

# Systemes Cyber-Physiques

## Projet BE

Victor Drouin Viallard

24 mai 2016

# 1 Introduction

Le but de ces TPs est de modéliser l'équation du pendule inversé puis de contrôler ce dernier dans une position donnée à partir d'un contrôle par retour d'état, plus particulièrement dans le cas concret du Robot LEGO. On utilise alors les méthodes d'intégration et de dérivation discrètes pour calculer le contrôle à appliquer au robot pour le maintenir dans une position autre que "à plat sur la table".

## 2 Le pendule simple (TP1 et TP2)

### 2.1 Modélisation

Le modèle du pendule simple est celui d'une masse  $m$ , placée au bout d'une tige rigide de longueur  $l$  et de masse nulle, que l'on laisse se balancer autour d'un point fixe  $O$ , uniquement soumise à l'action d'une force gravitationnelle fixe dans un référentiel galiléen (figure 1).

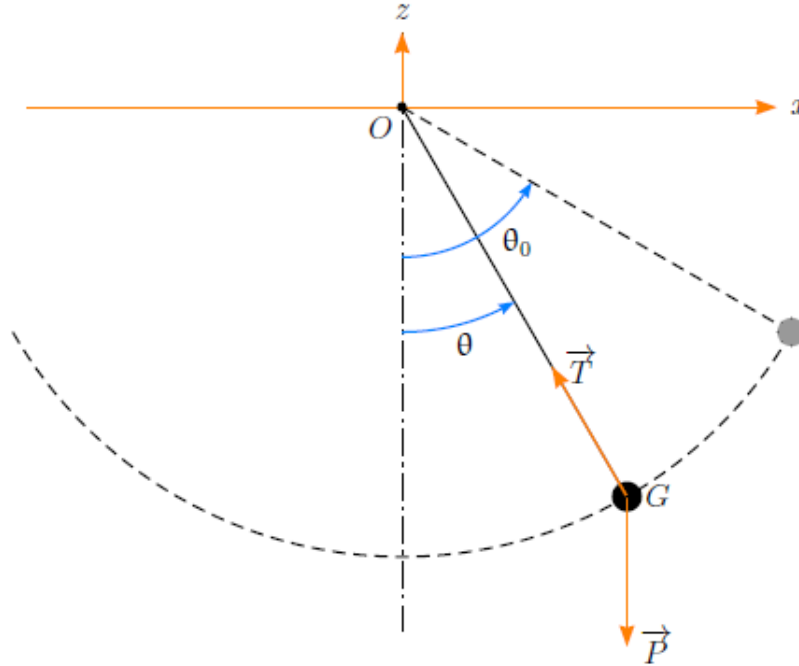


FIGURE 1 – Modèle du pendule simple

Les formules trigonométriques classiques, l'application du principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile, et sa projection sur l'axe orthogonal à  $\vec{T}$  donnent l'équation suivante :

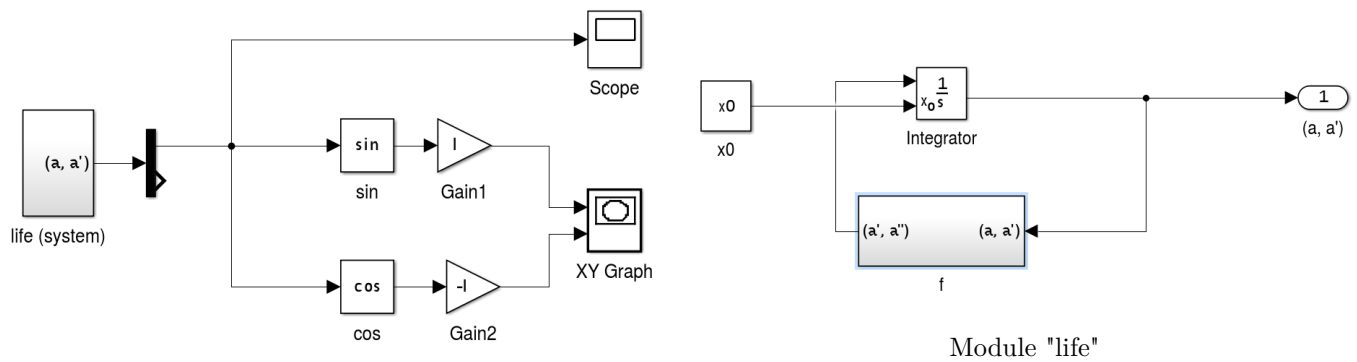
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

