lecture 1 presentation

Simon

29/7/2022

1. **Intro til kursus:**
2. **Differentierings regler (funktioner af en variable)**
3. **Differensiering med sidebetingler (Langrange)**

Section 1

Intro til kursus:

Section 2

Differentiering regler (funktioner af en variable)

Differentierings regler (funktioner af en variable)

For differentiable funktioner $f(x)$, $g(x)$. $h(x)$ og konstanten a gælder:

$$f(x) = a, \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ag(x) \rightarrow f'(x) = ag'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h(x)}{(h(x))^2}$$

$$f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$$

$$f(x) = g(x)^a \rightarrow f'(x) = ag(x)^{a-1}g'(x)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Kædereglen - Sammensatte funktioner

- Lad $z = f(x, y)$
- Lad y og x være funktioner af t: $y = g(t)$ og $x = h(t)$
- Her er z en sammensat funktion af t: $z = f(g(t), h(t))$
- Brug **kædereglen**:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} * \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y} * \frac{\delta y}{\delta t}$$

Kædereglen Eksempel

Antag funktionen: $F(x.y) = ln(x) + y^2$, hvor $x = e^{10t}$ og $y = \sqrt{50t}$

- Step 1: Find $F'_x(x,y)$ og $F'_y(x,y)$

$$F'_x(x,y) = \frac{1}{x}$$
$$F'_y(x,y) = 2y$$

- Step 2: Find x'_t og y'_t

$$x'_t = 10e^{10t}$$
$$y'_t = \frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

(Brug kæderegl for 1 variable)

Kædereglen Eksempel

- Step 3: Brug nu funktionen for kædereglen

$$F'_t(x,y) = \frac{1}{x}10^{10t} + 2y\frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

$$F'_t(x,y) = \frac{1}{x}10^{10t} + y\frac{50}{\sqrt{50t}}$$

Section 3

Differensiering med sidebetingler (Langrange)

Simpelt eksempel

Funktion $f(x, y) = x + y$ med betingelsen $g(x, y) = x^2 + y = 1$

Vi ønsker at optimere (find max) af f(x,y) givet side betingelsen derfor opstil Langrange:

$$L = x + y - \lambda(x^2 + y - 1)$$

Find afledte:

$$L'_x = 1 - 2x\lambda$$
$$L'_y = 1 - \lambda$$
$$L'_\lambda = -x^2 - y + 1$$

Vi kan nu sætte disse ligmed 0 og løse for de tre ubekendte.

Vi opnår følgende løsning: $x = 1/2$, $y = 3/4$ og $\lambda = 1$.

Optimeringm af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Antag budget restriktionen: $C_{1,t} + \frac{1}{(1+r_{t+1})} * C_{2,t+1} = W_t * A_t$

Samt nytte funktionen: $U_t = U(C_{1,t}) + \beta U(C_{2.t+1})$

- Hvor $\beta = 1/(1+\rho)$

Antag at: $U(C_{j,t}) = ln(C_{j,t})$

Dermed opstil Langrange:

$$L = ln(C_{1,t} + \frac{1}{1+\rho} * ln(C_{2,t+1}) - \lambda((C_{1,t} + \frac{1}{1+\rho} * C_{2,t+1}) - W_t * A_t)$$

Optimeringm af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Find afledte, og sæt ligmed 0:

$$L'_{C_{1,t}} = 1/C_{1,t} - \lambda = 0$$

$$L'_{C_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho} * \frac{1}{C_{2,t+1}} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0$$

Vi kan isolere $\lambda = 1/C_{1,t}$ og indsætte i $L'_{C_{2,t+1}}$

Vi kan nu reducere til vi har:

$$\frac{C_{1,t}}{C_{2,t+1}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}$$

(også kaldt Euler equation)