Università
degli Studi
di Padova

Introduction aux algèbres de Lie

Simon Masson
encadré par Giovanna Carnovale

Stage de Master 1
Juin – Juillet 2015

Table des matières

Ce document s'inspire du livre ≪ *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* ≫ de James E. Humphreys.

F désigne un corps commutatif quelconque.

1 Définitions et premiers exemples

1.1 La notion d'algèbre de Lie

On a vu dans plusieurs domaines mathématiques des commutateurs :
- en théorie des groupes : pour un groupe G, on définit $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$
- En calcul matriciel : pour $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$, $[A,B] = AB - BA$.

Rappelons la définition d'une algèbre :

Définition (algèbre)**.** Une F-algèbre E est un F-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ muni d'une seconde loi interne $* : E \times E \to E$ bilinéaire. On la note donc $(E,+,\cdot,*)$.

Remarque. On parle souvent de multiplication interne.

On définit alors une algèbre de Lie en choisissant une seconde loi interne qui vérifie quelques propriétés :

Définition (Algèbre de Lie)**.** Une algèbre de Lie L est un espace vectoriel muni d'une seconde loi interne $[\cdot,\cdot]$, appelée commutateur, qui vérifie :

(L1) le commutateur est une opération bilinéaire

(L2) $[x,x] = 0$ pour tout $x \in L$

(L3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ pour tout $x,y,z \in L$.

Remarque. (L3) est appelée identité de Jacobi.

Proposition 1.1. *Dans une algèbre de Lie, on a l'anticommutativité :*
(L2') $[x,y] = -[y,x]$

Démonstration. $[x+y,x+y] \overset{(L2)}{=} 0$ et $[x+y,x+y] \overset{(L1)}{=} [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] \overset{(L2)}{=} [x,y]+[y,x]$ □

Remarque. On a en fait équivalence entre (L2) et (L2') si car$F \neq 2$.

Définition (isomorphisme d'algèbres de Lie)**.** On dit que L et L' sont deux algèbres de Lie isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : L \to L'$ vérifiant $\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)]$ pour tout $x,y \in L$. φ est alors appelé isomorphisme d'algèbres de Lie.

On peut bien-sûr parler de sous-algèbre de Lie lorsque pour $x,y \in K$, $[x,y] \in K$.

Remarque. Pour $x \in L$ non-nul, Fx est une sous-algèbre (de Lie) de l'algèbre de Lie L. $\dim Fx = 1$ et la multiplication interne est triviale à cause de (L2).

1.2 Algèbres de Lie linéaires

Si V est un F-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathrm{End}(V)$ est de dimension n^2. C'est un anneau muni des lois $+$ et $\times$. On peut définir une nouvelle opération (commutateur ou crochet de Lie) $[x,y] = xy - yx$. Avec cette opération, $\mathrm{End}(V)$ devient une algèbre de Lie sur F : (L1) et (L2) sont immédiats. Vérifions (L3) :

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= [x,(yz-zy)] + [y,(zx-xz)] + [z,(xy-yx)] \\
&= [x,yz] - [x,zy] + [y,zx] - [y,xz] + [z,xy] - [z,yx] \\
&= xyz - yzx - (xzy - zyx) + yzx - zxy - (yxz - xzy) + zxy - xyz - (zyx - yxz) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour distinguer ces deux structure, on note $\mathfrak{gl}(V)$ pour $\mathrm{End}(V)$ vue en tant qu'algèbre de Lie.

Toute sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ est appelée algèbre de Lie linéaire.

Exemples.

1. L'algèbre spéciale linéaire $\mathfrak{sl}(V)$ ($\dim V = \ell+1$) : l'ensemble des endomorphismes de V de trace nulle. C'est bien une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ puisque $\mathrm{Tr}(xy-yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = 0$ donc $[x,y] \in \mathfrak{sl}(V)$.
$$\dim \mathfrak{sl}(V) = (\ell+1)^2 - 1$$
En effet, c'est une sous-algèbre propre de $\mathfrak{gl}(V)$ donc $\dim \mathfrak{sl}(V) < \dim \mathfrak{gl}(V) = (\ell+1)^2$, c'est-à-dire
$$\dim \mathfrak{sl}(V) \leq (\ell+1)^2 - 1$$
Reste à trouver $(\ell+1)^2 - 1$ matrices de $\mathfrak{sl}(V)$ linéairement indépendantes :
— les e_{ij} ($i \neq j$) : il y en a $(\ell+1)^2 - (\ell+1)$
— les $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ ($1 \leq i \leq \ell$) : il y en a ℓ.
Au total, on a bien $(\ell+1)^2 - (\ell+1) + \ell = (\ell+1)^2 - 1$ matrices linéairement indépendantes.
Donc $\dim \mathfrak{sl}(V) = (\ell+1)^2 - 1$.
2. On note $\mathfrak{t}(n,F)$ les matrices triangulaires supérieures, $\mathfrak{n}(n,F)$ les matrices triangulaires supérieures strictes, et $\mathfrak{d}(n,F)$ les matrices diagonnales.
$$\mathfrak{t}(n,F) = \mathfrak{d}(n,F) \oplus \mathfrak{n}(n,F)$$
Remarque. Pour H, K deux sous-algèbres de Lie de L, on note $[H,K]$ le sous-espace engendré par les commutateurs $[h,k]$ pour $h \in H, k \in K$.
On a $[\mathfrak{d}(n,F), \mathfrak{n}(n,F)] = \mathfrak{n}(n,F)$ et donc $[\mathfrak{t}(n,F), \mathfrak{t}(n,F)] = \mathfrak{n}(n,F)$.

1.3 Dérivées d'algèbres de Lie

Une "dérivation" d'une algèbre $\mathfrak{A}$ est une application linéaire $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ satisfaisant la règle du produit
$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$
$\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$, l'ensemble de toutes les dérivations de $\mathfrak{A}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$.

Proposition 1.2. *$Der(\mathfrak{A})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. Soient $\delta, \delta' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$, et $a, b \in \mathfrak{A}$,
$$\begin{aligned}
[\delta,\delta'](ab) &= (\delta\delta' - \delta'\delta)(ab) \\
&= \delta\delta'(ab) - \delta'\delta(ab) \\
&= \delta(a\delta'(b) + \delta'(a)b) - \delta'(a\delta(b) + \delta(a)b) \\
&= a\delta\delta'(b) + \delta\delta'(a)b - a\delta'\delta(b) - \delta'\delta(a)b \\
&= a(\delta\delta'(b) - \delta'\delta(b)) + (\delta\delta'(a) - \delta'\delta(a))b \\
&= a[\delta,\delta'](b) + [\delta,\delta'](a)b
\end{aligned}$$
□

On définit l'application adjointe $\mathrm{ad}\, x : y \mapsto [x,y]$.

Proposition 1.3. *$ad\ x \in Der(L)$.*

Démonstration. Soient $a, b \in L$,

$$\begin{aligned} a(\text{ad } x(b)) + (\text{ad } x(a))b &= a(xb - bx) + (xa - ax)b \\ &= axb - abx + xab - axb \\ &= xab - abx = [x, ab] = \text{ad } x(ab) \end{aligned}$$

□

Remarques.

1. Les dérivations de cette forme (ad) sont dites intérieures, les autres extérieures. L'application ad: $L \to \text{Der}(L)$ est appelée représentation adjointe de L.
2. Dans une algèbre de Lie L de dimension 1 ($L = \langle u \rangle$), ad x est triviale car pour $y \in L$, on peut écrire $x = \alpha u$ et $y = \beta u$. D'où ad $x(y) = [x, y] = [\alpha u, \beta u] \overset{(L1)}{=} \alpha\beta[u, u] \overset{(L2)}{=} 0$.

On peut désormais déterminer toutes les algèbres de Lie de dimension ≤ 2 (à isomorphisme près) : en dimension 1, on a vu que le commutateur est toujours nul (à cause de (L2)).
En dimension 2, on choisit (x, y) une base de L. Soient $u, v \in L$: $u = ax + by$ et $v = cx + dy$.

$$[ax + by, cx + dy] = a[x, x] + ad[x, y] + bc[y, x] + bd[y, y] = (ad - bc)[x, y]$$

donc tout commutateur est sur la droite vectorielle $F[x, y]$.
Si tous les commutateurs sont nuls, L est abélien.
Sinon, en prenant $\tilde{x} = [x, y]$ et $\tilde{y}$ indépendant de $\tilde{x}$, on a

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] = \alpha\tilde{x} \qquad \alpha \neq 0$$

(car c'est un commutateur)
En prenant $y' = \alpha^{-1}\tilde{y}$, on obtient

$$[\tilde{x}, y'] = \tilde{x}$$

En fait, l'équation $[x, y] = x$ définit entièrement une algèbre de Lie :

1. La bilinéarité est clairement vérifiée.
2. $[x, x + y] = x$ et $[x, y] = x$ donc $[x, x] = [x, (x + y) - y] = [x, x + y] - [x, y] = x - x = 0$.
3. Soient $u, v, w \in L$. Alors il existe a, b, c, d, e, f tels que $u = ax + by$, $v = cx + dy$, et $w = ex + fy$.

$$[u, [v, w]] = [ax + by, [cx + dy, ex + fy]] = [ax + by, (cf - de)x] = -b(cf - de)x$$

$$[v, [w, u]] = [cx + dy, [ex + fy, ax + by]] = [cx + dy, (eb - fa)x] = -d(eb - fa)x$$

$$[w, [u, v]] = [ex + fy, [ax + by, cx + dy]] = [ex + fy, (ad - bc)x] = -f(ad - bc)x$$

D'où

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] &= (-b(cf - de) - d(eb - fa) - f(ad - bc))\, x \\ &= -(bcf - bde + deb - dfa + fad - fbc)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 Idéaux et homomorphismes

2.1 Idéaux

Définition (idéal)**.** Un sous-espace I d'une algèbre de Lie L est un idéal si pour $x \in L$, $y \in I$, $[xy] \in I$.