### 2.2 Application

Dans l'optique de modéliser avec *simulink* l'équation précédemment trouvée, on réalise le schéma suivant figure 2.

On obtient alors après simulation, en utilisant l'intégrateur discret utilisant la méthode Heun comme schéma de Runge-Kutta, les résultats présentés figure 3 et figure 4.

Comme on peut le voir sur la simulation, l'angle ne fait qu'osciller autour de sa position d'équilibre 0 ce qui est normal puisque ni frottements ni contrôle ne sont appliqués au mobile.



Affichage des sorties du système

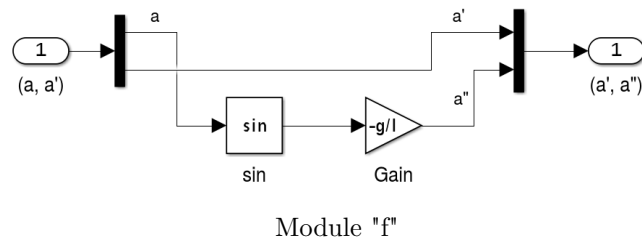


FIGURE 2 – Schéma simulink du pendule simple

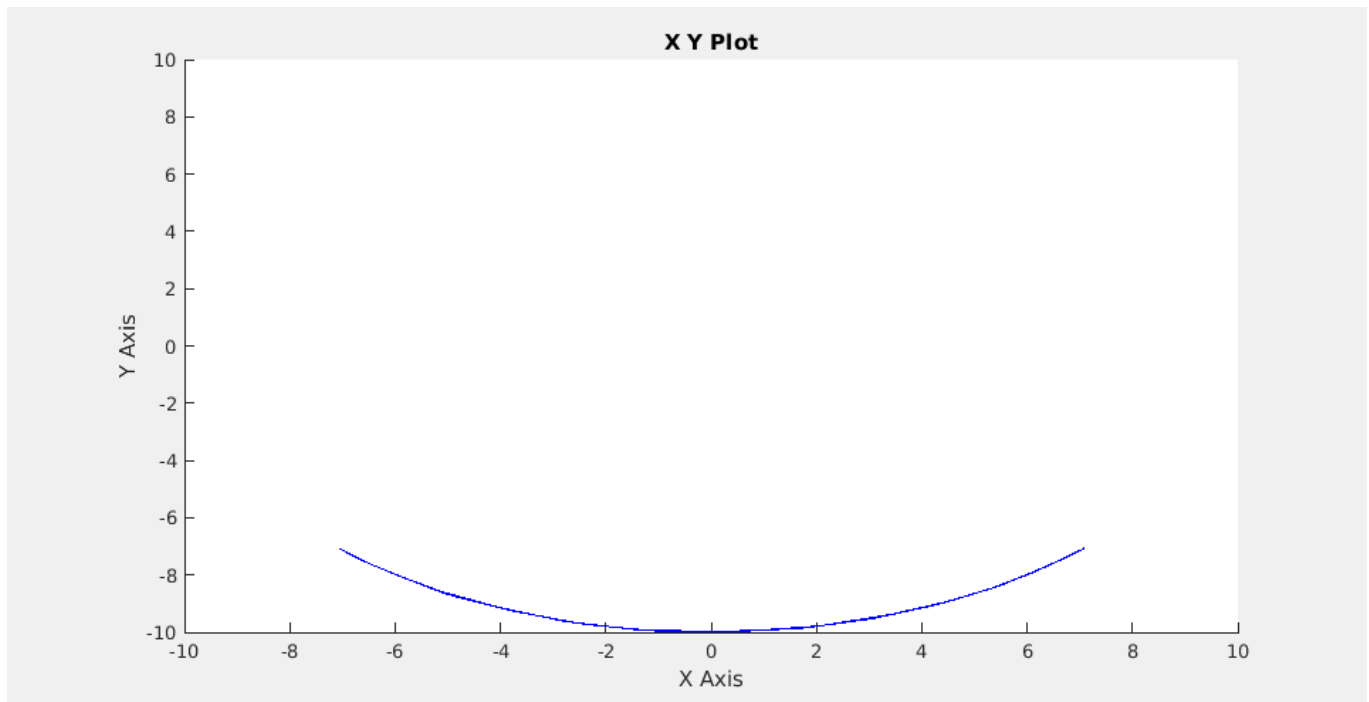


FIGURE 3 – Trajectoire du pendule

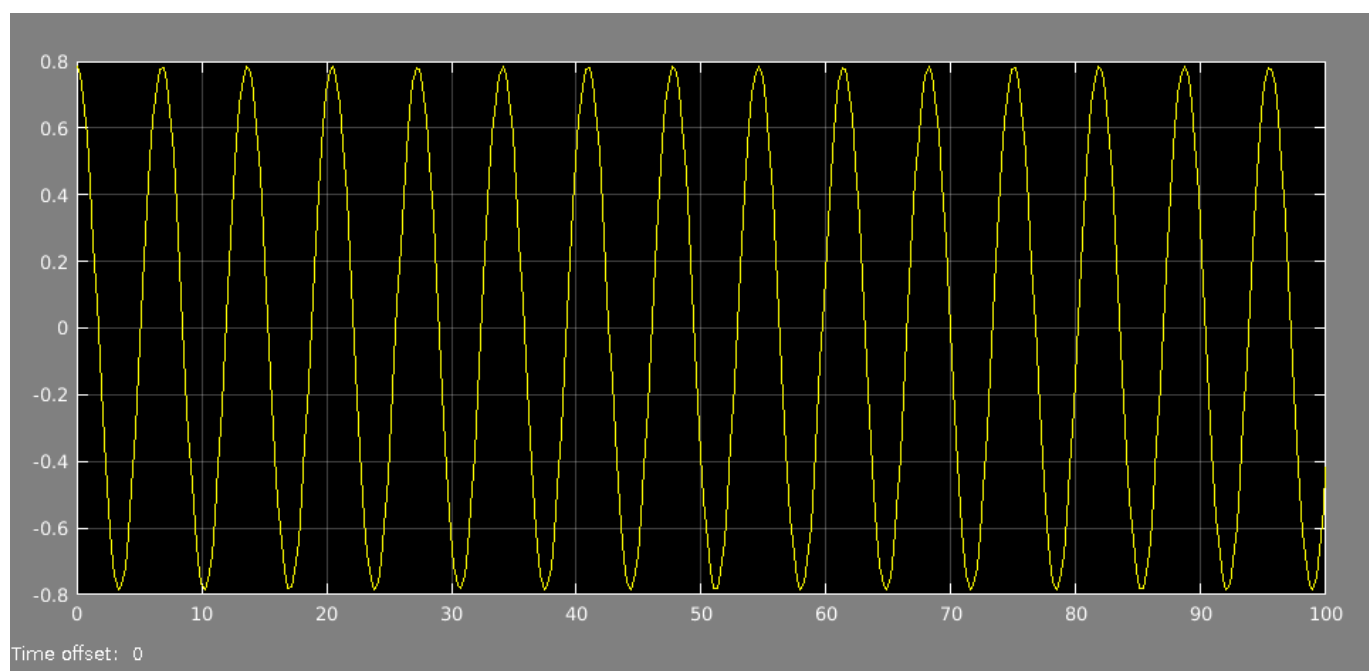


FIGURE 4 – Evolution de  $\theta$  au fil du temps

### 3 Le pendule inversé avec contrôle par retour d'état (TP3)

#### 3.1 Modélisation

En rajoutant au système un contrôle par retour d'état de la forme suggérée par le sujet, l'équation du pendule inversée devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{u}{l} \cos\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Où  $u$ , le contrôle, est déterminé par :

$$u = u_e + K(x - x_e)$$

Et  $K$  est choisie de manière à garder le système stable.

