0.0007    0.0020   -0.0013
    0.0013    0.0011    0.0000
    0.0020    0.0011   -0.0007
    0.0027    0.0007   -0.0013
    0.0033   -0.0002   -0.0023
    0.0040   -0.0018   -0.0036
    0.0047   -0.0041    0.0025
    0.0053   -0.0024   -0.0218
    0.0060   -0.0170    0.0517
    0.0067    0.0175   -9.8122

Runge

[T Y] =

         0    2.0086         0
    0.6663    1.5627    0.0147
    1.3327    1.2209   -0.5316
    1.9990    0.6535   -1.1764
    2.6653   -0.4250   -2.3554
    3.3316   -2.3286   -0.6668
    3.9980   -1.6013   -2.9719
    4.6643   -2.1941    2.1429
    5.3306   -2.0936    3.0095
    5.9970   -1.8836    3.6965
    6.6633   -1.0933    4.5852

Heun

[T Y] =
```

```
         0    2.0086         0
    0.6663    1.8633   -0.9083
    1.3327    1.2111   -0.9707
    1.9990    0.3410   -1.8056
    2.6653   -1.3434   -2.5973
    3.3316   -1.5532   -1.7622
    3.9980   -1.7619   -0.3542
    4.6643   -1.6968    0.6761
    5.3306   -1.1411    1.0544
    5.9970   -0.1885    1.9921
    6.6633    1.5936    2.1549

RK41

[T Y] =

         0    2.0086         0
    0.6663    1.7283   -0.4347
    1.3327    1.2818   -0.8769
    1.9990    0.4866   -1.6225
    2.6653   -1.0244   -2.5565
    3.3316   -1.9530   -0.2091
    3.9980   -1.7428    0.3413
    4.6643   -1.3379    0.8142
    5.3306   -0.6008    1.4945
    5.9970    0.8214    2.5899
    6.6633    1.8863    0.4553

RK42

[T Y] =

         0    2.0086         0
    0.6663    1.7284   -0.2118
    1.3327    1.3757   -0.7212
    1.9990    0.7077   -1.3572
    2.6653   -0.5908   -2.5405
    3.3316   -1.8790   -0.9613
    3.9980   -1.9030   -0.5283
    4.6643   -1.7944   -0.2003
    5.3306   -1.5963    0.3857
    5.9970   -1.1545    0.9092
    6.6633   -0.3016    1.7752
```

```
Gauss
fp_iter_max=15
fp_eps = 1.e-6


nphi = 296


ifail =

    -1     1     1     1    -1    -1     1     1     1    -1


[T Y] =

         0    2.0086         0
    0.6663    1.7481   -0.6145
    1.3327    1.2272   -0.9756
    1.9990    0.3452   -1.8120
    2.6653   -1.2416   -2.4751
    3.3316   -2.0139   -0.0012
    3.9980   -1.7539    0.6128
    4.6643   -1.2350    0.9705
    5.3306   -0.3592    1.7974
    5.9970    1.2222    2.4955
    6.6633    2.0146    0.0158


>>
```

On trouveras aussi ci-après les figures des solutions pour $N = 25$ pas.

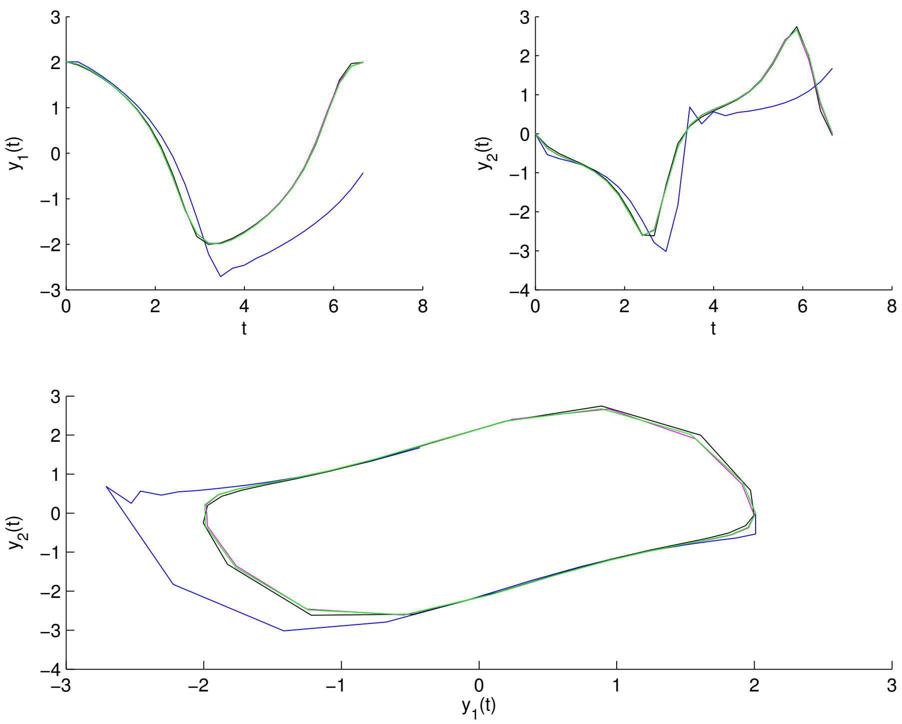

FIGURE 2 – *Solution de l'équation de Van der Pol, composante 1 et 2 et plan de phase, pour les schémas de Runge-Kutta explicites avec* $N = 25$.