Exemples.

1. 0 et L elle-même sont des idéaux triviaux de L.
2. Le centre $Z(L) = \{z \in L, [x,z] = 0 \ \forall x \in L\}$ est un idéal de L. En effet, soit $x \in L$ et $z \in Z(L)$. Alors, $[x,z] \in Z(L)$ puisque pour tout $w \in L$, $[w,[x,z]] = [w,0] = 0$.
3. L'algèbre dérivée $[L,L]$ est un idéal de L.

On peut analyser la structure d'une algèbre de Lie en regardant ses idéaux.

Définition (algèbre de Lie simple)**.** Soit L une algèbre de Lie. Si L n'a pas d'autres idéaux que 0 et elle-même, et que $[L,L] \neq 0$, on dit que L est simple.

Comme le centre et l'algèbre dérivée de L sont des idéaux, on en déduit que

$$L \text{ simple} \Longrightarrow Z(L) = 0 \text{ et } [L,L] = L$$

Exemple. Soit $L = \mathfrak{sl}(2,F)$, car$F \neq 2$. On choisit la base standard (x,y,h) :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On montre que $[x,y] = h$, $[h,x] = 2x$, et $[h,y] = -2y$:

$$[x,y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h$$

$$[h,x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x$$

$$[h,y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2y$$

On va montrer que $L = \mathfrak{sl}(2,F)$ est simple. Soit $I \neq 0$ un idéal de L. Soit $ax + by + ch \in I$ non-nul,

$$[x,[x,ax+by+ch]] = [x, bh - 2cx] = -2bx \in I$$

$$[y,[y,ax+by+ch]] = [y, -ah + 2cy] = -2ay \in I$$

Si a ou b est non-nul, I contient x ou y et donc $I = L$ (car $[x,y] = h$, donc $x,y,h \in I$). Si $a = b = 0$, alors $0 \neq ch \in I$ donc $h \in I$. Pour la même raison, $I = L$.
Dans tous les cas, $I = L$: $\mathfrak{sl}(2,F)$ est simple.

Pour finir, on définit deux nouvelles sous-algèbres de L : le normalisateur et le centralisateur.

Définition (normalisateur)**.** Le normalisateur d'une sous-algèbre $K \subset L$ est la sous-algèbre définie par

$$N_L(K) = \{x \in L, [xK] \subset K\}$$

Définition (centralisateur)**.** Le centralisateur d'une sous-algèbre $K \subset L$ est la sous-algèbre définie par

$$C_L(K) = \{x \in L, [xK] = 0\}$$

Remarque. $C_L(L) = Z(L)$.

2.2 homomorphismes et représentations

Définition (homomorphisme d'algèbres de Lie)**.** On appelle homomorphisme une transformation linéaire $\varphi : L \to L'$ (où L et L' sont des algèbres de Lie) qui vérifie

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \qquad \forall x, y \in L$$

Proposition 2.1 (premier théorème d'isomorphisme)**.** *Si $\varphi : L \to L'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors $L/\ker\varphi \cong \Im\varphi$.*

Démonstration. On va montrer que $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \varphi(L) \\
L/\ker\varphi \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

avec la définition :

$$\hat{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$$

$\hat{\varphi}$ est surjectif : soit $y \in \varphi(L)$. Alors il existe $x \in L$ tel que $\varphi(x) = y$. Mais alors, $\hat{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x) = y$ et donc $\hat{\varphi}$ est surjectif.
$\hat{\varphi}$ est injectif : soit $\bar{x} \in \ker\hat{\varphi}$. Alors $\hat{\varphi}(\bar{x}) = 1_{L'}$. Comme $\hat{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$, on en déduit que $x \in \ker\varphi$ et donc $\bar{x} = x.\ker\varphi = \ker\varphi$. D'où l'injectivité. □

Proposition 2.2 (deuxième théorème d'isomorphisme)**.** *Si I et J sont deux idéaux de L, alors*

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$$

Démonstration. Le morphisme $\varphi : I \to (I+J)/J$ a pour noyau $I \cap J$. Le premier théorème d'isomorphisme permet de conclure. □

Proposition 2.3 (troisième théorème d'isomorphisme)**.** *Si I et J sont deux idéaux de L tels que $I \subset J$, alors J/I est un idéal de L/I et $(L/I)/(J/I)$ est isomorphe à L/J.*

Démonstration. On utilise le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi_J"] \arrow[d, "\pi_I"'] & L/J \\
L/I \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_{J/I}"'] & \\
(L/I)/(J/I) \arrow[uur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\ker\pi_J = J$ donc $\ker\varphi_1 = J/I$. Le premier théorème d'isomorphisme permet de conclure. □

Définition (représentation)**.** Une représentation d'une algèbre de Lie est un morphisme $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ (où V est un espace vectoriel sur F). On supposera de plus que L est de dimension finie.

Exemple. ad $: x \mapsto \text{ad } x$ est une représentation.
ad est clairement linéaire. Montrons qu'elle préserve le commutateur :

$$\begin{aligned}
[\text{ad } x, \text{ad } y](z) &= \text{ad } x\text{ad } y(z) - \text{ad } y\text{ad } x(z) \\
&= \text{ad } x([y,z]) - \text{ad } y([x,z]) \\
&= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\
&\overset{(L2')}{=} [x,[y,z]] + [[x,z],y] \\
&\overset{(L3)}{=} [[x,y],z] \\
&= \text{ad } [x,y](z)
\end{aligned}$$

Proposition 2.4. *Une algèbre de Lie simple est isomorphe à un algèbre de Lie linéaire.*

Démonstration. Si L est simple, alors $Z(L) = 0$. On considère ad $: L \to \mathfrak{gl}(L)$.
$\ker \text{ad } = \{x, \text{ad } x = 0\} = \{x, [x,y] = 0 \ \forall y \in L\} = Z(L)$. Donc ad est injective. □

2.3 Automorphismes

On suppose que car$F = 0$. Soit $x \in L$ tel que ad x est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe k tel que $(\text{ad } x)^k = 0$.
$\exp(\text{ad } x)$ est alors défini :

$$\exp(\text{ad } x) = 1 + \text{ad } x + (\text{ad } x)^2/2! + \ldots + (\text{ad } x)^{k-1}/(k-1)!$$

Proposition 2.5. *Sous ces hypothèses,* $\exp($*ad* $x)$ *est un automorphisme. Il en est de même pour* $\exp(\delta)$ *avec* δ *une dérivation nilpotente quelconque.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\exp\delta(x)\exp\delta(y) &= \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\delta^j y}{j!}\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\frac{\delta^{n-i} y}{(n-i)!}\right)\right) \\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{n=0}^{2k-2}\frac{\delta^n(xy)}{n!} \\
&\overset{\delta^k=0}{=} \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\delta^n(xy)}{n!} = \exp\delta(xy)
\end{aligned}$$

On peut directement exhiber l'inverse de $\exp\delta := 1 + \eta$:

$$1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \ldots \pm \eta^{k-1}$$

□

Remarque. Les automorphismes de la forme $\exp(\text{ad } x)$ où ad x est nilpotent, sont appelés automorphismes intérieurs. On note $\text{Int}(L)$ le sous-groupe de $\text{Aut}(L)$ engendré par ceux-ci.

Proposition 2.6. *Int*(L) *est un sous-groupe normal de Aut*(L).

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$ et $x, y \in L$,

$$\varphi(\mathrm{ad}\ x)\varphi^{-1}(y) = \varphi([x, \varphi^{-1}(y)]) = \varphi(x\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y)x) = \varphi(x)y - y\varphi(x) = \mathrm{ad}\ \varphi(x)(y)$$

$$\varphi(\mathrm{ad}\ x)\varphi^{-1} = \mathrm{ad}\ \varphi(x)$$

D'où

$$\begin{aligned}\varphi \exp(\mathrm{ad}\ x)\varphi^{-1} &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mathrm{ad}\ x)^i}{i!}\right)\varphi^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varphi(\mathrm{ad}\ x)^i\varphi^{-1}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varphi(\mathrm{ad}\ x\varphi^{-1}\varphi \mathrm{ad}\ x\varphi^{-1} \ldots \varphi \mathrm{ad}\ x)\varphi^{-1}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\varphi(\mathrm{ad}\ x)\varphi^{-1})^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mathrm{ad}\ \varphi(x)}{i!} = \exp \mathrm{ad}\ \varphi(x)\end{aligned}$$

$\mathrm{Int}(L)$ est stable par conjugaison (par des éléments de $\mathrm{Aut}(L)$). □

3 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

3.1 Résolubilité

On définit les algèbres dérivées de L par :

$$L^{(0)} = L \qquad L^{(1)} = [L, L] \qquad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$$

Définition (algèbre de Lie résoluble)**.** On dit que L est résoluble s'il existe n tel que $L^{(n)} = 0$.

Remarque. Abélien implique résoluble.

