lecture 2 presentation

Simon Fløj Thomsen

29/7/2022

Section 1

Fase diagrammer

Ramsey model ligninger

Ligninger

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \theta g}{\theta}$$

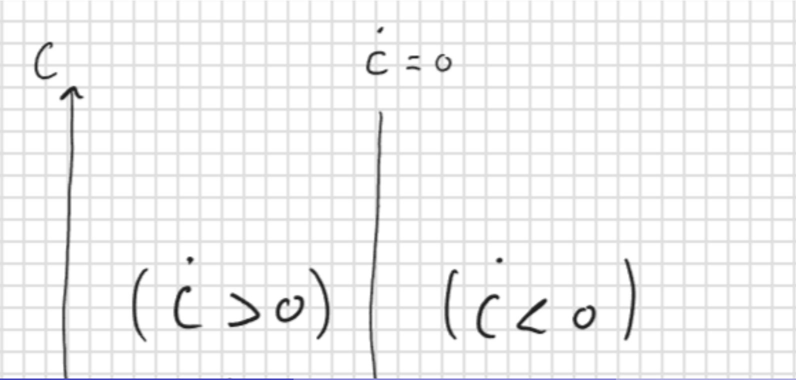
$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g)k$$

Kort forklaring af variable

- $f'(k)$ interest on capital
- ρ Discount raten (hvor meget værdi de sætter på forbrug nu relativt til forbrug i fremtiden)
- θ "risk" parameter, hvis lille er husholdningerne "okay" med at lade deres forbrug svinge mere periode fra periode
- g vækstraten i teknologi
- n vækstraten i arbejdskraft

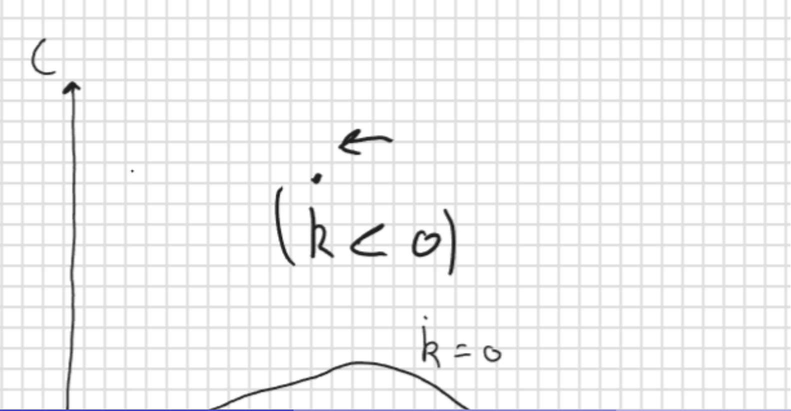
Dynamics of c

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \theta g}{\theta}$$
$$f'(k) - \rho - \theta g = 0$$
$$\rho - \theta g = f'(k)$$