Le choix de  $K$  n'est pas à prendre à la légère. En effet, celui-ci va permettre de stabiliser le système mais dépend de sa condition initiale. On comprend par exemple que si le système démarre très proche de  $\theta_1 = \pi$  alors on aura plus de mal à le ramener à sa position d'équilibre. Ainsi plus  $K_1$  est grand, plus le système pourra retrouver sa position d'équilibre après l'avoir quitté (condition initiale ou perturbation) ; mais cette valeur est limitée dans un cas concret par les limitations matérielles du contrôle et une valeur trop grande peut aussi engendrer des oscillations si l'intégrateur n'est pas assez performant. La valeur de  $K_2$  permet de modifier la vitesse de stabilisation du système (et d'assurer qu'il se stabilise) : plus elle est grande plus le système se stabilise rapidement autour de la position d'équilibre.

#### 3.2 Application

On modélise ces nouvelles équations par le schéma figure 5 et cela donne les résultats présents figure 6 et figure 7.

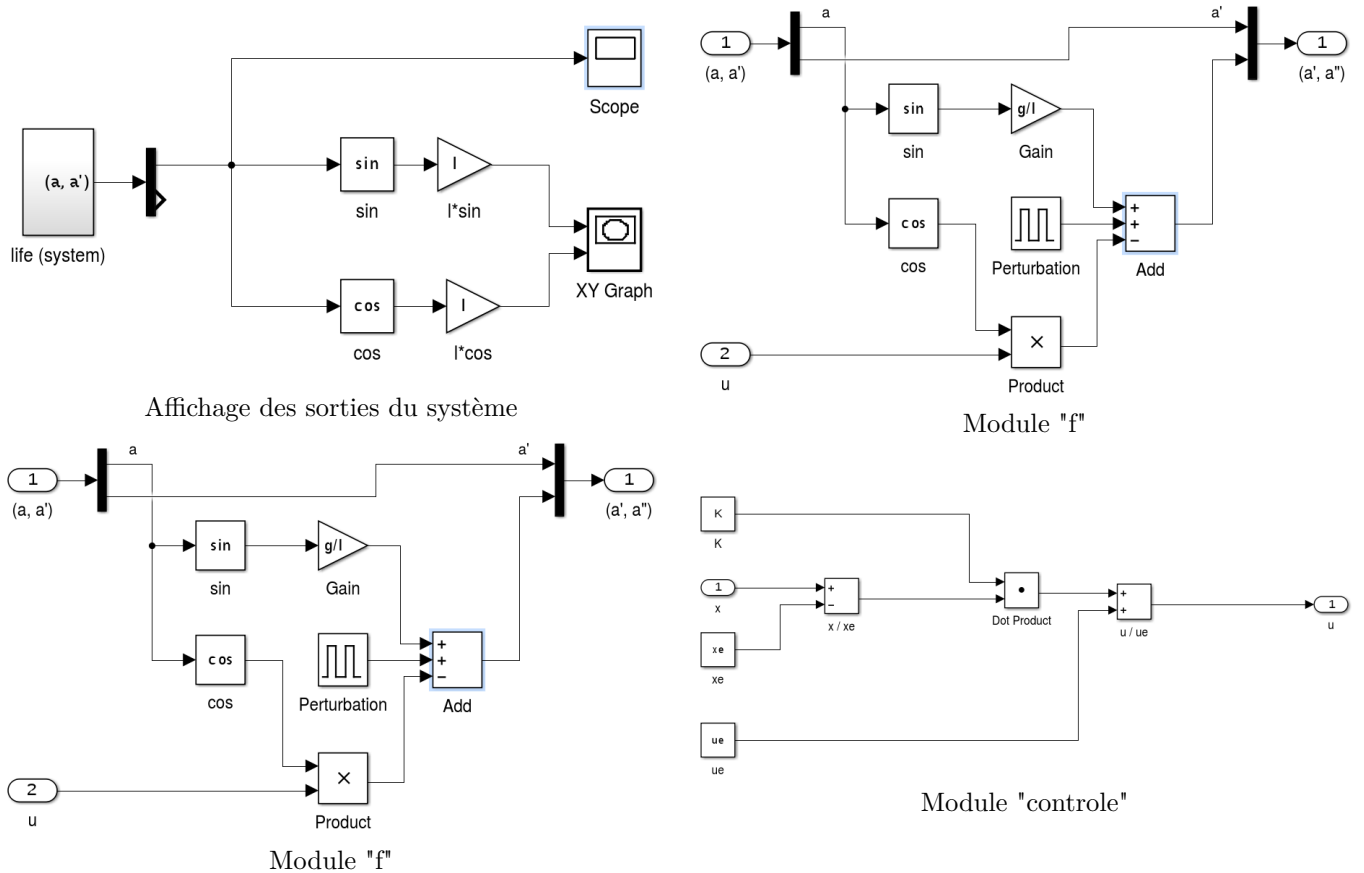


FIGURE 5 – Schéma simulink du pendule inversé avec contrôle par retour d'état

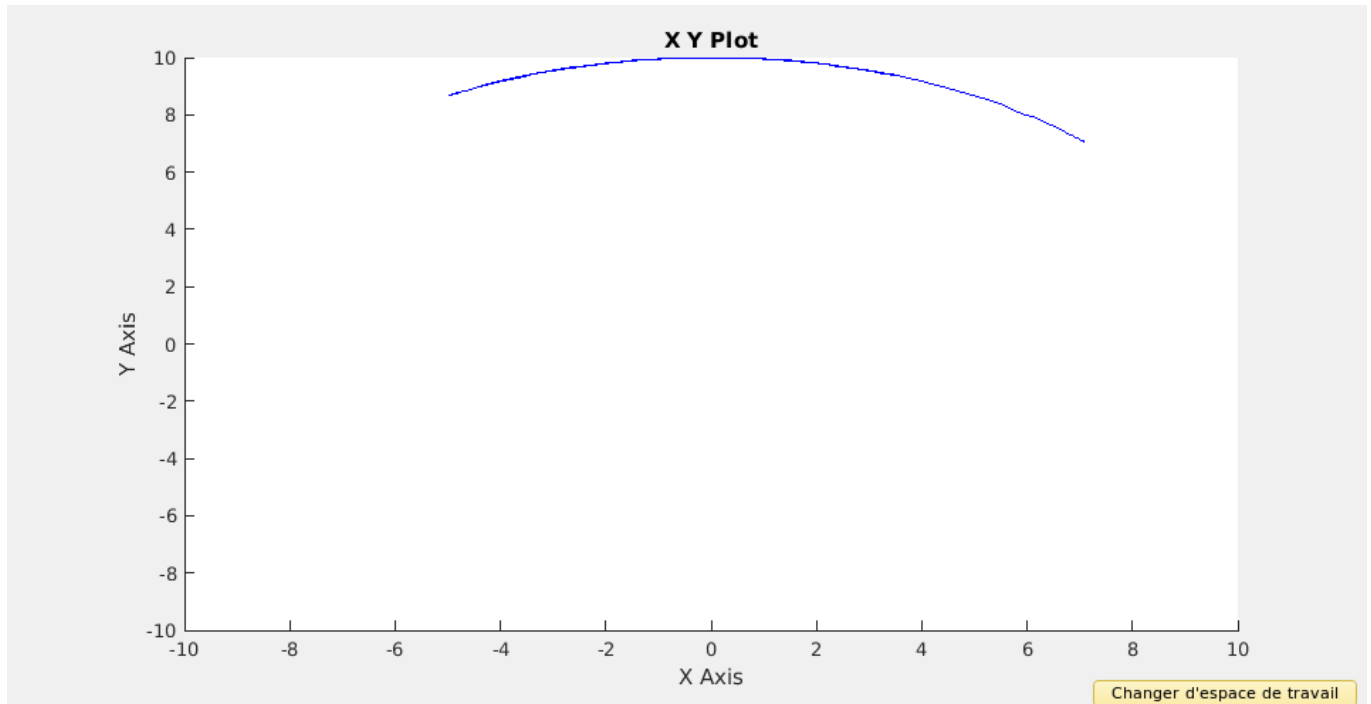


FIGURE 6 – Trajectoire du pendule