Exemple. $\mathfrak{t}(n, F)$ est résoluble.
Notons qu'une base de $\mathfrak{t}(n, F)$ est l'ensemble des matrices e_{ij} avec $i \leq j$. Donc $\dim \mathfrak{t}(n, F) = n(n+1)/2$.
Notons que

$$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

En particulier, $[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ donc $\mathfrak{n}(n, F) \subset [L, L]$.
Comme $L = \mathfrak{t}(n, F) = \mathfrak{d}(n, F) \oplus \mathfrak{n}(n, F)$, et comme $\mathfrak{d}(n, F)$ est abélien, on en déduit que $L^{(1)} = \mathfrak{n}(n, F)$.
On peut définir sur $\mathfrak{n}(n, F)$ la notion de niveau : on dit que e_{ij} est de niveau $j - i$.
On suppose que $i < j$ et $k < l$. Alors, $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$.
Si $l = i$, alors $j \neq k$ car $k < l = i < j$. Si $j = k$, alors $i \neq l$ car $i < j \neq k < l$. On peut donc supposer que $l \neq i$, et alors $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il}$.
En particulier, e_{il} est un commutateur de deux matrices. Le niveau du commutateur est supérieur à celui des matrices dans le commutateur. Par exemple, dans $\mathfrak{n}(3, \mathbb{R})$:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On conclut que $L^{(2)}$ est engendrée par les e_{ij} de niveau ≥ 2. Par récurrence, on peut montrer que $L^{(i)}$ est engendrée par les e_{ij} de niveau $\geq 2^{i-1}$. Donc $L^{(i)} = 0$ lorsque $2^{i-1} > n - 1$.

Proposition 3.1. *Soit L une algèbre de Lie,*

1. *Si L est résoluble, alors les sous-algèbres de Lie de L sont aussi résolubles. Il en est de même pour les images de L par des homomorphismes.*
2. *Si I est un idéal résoluble tel que L/I est résoluble, alors L est résoluble.*
3. *Si I et J sont deux idéaux résolubles, alors $I + J$ est résoluble.*

Démonstration.

1. Soit K une sous-algèbre de L. Comme L est résoluble, il existe n tel que $L^{(n)} = 0$. Comme $K^{(i)} \subset L^{(i)}$, K est résoluble.
   Soit $\varphi : L \to M$ un homomorphisme surjectif (de telle sorte que $M = \varphi(M)$). On va montrer que M est résoluble.
   On montre par récurrence que $\varphi(L^{(i)}) = M^{(i)}$:
   Pour $i = 0$, on a bien
   $$\varphi(L^{(0)}) = \varphi(L) = M = M^{(0)}$$
   Supposons que $\varphi(L^{(k)}) = M^{(k)}$. Alors,
   $$\varphi(L^{(k+1)}) = \varphi([L^{(k)}, L^{(k)}]) = [\varphi(L^{(k)}), \varphi(L^{(k)})] \overset{\text{HR}}{=} [M^{(k)}, M^{(k)}] = M^{(k+1)}$$
   On a donc $M^{(n)} = \varphi(L^{(n)}) = \varphi(0) = 0$.
2. L/I est résoluble donc il existe n tel que $(L/I)^{(n)}$. On pose $\pi_I : L \to L/I$ le morphisme canonique de projection. D'après la récurrence de 1., $\pi_I(L^{(i)}) = (L/I)^{(i)}$ (car π_I est surjectif). Donc $\pi_I(L^{(n)}) = 0$ et $L^{(n)} \subset \ker \pi_I = I$. Comme I est résoluble, il existe m tel que $I^{(m)} = 0$. Par 1., on en déduit que
   $$(L^{(n)})^{(m)} \subset I^{(m)} = 0 \iff L^{(n+m)} = 0$$
   Donc L est bien résoluble.
3. On sait que, d'après le deuxième théorème d'isomorphisme, $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$. Comme I est résoluble, son image par $\pi_{I\cap J}$ l'est aussi. Donc $I/(I \cap J)$ est résoluble, et il en est de même pour $(I + J)/J$. En appliquant 2. avec l'idéal J et le quotient $(I + J)/J$, on obtient que $I + J$ est résoluble.

□

Définition (radical)**.** Le radical d'une algèbre de Lie L est l'idéal résoluble maximal. On le note $\mathrm{Rad}L$.

Remarque. Il est unique : supposons I et J deux radicaux. Alors, par la propoisition 3.1 (3.), $I + J$ est un idéal résoluble qui est contenu dans I (et aussi dans J). Donc $I + J = I = J$.

Définition (algèbre semi-simple)**.** On dit qu'une algèbre de Lie L est semi-simple si $\mathrm{Rad}L = 0$.

Remarque. Une algèbre simple est semi-simple car ses seuls idéaux sont 0 et elle-même. De plus $[L, L] = L$ qui n'est pas résoluble donc $\mathrm{Rad}L = 0$.

Proposition 3.2. *Soit L une algèbre de Lie. Alors, $L/RadL$ est semi-simple.*

Démonstration. On montre que son radical est nul. Soit $J = \mathrm{Rad}(L/\mathrm{Rad}L)$.
Par définition du radical, J est résoluble. De plus, J est un idéal de $L/\mathrm{Rad}L$, donc $J = \pi_{\mathrm{Rad}L}(I)$ (avec I idéal résoluble de L).
$$J = I/\mathrm{Rad}L \Longrightarrow L \supseteq I \supseteq \mathrm{Rad}L$$
De plus, $\mathrm{Rad}L$ est résoluble (par définition), et $J = I/\mathrm{Rad}L$ est résoluble, donc par la proposition 3.1 (2.), I est résoluble. Par maximalité de $\mathrm{Rad}L$, on a $I = \mathrm{Rad}L$ et donc $J = 0$. □

3.2 Nilpotence

On définit une algèbre nilpotente (à ne pas confondre avec résoluble) :
Notation.

$$L^0 = L \qquad L^1 = [L,L] \qquad L^2 = [L, L^1]$$
$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad L^i = [L, L^{i-1}]$$

Définition (algèbre nilpotente)**.** Une algèbre de Lie L est dite nilpotente s'il existe n tel que $L^n = 0$.

Remarque. Une algèbre nilpotente est résoluble. Supposons qu'il existe n tel que $L^n = [L, L^{n-1}] = 0$. Comme $L^{(n)} \subset L^n$, $L^{(n)} = 0$.
La réciproque est fausse. Prenons $L = \mathfrak{t}(n,F)$. $L^{(1)} = L^1 = [L,L] = \mathfrak{n}(n,F)$. On en déduit que $L^i = L^1 = \mathfrak{n}(n,F) \neq 0$ quelque soit i.

Proposition 3.3. *Soit L une algèbre de Lie,*

1. *Si L est nilpotente, alors ses sous-algèbres sont aussi nilpotentes. Il en est de même pour les images de L par des homomorphismes.*
2. *Si $L/Z(L)$ est nilpotent, alors L est nilpotent.*
3. *Si L est non-nul et nilpotent, alors $Z(L) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Même chose que la proposition 3.1.
2. Il existe n tel que $(L/Z(L))^n = 0$. Comme pour la résolubilité, on a $\pi_{Z(L)}(L^n) = (L/Z(L))^n = 0$. Donc $L^n \subset \ker \pi_{Z(L)} = Z(L)$. On en déduit que
$$L^{n+1} = [L, L^n] \subset [L, Z(L)] = 0$$
3. $L \neq 0$ et il existe $n > 0$ (qu'on choisit minimal) tel que $L^n = 0$. Alors, $L^{n-1} \neq 0$ et $L^{n-1} \subset Z(L)$ car $(L^{n-1})^1 = 0$.

□

Définition (endomorphisme ad-nilpotent)**.** On dit que $x \in L$ est ad-nilpotent si ad x est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe n tel que $(\text{ad } x)^n = 0$.

On peut définir autrement une algèbre nilpotente :

$$L \text{ nilpotente} \iff \forall x_1, \ldots, x_n, y \in L, \qquad \text{ad } x_1 \text{ad } x_2 \ldots \text{ad } x_n(y) = 0$$

En particulier, dans une algèbre n–nilpotente, il est nécessaire que $(\text{ad } x)^n = 0$ pour tout $x \in L$ (c'est-à-dire que tous les éléments sont ad-nilpotents). Le théorème d'Engel assure que cette condition est aussi suffisante !