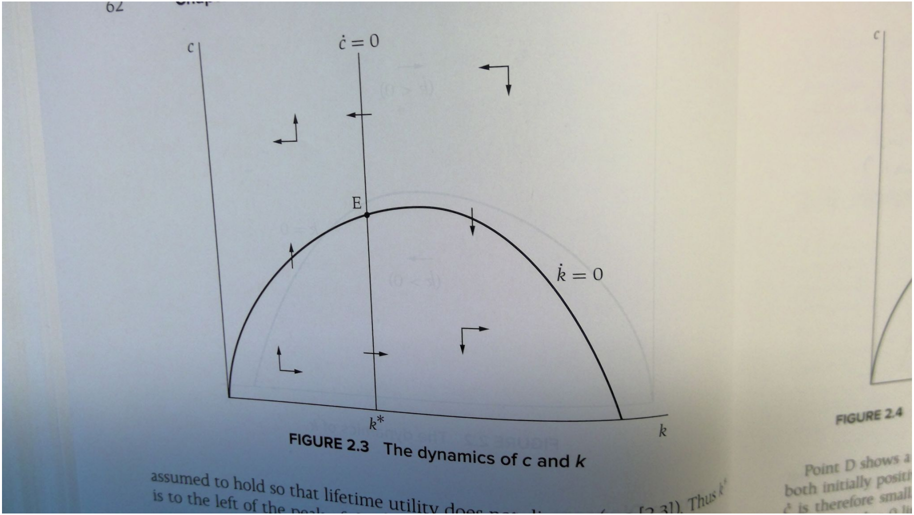


Dynamics of k

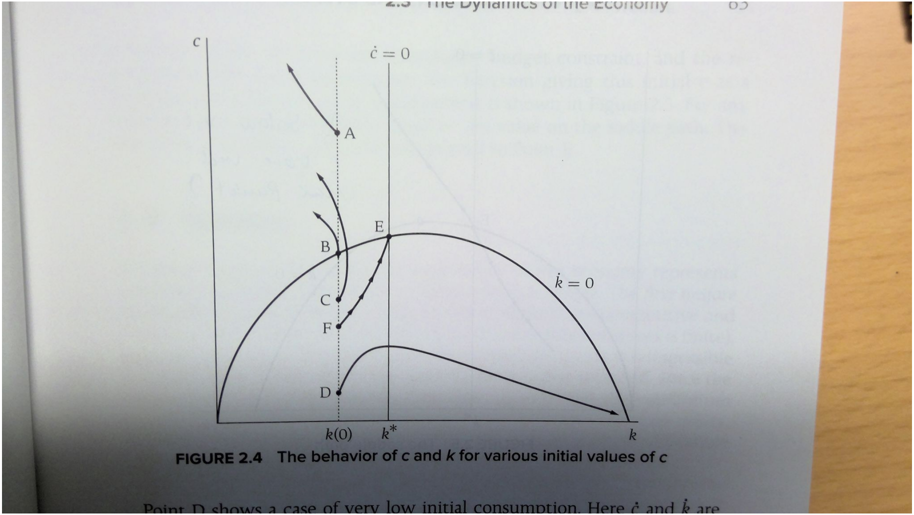
$$\dot{k} = f(k) - c - (n+g)k$$
$$f(k) - c - (n+g)k = 0$$
$$c = f(k) - (n+g)k$$



Combined


62
c
$\dot{c} = 0$
E
$\dot{k} = 0$
k^*
k
FIGURE 2.3 The dynamics of c and k
assumed to hold so that lifetime utility does
is to the left of the
FIGURE 2.4
Point D shows a
both initially positi

Combined



- k(0) eksogent bestemt
- Requirements:

Section 2

Taylor approximation

Generalt

Før så vi saddelpath i mod ligevægten:

Men! Hvor hurtigt tilpasser vi os til (c^*, k^*) ved afvigelser?

Maclaurin polynomials

Approximation af $f(x)$ når $x = 0$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

Taylor polynomials

Approximation af $f(x)$ når $x = c$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-c)^n$$

