Travail d'étude et de recherche

2015

Modèles de la géométrie hyperbolique

Jordan Trémoureux – Simon Masson

encadré par Christophe Mourougane

Table des matières

Bibliographie

[1] Alan F. Beardon. The geometry of discrete groups. 1983.

[2] Christian Bär. Elementary differential geometry, définition 4.2.15. page 159, Juin 2010.

[3] Christian Bär. Elementary differential geometry, image. page 202, Juin 2010.

[4] Christian Bär. Elementary differential geometry, image. page 206, Juin 2010.

[5] Christian Bär. Elementary differential geometry, lemme 4.6.10. page 189, Juin 2010.

[6] Étienne Ghys. Poincaré et son disque.

Introduction

Euclide, dans les Elements, décrit une géométrie reposant sur 5 axiomes :

1. Un segment de droites peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
2. Un segment de droites peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon, et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Par un point extérieur à une droite, on peut tracer une unique parallèle à cette droite.

Peut-on imaginer une géométrie où tous les axiomes sont satisfaits sauf le cinquième ?
Une telle géométrie est appelée une géométrie non-euclidienne. C'était la première motivation de la géométrie hyperbolique.

On va voir différents modèles de cette géométrie dans laquelle on pourra tracer une infinité de droites parallèles à une première passant par un point donné.

I. L'hyperboloïde et les surfaces $\mathbb{M}_\kappa$

I.1 Première approche géométrique

On va étudier les surfaces définies par l'équation suivante :

$$\hat{\mathbb{M}}_\kappa = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3, \kappa(x^2+y^2)+z^2=1\} \qquad \kappa \in \mathbb{R}$$

Remarque. Pour $\kappa = 0$, on a alors $\{z^2 = 1\}$ et on trouve les deux plans $\{z = \pm 1\}$. Pour $\kappa = 1$, on a $\{x^2+y^2+z^2 = 1\}$: c'est la sphère de rayon 1 centrée en $(0,0,0)$. Pour $\kappa = -1$, on obtient un hyperboloïde à deux feuillets.

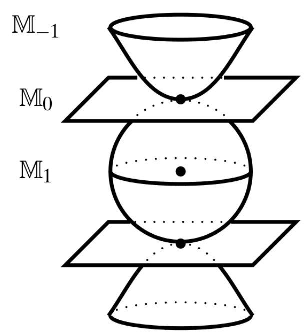


FIGURE I.1 – $\mathbb{M}_\kappa$ pour $\kappa = 0, 1, -1$ – [3]

Afin d'étudier seulement le feuillet supérieur, on pose

$$\mathbb{M}_\kappa = \begin{cases} \hat{\mathbb{M}}_\kappa & \kappa > 0 \\ \{(x,y,z)^T \in \hat{\mathbb{M}}_\kappa, z > 0\} & \kappa \leq 0 \end{cases}$$

On va étudier $\mathbb{M}_\kappa$ indépendamment de κ. Remarquons que quand $\kappa \to 0$, $\kappa < 0$, l'hyperboloïde s'applatit pour donner le plan $z = 1$ quand $\kappa = 0$. Quand $\kappa \to 0$, $\kappa > 0$, la demi-sphère s'allonge et s'affine, c'est en fait une ellipsoïde. Quand $z = 0$, on a un cercle dont le rayon tend vers $+\infty$ quand $\kappa \to 0$, $\kappa > 0$. Quand $\kappa \to +\infty$, on a encore une ellipse, mais cette fois, son cercle "à $z = 0$" est de rayon tendant vers 0.
Ces surfaces $\mathbb{M}_\kappa$ sont régulières car elles sont définies comme lignes de niveau d'une fonction polynomiale $\mathcal{C}^\infty$ sans valeur critique.

I.2 Changement de métrique

Calcul de courbure avec la métrique usuelle

Avec la métrique Riemannienne, $\mathbb{M}_{-1}$ a une courbure positive. Pour le montrer, on utilise le paramétrage suivant :

$$F_{-1} : (r, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sinh(r)\cos(\varphi) \\ \sinh(r)\sin(\varphi) \\ \cosh(r) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(r)\cos(\varphi) \\ \cosh(r)\sin(\varphi) \\ \sinh(r) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh(r)\sin(\varphi) \\ \sinh(r)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On déduit la première forme fondamentale :

$$G^{F_{-1}} = \begin{pmatrix} \cosh(2r) & 0 \\ 0 & \sinh^2(r) \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal unitaire est

$$N = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sinh(r) \\ \sin(\varphi)\sinh(r) \\ -\cosh(r) \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \sinh(r)\cos(\varphi) \\ \sinh(r)\sin(\varphi) \\ \cosh(r) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cosh(r)\sin(\varphi) \\ \cosh(r)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh(r)\cos(\varphi) \\ -\sinh(r)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puis $W = G^{-1}H$:

$$W = \begin{pmatrix} -\cosh^{-1}(2r) & 0 \\ 0 & -\sinh^{-2}(r) \end{pmatrix}$$

On trouve bien

$$\kappa_{\text{Gauss}} = \frac{-1}{\cosh(2r)} \times \frac{-1}{\sinh^2(r)} = \frac{1}{\cosh(2r)\sinh^2(r)} > 0$$

On change de métrique sur $\mathbb{M}_\kappa$: on définit la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle_\kappa = xx' + yy' + \frac{zz'}{\kappa}$$

On va montrer par la suite qu'elle est définie positive : c'est un produit scalaire.

Remarque. Pour $\kappa = 1$, on retrouve la métrique euclidienne. Pour $\kappa = -1$, c'est le produit scalaire de Minkowski. Pour $\kappa = 0$, ce n'est pas défini, mais on est dans le cas particulier de $z = 1$ (constant).

Cosinus et sinus généralisés

On cherche une paramétrisation de $\mathbb{M}_\kappa$. Pour cela, on introduit les fonctions cosinus et sinus généralisés :

$$\mathfrak{s}_\kappa(t) = \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} - \mathrm{e}^{-i\sqrt{\kappa}t}}{2i\sqrt{\kappa}} = \begin{cases} \sin(\sqrt{\kappa}t)/\sqrt{\kappa} & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \sinh(\sqrt{|\kappa|}t)/\sqrt{|\kappa|} & \kappa < 0 \end{cases} \qquad \mathfrak{c}_\kappa(t) = \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} + \mathrm{e}^{-i\sqrt{\kappa}t}}{2} = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

(en utilisant la convention que $\sqrt{\kappa} = i\sqrt{|\kappa|}$ si $\kappa < 0$).
$\mathfrak{s}_\kappa$ n'est pas définie pour $\kappa = 0$, mais est prolongeable par continuité. En effet, pour t fixé,

$$\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} \overset{\kappa \to 0}{=} 1 + i\sqrt{\kappa}t + o(\sqrt{\kappa})$$

d'où

$$\mathfrak{s}_\kappa(t) \overset{\kappa \to 0}{\sim} \frac{1 + i\sqrt{\kappa}t - (1 - i\sqrt{\kappa}t)}{2i\sqrt{\kappa}} = t$$

Proposition.