Théorème 3.1 (Engel)**.** *Si tous les éléments de L sont ad-nilpotents, alors L est nilpotente.*

Lemme 3.1. *Soit $x \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorphisme nilpotent. Alors, ad x est aussi nilpotent.*

Démonstration. On pose $\lambda_x(y) = xy$ et $\rho_x(y) = yx$. λ_x et ρ_x sont nilpotents car x l'est. On sait qu'il existe n (choisi assez grand) tel que $\rho_x^n = 0$ et $\lambda_x^n = 0$. Donc $\lambda_x + \rho_x$ est aussi nilpotent car

$$\begin{aligned}
(\lambda_x(y) + \rho_x(y))^{2n} &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \rho_x^{2n-i}(y) \lambda_x^i(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} \rho_x^{2n-i}(y) \lambda_x^i(y) + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} \rho_x^{2n-i}(y) \lambda_x^i(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} 0 \times \lambda_x^i(y) + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} \rho_x^{2n-i}(y) \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il en est de même pour la différence. On obtient que ad $x = \lambda_x - \rho_x$ est nilpotent. □

3.3 Preuve du théorème d'Engel

On va utiliser le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit L une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ avec $\dim V < +\infty$. Si L est l'ensemble des endomorphismes nilpotents, et que $V \neq 0$, alors il existe un vecteur non-nul $v \in V$ tel que $L.v = 0$.*

Démonstration. On effectue une récurrence sur la dimension de L :
Si $\dim L = 0$, c'est évident.
Supposons maintenant K une sous-algèbre propre de L. Par le lemme 3.1, K est ad-nilpotent : K agit (via ad) comme une algèbre de Lie d'endomorphismes linéaires nilpotents sur L, et aussi sur L/K.

$$\psi : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L/K)$$

Comme $\dim \psi(K) \leq \dim K < \dim L$, l'hypothèse de récurrence nous donne l'existence d'un vecteur $\bar{v}$ non-nul de L/K tel que $\psi(K).\bar{v} = \bar{0}$. Ceci équivaut à

$$[y, x] \in K \qquad \forall y \in K$$

c'est-à-dire que $K \subsetneq N_L(K)$ (car $x \notin K$).
Maintenant, on suppose que K est une sous-algèbre propre maximale de L. L'argument précédent donne $N_L(K) = L$ (par maximalité), c'est-à-dire K est un idéal de L. Supposons *par l'absurde* que $\dim L/K > 1$. Alors l'image réciproque par π_K^{-1} d'une sous-algèbre de dimension 1 de L/K est donc une sous-algèbre propre qui contient K. C'est *absurde* par maximalité de K. Donc K est de codimension 1. Donc

$$L = K + Fz$$

avec $z \in L - K$.
Par récurrence, $W = \{v \in V, K.v = 0\}$ est non-nul. On prend $x \in L, y \in K, w \in W$. Puisque K est un idéal, $yx \in K$. On a donc $yx.w = 0$, c'est-à-dire que W est stable sous l'action de L. En prenant $z \in L - K$, on a bien $z.v = 0$ pour un certain $v \in W$ non-nul.
Finalement, $L.v = (K + Fz).v = K.v + Fz.v = 0$. □

On peut maintenant démontrer le théorème d'Engel :

Démonstration. Soit L une algèbre de Lie constituée d'éléments ad-nilpotents. Donc ad $L \subset \mathfrak{gl}(L)$ et si on suppose que $L \neq 0$, on peut appliquer le théorème 3.2 : il existe $x \neq 0$ dans L tel que $[L, x] = 0$. Donc $Z(L) \neq 0$. On peut donc passer au quotient $L/Z(L)$: ce sont des éléments ad-nilpotents et $\dim L/Z(L) < \dim L$. Par récurrence, $L/Z(L)$ est nilpotent. On termine la preuve grâce au 2. de la proposition sur la nilpotence : L est nilpotent. □

On a une application intéressante au niveau des drapeaux :

Définition (drapeau)**.** Soit V de dimension finie n. On appelle drapeau de V une chaîne de sous-espaces $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ avec $\dim V_i = i$.
On dit qu'un endomorphisme x stabilise le drapeau s'il est stable sur chaque sous-espace.

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses du théorème d'Engel, il existe un drapeau $(V_i)_i$ de V stable par L, avec $x.V_i \subset V_{i-1}$ pour tout i.*
Autrement dit, toute matrice d'élément de L est nilpotente dans une certaine base.

Démonstration. Par le théorème d'Engel, il existe $v \in V$ tel que $L.v = 0$. Posons $V_1 = Fv$. Soit $W = V/V_1$, L agit sur W en tant qu'endomorphismes nilpotents. On peut donc appliquer une nouvelle fois le théorème d'Engel. Par récurrence sur $\dim V$, W possède un drapeau stable par L. En prenant les images réciproques dans V, la matrice est bien nilpotente. □

On termine cette partie avec un lemme,

Lemme 3.2. *Soit L nilpotente, et K un idéal de L. Alors, si $K \neq 0$, $K \cap Z(L) \neq 0$.*

Démonstration. L agit sur K via ad. Par le théorème 3.2, $\exists x \in K$ non-nul tel que $[L, x] = 0$, donc $x \in K \cap Z(L)$. □

4 Théorèmes de Lie et de Cartan

On suppose à partir de maintenant que F est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

4.1 Théorème de Lie

Théorème 4.1. *Soit L une algèbre résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$ avec $\dim V < +\infty$. Si $V \neq 0$, alors V contient un vecteur propre commun à tous les endomorphismes de L.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de L. Le cas $\dim L = 0$ est trivial.
On effectue la preuve en 4 étapes :

1. Trouver un idéal K de codimension 1
2. Montrer par récurrence qu'il existe des vecteur propres communs à tous les éléments de K
3. Vérifier que L stabilise cet ensemble de vecteurs
4. Trouver dans cet ensemble un vecteur propre à z, où z est tel que $L = K + Fz$ ($z \in L - K$).

(même raisonnement que pour le théorème d'Engel)

1. Comme L est résoluble, $[L, L]$ est un idéal propre de L. $L/[L, L]$ est abélien, donc $[L, L] = 0$. Pour I sous-espace de L, on a $[L, I] \subset [L, L] = 0 \in I$ donc tout sous-espace est automatiquement un idéal.
   On choisit $\tilde{K}$ de codimension 1 dans $\Im\pi_{[L,L]}$. On sait que $\pi_{[L,L]} : \underbrace{\pi^{-1}(\tilde{K})}_{:=K} \to \tilde{K}$ est surjectif. Le théorème du rang donne :
   $$\dim \ker \pi_{[L,L]} + \dim \tilde{K} = \dim K$$
   En ajoutant 1,
   $$(1 + \dim \tilde{K}) + \dim \ker \pi_{[L,L]} = \dim K + 1$$
   Comme $\tilde{K}$ est de codimension 1, on a donc
   $$\dim(L/[L, L]) + \dim \ker \pi_{[L,L]} = \dim K + 1$$
   Mais $\dim(L/[L, L]) = \dim \Im\pi_{[L,L]}$ donc le membre de gauche n'est autre que $\dim L$. Donc
   $$\dim K = \dim L - 1$$
   Conclusion : en prenant un sous-espace de codimension 1, son image inverse K par $\pi^{-1}_{[L,L]}$ est un idéal de codimension 1 (qui contient $[L, L]$).
2. Comme K est résoluble, on utilise l'hypothèse de récurrence ($\dim K < \dim L$) qui donne l'existence d'un vecteur commun à tous les éléments de K, c'est-à-dire que
   $$W := \{w \in V, x.w = \lambda(x)w, \text{ pour tout } x \in K\} \neq 0$$
   Le cas $K = 0$ donne L abélien de dimension $0 + 1 = 1$, notons $L = \langle v \rangle$. Un vecteur propre de v termine la preuve.

4. On suppose que 3. est vrai, et on montre 4. :
   On écrit $L = K + Fz$. Comme 3. est vrai, L stabilise W. En particulier, $z \in L - K$ stabilise W. Comme F est algébriquement clos, on peut trouver un vecteur propre (de z) $v_0 \in W$. Donc v_0 est un vecteur propre commun à tous les éléments de L.
   Reste à montrer 3. :
3. Soit $w \in W$, $x \in L$. Soit $y \in K$,
   $$yx.w = xy.w - [x, y].w = \lambda(y)x.w - \lambda([x, y])w$$
   On doit donc montrer que $\lambda([x, y]) = 0$: pour cela, soit $w \in W$ et $x \in L$. On pose $n > 0$ le plus petit entier tel que $w, x.w, \dots, x^{n-1}.w$ soient linéairement dépendants. Soit W_i le sous-espace de V engendré par $w, x.w, \dots, x^{i-1}.w$ (et $W_0 = 0$). On a donc $\dim W_n = n$ et $W_n = W_{n+i}$ $(i \geq 0)$. De plus, $x.W_n \subset W_n$. On peut alors montrer que pour $y \in K$, $y.W_i \subset W_i$:
   Soit $y \in K$, $y.w = \lambda(y)w$ par définition de K. De plus, pour $a < i$,
   $$y(x^a.w) = \underbrace{[y, x^a]}_{\in K}.w + x^a y.w = \lambda([y, x^a]).w + x^a(\lambda(y).w) \in W_i$$
   On affirme que la matrice de $y \in K$ (relativement à la base $w, x.w, \dots, x^{n-1}.w$ de W_n) est trianglaire supérieure avec $\lambda(y)$ sur la diagonale. Cela provient du fait que
   $$yx^i.w \equiv \lambda(y)x^i.w \mod W_i$$
   On montre cette propriété par récurrence sur i ($i = 0$ est trivial) :
   $$yx^i.w = yxx^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w - [x, y]x^{i-1}.w$$
   Par hypothèse de récurrence, $yx^{i-1}.w = \lambda(y)x^{i-1}.w + w'$ ($w' \in W_{i-1}$). Comme, par construction, $x.W_{i-1} = W_i$,
   $$yx^i.w = x(\lambda(y)x^{i-1}.w + w') - [x, y]x^{i-1}.w = \lambda(y)x^i.w + \underbrace{\alpha}_{\in W_i} - \underbrace{[x, y]x^{i-1}.w}_{\in W_i}$$
   La propriété est vraie pour tout i.
   On en déduit que pour $y \in K$,
   $$\mathrm{Tr}(y) = n\lambda(y)$$
   Cette égalité est en particulier vraie pour un élément de K de la forme $[x, y]$ ($x \in L, y \in K$ donc $[x, y] \in K$ car K est un idéal). Mais x et y stabilisent W_n, donc $[x, y]$ agit sur W_n comme un commutateur de deux endomorphismes de W_n. Sa trace est donc nulle. Donc $n\lambda([x, y]) = 0$ Comme car$F = 0$, on en déduit que $\lambda([x, y]) = 0$.