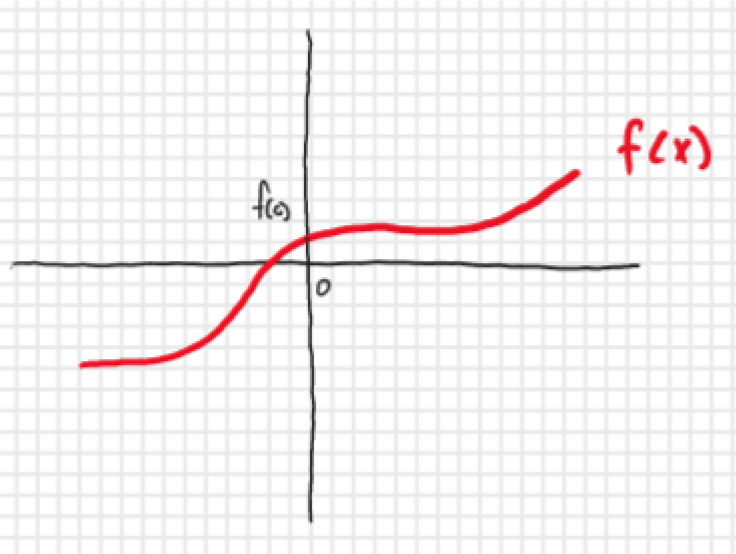
Maclaurin polynomials

- Maclaurin approximation af $f(x)$ når $x = 0$.

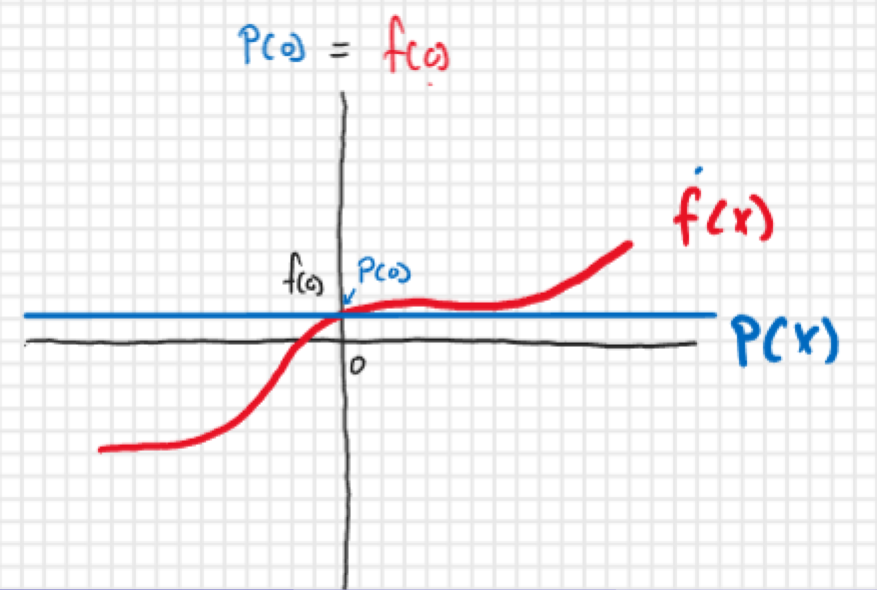
$$p(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) * \frac{1}{2!}x^2 + f'''(0) * \frac{1}{3!}x^3 + ... + f^n(0) * \frac{1}{n!}x^n$$

- Udledning

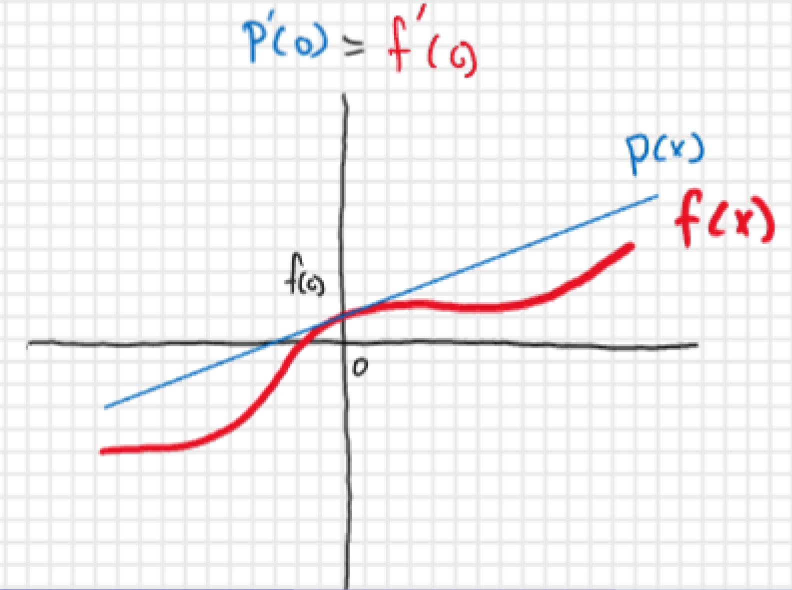
Maclaurin polynomials (udledning)