1. $\mathfrak{c}_\kappa(t)^2 + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(t)^2 = 1$
2. $\dot{\mathfrak{s}_\kappa} = \mathfrak{c}_\kappa$
3. $\dot{\mathfrak{c}_\kappa} = -\kappa\mathfrak{s}_\kappa$

Démonstration. On utilise la définition avec les exponentielles :

1. $\mathfrak{c}_\kappa(t)^2 + \kappa\mathfrak{s}_\kappa(t)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2i\sqrt{\kappa}t} + \mathrm{e}^{-2i\sqrt{\kappa}t} + 2\,\mathrm{e}^0) - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2i\sqrt{\kappa}t} + \mathrm{e}^{-2i\sqrt{\kappa}t} - 2\,\mathrm{e}^0) = \frac{1}{4} \times (2+2) = 1$
2. $\dot{\mathfrak{s}_\kappa}(t) = \frac{i\sqrt{\kappa}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t}}{2i\sqrt{\kappa}} - \frac{-i\sqrt{\kappa}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t}}{2i\sqrt{\kappa}} = \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} + \mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t}}{2} = \mathfrak{c}_\kappa(t)$
3. $\dot{\mathfrak{c}_\kappa}(t) = i\sqrt{\kappa}\frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} - \mathrm{e}^{-i\sqrt{\kappa}t}}{2} = \frac{-1}{i}\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa}}\frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{\kappa}t} - \mathrm{e}^{-i\sqrt{\kappa}t}}{2} = -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(t).$

$\square$

On a alors la paramétrisation :

$$F_\kappa(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(r)\cos(\varphi) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r)\sin(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix}$$

Remarque. Si $\kappa > 0$, $F_\kappa([0,\pi/\sqrt{\kappa}] \times [0,2\pi[) = \mathbb{M}_\kappa$. Si $\kappa < 0$, $F_\kappa([0,+\infty[\times[0,2\pi[) = \mathbb{M}_\kappa$.

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(r)\cos(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(r)\sin(\varphi) \\ -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F_\kappa}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -\mathfrak{s}_\kappa(r)\sin(\varphi) \\ \mathfrak{s}_\kappa(r)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$(g_{ij}(r,\varphi))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{s}_\kappa^2(r) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien définie positive, donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_\kappa$ est bien une métrique riemannienne sur $\mathbb{M}_\kappa$.
On en déduit par [5] que $\kappa_{\text{Gauss}} = -\frac{\ddot{\mathfrak{s}_\kappa}(r)}{\mathfrak{s}_\kappa(r)} = \kappa$.
En changeant de métrique, on a maintenant une courbure constante.

I.3 Les géodésiques de $\mathbb{M}_\kappa$

On cherche désormais les géodésiques de $\mathbb{M}_\kappa$.

I.3.1 Les courbes $r \mapsto F_\kappa(r,\varphi)$

On va montrer que les courbes $r \overset{c}{\mapsto} F_\kappa(r,\varphi)$ sont des géodésiques :

Calcul des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g^{mk}$$

$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$
$\Gamma_{22}^2 = 0 = \Gamma_{22}^1$
$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\mathfrak{c}_\kappa(r)}{\mathfrak{s}_\kappa(r)}$.

Calcul de la dérivée covariante

$\dot{\mathfrak{c}}_\kappa(r) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)$. On utilise la formule [2] :

$$\nabla_{\underbrace{W_p}_{\dot c(r)}}\left(\underbrace{\sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}}_{\dot c(r)}\right) = \sum_k \left(\sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u)\eta^l + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(u)\xi^i(u)\eta^j\right)\frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$$

On écrit $\dot c(r) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi)$ dans la base $\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)$: $\dot c(r) = \sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$ avec $\xi^1 = 1$ et $\xi^2 = 0$.
On écrit $W_p = \dot c(r)$ dans cette même base : $\dot c(r) = \sum_k \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$ avec $\eta^1 = 1$ et $\eta^2 = 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot c(t)}\dot c(t) &= \sum_k \left(\sum_l \underbrace{\frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}}_{0}(u)\eta^l + \sum_{i,j=1}^{2}\underbrace{\Gamma_{i,j}^k}_{\substack{0 \text{ si}\\ k=1}}(u)\xi^i(u)\eta^j\right)\frac{\partial F}{\partial u^k}(u) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^2(u)\xi^i(u)\eta^j \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}(u) \qquad (k=2) \\
&= (\underbrace{\Gamma_{12}^2(u)\times 1\times 0}_{i=1,j=2} + \underbrace{\Gamma_{21}^2(u)\times 0\times 1}_{i=2,j=1})\frac{\partial F}{\partial \varphi}(u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc c est bien une géodésique pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Ces géodésiques ont une caractérisation géométrique simple : leurs traces sont l'intersection de $\mathbb{M}_\kappa$ avec le plan qui passe par $(0,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$, et $(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^T$ (car on fixe φ et on fait varier r).
Quelles sont les autres géodésiques (qui ne passent pas par $(0,0,1)^T$) ?

I.3.2 Les autres géodésiques

Soient $A, B \in \mathbb{M}_\kappa$. On va ramener A au point $(0,0,1)$ par des isométries et on aura alors toutes les géodésiques.

Proposition. *Les applications définies par les matrices suivantes sont des isométries de* $\mathbb{M}_\kappa$.

$$M := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L := \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} M^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) & -\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi) & 0 \\ -\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc M est une isométrie de $\mathbb{M}_\kappa$.

$$\begin{aligned} L^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} L &= \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r)/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa^2(r) + \kappa\mathfrak{s}_\kappa^2(r) & 0 & -\mathfrak{c}_\kappa(r)\mathfrak{s}_\kappa(r) + \mathfrak{c}_\kappa(r)\mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathfrak{c}_\kappa(r)\mathfrak{s}_\kappa(r) + \mathfrak{c}_\kappa(r)\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa^2(r) + \mathfrak{c}_\kappa^2(r)/\kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc L est une isométrie de $\mathbb{M}_\kappa$. □

On peut ramener A sur le plan $\{y = 0\}$ par la rotation de matrice M définie ci-dessus. $M(A)$ a alors pour coordonnées :

$$M(A) = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix}$$

En appliquant ensuite l'isométrie L définie ci-dessus, $M(A)$ est envoyé sur :

$$L(M(A)) = \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 \\ \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La géodésique entre A et B est envoyée sur la géodésique entre $L(M(A))$ et $L(M(B))$ par $L \circ M$, qui est l'intersection de $\mathbb{M}_\kappa$ avec un plan qui passe par $(0,0,1)^T$. Si on applique l'isométrie inverse $M^{-1} \circ L^{-1}$ sur ce plan, on obtient le plan passant par les points A, B et $(0,0,0)^T$, dont la trace sur $\mathbb{M}_\kappa$ est la géodésique reliant A et B.

Par ce procédé, on obtient toutes les géodésiques : les traces des plans vectoriels sur l'hyperboloïde.

Remarque. Si $\kappa = 1$, on obtient les grands cercles. Si $\kappa = -1$, on obtient les hyperboles.