□

Corollaire 4.1 (théorème de Lie)**.** *Soit L une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n < +\infty$. Alors, L stabilise un drapeau de V. En d'autres termes, les matrices de L (par rapport à une certaine base) sont triangulaires supérieures.*

Démonstration. On utilise le théorème 4.1 avec une récurrence sur la dimension de V. □

Corollaire 4.2. *Soit L résoluble. Alors il existe une chaine d'idéaux $0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$ telle que $\dim L_i = i$.*

Corollaire 4.3. *Soit L résoluble. Alors, $x \in [L, L]$ implique que $\mathrm{ad}_L x$ est nilpotent. En particulier, $[L, L]$ est nilpotent.*

Démonstration. On trouve un drapeau d'idéaux comme dans le corollaire 4.2. En prenant comme base de L $(x_1, \dots, x_n)$, avec $(x_1, \dots, x_i)$ engendrant L_i pour tout i, la matrice de ad L est triangulaire supérieure ($\in \mathfrak{t}(n, F)$). De plus, la matrice de $[\mathrm{ad}\ L, \mathrm{ad}\ L] = \mathrm{ad}_L[L, L] \in \mathfrak{n}(n, F)$, algèbre dérivée de $\mathfrak{t}(n, F)$. Donc $\mathrm{ad}_L x$ est nilpotente pour $x \in [L, L]$. A fortiori, $\mathrm{ad}_{[L,L]} x$ est nilpotente, donc par le théorème d'Engel, $[L, L]$ est nilpotente. □

4.2 Décomposition de Jordan-Chevalley

Dans cette partie, on suppose que F est de caractéristique quelconque.

Définition (endomorphisme semi-simple)**.** On dit que $x \in \mathrm{End}(V)$ ($\dim V < +\infty$) est semi-simple si les racines de son polynôme minimal sur F sont toutes distinctes.
Comme on suppose F algébriquement clos, x est semi-simple si, et seulement si, x est diagonalisable.

Remarque. Si x est semi-simple, et $x.W = W$ pour W sous-espace de V, alors $x|_W$ est semi-simple.

Proposition 4.1. *Soit V un espace-vectoriel sur F de dimension finie, et $x \in End(V)$.*

1. *Il existe des uniques endomorphismes de V x_s et x_n tels que $x = x_s + x_n$ avec x_s semi-simple, x_n nilpotent. x_s et x_n commutent.*
2. *Il existe des polynômes $p(t), q(t)$ sans terme constant tels que $x_s = p(t)$ et $x_n = q(t)$. En particulier, x_s et x_n commutent avec n'importe quel endomorphisme qui commute avec x.*
3. *Si $A \subset B \subset V$, et $x.B = A$, alors $x_s.B = A$ et $x_n.B = A$.*

On appelle décomposition de Jordan-Chevalley la décomposition $x = x_s + x_n$.

Démonstration. Comme le corps est algébriquement clos, on peut écrire

$$p_{\min}(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{q_i} = \prod_i p_i$$

et par le théorème de décomposition des noyaux, on a la somme directe

$$E = \oplus \ker p_i = \oplus E'_{\lambda_i}$$

Par le théorème des restes chinois, on définit $p(T) \in F[T]$ vérifiant :

$$p(T) \equiv \lambda_i \mod p_i \qquad p(T) \equiv 0 \mod T$$

On définit ensuite $q(T) = T - p(T)$.
p et q n'ont donc pas de terme constant puisque $p(T) \equiv 0 \mod T$.
On définit ensuite $x_s = p(x)$ et $x_n = q(x)$. Ce sont des polynômes en la variable x, donc ils commutent entre eux, mais aussi avec n'importe quel endomorphisme qui commute avec x. x_s et x_n stabilisent tout sous-espace de V qui est stable par x, en particulier les E'_{λ_i}.
Les congruences $p(T) \equiv \lambda_i \mod p_i$ montrent que $(x_s - \lambda_i \mathrm{id})|_{E'_{\lambda_i}} \equiv 0$. Donc $x_s = \lambda_i \mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique, c'est-à-dire x_s est semi-simple.
$x_n = x - x_s$ est donc évidemment nilpotent.
Comme p et q n'ont pas de terme constant, 3. est évident.
Reste à montrer l'unicité : supposons $x = x_s + x_n = S + N$. On a donc $x_s - S = N - x_n$. Comme une somme d'endomorphismes semi-simples (respectivement nilpotents) est semi-simple (nilpotente), on a donc $x_s - S = N - x_n$ est nilpotent et semi-simple, donc forcément nul. D'où $x_s = S$ et $x_n = N$. □

Lemme 4.1. *Soit $x \in End(V)$ ($\dim V < +\infty$), $x = x_s + x_n$ sa décomposition de Jordan. Alors, $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ est la décomposition de Jordan de $ad\ x$.*

Démonstration. On a vu que ad x_s est semi-simple et ad x_n est nilpotent.
Ils commutent car $[\mathrm{ad}\ x_s, \mathrm{ad}\ x_n] = \mathrm{ad}\ [x_s, x_n] = 0$. On applique ensuite la proposition 4.1. □

Lemme 4.2. *Soit $\mathfrak{A}$ une F-algèbre de dimension finie. Alors $Der(\mathfrak{A})$ contient les parties semi-simples et nilpotentes de tous ses éléments.*

Démonstration. Soit $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$. Soit $\delta = \sigma + \nu$ sa décomposition de Jordan. Montrons que $\sigma \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$: on pose pour $a \in F$

$$\mathfrak{A}_a = \{x \in \mathfrak{A}, (\delta - a.\mathrm{id})^k x = 0 \text{ pour un certain } k\}$$

$\mathfrak{A}$ est la somme directe des $\mathfrak{A}_a$ pour a valeur propre de δ (et de σ). σ agit sur $\mathfrak{A}_a$ comme multiplication par a.
On peut montrer par récurrence que

$$(\delta - (a+b)\mathrm{id})^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ((\delta - a.\mathrm{id})^{n-i}x) \cdot ((\delta - b.\mathrm{id})^i y) \qquad \forall x, y \in \mathfrak{A}$$

On en déduit que $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subset \mathfrak{A}_{a+b}$. Donc si $x \in \mathfrak{A}_a$ et $y \in \mathfrak{A}_b$, alors $\sigma(xy) = (a+b)xy$. D'autre part, $(\sigma x)y + x(\sigma y) = (a+b)xy$. Donc σ est une dérivation.
Comme $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ est un espace vectoriel, ν est aussi une dérivation. □

4.3 Critère de Cartan

On a désormais un critère puissant pour déterminer si une algèbre de Lie L est résoluble, basé sur la trace de certains endomorphismes de L.
On sait que si $[L, L]$ est nilpotent, alors (corollaire 4.3) L est résoluble. De plus, le théorème d'Engel énonce que $[L, L]$ est nilpotent si, et seulement si, quelque soit $x \in [L, L]$, $\mathrm{ad}_{[L,L]}x$ est nilpotent.
On commence par un "critère de trace" de nilpotence d'un endomorphisme.

Lemme 4.3. *Soit $A \subset B$ deux sous-espaces de $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < +\infty$. Soit $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V), [x, B] \subset A\}$. On suppose que $x \in M$ satisfait $Tr(xy) = 0$ pour tout $y \in M$. Alors x est nilpotent.*

Démonstration. Soit $x = s + n$ la décomposition de Jordan. Soit $\beta = (v_1, \ldots, v_m)$ la base telle que $s = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$. Soit $E \subset F$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace engendré par les valeurs propres $a_1, \ldots, a_m$. On doit montrer que $s = 0$, ou encore que $E = 0$. Comme E est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, il suffit de montrer que son dual E^* est nul, c'est-à-dire que toute application linéaire $f : E \to \mathbb{Q}$ est nulle.
Soit $f \in E^*$. On choisit $y \in \mathfrak{gl}(V)$ telle que la matrice dans la base β soit $\mathrm{diag}(f(a_1), \ldots, f(a_m))$. On a vu que

$$\mathrm{ad}\ s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij} \qquad \mathrm{ad}\ y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$$

On construit ensuite le polynôme $r \in F[T]$ tel que $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ (par interpolation de Lagrange). On a $\mathrm{ad}\ y = r(\mathrm{ad}\ s)$.
$\mathrm{ad}\ s$ est la partie semi-simple de $\mathrm{ad}\ x$, et est donc un polynôme en la variable $\mathrm{ad}\ x$, sans terme constant. Comme $\mathrm{ad}\ x(B) \subset A$, $\mathrm{ad}\ y(B) \subset A$, c'est-à-dire $y \in M$. Par hypothèse, $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ donc on obtient

$$\sum_i a_i f(a_i) = 0$$

En appliquant f, on a

$$\sum_i f(a_i)^2 = 0$$

f étant à valeurs dans $\mathbb{Q}$, on en déduit que $f(a_i) = 0$ pour tout i. Finalement, $f = 0$ car les a_i engendrent E. □

Remarque. Si $x, y, z \in \mathrm{End}(V)$ avec $\dim V < +\infty$, alors

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z]) \tag{E}$$

En effet, $[x, y]z = xyz - yxz$ et $x[y, z] = xyz - xzy$. De plus, $\mathrm{Tr}(y(xz)) = \mathrm{Tr}((xz)y)$.

On donne maintenant un critère de solvabilité.

