

D23 – MÉCANISMES DE LA CONDUCTION ÉLECTRIQUE DANS LES SOLIDES

23 juin 2021

Corentin Naveau & Simon Jeanne

Niveau : L2

Prérequis

- Électromagnétisme
- Équation de Shrödinger
- Distribution de Fermi-Dirac

Expériences

- ☞ Conductivité du cuivre en fonction de la température
- ☞ Effet Hall

Table des matières

1	Le modèle de Drude	2
1.1	Mise en équation	2
1.2	Effet Hall	2
1.3	Faiblesse du modèle	3
1.3.1	Expérience : conductivité du cuivre en fonction de la température	3
2	Le modèle de Sommerfeld	3
2.1	La mer de Fermi	3
2.2	Structure de bandes	4

Lire le BUB 550!

Introduction

Depuis le collège, vous connaissez la loi d'Ohm $U = RI$. Celle-ci stipule que, lorsqu'un matériau est soumis à une différence de potentiel électrique, les électrons subissent une force contraire, une résistance, les empêchant d'accélérer à l'infini. Cette effet de résistance se traduit par une dissipation de l'énergie fournie au circuit, généralement sous forme thermique.

Dans la leçon d'aujourd'hui, nous allons étudier les mécanismes microscopiques à l'œuvre au sein des solides expliquant ce comportement.

1 Le modèle de Drude

1.1 Mise en équation

En 1900, Drude développe un modèle classique pour comprendre la résistivité des matériaux. L'idée est la suivante : on suppose que les électrons se comportent comme un gaz parfait (particules sans interactions les unes avec les autres). Les interactions avec les ions se font via des collisions après lesquelles l'électron part avec une vitesse aléatoire et isotrope \vec{v}_{coll} . Le temps caractéristique entre deux collisions est noté τ .

Suivons un électron d'impulsion $\vec{p}(t)$. Au temps $t + dt$, il a dt/τ chance d'avoir subi une collision, et $1 - dt/\tau$ chance d'avoir continué d'accélérer dans le potentiel électrique.

$$\vec{p}(t + dt) = \frac{dt}{\tau} \vec{v}_{coll} + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\vec{p}(t) - e\vec{E}dt) \quad (1)$$

Moyennons cette équation sur un grand nombre d'électrons. Par hypothèse d'isotropie des "rebonds" des électrons, $\langle \vec{v}_{coll} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}(t + dt) \rangle &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\langle \vec{p}(t) \rangle - e\vec{E}dt) \\ \frac{\langle \vec{p}(t + dt) \rangle - \langle \vec{p}(t) \rangle}{dt} &= -\frac{\langle \vec{p}(t) \rangle}{\tau} - e\vec{E} \\ \frac{d\langle \vec{p}(t) \rangle}{dt} &= -\frac{\langle \vec{p}(t) \rangle}{\tau} - e\vec{E} \end{aligned}$$

En régime permanent, nous obtenons :

$$\langle \vec{v}_e \rangle = -\frac{e\tau\vec{E}}{m_e}$$

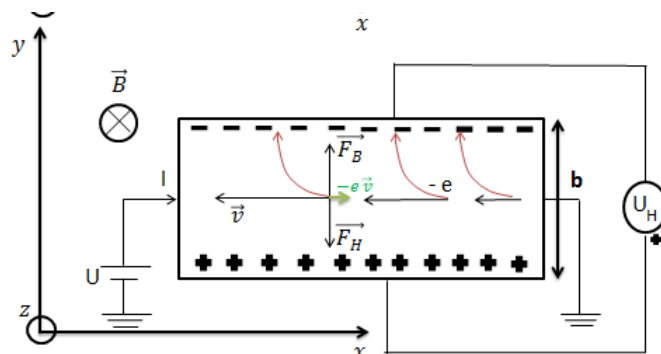
Et finalement, le courant :

$$\vec{j} = -en_e \langle \vec{v}_e \rangle = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

Nous avons donc trouvé un lien entre la conductivité des matériaux et ses caractéristiques microscopiques : $\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

1.2 Effet Hall

Que se produit-il si on fait passer un courant à travers un barreau métallique plongé dans un champ B_z ?



Entrainer par la force de Lorentz, les électrons subissent une force :

$$\vec{F} = -e\vec{E}_H - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3)$$

Ils s'accumulent le long des parois, se qui entraîne l'apparition d'un champ électrique \vec{E}_H . En régime stationnaire, ce champ compense exactement la force engendré par le champ magnétique.

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{1}{n_e e} \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{n_e e S} \vec{I} \wedge \vec{B} \quad (4)$$

Ainsi, la mesure de E_H en fonction de I et/ou de B connaissant la surface du barreau S permet de remonter à la densité de porteur de charge du matériau.

Expérience : On mesure la densité de porteur de charge dans le germanium d'une sonde à effet Hall. Attention : pour ne pas tourner en rond, l'électroaimant doit être calibrer avec autre chose qu'une sonde à effet Hall, par exemple un fluxmètre. Voir TP électromagnétisme p7.

1.3 Faiblesse du modèle

La conductivité σ est directement relié au temps caractéristique entre deux collisions τ .