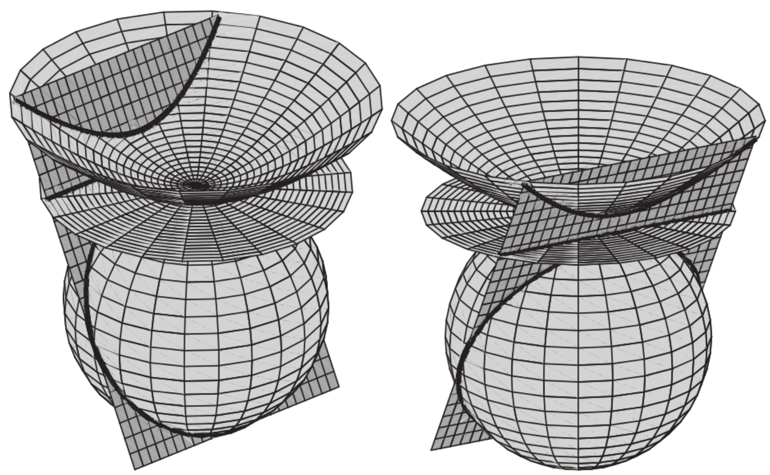
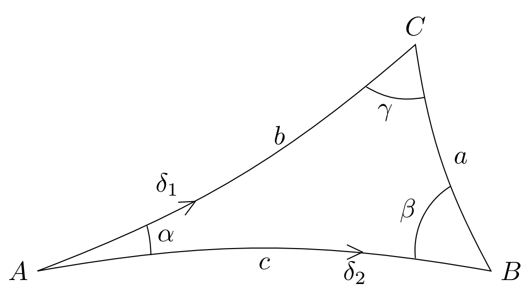


FIGURE I.2 – Trace des plans sur $\mathbb{M}_\kappa$ – [4]

I.4 Triangles sur $\mathbb{M}_\kappa$

Un triangle est défini par trois points reliés par des géodésiques. On va tenter de retrouver des lois usuelles du cas euclidien sur notre surface $\mathbb{M}_\kappa$.



Par une isométrie, on peut supposer que $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec une rotation d'axe Oz qui fixe A, on peut aussi supposer que $B = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(c) \\ 0 \\ \mathfrak{c}_\kappa(c) \end{pmatrix}$.

Où est le point C ?
$C \in \mathbb{M}_\kappa$ donc il existe (r, φ) tel que $C = F_\kappa(r, \varphi)$. Montrons que $r = b$ et $\varphi = \alpha$:

On note δ_1 le chemin (géodésique) de A à C : $\delta_1 : t \in [0,r] \mapsto F_\kappa(t,\varphi)$.

$$b = AC = L(\delta_1) = \int_0^r \|\dot{\delta}_1(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^r \left\| \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_\kappa(t)\cos(\varphi) \\ \mathfrak{c}_\kappa(t)\sin(\varphi) \\ -\kappa\mathfrak{s}_\kappa(t) \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}t = \int_0^r \sqrt{1}\mathrm{d}t = r$$

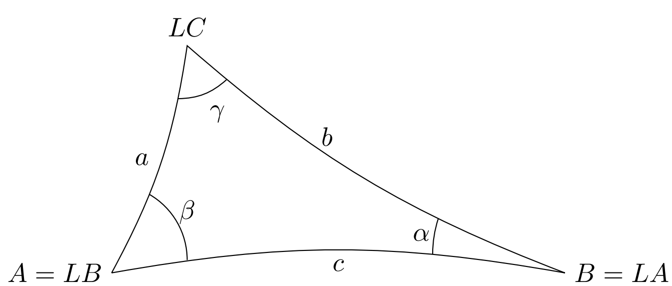
donc $b = r$.
On note δ_2 le chemin (géodésique) de A à B : $\delta_2 : t \in [0,c] \mapsto F_\kappa(0,t)$.
$\dot{\delta}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\dot{\delta}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\alpha = \mathrm{mes}(\dot{\delta}_2(0), \dot{\delta}_1(0)) = \mathrm{mes}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \varphi$$

donc $\alpha = \varphi$.
Donc $C = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \mathfrak{c}_\kappa(b) \end{pmatrix}$.
On applique l'isométrie L qui échange A et B, de matrice :

$$L := \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix}$$

On obtient un nouveau triangle



Lois des sinus et des cosinus

On détermine les coordonnées de LC de deux manières différentes :

1. Avec la même méthode que celle utilisée pour trouver les coordonnées de C, on obtient :

$$LC = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\beta) \\ \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta) \\ \mathfrak{c}_\kappa(a) \end{pmatrix}$$

2. En utilisant L,

$$LC = \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{s}_\kappa(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(r) & 0 & \mathfrak{c}_\kappa(r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \mathfrak{c}_\kappa(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) + \mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) \\ \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \\ \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) + \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$\mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\beta) = -\mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) + \mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) \tag{I.1}$$

$$\mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta) = \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) \tag{I.2}$$

$$\mathfrak{c}_\kappa(a) = \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) + \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(b) \tag{I.3}$$

De $(I.2)$, on déduit la *loi des sinus* :

$$\frac{\mathfrak{s}_\kappa(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(c)}{\sin(\gamma)}$$

De $(I.3)$, on déduit la *loi des cosinus pour les côtés* :

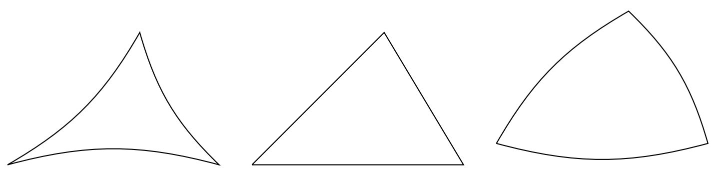
$$\mathfrak{c}_\kappa(a) = \kappa\mathfrak{s}_\kappa(c)\mathfrak{s}_\kappa(b)\cos(\alpha) + \mathfrak{c}_\kappa(b)\mathfrak{c}_\kappa(c)$$
$$\mathfrak{c}_\kappa(b) = \kappa\mathfrak{s}_\kappa(a)\mathfrak{s}_\kappa(c)\cos(\beta) + \mathfrak{c}_\kappa(c)\mathfrak{c}_\kappa(a)$$
$$\mathfrak{c}_\kappa(c) = \kappa\mathfrak{s}_\kappa(b)\mathfrak{s}_\kappa(a)\cos(\gamma) + \mathfrak{c}_\kappa(a)\mathfrak{c}_\kappa(b)$$

De $\cos(\alpha) \times (I.1)$ et de $\sin(\alpha) \times (I.3)$, on déduit la *loi des cosinus pour les angles* :

$$\cos(\alpha) = \mathfrak{c}_\kappa(a)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma) \tag{I.4}$$

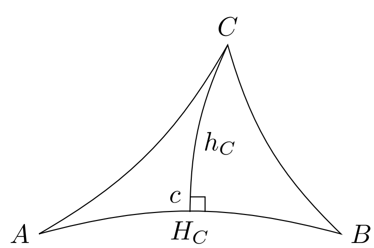
$$\cos(\beta) = \mathfrak{c}_\kappa(b)\sin(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\gamma)$$
$$\cos(\gamma) = \mathfrak{c}_\kappa(c)\sin(\beta)\sin(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\alpha)$$

Remarque. Pour $\kappa = 0$, $\cos(\gamma) = \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\alpha-\beta)$ d'où $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.
Pour $\kappa < 0$, $c > 0$ et $\mathfrak{c}_\kappa(c) = \cosh(c) > 1$ donc $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.
Pour $\kappa > 0$, $c > 0$ et $\mathfrak{c}_\kappa(c) = \cos(c) < 1$ donc $\alpha+\beta+\gamma > \pi$.