Théorème 4.2 (de Cartan)**.** *Soit L une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < +\infty$. On suppose que $Tr(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$, $y \in L$. Alors L est résoluble.*

Démonstration. Supposons que $[L, L]$ est nilpotente. Donc $[L, L]$ est résoluble. De plus, $L/[L, L]$ est abélien donc résoluble. D'après la proposition 3.1, L est résoluble.
Il suffit donc de montrer que $[L, L]$ est nilpotente, ou encore que tous les $x \in [L, L]$ sont nilpotents. Pour cela, on applique le lemme 4.3 avec $A = [L, L]$, $B = L$. On a donc $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V), [x, L] \subset [L, L]\}$. On a de plus l'hypothèse $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ pour $x \in [L, L]$ et $y \in L$ (bien-sûr, $L \subset M$). Pour appliquer le lemme 4.3, il nous faut que $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L], y \in M$.
Si on prend $[x, y]$ un générateur de $[L, L]$, et si $z \in M$, alors la remarque précédente donne

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z]) = \mathrm{Tr}([y, z]x)$$

Par définition de M, $[y, z] \in [L, L]$, donc $\mathrm{Tr}([y, z]x) = 0$. □

Corollaire 4.4. *Soit L une algèbre de Lie telle que $Tr(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y) = 0$ pour tout $x \in [L, L], y \in L$. Alors L est résoluble.*

Démonstration. On applique le théorème 4.2 à la représentation adjointe de L. On obtient que $\mathrm{ad}\, L \cong L/\ker \mathrm{ad}$ est résoluble. Comme $\ker \mathrm{ad} = Z(L)$ est résoluble, L est elle-même résoluble. □

5 Forme de Killing

5.1 Critère de semi-simplicité

Définition (forme de Killing)**.** Soit L une algèbre de Lie, et $x, y \in L$. On définit la forme bilinéaire symétrique κ sur L par

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \mathrm{ad}\, y)$$

Proposition 5.1. *κ est associative.*

Démonstration. Pour $x, y, z \in L$,

$$\kappa([x, y], z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, [x, y] \mathrm{ad}\, z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] \mathrm{ad}\, z) \overset{(E)}{=} \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x[\mathrm{ad}\, y, \mathrm{ad}\, z]) = \kappa(x, [y, z])$$

□

Lemme 5.1. *Soit I un idéal de L. Si κ est la forme de Killing de L, et κ_I celle de I (vu en tant qu'algèbre de Lie), alors $\kappa_I = \kappa|_{I \times I}$.*

Démonstration. Remarquons que si $W \subset V$ et $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ envoie V sur W, alors $\mathrm{Tr}\varphi = \mathrm{Tr}(\varphi|_W)$ (il suffit de passer sous forme matricielle).
Si $x, y \in I$, alors $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y) \in \mathrm{End}(L)$, et envoie L sur I, donc sa trace $\kappa(x, y)$ coïncide avec la trace $\kappa_I(x, y)$ de $(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)|_I = (\mathrm{ad}_I\, x)(\mathrm{ad}_I\, y)$. □

Définition (radical d'une forme bilinéaire symétrique)**.** On appelle radical d'une forme bilinéaire symétrique $\beta(x, y)$ l'ensemble

$$S = \{x \in L, \beta(x, y) = 0 \quad \forall y \in L\}$$

Proposition 5.2. *Le radical S de la forme de Killing est un idéal de L.*

Démonstration. Soit $x \in S$ et $\tilde{x} \in L$. Par associativité de κ,

$$\kappa([x, \tilde{x}], L) = \kappa(x, [\tilde{x}, L]) = 0$$

□

Définition (forme bilinéaire symétrique non-dégénérée)**.** On dit que β est non-dégénérée si son radical est réduit à 0.

Remarque. Une forme κ est non-dégénérée si, et seulement si, la matrice de taille $n \times n$ formée des $\kappa(x_i, x_j)$ (où $(x_i)_i$ est une base de L) est de déterminant non-nul.

Exemple (forme de Killing de $\mathfrak{sl}(2, F)$). On choisit (x, h, y) comme base de $\mathfrak{sl}(2, F)$.

$$\text{ad } h = \text{diag}(2, 0, -2)$$

car ad $h(x) = 2x$, ad $h(h) = 0$, et ad $h(y) = -2y$.

$$\text{ad } x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car ad $x(x) = 0$, ad $x(h) = -2x$, et ad $x(y) = h$.

$$\text{ad } y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

car ad $y(x) = -h$, ad $y(h) = 2y$, et ad $y(y) = 0$.
On en déduit la matrice de κ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $-128 \neq 0$ donc κ est non-dégénérée (en caractéristique $\neq 2$).

Proposition 5.3. *Une algèbre de Lie est semi-simple (Rad$L = 0$) si, et seulement si, tout idéal abélien de L est nul.*

Démonstration. Si Rad$L = 0$, alors n'importe quel idéal est contenu dans Rad$L$ donc nul. Réciproquement, si Rad$L \neq 0$, alors il contient un idéal abélien : le dernier terme de la série des dérivées de Rad$L$. $\square$

Théorème 5.1. *Soit L une algèbre de Lie. Alors L est semi-simple si, et seulement si, sa forme de Killing est non-dégénérée.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On suppose que Rad$L = 0$. Soit S le radical de κ. Par définition,

$$\text{Tr}(\text{ad } x \text{ad } y) = 0 \qquad \forall x \in S, y \in [S, S] \subset L$$

D'après le critère de Cartan, $\text{ad}_L\, S$ est résoluble, d'où S est résoluble.
Mais on a vu (proposition 5.2) que S est un idéal de L, donc $S \subset \text{Rad}L = 0$.
Donc κ est non-dégénérée.

$\Longleftarrow$ On suppose que $S = 0$. D'après la proposition 5.3, il suffit de montrer que tout idéal abélien I de L est inclu dans S.
Soit $x \in I$ abélien, $y \in L$. Alors,

$$\text{ad } x \text{ad } y : L \to L \to I$$

et

$$(\text{ad } x \text{ad } y)^2 : L \to [I, I]$$

Mais $[I, I] = 0$ car I est abélien.
Donc ad $x$ad y est nilpotent, et donc $0 = \text{Tr}(\text{ad } x \text{ad } y) = \kappa(x, y)$, donc $I \subset S = 0$.

$\square$

Remarque. La preuve précédente montre que $S \subset \text{Rad}L$, mais l'autre inclusion n'est pas toujours vraie.

5.2 Idéaux simples de L

Définition (algèbre de Lie en somme directe d'idéaux)**.** On dit que L est en somme directe d'idéaux $I_1, \ldots, I_t$ si $L = I_1 + \ldots + I_t$ (somme directe de sous-espaces). On écrit $L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_t$.

Théorème 5.2. *Soit L semi-simple. Alors, il existe des idéaux simples $L_1, \ldots, L_t$ de L, tels que $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$. Tout idéal simple de L coïncide avec un des L_i.*

Démonstration. Soit I un idéal de L. Alors, $I^\perp = \{x \in L, \kappa(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in I\}$ est aussi un idéal (par associativité de κ). Donc $I \cap I^\perp$ est un idéal. De plus, si $x, y \in I \cap I^\perp$, alors $\kappa_{I \cap I^\perp}(x,y) = \kappa(x,y) = 0$. Donc $I \cap I^\perp \subset S = 0$. De plus, $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$, d'où $L = I \oplus I^\perp$.
On procède par récurrence sur la dimension de L afin d'obtenir la décomposition en somme directe d'idéaux simples.
Si L n'a pas d'idéal propre non-nul, c'est fini. Sinon, soit L_1 l'idéal propre non-nul minimal. D'après ce qui précède, $L = L_1 \oplus L_1^\perp$. Comme tout idéal de L_1 est aussi un idéal de L, L_1 est semi-simple (et même simple par minimalité de L_1). De même, $L_1^\perp$ est semi-simple. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer $L_1^\perp$ (de dimension $< \dim L$) en somme directe d'idéaux simples.
Reste à montrer que ces idéaux simples sont uniques. Soit I un idéal simple de L. Alors, $[I, L]$ est un idéal de I, non-nul car $Z(L) = 0$. D'où $[I, L] = I$ car I est simple. D'autre part, $[I, L] = [I, L_1] \oplus \ldots \oplus [I, L_t]$ donc $\exists i$ tel que $[I, L_i] = I$. D'où $I = [I, L_i] \subset [L, L_i] = L_i$ et $I = L_i$ car L_i est simple. □

Corollaire 5.1. *Si L est semi-simple, alors $L = [L, L]$. De plus, les idéaux et les images de L par des morphismes sont semi-simples. Enfin, chaque idéal de L est une somme d'idéaux simples de L.*

5.3 Dérivations intérieures

Proposition 5.4. *ad L est un idéal de Der(L).*

Démonstration. Soit $x \in L$ ($\text{ad } x \in \text{ad } L$), $\delta \in \text{Der}(L)$, et $y \in L$.

$$\begin{aligned}
[\delta, \text{ad } x](y) &= \delta[x,y] - \text{ad } x\delta(y) \\
&= \delta(xy) - \delta(yx) - x\delta(y) + \delta(y)x \\
&= \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(y)x - y\delta(x) - x\delta(y) + \delta(y)x \\
&= \delta(x)y - y\delta(x) \\
&= [\delta(x), y] = \text{ad } (\delta(x))(y)
\end{aligned}$$

donc

$$[\delta, \text{ad } x] = \text{ad } (\delta x)$$

□

Théorème 5.3. *Si L est semi-simple, alors ad L = Der(L) (toute dérivation est intérieure).*

