

# D25 – OSCILLATEURS ; PORTRAITS DE PHASE ET NON-LINÉARITÉS

16 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

## Niveau : L2

### Prérequis

- Mécanique du solide

### Expériences

- ☞ Pendule grand angle
- ☞ Pendule double puits

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le pendule simple : un système non linéaire</b>	<b>2</b>
1.1	Résolution classique . . . . .	2
1.2	Vérification expérimentale . . . . .	3
1.3	Portait de phase . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Stabilité des points fixes</b>	<b>3</b>
2.1	Points fixes . . . . .	4
2.2	Stabilité des points fixes en 2D . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Notion de bifurcation</b>	<b>4</b>
3.1	Définition . . . . .	4
3.2	Pendule tournant . . . . .	5

## Introduction

Pour le moment, durant votre scolarité, vous n'avez étudié quasiment que des systèmes linéaires. C'est à dire des systèmes décrit par des systèmes d'équations de la forme :

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} \frac{\partial^j q_i}{\partial t^j} = b \quad (1)$$

Ces équations ont le mérite d'être solvable analytiquement.

Malheureusement, le monde réel est rarement aussi simple, et les physiciens sont régulièrement confronté à des systèmes non linéaire. Nous allons aujourd'hui voir quelques outils servant à appréhender ces systèmes.

## 1 Le pendule simple : un système non linéaire

Un des système non linéaire les plus simple est celui du pendule pesant. Le lagrangien du système est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\dot{\theta}^2 + MgL \cos(\theta) \quad (2)$$

Il en découle le hamiltonien du système est :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (J_0 + ML^2)\dot{\theta}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2(J_0 + ML^2)} - MgL \cos(\theta)$$

On en déduit l'équation de Hamilton décrivant la dynamique du système :

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -MgL \sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{J_0 + ML^2} \sin(\theta) = 0$$

Dans la limite des petits angles (où  $\sin(\theta) \simeq \theta$ ), le système peut être approximé par un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ .

### 1.1 Résolution classique

Cette équation est complexe à résoudre dans le cas général. On va donc devoir la simplifiée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Supposons que la solution soit proche de la forme  $\theta \simeq \cos(\omega t)$ , alors  $\theta^3 \simeq \cos^3(\omega t) = 0.75 \cos(\omega t) + 0.25 \cos(3\omega t)$ . On voit apparaître un terme de pulsation  $3\omega$ . Cela peut nous donner l'idée de rechercher une solution de la forme  $\theta = \theta_0(\cos(\omega t) + \epsilon \cos(3\omega t))$ . Injectons cette solution dans l'équation différentielle :

$$-\omega^2 \theta_0 (\cos(\omega t) + 9\epsilon \cos(3\omega t)) + \omega_0^2 \theta_0 \left( \cos(\omega t) + \epsilon \cos(3\omega t) - \frac{\theta_0^2}{6} (\cos^3(\omega t) + 3\epsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)) \right) = 0$$

$$-\omega^2 (\cos(\omega t) + 9\epsilon \cos(3\omega t)) + \omega_0^2 \left( \cos(\omega t) + \epsilon \cos(3\omega t) - \frac{\theta_0^2}{6} (0.75 \cos(\omega t) + 0.25 \cos(3\omega t) + 3\epsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)) \right) = 0$$

On cherche à annuler les termes en  $\cos(\omega t)$  et  $\cos(3\omega t)$  :

$$\cos(\omega t) \left( -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} \right) = 0 \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}} \simeq \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

$$\cos(3\omega t) \left( -9\epsilon \omega^2 + \epsilon \omega_0^2 - \frac{\theta_0^2}{24} \omega_0^2 \right) = 0 \quad \theta_0^2 \propto \epsilon$$

Comme  $\theta_0^2$  est du même ordre que  $\epsilon$ , on peut négliger le terme en  $\cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)$  de l'équation. On en déduit que, pour une amplitude maximale faible, la période du pendule suit la loi suivante :

$$T \simeq T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (3)$$

## 1.2 Vérification expérimentale

On vérifie la loi ci-dessus à l'aide du pendule simple pesant, relié à Latis pro et préalablement calibré. Remarque importante : le potentiomètre servant à la mesure d'angle du pendule de l'ENS Lyon présente un défaut (il peut "sauter" à certains angles). Il faut ajuster le gain de manière à enlever cet effet *avant* de faire la calibration.