$\kappa < 0$ $\kappa = 0$ $\kappa > 0$

Formule de la hauteur



En appliquant la loi des sinus dans le triangle BCH_C, on a

$$\frac{\mathfrak{s}_\kappa(h_c)}{\sin(\beta)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(a)}{\sin(\pi/2)} = \mathfrak{s}_\kappa(a)$$

En appliquant la loi des sinus dans le triangle ACH_C, on a

$$\frac{\mathfrak{s}_\kappa(h_c)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathfrak{s}_\kappa(b)}{\sin(\pi/2)} = \mathfrak{s}_\kappa(b)$$

On obtient la *formule de la hauteur* :

$$\mathfrak{s}_\kappa(h_c) = \mathfrak{s}_\kappa(b)\sin(\alpha) = \mathfrak{s}_\kappa(a)\sin(\beta)$$

II. Les modèles de Poincaré

Le modèle $\mathbb{M}_{-1}$ de la nappe hyperbolique n'est pas pratique, notamment car il n'est pas plan. On introduit donc dans cette partie deux modèles de géométrie hyperbolique plans, qui sont

— le demi-plan de Poincaré $H^2 = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$

— le disque de Poincaré $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

qu'on munit respectivement des métriques

$$\mathrm{d}s_{H^2} = \frac{|\mathrm{d}z|}{\Im(z)} \qquad \mathrm{d}s_\Delta = \frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

On montrera plus loin que $\mathbb{M}_{-1}$, H^2 et Δ sont isométriques avec leurs métriques respectives.

II.1 Une métrique sur H^2, le demi-plan de Poincaré

Cette partie s'inspire de [1].

On cherche à déterminer une distance ρ telle que le demi-plan H^2 représente le plan hyperbolique (muni de cette distance).

On commence par définir la longueur d'un chemin dans H^2. Soit $\gamma : [a,b] \to H^2$ un chemin. On utilise la longueur :

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t$$

On utilise ensuite l'application ρ suivante :

$$\forall z, w \in H^2, \qquad \rho(z,w) = \inf_{\gamma \in G_{z,w}} \|\gamma\|$$

où $G_{z,w}$ est l'ensemble des chemins reliant z à w, c'est-à-dire $\gamma : [a,b] \to H^2$ avec $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = w$.

Proposition. *ρ est une distance.*

Démonstration. ρ satisfait $\rho(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$. ρ est *symétrique* car $\|\gamma\| = \|\bar{\gamma}\|$ (où $\bar{\gamma}$ est le chemin (inverse) reliant w à z).

On montre que ρ satisfait *l'inégalité triangulaire* : soient $z_1, z_2, z_3 \in H^2$,

$$\rho(z_1,z_3) = \inf_{\gamma\in G_{z_1,z_3}} \int_a^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t \leq \inf_{\substack{\gamma\in G_{z_1,z_3}\\ \text{passant}\\ \text{par } b}} \int_a^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t = \inf_{\substack{\gamma\in G_{z_1,z_3}\\ \text{passant}\\ \text{par } b}} \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t + \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t\right)$$

Reste à montrer que

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{\gamma\in G_{z_1,z_3}\\ \text{passant}\\ \text{par } b}} \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t + \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t\right) &= \inf_{\gamma\in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t + \inf_{\gamma\in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t \\ &= \rho(z_1,z_2) + \rho(z_2,z_3) \end{aligned}$$

On le montre par double-inégalité :

$\boxed{\geq}$ $\gamma_0 \in G_{z_1,z_3}$. On peut décomposer $\gamma_0 = \zeta_0 + \eta_0$ avec $\zeta_0 \in G_{z_1,z_2}$ et $\eta_0 \in G_{z_2,z_3}$. On a alors

$$\|\zeta_0\| \geq \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t$$

$$\|\eta_0\| \geq \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t$$

On en déduit

$$\|\gamma_0\| = \|\zeta_0\| + \|\eta_0\| \geq \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t$$

En passant à l'inf, on obtient :

$$\inf_{\substack{\gamma \in G_{z_1,z_3} \\ \text{passant} \\ \text{par } b}} \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t \right) \geq \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t$$

$\boxed{\leq}$ On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{\substack{\gamma \in G_{z_1,z_3} \\ \text{passant} \\ \text{par } b}} \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t \right) \leq \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + 2\varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$,
On a

$$\inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t < \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \varepsilon$$

donc il existe $\zeta_1 \in G_{z_1,z_2}$ tel que

$$\|\zeta_1\| < \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \varepsilon \tag{II.1}$$

De même,

$$\inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t < \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \varepsilon$$

donc il existe $\eta_1 \in G_{z_2,z_3}$ tel que

$$\|\eta_1\| < \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \varepsilon \tag{II.2}$$

En sommant (II.1) et (II.2), on obtient :

$$\|\gamma_1\| = \|\zeta_1\| + \|\eta_1\| < \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + 2\varepsilon$$

D'où

$$\inf_{\substack{\gamma \in G_{z_1,z_3} \\ \text{passant} \\ \text{par } b}} \left(\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t \right) \leq \inf_{\gamma \in G_{z_1,z_2}} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + \inf_{\gamma \in G_{z_2,z_3}} \int_b^c \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t + 2\varepsilon$$

Par double-inégalité, on a l'égalité.
ρ est donc bien une distance. $\square$

Soit une homographie

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et $ad - bc > 0$.

Proposition.

$$g(H^2) = H^2$$

Démonstration. Soit $z = x + iy \in H^2$,

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

d'où

$$\Im(g(z)) = \frac{ady + bc(-y)}{|cz+d|^2} = \frac{\overbrace{y}^{>0}\overbrace{(ad-bc)}^{>0}}{\underbrace{|cz+d|}_{>0}^2} > 0$$

On a donc montré que $g(H^2) \subset H^2$.
Comme $\{\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), ad-bc \neq 0\}$ agit sur $\mathbb{C}^2$ pour former les homographies, $g^{-1} : z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ est inversible, et $a'd' - b'c' = \frac{1}{ad-bc} > 0$. On a alors l'autre inclusion, et donc l'égalité. $\square$

Proposition. *g est une isométrie de (H^2, ρ).*

Démonstration. $\frac{|g'(z)|}{\Im(g(z))} = \frac{\left|\frac{acz+da-acz-cb}{(cz+d)^2}\right|}{\frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}} = \frac{\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}}{\frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\Im(z)}$ donc $\|g\gamma\| = \int_a^b \frac{|g'\circ\gamma|\cdot|\gamma'|}{\Im(g\circ\gamma)} = \|\gamma\|$. Donc $\rho(gz, gw) = \rho(z, w)$. Donc g est une isométrie de (H^2, ρ). $\square$

On souhaite désormais expliciter la distance ρ. On va utiliser le théorème suivant :

Théorème.

1. $\rho(z, w) = \log \frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$
2. $\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\Im(z)\Im(w)}$
3. $\sinh(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\Im(z)\Im(w)}}$
4. $\cosh(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z-\bar{w}|}{2\sqrt{\Im(z)\Im(w)}}$
5. $\tanh(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|$.