Démonstration. Comme L est semi-simple, $Z(L) = 0$. De plus, $\text{ad } : L \to \text{ad}(L)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie (surjectif par construction, et injectif car $\ker(\text{ad}) = Z(L) = 0$). En particulier, $M = \text{ad } L$ est donc semi-simple et donc sa forme de Killing est non-dégénérée (théorème 5.1). Si on note $D = \text{Der}(L)$, d'après la proposition 5.4, $[D, M] \subset M$. κ_M est la restriction à $M \times M$ de κ_D. En particulier, si $I = M^\perp$ (sous κ_D), alors la non-dégénérécence de κ_M donne $I \cap M \subset S = 0$. Comme I et M sont des idéaux de D, on obtient $[I, M] = 0$. Si $\delta \in I$, on a (proposition 5.4) $\text{ad } (\delta x) = 0$ pour tout $x \in L$. D'où $\delta x = 0$ pour tout $x \in L$ (car ad est un isomorphisme). Donc $\delta = 0$.
Conclusion : $I = 0$, $\text{Der}(L) = M = \text{ad } L$. □

5.4 Décomposition de Jordan abstraite

On peut désormais introduire la notion de décomposition de Jordan pour une algèbre de Lie L semi-simple (pas forcément $\subset \mathfrak{gl}$). Rappelons (lemme 4.2) que $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ contient les parties semi-simple et nilpotente de tous ses éléments. Si L est semi-simple, alors $\mathrm{Der}(L) = \mathrm{ad}\ L$ (théorème 5.3). Comme ad est un isomorphisme, chaque $x \in L$ détermine de manière unique $s, n \in L$ tels que $\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ s + \mathrm{ad}\ n$ (décomposition de Jordan de ad x). Cela veut dire que $x = s + n$ avec $[s, n] = 0$, s ad-semi-simple (c'est-à-dire ad s semi-simple), et n ad-nilpotente. Par abus de language, s et n sont appelées parties semi-simple et nilpotente de x.

A priori, cette décomposition est différente de celle donnée pour les algèbres de Lie linéaire... On va voir par la suite qu'en fait, elles coïncident !
Pour le moment on peut s'en persuader seulement pour $L = \mathfrak{sl}(V)$ ($\dim V < +\infty$) :
On écrit $L \ni x = x_s + x_n$ (décompostion de Jordan usuelle) avec $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$.
x_s et x_n sont dans L : Comme x_n est nilpotent, sa trace est nulle, et donc $x_n \in L$. D'où x_s est aussi de trace nulle donc $x_s \in L$.
D'après le lemme 4.1, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s$ est semi-simple, donc $\mathrm{ad}_L x_s$ l'est aussi. De même, $\mathrm{ad}_L x_n$ est nilpotent, et $[\mathrm{ad}_L x_s, \mathrm{ad}_L x_n] = \mathrm{ad}_L [x_s, x_n] = 0$. Par l'unicité de la décomposition de Jordan dans L, $x = x_s + x_n$ convient.

6 Réduction complète des représentations

Dans cette partie, toutes les représentations sont en dimension finie.

L'objectif est de démontrer un théorème important (théorème de Weyl) sur les représentations d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque.

6.1 Modules

On va lier la théorie des modules à la théorie des représentations.

Définition (L-module)**.** Soit L une algèbre de Lie. Un L-module est un espace vectoriel V muni d'une opération

$$\begin{array}{ccc} L \times V & \longrightarrow & V \\ (x, v) & \longmapsto & x.v \end{array}$$

vérifiant pour $x, y \in L$, $v, w \in V$, $a, b \in F$,

1. $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$
2. $x.(av + bw) = a(x.v) + b(y.w)$
3. $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$

Remarque. Un L-module est aussi défini par un espace vectoriel V muni d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Exemple. Si $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de L, alors V peut être vu comme un L-module avec l'action $x.v = \varphi(x)(v)$. Réciproquement, étant donné un L- module V, cette équation définit une représentation $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Proposition 6.1. *Si V est un L-module, alors son dual V^* est aussi un L-module si on le munit de l'opération*

$$\begin{array}{ccc} L \times V^* & \longrightarrow & V^* \\ (x, f) & \longmapsto & (v \mapsto -f(x.v)) \end{array}$$

Démonstration. Les deux premiers axiômes sont facilement vérifiés. Pour le troisième, soit $x, y \in L$, $f \in V^*$ et $v \in V$,

$$\begin{aligned}([x,y].f)(v) &= -f([x,y].v)\\ &= -f(x.y.v - y.x.v)\\ &= -f(x.y.v) + f(y.x.v)\\ &= (x.f)(y.v) - (y.f)(x.v)\\ &= -(y.x.f)(v) + (x.y.f)(v)\\ &= ((x.y - y.x).f)(v)\end{aligned}$$

□

Définition (morphisme de L-modules)**.** Un morphisme de L-modules est une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$.

Définition (L-module irréductible)**.** On dit que V est irréductible si V a exactement 2 L-sous-modules : lui-même et 0.

Remarque. Un espace vectoriel de dimension 0 n'est donc pas irréductible (car il n'a qu'un sous-module).

Définition (L-module complètement réductible)**.** On dit que V est complètement réductible si V se décompose en somme directe de L-sous-modules irréductibles.

Lemme 6.1 (Schur)**.** *Soit $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ irréductible. Les seuls endomorphismes de V qui commutent avec tous les $\varphi(x)$ (pour $x \in L$) sont les scalaires.*

Démonstration. Si $f : V \to W$ est un morphisme de L-modules avec V, W irréductibles, alors $f \equiv 0$ ou f est un isomorphisme. Si $V = W$, et a est une valeur propre de f (associée au vecteur v), alors $f - a$ est un morphisme de L-modules, donc $f - a = 0$ car $v \neq 0$ est dans $\ker f$. Donc f est un scalaire. □

6.2 Elément Casimir d'une représentation

Définition (représentation fidèle)**.** On dit qu'une représentation $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ est fidèle si elle est bijective.

Soit φ une représentation fidèle d'une algèbre de Lie L. On définit la forme bilinéaire symétrique $\beta : L \times L \to F$ par

$$\beta(x,y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$$

Remarque. La forme de Killing est le cas particulier de β avec $\varphi = \mathrm{ad}$.

On va montrer que si L est semi-simple, alors β est non-dégénérée.
En raisonnant comme avec (E), on peut montrer que β est associative, et donc son radical S est un idéal de L. Le théorème 4.2 montre que $\varphi(S) \cong S$ est résoluble. Donc $S = 0$.
Soit L semi-simple, β une forme bilinéaire symétrique associative non-dégénérée sur L. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de L, il existe une unique base $(y_1, \ldots, y_n)$ de son dual par rapport à β, satisfaisant $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Si $x \in L$, on peut écrire

$$[x, x_i] = \sum_j a_{ij} x_j \qquad [x, y_i] = \sum_j b_{ij} y_j$$

On a alors (par associativité de β)

$$a_{ik} = \sum_j a_{ij}\delta_{jk} = \sum_j a_{ij}\beta(x_j, y_k) = \beta([x, x_i], y_k) = \beta(-[x_i, x], y_k)$$

$$= \beta(x_i, -[x, y_k]) = -\sum_j b_{kj}\beta(x_i, y_j) = -\sum_j b_{kj}\delta_{ij} = -b_{ki}$$

On pose ensuite $c_\varphi(\beta) = \sum_i \varphi(x_i)\varphi(y_i) \in \mathrm{End}(V)$. En utilisant $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$ et $a_{ik} = -b_{ki}$, on obtient

$$[\varphi(x), c_\varphi(\beta)] = \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)]\varphi(y_i) + \sum_i \varphi(x_i)[\varphi(x), \varphi(y_i)] = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi(x_j)\varphi(y_i) + \sum_{i,j} b_{ij}\varphi(x_i)\varphi(y_j) = 0$$

donc $c_\varphi(\beta)$ est un endomorphisme de V qui commutent avec $\varphi(L)$.

Définition (élément casimir d'une représentation)**.** Soit $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation fidèle d'une algèbre de Lie L, et β la forme non-dégénérée $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$. On appelle élément de Casimir de φ l'endomorphisme $c_\varphi(\beta)$ (et on le note c_φ).

Remarque. $\mathrm{Tr}(c_\varphi(\beta)) = \sum_i \mathrm{Tr}(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum_i \beta(x_i, y_i) = \dim L$. Dans le cas où φ est irréductible, le lemme de Schur nous donne que c_φ est un scalaire, notons $c_\varphi = a\mathrm{id}_V$. Alors $\mathrm{Tr}(c_\varphi) = a \dim V$. On en déduit que $a = \dim L / \dim V$, d'où $c_\varphi = (\dim L / \dim V)\mathrm{id}_V$.

Exemple. $L = \mathfrak{sl}(2, F)$, $V = F^2$, $\varphi = \mathrm{id} : L \to \mathfrak{gl}(V)$. On prend (x, h, y) comme base de L. On trouve une base du dual par rapport à la forme $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$:

$$(y, h/2, x)$$

En effet,

$$\begin{cases} \beta(x,y) = 1 \\ \beta(x,h/2) = 0 \\ \beta(x,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta(h,y) = 0 \\ \beta(h,h/2) = 1 \\ \beta(h,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta(y,y) = 0 \\ \beta(y,h/2) = 0 \\ \beta(y,x) = 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$c\varphi = xy + (1/2)h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Notons que $3/2 = \dim L / \dim V$.