## 1.3 Portait de phase

Comme nous venons de le voir, la résolution d'une équation non linéaire, même dans un cas simple, peut se révéler très laborieuse. Une manière plus pratique de représenter un système est son portrait de phase.

Le portait de phase consiste à tracer les trajectoires d'un système non pas dans en fonction du temps, mais dans son espace des phases (c'est à dire l'espace des degrés de liberté). Dans le cas général, un système est décrit par un vecteur  $\vec{x}(t)$  et son évolution par  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ .

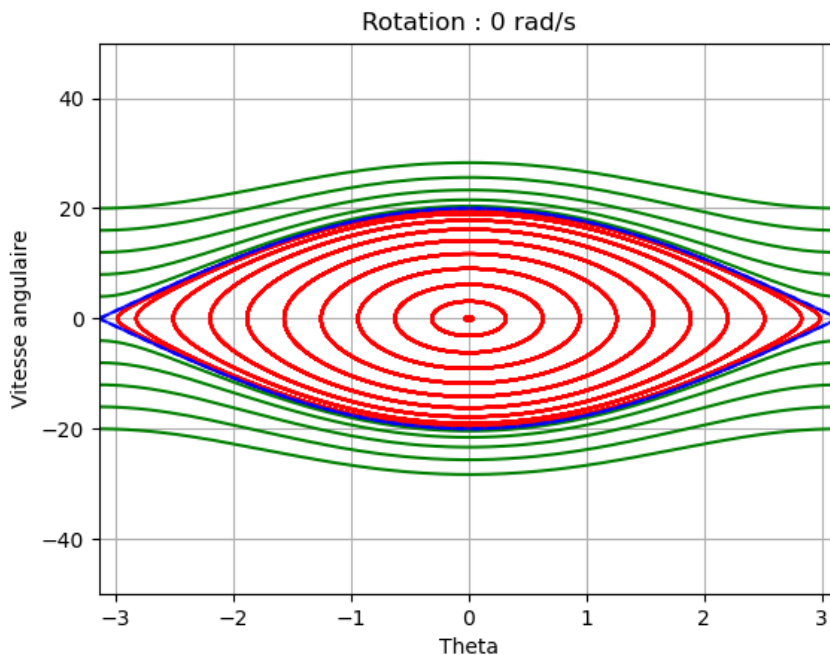
Dans le cas du pendule simple, cet espace est de dimension 2 ( $\theta$  et  $\dot{\theta}$ ), et on a les équations d'évolution :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= -\frac{MgL}{J_0 + ML^2} \sin(\theta)\end{aligned}$$

Le hamiltonien du système nous donne directement l'équation des trajectoires dans cette espace pour différente énergie mécanique  $\mathcal{H}$  :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{H} + 2MgL \cos(\theta)}{J_0 + ML^2} \quad (4)$$

La solution s'obtient directement, sans passer par aucune résolution d'équation différentielle !



Au centre de la figure, les trajectoires forment des ellipses concentriques : cette forme est caractéristique de l'oscillateur harmonique. Plus on s'éloigne du centre, plus les trajectoires dévient de simples ellipses : c'est l'effet de la non-linéarité. Les trajectoires vertes ne bouclent plus : le pendule tourne autour de son axe. La trajectoire bleu représente la frontière entre les deux comportements (oscillateur et rotation). On parle de séparatrice.

Expérience : tracé le diagramme de phase amortie du pendule. Lors de son amortissement, le pendule ralenti, ce qui se traduit par la convergence de la trajectoire vers le point centrale du portait.