Lemme. *Il y a équivalence entre ces cinq assertions.*

Démonstration.
1. $\Longrightarrow$ 2.

$$\cosh(\rho(z, w)) = \frac{\mathrm{e}^{\rho(z,w)} + \mathrm{e}^{-\rho(z,w)}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} + \frac{|z-\bar{w}|-|z-w|}{|z-\bar{w}|+|z-w|}\right)$$

Comme $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$, on a $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$. D'où

$$\cosh(\rho(z,w))=\frac{|z-\bar{w}|^2+|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2-|z-w|^2}=1+\frac{2|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2-|z-w|^2}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|z-\bar{w}|^2-|z-w|^2&=(z-\bar{w})(\bar{z}-w)-(z-w)(\bar{z}-\bar{w})\\&=z\bar{z}-zw-\bar{z}\bar{w}+w\bar{w}-(z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w})\\&=z(\bar{w}-w)+\bar{z}(w-\bar{w})=(w-\bar{w})(\bar{z}-z)\\&=(2\Im w)(2\Im z)=4\Im(z)\Im(w)\end{aligned}$$

2. $\implies$ 3. Il suffit d'utiliser $\sinh(\frac{x}{2})=\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$.

3. $\implies$ 4. Il suffit d'utiliser $\cosh^2(x)=\sinh^2(x)+1$.

3. + 4. $\implies$ 5. Il suffit d'utiliser $\tanh=\frac{\sinh}{\cosh}$.

5. $\implies$ 1. Il suffit d'utiliser la fonction $\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}$.

$\square$

Démonstration. (du théorème)
On démontre 2. :
Par la proposition précédente, $\cosh(\rho(z,w))=\cosh(\rho(gz,gw))$. On va montrer que la partie de droite est également invariante par g :

$$\begin{aligned}A=\frac{|g(z)-g(w)|^2}{2\Im(g(z))\Im(g(w))}&=\frac{\left|\frac{az+b}{cz+d}-\frac{aw+b}{cw+d}\right|^2}{\Im(z)\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\Im(w)\frac{ad-bc}{|cw+d|^2}}=\frac{\frac{|(az+b)(cw+d)-(cz+d)(aw+b)|^2}{|cz+d|^2|cw+d|^2}}{\frac{\Im(z)\Im(w)(ad-bc)^2}{|cz+d|^2|cw+d|^2}}\\&=\frac{|(az+b)(cw+d)-(cz+d)(aw+b)|^2}{\Im(z)\Im(w)(ad-bc)^2}\end{aligned}$$

et comme $(az+b)(cw+d)-(cz+d)(aw+b)=aczw+bd+azd+bcw-cazw-bd-daw-bcz=w(bc-ad)+z(ad-bc)=(ad-bc)(z-w)$, on a donc

$$A:=\frac{|z-w|^2}{\Im(z)\Im(w)}$$

On a donc démontré que

$$2.\iff\cosh(\rho(gz,gw))=1+\frac{|gz-gw|^2}{2\Im(gz)\Im(gw)}$$

Soit $z,w\in H^2$.
Si $\Re(z)=\Re(w)=\alpha$, on utilise l'homographie qui envoie (z,w) sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire la translation $g:s\mapsto s-\alpha$.
Sinon, soit $\mathscr{C}$ le cercle passant par z et w, orthogonal à l'axe des réels. On note z^* et w^* les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe réel. On choisit l'homographie qui envoie $\mathscr{C}$ sur l'axe imaginaire :

$$g:t\in H^2\longmapsto\lambda\frac{t+a}{t+b}$$

Comme $g(z^*)=0$, on en déduit que $a=-z^*$.
Comme $g(w^*)=\infty$, on en déduit que $b=-w^*$.

Comme $g(z) = ip$, on en déduit que $\lambda = ip\frac{z-z^*}{z-w^*}$.
Au final, on a

$$g(t) = ip\frac{z-z^*}{z-w^*}\frac{t-z^*}{t-w^*}$$

$g(w) = iq$ et on peut supposer que $q > p$.
Pour montrer 2., on peut donc supposer que $z = ip$ et $w = iq$ (on peut aussi supposer que $0 < p < q$).
Si $\gamma : t \in [0,1] \mapsto x(t) + iy(t)$ est un chemin reliant z à w, alors

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{|x'(t)+iy'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} = \ln(y(1)) - \ln(y(0)) = \ln\frac{q}{p}$$

donc $\|\gamma\| \geq \ln\frac{q}{p}$.
En prenant $\gamma_m : t \mapsto i(p + t(q-p))$, on a $\|\gamma_m\| = \ln\frac{q}{p}$ d'où

$$\rho(z,w) = \rho(ip,iq) = \inf_\gamma \|\gamma\| = \ln\frac{q}{p} \tag{II.3}$$

On vérifie alors 2. :

$$\cosh(\rho(z,w)) = \cosh(\ln\frac{q}{p}) = \frac{\frac{q}{p}+\frac{p}{q}}{2} = \frac{q^2+p^2}{2pq}$$

$$1 + \frac{|z-w|^2}{2\Im(z)\Im(w)} = 1 + \frac{|ip-iq|^2}{2\Im(ip)\Im(iq)} = 1 + \frac{(p-q)^2}{2pq} = \frac{2pq+p^2-2pq+q^2}{2pq} = \frac{p^2+q^2}{2pq}$$

□

Remarques.

1. On a même montré mieux : $\|\gamma\| = \rho(ip,iq)$ est minimale si, et seulement si, $x(t) = 0$ et $y'(t) > 0$. Cela signifie qu'on peut trouver la géodésique qui relie deux points : c'est le cercle orthogonal à l'axe des réels (ou la droite si les deux points ont même partie réelle).
2. Le calcul du birapport donne (par invariance par homographie) :

$$[z^*, z, w, w^*] = [0, ip, iq, \infty] = \frac{(0-iq)(ip-\infty)}{(0-ip)(iq-\infty)} = \frac{q}{p}$$

donc (par (II.3))

$$\rho(ip,iq) = \rho(z,w) = \ln([z^*,z,w,w^*]) = \ln([0,ip,iq,\infty])$$

On peut donc exprimer la distance entre deux points de H^2 à l'aide du birapport !

On peut maintenant montrer la proposition suivante :

Proposition. *Les isométries de (H^2, ρ) sont les applications de l'ensemble*

$$G = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}; \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}, ad-bc > 0 \right\}$$

Démonstration. On a déjà montré que les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc > 0$ sont des isométries.
De plus, $z \mapsto -\bar{z}$ est une isométrie, donc par composition, $z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ sont aussi des isométries.
Soit φ une isométrie. On va trouver $g \in G$ telle que $g\varphi(z) = z$, c'est-à-dire $g\varphi = \mathrm{id}$.
On sait qu'on peut trouver une homographie g telle que $g\varphi$ laisse invariant l'axe imaginaire. On peut aussi supposer que $g\varphi$ fixe i et laisse invariants $(0,i)$ et (i,∞) (quitte à appliquer $z \mapsto kz$ et $z \mapsto -1/z$).
D'où

$$g\varphi(it) = it \qquad \forall t > 0$$

Soit maintenant $z = x + iy \in H^2$ et $g\varphi(z) = u + iv$. Pour $t > 0$, on a

$$\rho(z, it) = \rho(g\varphi(z), g\varphi(it)) = \rho(u + iv, it)$$

Le théorème précédent (iii) donne alors

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, it)\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(u + iv, it)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|x + iy - it|}{2\sqrt{yt}} = \frac{|u + iv - it|}{2\sqrt{vt}}$$

D'où

$$(x^2 + (y - t)^2)v = y(u^2 + (v - t)^2)$$

Comme cette équation est vraie pour tout $t > 0$, on obtient :

$$y = v \qquad x^2 = u^2$$

donc

$$g\varphi(z) = z \text{ ou } -\bar{z}$$

Par continuité de la fonction $g\varphi$, on a en fait

$$g\varphi(z) = z \quad \forall z \in H^2 \qquad \text{ou} \qquad g\varphi(z) = -\bar{z} \quad \forall z \in H^2$$