Ainsi, pour le cuivre à température ambiante, on a une conductivité de $\sigma = 59.6 \times 10^6$ S/m. En prenant une densité d'un électron libre par atome $n_e = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, on obtient un temps caractéristique de collision $\tau = 2.5 \times 10^{-14}$ s.

En supposant que les électrons se comportent effectivement comme un gaz parfait, alors la vitesse quadratique moyenne des électrons est $v_q = \sqrt{\frac{3K_B T}{m_e}}$, ce qui donne un libre parcours moyen $\lambda = v_q \tau = 2.9 \times 10^{-9}$ m, ce qui correspond à une dizaine de fois la distance caractéristique entre deux atomes de cuivre.

Par ailleurs, on peut ré-écrire la conductivité en fonction de la température :

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{\sqrt{m_e K_B T}} \quad (5)$$

Ces prédictions sont incohérentes avec les résultats expérimentaux. Le libre parcours moyen peut être déterminer en mesurant la conductivité d'une plaque de cuivre de plus en plus fine. Lorsque l'épaisseur de la plaque devient de l'ordre du libre parcours moyen, des effets de bord apparaissent. Avec cette méthode, on peut trouver expérimentalement le libre parcours moyen et on trouve des valeurs de l'ordre de 10 fois supérieurs aux prédictions de Drude (45nm pour le cuivre).

De même, l'évolution de la conductivité en fonction de la température ne suit pas la loi décrite ci-dessus : si les électrons se comportaient comme un gaz, on aurait la capacité thermique à volume constant des électrons :

$$c_v = \frac{3}{2} n K_B \quad (6)$$

A température ambiante, les valeurs expérimentales sont 100 fois plus faibles !

Un autre défaut : on n'explique absolument pas pourquoi certains matériaux sont conducteurs, et d'autres non.

1.3.1 Expérience : conductivité du cuivre en fonction de la température

Entre 0°C et 100°C, la conductivité semble suivre une loi affine de la température, ce qui n'est pas en accord avec le modèle de Drude ! TP électromagnétisme p61. Bien penser à activer le mode "4 wire" du multimètre ! Sinon on aura des mesures absurdes.

2 Le modèle de Sommerfeld

Nous allons tenter d'améliorer le modèle de Drudes en important des éléments de physique quantique.

2.1 La mer de Fermi

Plutôt que de considérer que les électrons sont comme un gaz parfait, nous considérons qu'ils ne peuvent occuper que des modes quantifiés, correspondant à des ondes stationnaires dans la "boite" que forme le métal. Par ailleurs, ils ne peuvent être que deux électrons maximum par mode, car se sont des fermions. Voir le modèle de planck dans la leçon émission de lumière en remplaçant les photons (bosons) par des électrons (fermions).

A température nulle, on remplit les modes de plus basse énergie jusqu'au plus élevé. On remplit ainsi la sphère des états possibles, dont on donne le rayon k_F (vecteur d'onde de Fermi) :

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad (7)$$

Et l'énergie de Fermi correspondante :

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} \quad (8)$$

Et la température de Fermi :

$$T_F = \frac{E_F}{K_B} \quad (9)$$

La distribution des électrons est alors celle de fermi-dirac :

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{K_B T}\right) + 1} \quad (10)$$

La température de fermi est de l'ordre de 10^4 , a température ambiante on peut considérer la température comme quasiment nulle. La distribution des électrons est donc très proches de celle à température nulle.

Si on monte un peu la température, seul les électrons proches ($E = E_F \pm F_B T$) de la température de Fermi vont pouvoir changer d'état. Ceux-ci vont gagner une énergie de $\frac{3}{2} K_B T$, selon le théorème d'équipartition de l'énergie. Finalement, pour des température basse devant la température de Fermi, l'énergie de la mer d'électron s'écrit :

$$u = u_0 + N_0 K_B T \times \frac{3}{2} K_B T \quad (11)$$

Le calcul exacte nous donnerait :

$$u = u_0 + \frac{\pi^2}{6} (K_B T)^2 \frac{3n}{2E_F} \quad (12)$$

Et donc la capacité thermique :

$$c_V = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} \frac{K_B T}{E_F} n K_B \quad (13)$$

Ce qui est largement inférieur à la valeur de Drude !

De même, la température de Fermi étant très élevé devant la température ambiante, cela signifie que la vitesse moyenne des électrons est également bien plus élevé. Le libre parcours moyen est donc lui même plus grand, ce qui rejoint les observations.

De fait, on abandonne l'idée de Drude selon laquelle les électrons cognent contre les ions. En réalité, ils percutent les solitons agitant le cristal.

2.2 Structure de bandes

Voir l'autre plan qui explique tout ça très très bien !

Conclusion

Aujourd'hui nous sommes partis d'un modèle très simple des électrons dans un métal, pour aboutir à un modèle bien plus complet nous permettant de mieux comprendre les conductivités thermiques et électriques des métaux, ainsi que l'existence de matériaux conducteur, semi-conducteur et isolant.

Toutefois, ce modèle n'est pas la fin, car il n'explique pas un autre phénomène : la supraconductivité.