lecture 1 presentation

Simon

29/7/2022

Section 1

Intro til kursus:

Intro til kursus:

mig

- Jeg tog kurset sidste år.
- Mail: sfth18@student.aau.dk
- kontor: fibigerstræde 10, lokale 24.

kurset

- 2 lektioner af 4 timer hvor største delen bliver brugt på øvelser.
- Gennemgang af løsning de sidse 30 minutter. (også på moodle)

Section 2

Differentierings regler (funktioner af en variable)

Differentierings regler (funktioner af en variable)

For differentiable funktioner $f(x)$, $g(x)$. $h(x)$ og konstanten a gælder:

$$f(x) = a, \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ag(x) \rightarrow f'(x) = ag'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h(x)}{(h(x))^2}$$

$$f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$$

$$f(x) = g(x)^a \rightarrow f'(x) = ag(x)^{a-1}g'(x)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Eksempel på Eksamens opgave sidste år:

Find an expression for the impact of a marginal change in g on the fraction of output that is saved on the balanced growth path. Can one tell whether this expression is positive or negative?

- Andel af output opsparet i steady state:

$$s = \frac{f(k^*) - c^*}{f(k^*)}$$

- Vi ved også at $\dot{k} = 0$ i steady state, derfor kan vi skrive $\dot{k} = f(k) - c - (n+g)k$ som følgene:

$$f(k^*) - c^* = (n+g)k^*$$

Eksempel på Eksamens opgave sidste år:

- Derfor kan vi nu omskrive andelen af savings til

$$s = \frac{(n+g)k^*}{f(k^*)}$$

- Vi skal nu differentiere dette udtryk mhs. til g. (hint: brug regler for differeniering af en brøk. Og husk g har også en effekt på k^* derfor skal kædereglen også bruges)
- 15 minuter (svaret er på næste side)

Eksempel på Eksamens opgave sidste år:

$$\frac{\delta s}{\delta g} = \frac{f(k^*)[(n+g)(\frac{\delta k^*}{\delta g}) + k^*] - (n+g)k^* f'(k^*)(\frac{\delta k^*}{\delta g})}{[f(k^*)]^2}$$

- Vi kan nu gange $f(k^*)$ ind i parentesen og sætter $(n+g)(\frac{\delta k^*}{\delta g})$ udenfor

$$\frac{\delta s}{\delta g} = \frac{f(k^*)(n+g)(\frac{\delta k^*}{\delta g}) + f(k^*)k^* - (n+g)k^* f'(k^*)(\frac{\delta k^*}{\delta g})}{[f(k^*)]^2}$$

$$\frac{\delta s}{\delta g} = \frac{(n+g)[f(k^*) - k^* f'(k^*)](\frac{\delta k^*}{\delta g}) + f(k^*)k^*}{[f(k^*)]^2}$$

- Da vi er i steady state ved vi at $f'(k^*) = \rho + \theta g$ vi kan differentiere med g på begge sider af lighedstegnet. (5 minutter, igen svaret er på næste slide)

Eksempel på Eksamens opgave sidste år:

$$f''(k^*)(\frac{\delta k^*}{\delta g}) = \theta$$

- Hvis vi isolere $(\frac{\delta k^*}{\delta g})$:

$$(\frac{\delta k^*}{\delta g}) = \frac{\theta}{f''(k^*)}$$

- Vi kan substituere dette ind i udtrykket:

$$\frac{\delta s}{\delta g} = \frac{(n+g)[f(k^*) - k^* f'(k^*)](\frac{\theta}{f''(k^*)}) + f(k^*)k^*}{[f(k^*)]^2}$$

Eksempel på Eksamens opgave sidste år:

- Vi kan nu gange med $f''(k^*)$ over og under brøken.

$$\frac{\delta s}{\delta g} = \frac{(n+g)[f(k^*) - k^* f'(k^*)]\theta + f(k^*)k^* f''(k^*)}{[f(k^*)]^2 f''(k^*)}$$

- Hvad kan vi sige om effekten af en marginal ændring i g på savings af output?
  - Vi ved at der er aftagende marginal produkt på kapital.

Section 3

Kædereglen - Sammensatte funktioner

Kædereglen - Sammensatte funktioner

- Lad $z = f(x, y)$
- Lad y og x være funktioner af t: $y = g(t)$ og $x = h(t)$
- Her er z en sammensat funktion af t: $z = f(g(t), h(t))$
- Brug **kædereglen**:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} * \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y} * \frac{\delta y}{\delta t}$$

Kædereglen Eksempel

Antag funktionen: $F(x.y) = ln(x) + y^2$, hvor $x = e^{10t}$ og $y = \sqrt{50t}$

- Step 1: Find $F'_x(x,y)$ og $F'_y(x,y)$

$$F'_x(x,y) = \frac{1}{x}$$
$$F'_y(x,y) = 2y$$

- Step 2: Find x'_t og y'_t

$$x'_t = 10e^{10t}$$
$$y'_t = \frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

(Brug kæderegl for 1 variable)

Kædereglen Eksempel

- Step 3: Brug nu funktionen for kædereglen

$$F_t'(x, y) = \frac{1}{x} 10^{10t} + 2y \frac{50}{2\sqrt{50t}}$$

$$F_t'(x, y) = \frac{1}{x} 10^{10t} + y \frac{50}{\sqrt{50t}}$$

Section 4

Differensiering med sidebetingler (Langrange)

Simpelt eksempel

Funktion $f(x, y) = x + y$ med betingelsen $g(x, y) = x^2 + y = 1$

Vi ønsker at optimere (find max) af f(x,y) givet side betingelsen derfor opstil Langrange:

$$L = x + y - \lambda(x^2 + y - 1)$$

Find afledte:

$$L'_x = 1 - 2x\lambda$$
$$L'_y = 1 - \lambda$$
$$L'_\lambda = -x^2 - y + 1$$

Vi kan nu sætte disse ligmed 0 og løse for de tre ubekendte.

Vi opnår følgende løsning: $x = 1/2$, $y = 3/4$ og $\lambda = 1$.

Optimeringm af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Antag budget restriktionen: $C_{1,t} + \frac{1}{(1+r_{t+1})} * C_{2,t+1} = W_t * A_t$

Samt nytte funktionen: $U_t = U(C_{1,t}) + \beta U(C_{2.t+1})$

- Hvor $\beta = 1/(1+\rho)$

Antag at: $U(C_{j,t}) = ln(C_{j,t})$

Dermed opstil Langrange:

$$L = ln(C_{1,t} + \frac{1}{1+\rho} * ln(C_{2,t+1}) - \lambda((C_{1,t} + \frac{1}{1+\rho} * C_{2,t+1}) - W_t * A_t)$$

Optimeringm af nytte funktion med budgetrestriktion (OLG model)

Find afledte, og sæt ligmed 0:

$$L'_{C_{1,t}} = 1/C_{1,t} - \lambda = 0$$

$$L'_{C_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho} * \frac{1}{C_{2,t+1}} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0$$

Vi kan isolere $\lambda = 1/C_{1,t}$ og indsætte i $L'_{C_{2,t+1}}$

Vi kan nu reducere til vi har:

$$\frac{C_{1,t}}{C_{2,t+1}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}$$

(også kaldt Euler equation)