D'où $\varphi(z) = g^{-1}(z)$ ou $g^{-1}(-\bar{z})$. D'où $\varphi \in G$. □

II.2 Le disque Δ de Poincaré

Soit $f : z \in H^2 \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Proposition. *f envoie H^2 sur Δ.*

Démonstration. Soit $z = x + iy \in H^2$ $(y > 0)$. Alors,

$$|z - i| = |x + i(y - 1)^2| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$|z + i| = |x + i(y + 1)^2| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

Comme $(y + 1)^2 - (y - 1)^2 = 4y > 0$,

$$|z - i| < |z + i| \iff \left|\frac{z - i}{z + i}\right| < 1 \iff f(z) \in \Delta$$

□

Comme f est une homographie, on a une nouvelle distance sur Δ :

$$\forall z, w \in \Delta, \qquad \rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$$

(H^2, ρ) et (Δ, ρ^*) nous donnent deux nouvelles méthodes pour voir le plan hyperbolique. Afin de s'habituer aux passages entre H^2 et Δ, on a représenté différents ensembles dans les deux modèles. Chaque couleur représente un même ensemble.

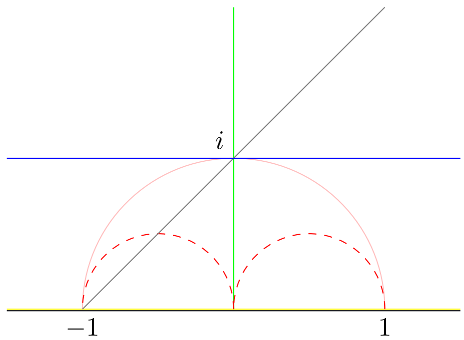


Figure II.1 – Le demi-plan de Poincaré

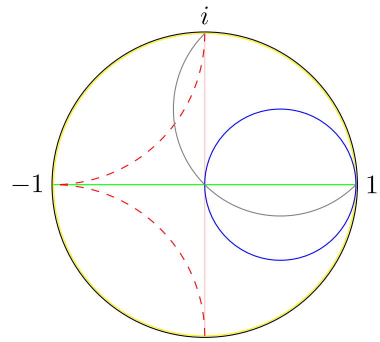


Figure II.2 – Le disque de Poincaré

Sur la figure suivante, on voit bien que le cinquième axiome de la géométrie euclidienne n'est pas vérifié.

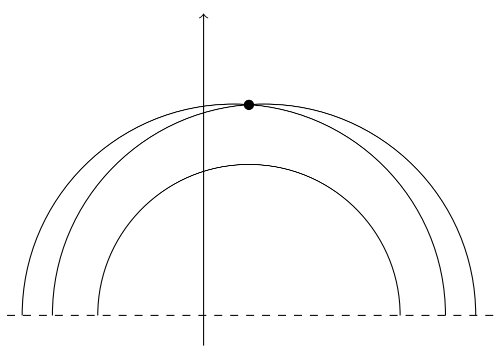


Figure II.3 – Parallèles sur H^2

Remarque. En géométrie sphérique, il n'y a pas de parallèle. En fait, toutes les géodésiques (grands cercles) sont sécantes.

On utilisera par la suite ρ pour désigner la distance de H^2 ET celle de Δ (on ommet l'étoile par convention) :

$$f : (H^2, \rho) \longrightarrow (\Delta, \rho)$$

Proposition.

$$\forall z \in H^2, \qquad \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\Im(z)}$$

Démonstration.

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{2|\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}|}{1-\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}} = \frac{\frac{4}{|z+i|^2}}{\frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2}} = \frac{4}{(z+i)(\bar{z}-i)-(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{4}{i(\bar{z}-z)-i(z-\bar{z})} = \frac{1}{\Im(z)}$$

□

On a donc une isométrie entre (Δ, ρ^*) et (H^2, ρ).

Montrons qu'on a aussi une isométrie entre (Δ, ρ^*) et $(\mathbb{M}_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$. On aura ainsi démontré que nos trois modèles $\mathbb{M}_{-1}$, H^2 et Δ sont isométriques.

On utilise le paramétrage

$$F: \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{M}_{-1} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{1-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1+x^2+y^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vérifions que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{-1}$ (défini par l'équation $-x^2-y^2+z^2=1$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}\left(-(2x)^2-(2y)^2+(1+x^2+y^2)^2\right) &= \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}\left(-4x^2-4y^2+1+2x^2+2y^2+x^4+y^4+2x^2y^2\right) \\ &= \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}\left(1-2x^2-2y^2+2x^2y^2+x^4+y^4\right) \\ &= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{(1-x^2-y^2)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} 1+x^2-y^2 \\ 2xy \\ 2x \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} 2xy \\ 1-x^2+y^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

On calcule alors :

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right\|_{-1}^2 = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^4}(1-x^2-y^2)^2 = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$$

car $(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2-4x^2 = (1-x^2-y^2)^2$.

$$\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial x}\right\|_{\Delta}^2 = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_{\Delta}^2 = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$$

De même, on a

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right\|_{-1} = \left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial y}\right\|_{\Delta}$$

Enfin,

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right\rangle = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\left(2xy(1+x^2-y^2)+2xy(1-x^2+y^2)-4xy\right) = 0$$

F est donc une isométrie.

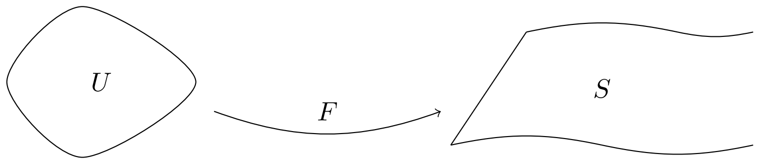
L'intéret d'un tel modèle est qu'il est borné.
On peut désormais montrer un corollaire du théorème de Liouville :

Corollaire (de Liouville)**.** *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans H^2 est constante.*

Démonstration. Soit g holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans H^2. Alors, comme on a trouvé une isométrie $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ de H^2 sur Δ, on a $f \circ g$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans Δ, qui est bornée. Donc $f \circ g$ est constante par Liouville. Donc g est constante. $\square$

II.3 Formule d'aire

Rappel. Pour un paramétrage d'une surface S :



on peut calculer l'aire de S par la formule :

$$A[S] = \iint_S \text{unité d'aire } \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où l'unité d'aire est $\sqrt{\det G^F}$ avec G^F première forme fondamentale associée au paramétrage F.

On souhaite calculer l'aire d'une surface sur le disque de Poincaré. On choisit donc le paramétrage $F : (x, y) \in \Delta \longmapsto (x, y) \in \Delta$.

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule G :

$$G^F = \begin{pmatrix} \|u_1\|^2_\Delta & \langle u_1, u_2 \rangle_\Delta \\ \langle u_2, u_1 \rangle_\Delta & \|u_2\|^2_\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det G^F} = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

d'où la formule

$$\mathcal{A}_\Delta(S) = \int_S \left(\frac{2}{1 - x^2 - y^2} \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

En raisonnant de même sur H^2 (avec le même paramétrage $\tilde{F}(x, y) = (x, y)$), on obtient

$$\left\| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \right\|^2_{H^2} = \left\| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right\|^2_{H^2} = \frac{1}{y^2} \qquad \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right\rangle = 0$$

$$G^{\tilde{F}} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}_{H^2}(S) = \int_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

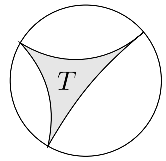
II.4 Application aux triangles hyperboliques

II.4.1 Triangles idéaux

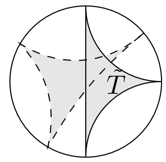
Définition. On appelle triangle idéal un triangle (hyperbolique) dont les trois sommets sont à l'infini.