Remarque. Si φ n'est pas fidèle, une petite modification est nécessaire. $\ker \varphi$ est un idéal de L donc d'après le corollaire 5.1, c'est une somme d'idéaux simples. Notons L' la somme des idéaux restants (théorème 5.2). Alors la restriction de φ à L' est une représentation fidèle de L', et on peut construire c_φ qu'on appelle aussi l'élément Casimir. Bien-sûr, c_φ commute avec $\varphi(L) = \varphi(L')$, etc.

6.3 Théorème de Weyl

Lemme 6.2. *Soit $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation d'une algèbre de Lie L semi-simple. Alors, $\varphi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$. En particulier, L agit triviallement sur tout L-module de dimension* 1.

Démonstration. $\varphi(L) = \varphi([L, L]) = [\varphi(L), \varphi(L)] \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathfrak{sl}(V)$.
Comme $\mathfrak{sl}(V)$ représente l'ensemble des éléments de trace nulle, la remarque en dimension 1 est évidente. □

Théorème 6.1 (Weyl)**.** *Soit $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation (de dimension finie) d'une algèbre de Lie semi-simple. Alors, φ est complètement réductible.*

Démonstration.

1. *Cas spécial : V possède un sous-module de codimension* 1.
   On montre que V est complètement réductible par récurrence sur la dimension de V.
   V/W est de dimension 1, donc par le lemme 6.2, L agit trivialement sur V/W. On note $F := V/W$. On a alors la suite exacte

$$0 \hookrightarrow W \hookrightarrow V \xrightarrow{\text{proj.}} F \xrightarrow{\text{trivial}} 0$$

On montre qu'on peut supposer que W est irréductible :
Soit W' un sous-module propre non-nul de W. Par passage au quotient, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow W/W' \longrightarrow V/W' \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Par hypothèse de récurrence, V/W' se décompose en somme directe, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{W}$ tel que

$$V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W'$$

Donc $\tilde{W}/W'$ est de dimension 1 (L agit trivialement dessus). On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

On est dans la même situation qu'au début, sauf que $\dim W' < \dim W$. En répetant ce raisonnement autant de fois que nécessaire, on peut donc supposer que W est irréductible.
On note $c = c_\varphi$ (qu'on peut supposer fidèle, d'après la dernière remarque). Comme c commute avec $\varphi(L)$, c est un endomorphisme du L-module V. En particulier, $c(W) \subset W$, et $\ker c$ est un L-sous-module de V. Comme L agit trivialement sur V/W (c'est-à-dire $\varphi(L) : V \to W$), c aussi (car c'est une combinaison linéaire de produits d'éléments de $\varphi(L)$). Donc c est de trace nulle sur V/W. D'autre part, c agit comme un scalaire sur W (le lemme de Schur s'applique car W est irréductible). Ce scalaire est non-nul car on a vu que la trace de c sur V tout entier vaut $\dim L \neq 0$.
$\ker c \cap W = 0$ car $c|_W = a\mathrm{id}_W$. Comme $c : V \to W$, c n'est pas injective, donc $\ker c \neq 0$. Donc $W \subsetneq \ker c + W = V$ d'où $V = \ker c \oplus W$ (on a trouvé le complémentaire de W).

2. *Cas général.*
   Soit $0 \neq W \subsetneq V$. On a toujours la suite exacte

$$0 \hookrightarrow W \hookrightarrow V \xrightarrow{\text{proj.}} V/W \xrightarrow{\text{trivial}} 0$$

L agit naturellement sur $\mathrm{Hom}(V, W)$ par l'action :

$$(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$$

On pose $\mathscr{V} := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W), f|_W = a.1_W\}$. $\mathscr{V}$ est un L-sous-module : pour $x \in L$, $w \in W$,

$$(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = a(x.w) - a(x.w) = 0$$

donc $x.f|_W = 0$. Soit $\mathscr{W} = \{f \in \mathscr{V}, f|_W = 0\}$. Le même calcul montre que $\mathscr{W}$ est un L-sous-module, et que L envoie $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{W}$. De plus, $\dim \mathscr{V}/\mathscr{W} = 1$ car chaque $f \in \mathscr{V}$ est déterminé (modulo $\mathscr{W}$) par le scalaire $f|_W$. On peut voir ça sous forme matricielle :

$$f \in \mathscr{V} \Longrightarrow \mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{array}{c|c} aI_W & * \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \end{array} \right)}_{\in \mathscr{W}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} aI_W & 0 \end{array} \right)}_{f|_W}$$

On est donc dans le cas déjà traité précédement :

$$0 \longrightarrow \mathscr{W} \longrightarrow \mathscr{V} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

D'après la première partie de la preuve, $\mathscr{V}$ a un sous-module complémentaire à $\mathscr{W}$ de dimension 1, notons le $\langle (f : V \to W) \rangle$. Quitte à multiplier par un scalaire, on peut supposer que $f|_W = 1_W$. L agit donc trivialement sur $\mathscr{V}/\mathscr{W}$, c'est-à-dire

$$0 = (x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v) \iff f(x.v) = x.f(v)$$

c'est-à-dire f est un L-homomorphisme.
De plus, $\ker f$ est un L-sous-module de V. Comme f envoie V sur W, et agit comme 1_W sur W, on en déduit que $W \cap \ker f = 0$. Donc $W + \ker f = W \oplus \ker f$. Enfin, le théorème du rang donne $\dim \ker f = \dim V - \dim \Im f = \dim V - \dim W$. Donc on a bien

$$V = W \oplus \ker f$$

□

6.4 Préservation de la décomposition de Jordan

On est désormais en capacité de montrer que les décompositions de Jordan abstraite et usuelle coïncident.

Théorème 6.2. *Soit $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie linéaire semi-simple ($\dim V < +\infty$). Alors L contient les parties semi-simple et nilpotente (dans $\mathfrak{gl}(V)$) de tous ses éléments. En particulier, les décompositions de Jordan abstraite et usuelle coïncident.*

Démonstration. La dernière assertion est impliquée par la première car chaque décomposition de Jordan (abstraite et usuelle) est unique. On montre donc la première assertion.
Soit $x \in L$ quelconque, de décomposition de Jordan $x = x_s + x_n \in \mathfrak{gl}(V)$. On montre que x_s, x_n sont des éléments de L. Comme $\operatorname{ad} x(L) \subset L$, on a aussi $\operatorname{ad} x_s(L) \subset L$ et $\operatorname{ad} x_n(L) \subset L$ (avec $\operatorname{ad} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$). En d'autres termes, $x_s, x_s \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = N$, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ qui contient L comme idéal. Si on pouvait montrer que $N = L$, on aurait fini... Mais ce n'est pas vrai puisque $L \subset \mathfrak{sl}(V)$ (lemme 6.2) donc les scalaires sont dans N mais pas dans L. On doit donc trouver une sous-algèbre plus petite que N qui contient x_s, x_n et on doit montrer qu'elle est égale à L.
Pour W un L-sous-module de V, on définit

$$L_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V), y(W) \subset W, \operatorname{Tr}(y|_W) = 0\}$$

Par exemple, $L_V = \mathfrak{sl}(V)$. Comme $L = [L, L]$, il est clair que $L \subset L_W$ quelque soit W. On pose alors

$$L' = N \cap \bigcap_W L_W$$

L' est une sous-algèbre de N qui contient L comme idéal (mais L' ne contient pas les scalaires). On a encore mieux : si $x \in L$, alors x_s et x_n sont dans L_W donc aussi dans L'.
Il reste à montrer que $L = L'$. Comme L' est un L-module de dimension finie, par le théorème de Weyl, on peut écrire $L' = L \oplus M$ pour un certain L-module M. Mais $[L, L'] \subset L$ (car $L' \subset N$) donc L agit sur L' par $[\ ,\ ]$. Finalement, $[L, M] \subset M$ et $[L, M] \subset L$ donc $[L, M] \subset L \cap M = 0$ donc l'action de L sur M est triviale.
Soit W un L-sous-module irréductible de V. Si $y \in M$, alors $[L, y] = 0$. Par le lemme de Schur, y agit sur W comme un scalaire. De plus, $\operatorname{Tr}(y|_W) = 0$ car $y \in L_W$. Donc $y|_W = 0$. Comme V se décompose en somme directe de L-sous-modules irréductibles, on a $y = 0$. D'où $M = 0$ et $L = L'$. □

Corollaire 6.1. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple, $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de L (de dimension finie). Si $x = s + n$ est la décomposition de Jordan abstraite de $x \in L$, alors $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ est la décomposition de Jordan usuelle de $\varphi(x)$.*

Démonstration. On sait qu'il existe une base $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ telle que $\operatorname{ad}_L(s)$ est diagonalisable, c'est-à-dire

$$[s, x_i] = \lambda_i x_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

En appliquant φ, on obtient

$$\varphi([s, x_i]) = \lambda_i \varphi(x_i)$$

$$\operatorname{ad}_{\varphi(L)}(\varphi(s))(\varphi(x_i)) = \lambda_i \varphi(x_i)$$

donc $(\varphi(x_i))_i$ est une base dans laquelle $\operatorname{ad}_{\varphi(L)}(\varphi(s))$ est semi-simple.
On sait aussi que $(\operatorname{ad}_L n)^N = 0 \iff [n, [n, [n \cdots [n, y] \cdots]]] = 0$ pour tout $y \in L$. En appliquant φ, on obtient que $(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}(\varphi(n))^N = 0$
Donc $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ est la décomposition abstraite, et par le théorème précédent, elle coïncide avec la décomposition usuelle. □