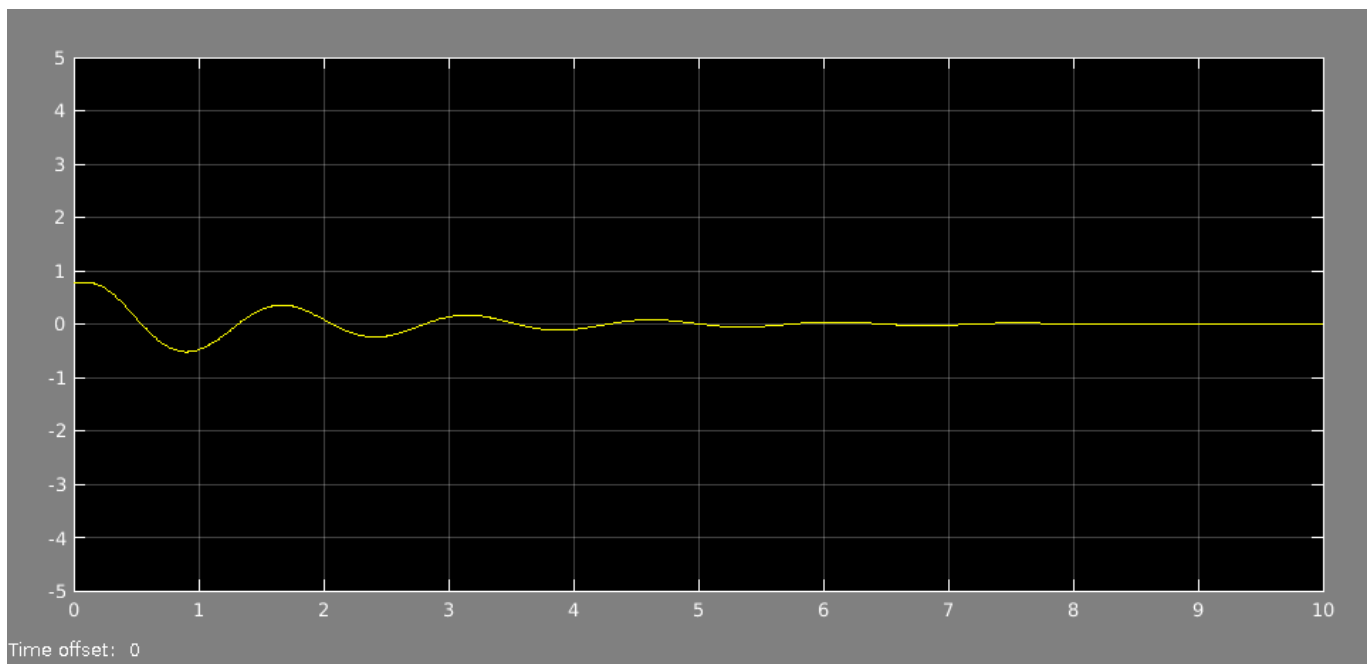


FIGURE 7 – Evolution de  $\theta$  au fil du temps

## 4 Modèle du Robot LEGO contrôleur et prédicteur (TP4, TP5, et TP7)

N'ayant pas réussi à terminer cette partie durant les séances de TP, et n'ayant pas trouvé de binôme pour la réalisation de ce projet BE, le temps m'a manqué et je n'ai pas terminé la partie (d).

### 4.1 Présentation du problème

On considère ici le cas du Robot LEGO qui, muni de roues, peut se déplacer. Ce déplacement d'avant en arrière va être à l'origine de la force de contrôle exercée sur le mobile qui est ici le corps du robot.