Remarque. L'angle d'un sommet à l'infini est nul car les deux géodésiques joignant le sommet sont orthogonales au bord.

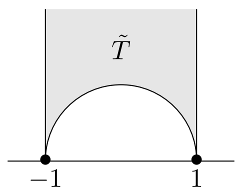
Soit T un triangle idéal



Par une homographie (isométrie qui donc ne change pas les aires), on peut envoyer T sur $\tilde{T}$



On calcule l'aire de ce triangle $\tilde{T}$ vu dans H^2 :

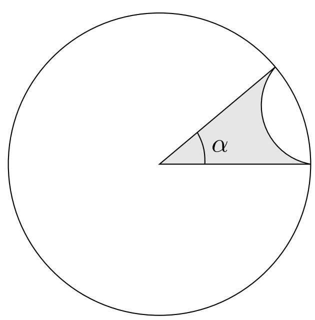


$$\mathcal{A}(T) = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\frac{-1}{y}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = [\arcsin(x)]_{-1}^{1} = \pi/2-(-\pi/2) = \pi$$

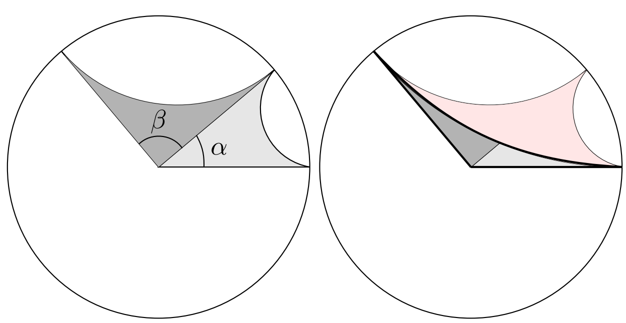
$$\boxed{\textit{Pour un triangle idéal } T,\ \mathcal{A}(T) = \pi}$$

II.4.2 Triangles avec deux sommets à l'infini

Soit T un triangle qui a deux sommets à l'infini. On note α son angle non-nul.



Cette partie s'inspire de [6].



Ici, $\mathcal{A}(T(\alpha))$ est représenté en gris clair, $\mathcal{A}(T(\beta))$ en gris foncé, et l'aire rose est celle d'un triangle idéal, donc d'aire égale à π. En s'intéressant à l'aire du triangle épais $T(\alpha+\beta)$, on remarque que

$$\mathcal{A}(T(\alpha+\beta)) = \text{aire}_{\text{clair}} + \text{aire}_{\text{foncé}} - \text{aire}_{\text{rose}} = \mathcal{A}(T(\alpha)) + \mathcal{A}(T(\beta)) - \pi$$

On remarque que $\mathcal{A}$ est presque additive (à la constante π près). On introduit donc

$$F(\alpha) := \pi - \mathcal{A}(T(\alpha))$$

On va montrer que F est additive, c'est-à-dire que $F(\alpha+\beta) = F(\alpha) + F(\beta)$.
En effet,

$$F(\alpha+\beta)) = \pi - \mathcal{A}(T(\alpha+\beta)) = \pi - (\mathcal{A}(T(\alpha)) + \mathcal{A}(T(\beta)) - \pi) = 2\pi - \mathcal{A}(T(\alpha)) - \mathcal{A}(T(\beta)) = F(\alpha) + F(\beta)$$

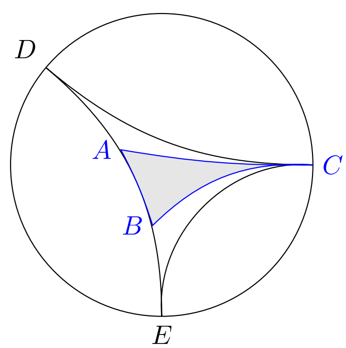
donc F est additive.
De plus, F est continue, donc elle est linéaire. Il existe donc c tel que $F(\alpha) = c\alpha$.
Comme $F(\pi) = \pi - \mathcal{A}(\text{Triangle plat}) = \pi$, on en déduit que $c = 1$ et que

$$F(\alpha) = \pi - \mathcal{A}(T(\alpha)) = \alpha \iff \mathcal{A}(T(\alpha)) = \pi - \alpha$$

$$\boxed{\textit{Pour un triangle } T \textit{ d'unique angle non-nul } \alpha,\ \mathcal{A}(T) = \pi - \alpha}$$

II.4.3 Triangles avec un sommet à l'infini

Par une homographie, on peut se ramener au triangle ABC suivant :



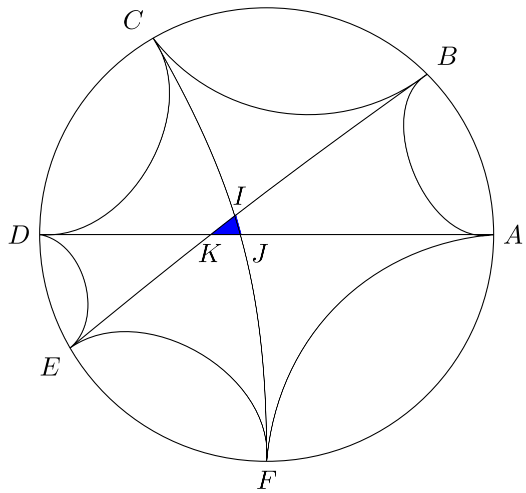
On pose $\alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}$.
DCE est un triangle idéal, donc $\mathcal{A}(DCE) = \pi$.
DBC et ACE sont des triangles dont deux des côtés sont à l'infini. On a donc $\mathcal{A}(DBC) = \pi - \beta$ et $\mathcal{A}(ACE) = \pi - \alpha$.
On a finalement :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(DCE) = \mathcal{A}(DBC) + \mathcal{A}(ACE) - \mathcal{A}(ABC) &\iff \pi = \pi - \beta + \pi - \alpha - \mathcal{A}(ABC) \\ &\iff \mathcal{A}(ABC) = \pi - \beta - \alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Pour un triangle } T \textit{ dont les angles non-nuls sont } \alpha \textit{ et } \beta,\ \mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha+\beta)}$$

II.4.4 Triangles quelconques

On prolonge les géodésiques du triangle IJK pour former un hexagone idéal $ABCDEF$.