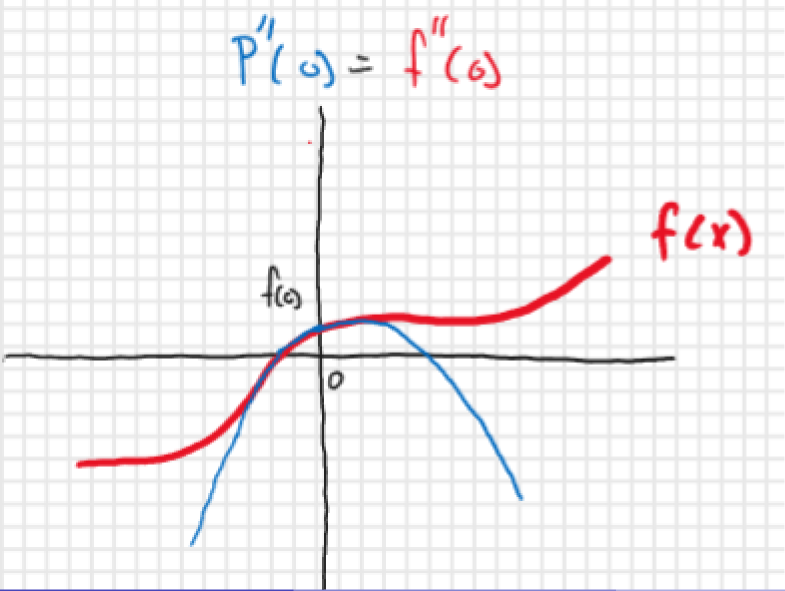
Maclaurin polynomials (udledning)



Maclaurin polynomials (udledning)



Maclaurin polynomials (udledning)



