UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

DEVOIR

PRÉSENTÉ À

Ismaïl Biskri

Mathématiques pour informaticiens I

PIF1005

PAR

Simon Lavigne

Mehdi El Jouhfi

Marc-Emmanuel Nattier

Devoir 1 :

Induction

10 / 04 / 2024

Numéro 1

Proposition:

$$n \in \mathbb{N} \;, n \geq 2 \,, \qquad P(x) \colon \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{n} * \mathrm{n}!) < (\mathrm{n} + 1)!$$

Cas de base :

$$P(2) : (2 * 2!) < (2 + 1)!$$

$$2 * 2 < 3!$$

$$4 < 6$$

Hypothèse :

$$P(k) : \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 1)! \;\Rightarrow \text{Vrai}$$

Induction :

$$P(k) : \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 1)! \;\Rightarrow ?\; P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k+1} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 2)!$$

1) $P(k+1) : \sum_{i=2}^{k+1} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 2)!$

2) $P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) + (\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+1)! < (k+2)(k+1)!$

3) $P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k}+2)(\mathrm{k} + 1)! - (\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+1)!$

4) $P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 1)! * ((\mathrm{k}+2) - (\mathrm{k}+1))$

5) $P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 1)! * ((\mathrm{k}+2) - (\mathrm{k}+1))$

6) $P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} (\mathrm{k} * \mathrm{k}!) < (\mathrm{k} + 1)! * (1)$ (Vrai par hypothèse de l'induction)

Numéro 2

Proposition:

$$n \in \mathbb{N} \ , n \geq 1 \, , \qquad P(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{i}\,(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+2) > \frac{\mathrm{n}^4}{4}$$

Cas de base :

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} 1\,(1+1)(1+2) > \frac{1^4}{4}$$

$$6 > \frac{1}{4}$$

Hypothèse :

$$P(k) \colon \sum_{i=1}^{k} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) > \frac{\mathrm{k}^4}{4} \Rightarrow \mathrm{Vrai}$$

Induction :

$$P(k) : \sum_{i=2}^{k} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) > \frac{\mathrm{k}^4}{4} \Rightarrow ?\ \ P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k+1} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) > \frac{(\mathrm{k}\ +\ 1)^4}{4}$$

$$P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k+1} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) > \frac{(\mathrm{k}\ +\ 1)^4}{4}$$

$$P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} [\,\mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)\,] + (\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)(\mathrm{k}+3) > \frac{(\mathrm{k}\ +\ 1)^4}{4}$$

$$P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} [\mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2)] + \mathrm{k}^3 + 6\mathrm{k}^2 + 11\mathrm{k} + 6\ > \frac{1}{4}(\mathrm{k}^4 + 4\mathrm{k}^3 + 6\mathrm{k}^2 + 4\mathrm{k} + 1)$$

$$P(k+1) \colon \sum_{i=2}^{k} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) - \frac{1}{4}\mathrm{k}^4 + \frac{9}{2}\mathrm{k}^2 + 10\mathrm{k} + \frac{23}{4} > 0$$

Or :

$\sum_{i=2}^{k} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) - \frac{1}{4}\mathrm{k}^4 > 0$ (Vrai Par hypothèse de l'induction)

$\frac{9}{2}\mathrm{k}^2 + 10\mathrm{k} + \frac{23}{4} > 0$ (Vrai pour tout k>0)

$\Rightarrow$

$P(k+1)\colon \sum_{i=2}^{k} \mathrm{k}\,(\mathrm{k}+1)(\mathrm{k}+2) - \frac{1}{4}\mathrm{k}^4 + \frac{9}{2}\mathrm{k}^2 + 10\mathrm{k} + \frac{23}{4} > 0$ (Si a>b, c>b => a +c >b)

Numéro 3

Proposition:

$$n \in \mathbb{N} \ , n \geq 1 \, , \qquad P(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} > \frac{1}{3}$$

Cas de base :

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Hypothèse :

$$P(k): \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} > \frac{1}{3} \Rightarrow Vrai$$

Induction :

$$P(k): \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} > \frac{1}{3} \ \Rightarrow ? \ P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} > \frac{1}{3}$$

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} > \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P(k+1)}: \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} > \frac{1}{3}$$

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} > 0$$

Or :

$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} - \frac{1}{3} > 0$ Vrai par hypothèse de l'induction

,

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} > 0$ Vrai pour k > 0

$\Rightarrow$

$P(k+1): \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} > 0$ (Si a>b, c>b => a + c >b)

Numéro 4

Proposition:

$$n \in \mathbb{N} \ , n \geq 1 , \qquad P(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} \leq \mathrm{n}^2$$

Cas de base :

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq 1$$

Hypothèse :

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} \leq \mathrm{k}^2 \ \Rightarrow Vrai$$

Induction :

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} \leq \mathrm{k}^2 \ \Rightarrow ? \ P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} \leq (\mathrm{k}+1)^2$$

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} \leq (\mathrm{k}+1)^2$$

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k}+1} \leq (\mathrm{k}+1)^2$$

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k}+1} \leq \mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} + 1$$

$$P(k+1) : \mathrm{k}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k}+1} \leq \mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} + 1$$

$P(k+1): \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} \leq 2\mathrm{k}+1$

$P(k+1): 0 \leq 2\mathrm{k}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}}$

Or :

$2\mathrm{k}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}} \quad \in [2.75\,, \infty]\ , k \geq 1$

$\Rightarrow$

$P(k+1): 0 \leq 2\mathrm{k}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{k+1}}$