## 2 Stabilité des points fixes

## 2.1 Points fixes

On appelle point fixe d'un diagramme de phase un point  $x_i$  tel que :

$$\forall i, \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Dans le cas du pendule pesant, on trouve deux points fixes, l'un en  $\theta = 0$ , l'autre en  $\theta = \pi$ . On remarque que évidemment, les deux points fixes ne sont pas équivalents. Lors d'une trajectoire amortie, le pendule converge vers le point  $\theta = 0$  (on parle de point fixe attracteur) et s'éloigne du point  $\theta = \pi$  (point fixe instable). Par ailleurs, le portrait de phase ne présente pas du tout la même figure à ces deux points. On peut donc se demander si les propriétés du portrait de phase permettent de prédire la nature des différents points fixes.

Prenons un point fixe  $\vec{x}_{eq}$  d'un espace de phase quelconque. On peut traduire cela par :

$$\frac{d\vec{x}_{eq}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}_{eq}) = \vec{0} \quad (6)$$

On se place au voisinage du point fixe, de manière à pouvoir linéariser le système. L'évolution du système sur ce voisinage est donc décrit par :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{J}(\vec{x} - \vec{x}_{eq}) \quad (7)$$

Avec  $\mathbf{J}$  la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J}_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x_{eq}}$$

La résolution du système linéaire au voisinage du point nous permet de déterminer sa nature.

## 2.2 Stabilité des points fixes en 2D

Supposons un système 2D. Une petite perturbation autour d'un point fixe entraîne une évolution du type :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \mathbf{J}\vec{e} \quad (8)$$

Cette équation a pour solution :

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_0 \exp(t \cdot \mathbf{J}) \quad (9)$$

L'évolution sera donc déterminé par les valeurs propres de  $\mathbf{J}$ . Si toutes les valeurs propres sont négatives, alors le système converge vers le point d'équilibre. Si certaines sont imaginaires, alors le système oscille (oscillateur non amorti). Enfin si certaines valeurs propres sont positives, le système diverge : le point fixe est instable.

Dans le cas d'une matrice 2D, les valeurs propres sont données par le polynôme :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{J})\lambda + \det(\mathbf{J}) = 0 \quad (10)$$

Le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = \text{tr}(\mathbf{J})^2 - 4\det(\mathbf{J}) \quad (11)$$

Et ces racines :

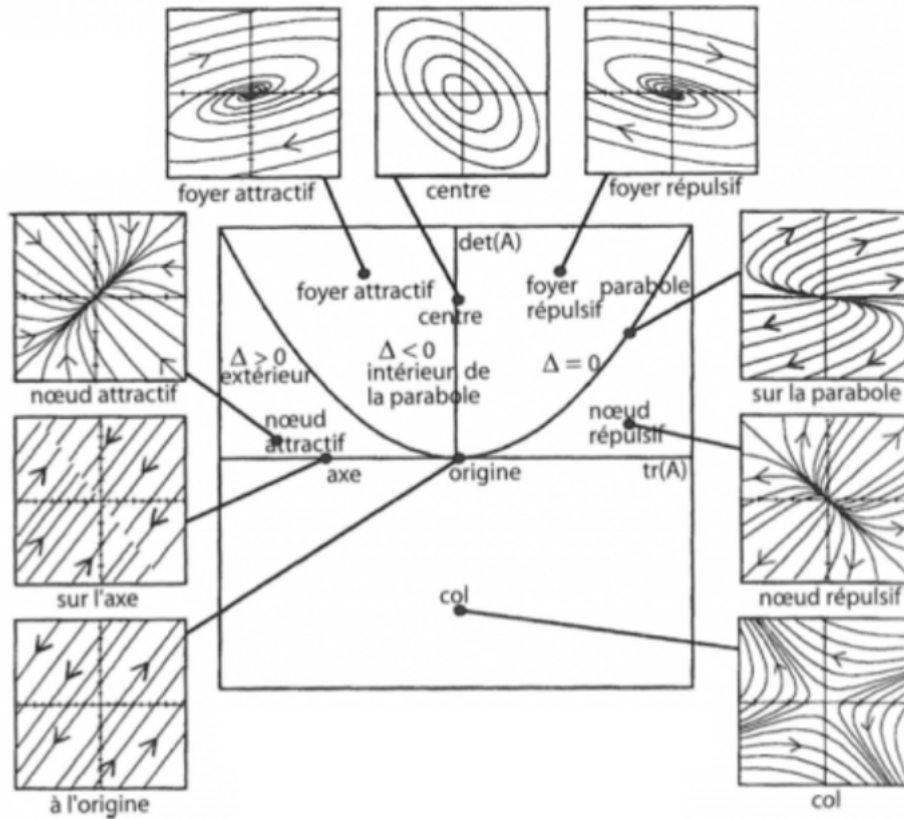
$$\lambda = \frac{\text{tr}(\mathbf{J}) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