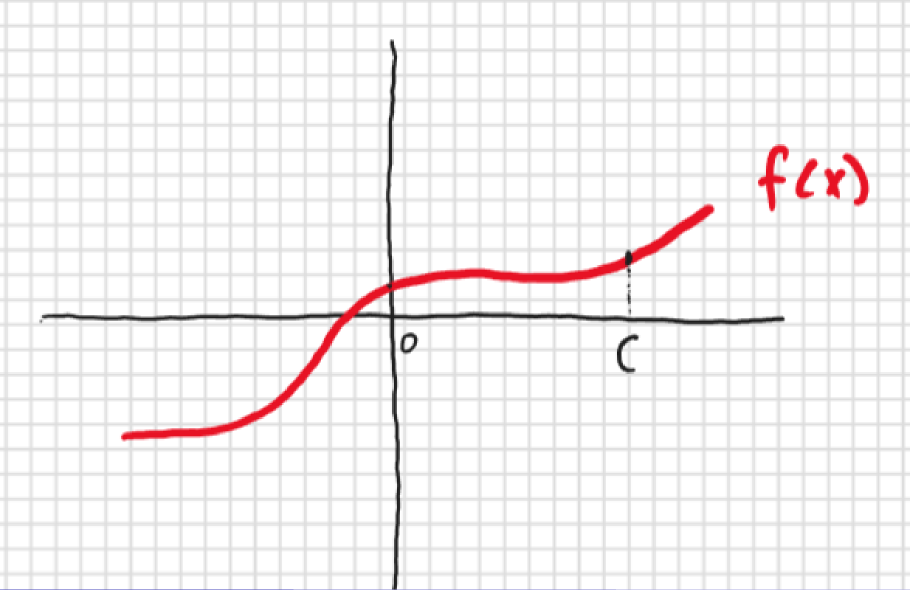
Taylor polynomials

- Taylor approximation of f(x) when x=c

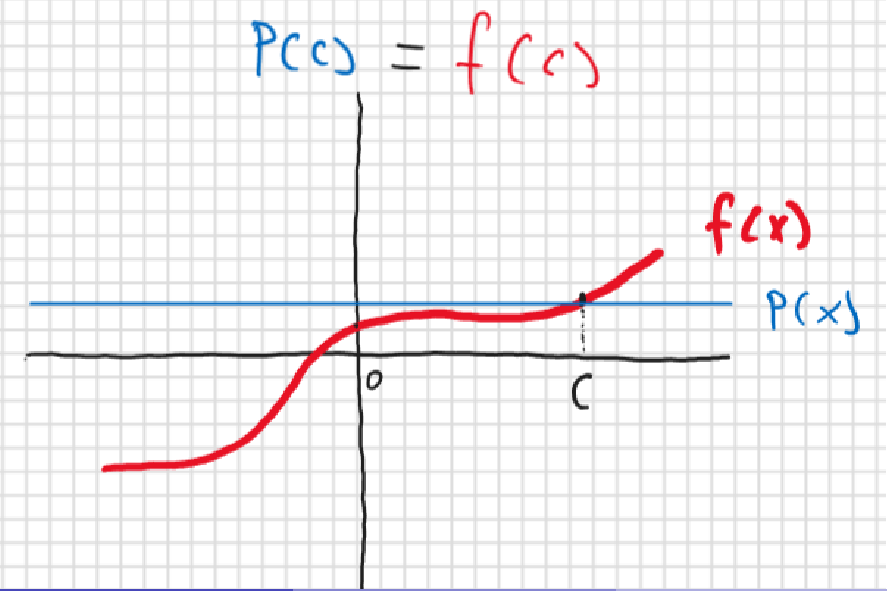
$$p(x) = f(0) + f'(0)(x-c) + f''(0) * \frac{1}{2!}(x-c)^2$$
$$+f'''(0) * \frac{1}{3!}(x-c)^3 + ... + f^n(0) * \frac{1}{n!}(x-c)^n$$

- Udledning

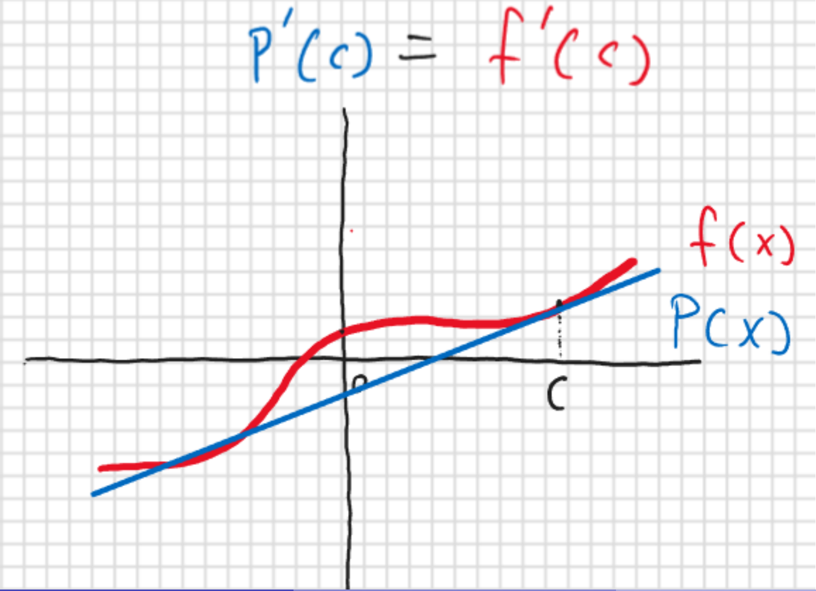
Taylor polynomials (udledning)