On calcule l'aire de ce polygone idéal de deux façons :

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACD) + \mathcal{A}(ADE) + \mathcal{A}(AEF) = 4\pi$$

En notant α, β, γ les angles respectifs en I, J, K dans le triangle IJK, on a aussi

$$\begin{array}{rcccccccc} \mathcal{A}(ABCDEF) & = & \mathcal{A}(AKB) + \mathcal{A}(KED) & + & \mathcal{A}(CJD) + \mathcal{A}(JAF) & + & \mathcal{A}(EIF) + \mathcal{A}(ICB) & - & 2\mathcal{A}(IJK) \\ & = & \pi - \gamma + \pi - \gamma & + & \pi - \beta + \pi - \beta & + & \pi - \alpha + \pi - \alpha & - & 2\mathcal{A}(IJK) \end{array}$$

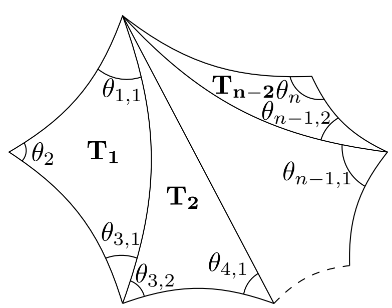
D'où

$$4\pi = 6\pi - 2\gamma - 2\beta - 2\alpha - 2\mathcal{A}(IJK) \iff \mathcal{A}(IJK) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

$$\boxed{\textit{Pour un triangle } T \textit{ dont les angles sont } \alpha, \beta \textit{ et } \gamma, \ \mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)}$$

II.5 Les polygônes hyperboliques

Soit P un n-gone convexe d'angles $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0, \pi[$. On le décompose en $(n-2)$ triangles :



On va montrer que

$$\mathcal{A}(P) = (n-2)\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_n)$$

On l'a déjà montré pour $n = 3$ (cas du triangle).
Soit $n \geq 4$. On a

$$\mathcal{A}(\mathbf{T_1}) = \pi - (\theta_{1,1} + \theta_2 + \theta_{3,1})$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{T_2}) = \pi - (\theta_{1,2} + \theta_{3,2} + \theta_{4,1})$$

On voit facilement que pour $i \in \{2, \ldots, n-3\}$,

$$\mathcal{A}(\mathbf{T_i}) = \pi - (\theta_{1,i} + \theta_{i+1,2} + \theta_{i+2,2})$$

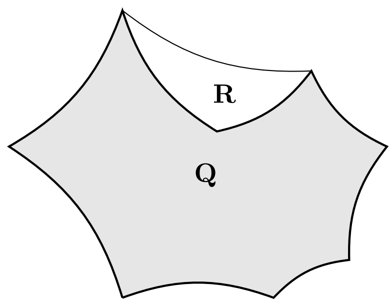
et

$$\mathcal{A}(\mathbf{T_{n-2}}) = \pi - (\theta_{1,n-2} + \theta_{n-1,2} + \theta_n)$$

D'où

$$\mathcal{A}(P) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathcal{A}(\mathbf{T_i}) = (n-2)\pi - \left(\sum_{i=1}^{n-2} \theta_{1,i} + \theta_2 + \sum_{i=3}^{n-1} (\theta_{i,1} + \theta_{i,2}) + \theta_n \right) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Remarque. Cette égalité est aussi vraie pour les n-gones non-convexes. Il suffit de prendre l'enveloppe convexe et de soustraire l'aire d'un polygone convexe :



$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}) = \mathcal{A}(\mathscr{E}(\mathbf{Q})) - \mathcal{A}(\mathbf{R})$$

où $\mathscr{E}(\mathbf{Q})$ désigne l'enveloppe convexe de $\mathbf{Q}$.

Cela nous donne donc une condition nécessaire pour l'existence d'un polygone : il faut

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n < (n-2)\pi$$

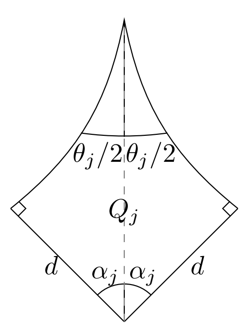
Notre première réaction fut de se dire qu'il n'existait pas de rectangle en géométrie hyperbolique, car $4 \times \pi/2 \not< (4-2)\pi$. Notre erreur provenait du fait que la définition d'un rectangle en géométrie euclidienne est assez subtile : c'est un 4-gone avec 4 angles *de même mesure* (et non 4 angles droits). On s'est alors demandé s'il est possible de construire des rectangles d'angle inférieur à $\pi/2$ (par exemple d'angle $\pi/3$? $\pi/4$? 0 ?).

On va donc montrer plus fort : cette condition est aussi suffisante !

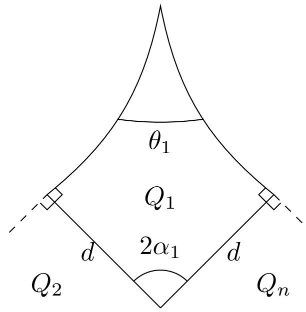
Cette partie s'inspire de [1].
Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ qui satisfont

$$\theta_1 + \ldots + \theta_n < (n-2)\pi$$

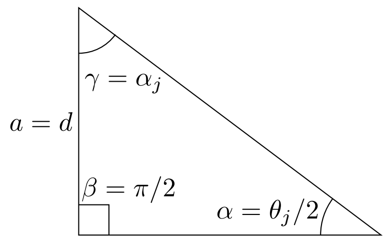
(avec $\theta_j \in [0, \pi[$ pour que le polygone soit convexe). On construit des quadrilatères Q_j avec un sommet à l'origine de Δ :



On cherche maintenant à déterminer s'il existe $d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on puisse recoller les Q_i pour obtenir P, c'est-à-dire s'il existe d tel que $\sum_i \alpha_i = \pi$.



En appliquant la loi des cosinus pour les angles $(I.4)$, on a



$$\cos(\alpha) = \mathfrak{c}_\kappa(a)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma)$$
$$\cos(\theta_j/2) = \cosh(d) \times 1 \times \sin(\alpha_j) - 0$$

d'où

$$\sin(\alpha_j) = \frac{\cos(\theta_j/2)}{\cosh(d)}$$

On étudie donc la fonction :

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\theta_j/2)}{\cosh(t)}\right)$$

$\cosh(t) > 1$ pour $t > 0$, et $t \mapsto \cosh(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc

$$t \mapsto \frac{\cos(\theta_j/2)}{\cosh(t)}$$

est décroissante et à valeurs dans $[0, 1]$.
Or, $\sin^{-1}$ est croissante sur $[0, 1]$, donc g est continue et décroissante.

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

$$g(0) = \sum_{j=1}^{n} \sin^{-1}(\cos(\theta_j/2)) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\pi - \theta_j}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(n\pi - \sum_j \theta_j\right) > \pi$$

car $\sum_j \theta_j < (n-2)\pi$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $g(d) = \pi$. Il existe donc un polygone d'angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$ avec $\sum_i \theta_i < (n-2)\pi$.

$$\theta_1 + \ldots + \theta_n < (n-2)\pi$$

est donc bien une *condition nécessaire et suffisante* pour l'existence d'un polygone P d'angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

On peut donc trouver en géométrie hyperbolique des rectangles d'angle α pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$.

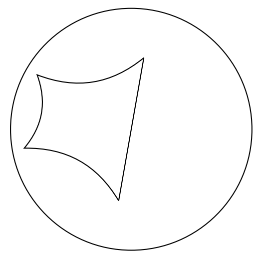


Figure II.4 – Exemple de rectangle hyperbolique sur Δ

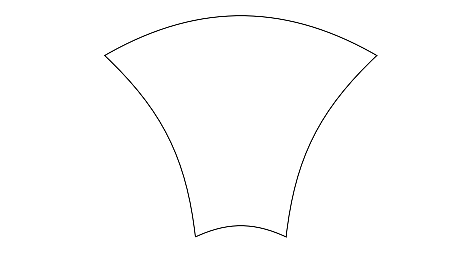


Figure II.5 – Exemple de rectangle hyperbolique sur H^2