On peut "cartographier" les différents points fixes en fonction de  $\text{tr}(\mathbf{J})$  et  $\det(\mathbf{J})$  (voir figure).

## 3 Notion de bifurcation

### 3.1 Définition

Une bifurcation intervient lorsque un petit changement quantitatif d'un système amène un changement qualitatif. Les transitions de phases sont des bifurcations : un petit changement de Température amène un changement profond de l'organisation de la matière.



### 3.2 Pendule tournant

Prenons l'exemple d'un pendule tournant. On force le pendule à osciller selon un axe, cet axe tournant sur lui-même à une pulsation de contrôle  $\omega_c$ .

Dans le référentiel tournant, le pendule est soumis à un potentiel de la forme :

$$V = -mgL \sin(\theta) - \frac{1}{2}m\omega_c^2 L^2 \cos^2(\theta) \quad (12)$$

Il s'agit du potentiel gravitationnel et du pseudo-potentiel centrifuge. La force de coriolis n'intervient pas : elle est compensée par la contrainte.

Avec la même méthode que ci-dessus :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{H}}{mL^2} + \frac{2g}{L} \cos(\theta) + \omega_c^2 \sin^2(\theta) \quad (13)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) + \omega_c^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (14)$$

Expérience : Code python : on montre un diagramme de phase du pendule tournant. On change la vitesse de rotation : le portrait de phase se déforme, mais reste qualitativement semblable. Jusqu'à une certaine rotation critique : le diagramme change radicalement. Le point fixe et stable en  $(0;0)$  devient un point col (instable), tandis que deux nouveaux foyers attractifs apparaissent de parts et d'autres.

Nous venons d'assister à une bifurcation. Celle-ci intervient lorsque la vitesse de rotation devient égale à la pulsation propre du pendule.

Expérience : Je ne pense pas qu'on ait le matériel pour faire un pendule tournant. Toutefois on peut au moins transformer le pendule pesant en pendule double puits grâce à des aimants, et capturer un beau portrait de phase sur latispro :)

Regardons de plus près ce qu'il se passe autour de la bifurcation. On pose  $\omega_c^2 = g/L + \epsilon$  :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin(\theta) [(1 + \epsilon) \cos(\theta) - 1] \simeq \frac{g}{L} \theta [(1 + \epsilon)(1 - \frac{\theta^2}{2}) - 1] \simeq \frac{g}{L} \epsilon \theta - \frac{g}{2L} \theta^3 \quad (15)$$

Quand  $\epsilon$  est négatif, il n'y a qu'une solution fixe :  $\theta = 0$ . Pour  $\epsilon$  positif, deux nouvelles solutions apparaissent :  $\theta = \pm\sqrt{2\epsilon}$ . Quand la topologie autour de la bifurcation a cette forme (en  $rx - x^3$ ), on parle de bifurcation en fourche. La transition de phase ferro-para est du même type!

## Conclusion

Les portraits de phases sont un outils majeur de la physique, car ils permettent de travailler analytiquement sur un système non linéaire, sans pour autant avoir à résoudre des équations fastidieuses!

Par ailleurs, nous avons découvert que les portraits de phases nous renseignent sur les bifurcations, c'est instant où un petit changement quantitatif d'un paramètre d'un système non linéaire amène un changement qualitatif.

On peut citer en exemple la forme des planètes (notamment Haumea) et la bifurcation des ellipsoïdes de Jacobi (voir la page [wiki](#)).

Remarque : je ne parle pas du tout d'attracteurs dans la leçon. Relire des trucs dessus en prévision de questions!