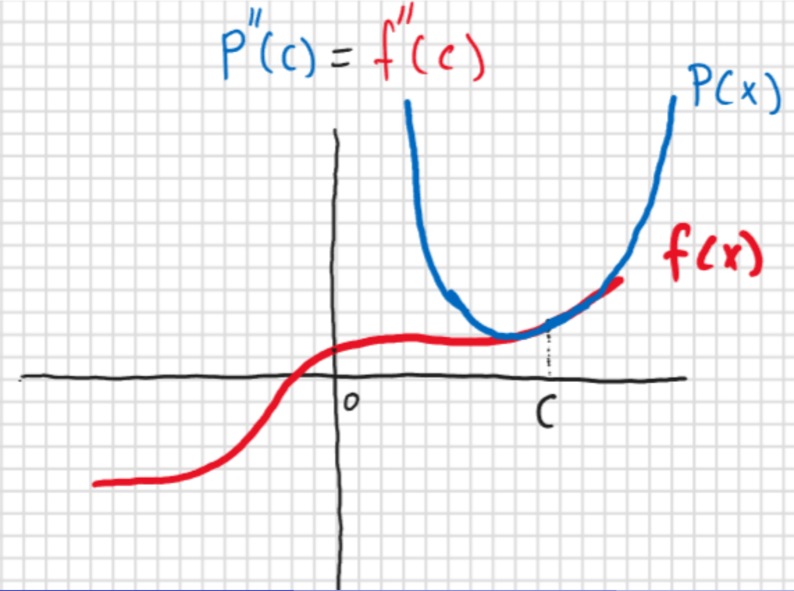
Taylor polynomials (udledning)



Taylor polynomials (udledning)



Taylor polynomials (udledning)



Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

Som nævnt tidligere ønsker vi at finde ud af hvor hurtigt vi tilpasser os k^* ved små afvigelser (find hældningen af saddelpath omkring k^*)

Hvordan? Find 1. order Taylor approximation omkring $k = k^*$ og $c = c^*$ givet:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \theta g}{\theta}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + g)k$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

Først opstiller vi de to taylor approximations:

$$\dot{c} \approx \frac{d\dot{c}}{dk}[k - k^*] + \frac{d\dot{c}}{dc}[c - c^*]$$
$$\dot{k} \approx \frac{d\dot{k}}{dk}[k - k^*] + \frac{d\dot{k}}{dc}[c - c^*]$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

Vi omskriver nu afvigelserne: $\tilde{c} = c - c^*$ og $\tilde{k} = k - k^*$ **Da c^* og k^* er konstante kan vi også skrive $\dot{\tilde{c}} = \dot{c}$ og $\dot{\tilde{k}} = \dot{k}$**

Dermed:

$$\dot{\tilde{c}} \approx \frac{d\dot{c}}{dk}\tilde{k} + \frac{d\dot{c}}{dc}\tilde{c}$$

$$\dot{\tilde{k}} \approx \frac{d\dot{k}}{dk}\tilde{k} + \frac{d\dot{k}}{dc}\tilde{c}$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

Vi kan nu finde de afledte!

- For $\dot{\tilde{c}}$

$$\frac{d\dot{c}}{dk} = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}$$

$$\frac{d\dot{c}}{dc} = 0$$

$$\dot{\tilde{c}} = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\tilde{k}$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

- For $\dot{\tilde{k}}$

$$\frac{d\dot{k}}{dk} = f'(k) - (n+g)$$

$$\frac{d\dot{k}}{dc} = -1$$

$$\dot{\tilde{k}} = [f'(k) - (n+g)]\tilde{k} - \tilde{c}$$

- ud fra $\dot{c}/c = 0$ kan vi udlede at $f'(k) = (\rho + \theta g)$

$$\dot{\tilde{k}} = [(\rho + \theta g) - (n+g)]\tilde{k} - \tilde{c}$$

- da $[(\rho + \theta g) - (n+g)]$ blot er parametre kan vi sætte det ligmed en konstant β

$$\dot{\tilde{k}} = \beta\tilde{k} - \tilde{c}$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

- For at få vækstraterne dividerer vi med $\tilde{c}$ i $\dot{\tilde{c}}$ og $\tilde{k}$ i $\dot{\tilde{k}}$

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} \frac{\tilde{k}}{\tilde{c}}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \beta - \frac{\tilde{c}}{\tilde{k}}$$

Vi kan se det der bestemmer growthrates i $\tilde{c}$ og $\tilde{k}$ er ratioen mellem de to!