De plus, le robot ne fournit pas l'ensemble des informations dont nous disposions dans les TPs précédents pour contrôler le pendule inversé : on doit donc retrouver et calculer ces données à partir de celles fournies par les capteurs. Il fournit le nombre de tours effectués par la roue depuis une position repère  $\Phi$  et la variation d'angle du corps du robot  $\frac{d\Psi}{dt}$ .

### 4.2 Derivateur et Intégrateur

Les capteurs ne permettant pas d'obtenir toutes les données nécessaires à la résolution du problème, on doit reconstruire l'état du robot à partir de son état partiel. Cela nécessite entre autre l'utilisation d'une fonction d'intégration et d'une autre de dérivation. Ces fonctions sont nécessairement discrètes et dans le cas de l'intégrateur on choisira celui d'Euler puisque les données nécessaires aux autres schémas de types Runge-Kutta ne sont pas disponibles.

### 4.3 Module prédicteur

Le module prédicteur consiste alors à retrouver, à partir de  $\Phi$  et  $\frac{d\Psi}{dt}$ , les valeurs de  $\frac{d\Phi}{dt}$  et  $\Psi$  en utilisant les deux fonctions précédemment faites. On obtient son schéma figure 8.

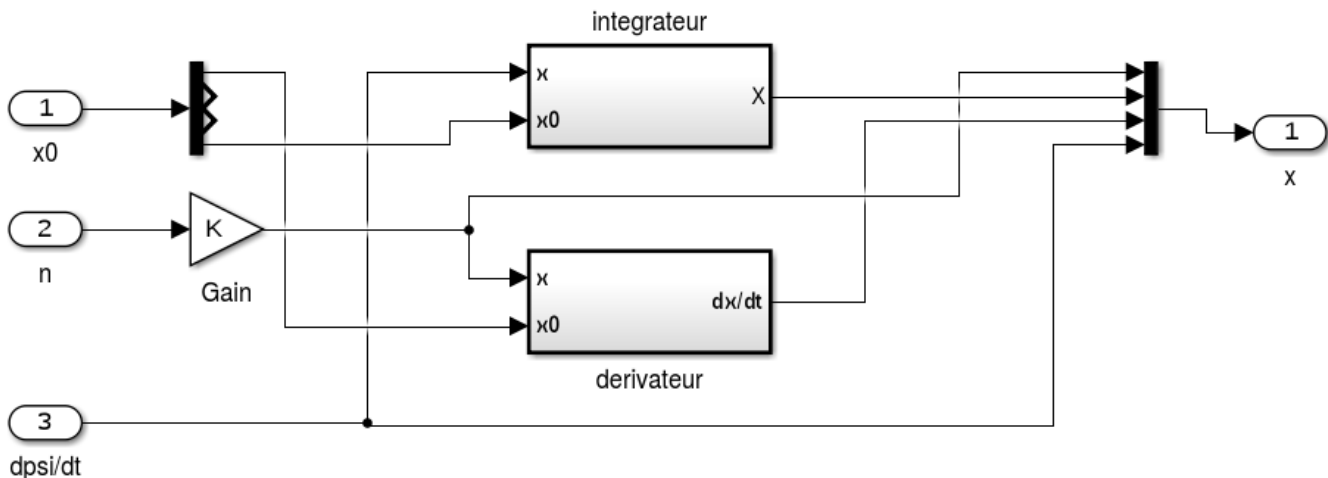


FIGURE 8 – Module predicteur

## 5 Conclusion

Ayant raté une séance de TP importante et ayant dû travailler seul sur ce BE - tous les participants étant déjà par deux - il m'a été difficile de rattraper mon retard pour le terminer entièrement, les sujets ommetants bien souvent un certain nombre d'informations cruciales données par les enseignants lors des séances.

Néanmoins il s'est avéré particulièrement intéressant en ce qu'il présente un cas d'application très concret et qui peut paraître trivial du premier abord.