

# lecture 1 presentation

Simon

29/7/2022

- 1 Intro til kursus:
- 2 Differentierings regler (funktioner af en variable)
- 3 Differensiering med sidebetingler (Langrange)

# Section 1

## **Intro til kursus:**

## Section 2

# Differentierings regler (funktioner af en variable)

# Differentierings regler (funktioner af en variable)

For differentiable funktioner  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  og konstanten  $a$  gælder:

$$f(x) = a, \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ag(x) \rightarrow f'(x) = ag'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$$

$$f(x) = g(x)^a \rightarrow f'(x) = ag(x)^{a-1}g'(x)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

## Eksempel:

1.2.6 fra vores opagerve sektion.

Find an expression for the impact of a marginal change in  $g$  on the fraction of output that is saved on the balanced growth path. Can one tell whether this expression is positive or negative?

Og så laver de 1.2.7 som opgave?

# Eksempel

Bevis inada conditions med cobb-douglas function

# Kædereglen - Sammensatte funktioner

- Lad  $z = f(x, y)$
- Lad  $y$  og  $x$  være funktioner af  $t$ :  $y = g(t)$  og  $x = h(t)$
- Her er  $z$  en sammensat funktion af  $t$ :  $z = f(g(t), h(t))$
- Brug **kædereglen**:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} * \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y} * \frac{\delta y}{\delta t}$$



# Kædereglen Eksempel

Antag funktionen:  $F(x,y) = \ln(x) + y^2$ , hvor  $x = e^{10t}$  og  $y = \sqrt{50t}$

- Step 1: Find  $F'_x(x,y)$  og  $F'_y(x,y)$

$$F'_x(x,y) = \frac{1}{x}$$

$$F'_y(x,y) = 2y$$

- Step 2: Find  $x'_t$  og  $y'_t$

$$x'_t = 10e^{10t}$$

$$y'_t = \frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

(Brug kædereglen for 1 variable)

# Kædereglen Eksempel

- Step 3: Brug nu funktionen for kædereglen

$$F'_t(x, y) = \frac{1}{x} 10^{10t} + 2y \frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

$$F'_t(x, y) = \frac{1}{x} 10^{10t} + y \frac{50}{\sqrt{50t}}$$

## Section 3

# Differensiering med sidebetingler (Langrange)

## Simpelt eksempel

Funktion  $f(x, y) = x + y$  med betingelsen  $g(x, y) = x^2 + y = 1$

Vi ønsker at optimere (find max) af  $f(x, y)$  givet side betingelsen derfor opstil Langrange:

$$L = x + y - \lambda(x^2 + y - 1)$$

Find afledte:

$$L'_x = 1 - 2x\lambda$$

$$L'_y = 1 - \lambda$$

$$L'_\lambda = -x^2 - y + 1$$

Vi kan nu sætte disse ligmed 0 og løse for de tre ubekendte.

Vi opnår følgende løsning:  $x = 1/2$ ,  $y = 3/4$  og  $\lambda = 1$ .

# Optimering af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Antag budget restriktionen:  $C_{1,t} + \frac{1}{(1+r_{t+1})} * C_{2,t+1} = W_t * A_t$

Samt nytte funktionen:  $U_t = U(C_{1,t}) + \beta U(C_{2,t+1})$

- Hvor  $\beta = 1/(1 + \rho)$

Antag at:  $U(C_{j,t}) = \ln(C_{j,t})$

Dermed opstil Lagrange:

$$L = \ln(C_{1,t}) + \frac{1}{1 + \rho} * \ln(C_{2,t+1}) - \lambda((C_{1,t} + \frac{1}{1 + \rho} * C_{2,t+1}) - W_t * A_t)$$

# Optimering af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Find afledte, og sæt lig med 0:

$$L'_{C_{1,t}} = 1/C_{1,t} - \lambda = 0$$

$$L'_{C_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho} * \frac{1}{C_{2,t+1}} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0$$

Vi kan isolere  $\lambda = 1/C_{1,t}$  og indsætte i  $L'_{C_{2,t+1}}$

Vi kan nu reducere til vi har:

$$\frac{C_{1,t}}{C_{2,t+1}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}$$

(også kaldt Euler equation)