Derfor hvis vækst raten er ens i de to ($\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$) vil rationen ikke ændres og der vil være en konstant vækstrate for både $\tilde{c}$ og $\tilde{k}$

- For at gøre det nemmere sætter vi nu $\mu = \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}}$

og kan omskrive $\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} \frac{\tilde{k}}{\tilde{c}}$ til:

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

- Ovenfor fandt vi at $\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$ defor kan vi nu skrive:

$$\mu = \beta - \frac{\tilde{c}}{\tilde{k}}$$

- Og kan nu indsætte udtrykket for $\frac{\tilde{c}}{\tilde{k}}$

$$\mu = \beta - \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{1}{\mu}$$

- Vi kan nu flytte det hele på venstresiden for at sætte ligmed 0:

$$\mu^2 - \beta\mu + \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} = 0$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

- Vi kan bruge nulpunktsformlen:

$$\mu = \frac{\beta \pm [\beta^2 - 4(f''(k^*)c^*/\theta]^{1/2}}{2}$$

MEN! Husk at $\tilde{c}$ og $\tilde{k}$ er afstanden fra deres steady states levels! Derfor hvis $\mu > 0$ vil afstanen vokse hver periode! Hvis tilgengæld $\mu < 0$ vil vi gå mod en ligevægt i (c^*, k^*)

- Vi ved $f''(k^*)$ er negativ (Da marginal produktet af kapital er aftagende)

Derfor benytter vi følgende nulpunkt:

$$\mu = \frac{\beta - [\beta^2 - 4(f''(k^*)c^*/\theta]^{1/2}}{2}$$

Taylor approximation Solow model (Eksempel fra bogen)

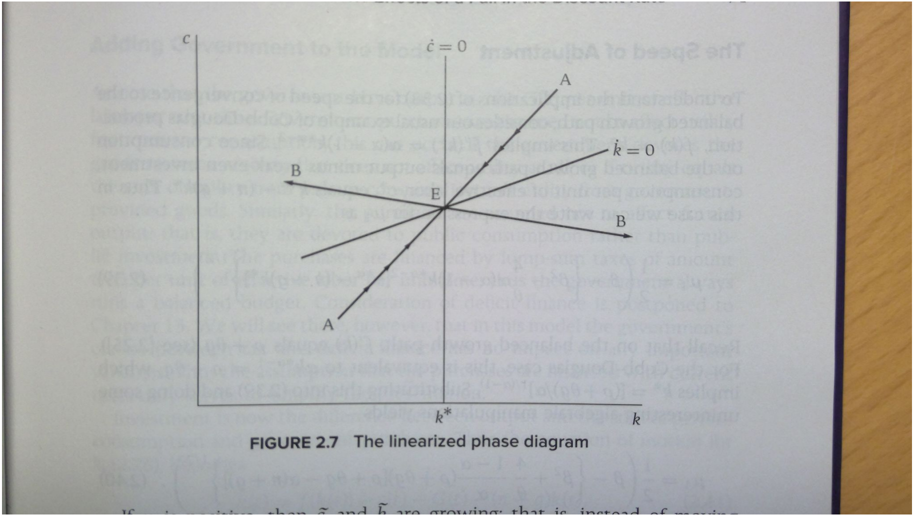


FIGURE 2.7 The linearized phase diagram

Section 3

Opgaver