

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA



Laboratorio 3 : Modelos de Estado y Sistemas Discretos

Integrante: Matías Osses Muñoz
Curso: Modelación y Simulación
Profesor: Gonzalo Acuña
Ayudante: Bryan Salas

19 de Junio de 2022

Tabla de contenidos

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Marco Teórico | 2 |
| 2.1. Sistemas Discretos | 2 |
| 2.2. Modelo de Estado | 2 |
| 2.3. Modelo Fenomenológico | 2 |
| 2.4. Variables de Estado | 2 |
| 2.5. Función de transferencia | 2 |
| 3. Desarrollo de la Primera Parte | 3 |
| 4. Desarrollo de la Segunda Parte | 9 |
| 5. Desarrollo de la Tercera Parte | 13 |
| 6. Conclusión | 14 |
| Bibliografía | 15 |

1. Introducción

En primer lugar, es importante entender que los modelos de estado surgen de la necesidad de lograr un tratamiento computacionalmente más eficiente en la operación de los modelos fenomenológicos (Acuña, s f).

El objetivo de este laboratorio es complementar el aprendizaje de modelos de estado y sistemas discretos, a través de la realización de actividades prácticas en MATLAB.

En primer lugar, se definirán los aspectos más importantes para el completo entendimiento de la experiencia, luego se procederá a mostrar el desarrollo de las 3 partes del laboratorio por separado, mostrando los resultados de la implementación, explicando los aspectos interesantes de esta, y finalmente se analizará y concluirá acerca de la experiencia realizada, los problemas presentados, y una conclusión general acerca de todas las experiencias.

Para la realización de este laboratorio se hizo uso de distintas herramientas, tales como MATLAB, para la implementación de las funcionalidades solicitadas, y de LaTeX, para la redacción y estructuración del presente informe.

2. Marco Teórico

2.1. Sistemas Discretos

Se denominan sistemas discretos aquellos que pueden ser definidos mediante un número finito de grados de libertad (Introducción a la teoría de vibraciones lineales, s f).

2.2. Modelo de Estado

los modelos de estado surgen de la necesidad de lograr un tratamiento computacionalmente más eficiente en la operación de los modelos fenomenológicos (Acuña, s f).

2.3. Modelo Fenomenológico

Un modelo fenomenológico es un modelo científico que describe la relación empírica de los fenómenos entre sí, de una manera que es consistente con la teoría fundamental, pero que no se deriva directamente de la teoría (Modelo Fenomenológico, s f).

2.4. Variables de Estado

Las variables de estado son el conjunto más pequeño de variables que determina el comportamiento dinámico de un sistema (Castaño, s f).

2.5. Función de transferencia

Una función de transferencia es una expresión matemática que caracteriza relaciones entre una entrada y una salida de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLI). Además, una función de transferencia también se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida, a la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de condiciones iniciales cero (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, 2015).

3. Desarrollo de la Primera Parte

En primer lugar se solicita el desarrollo algebraico del diagrama de cajas para obtener las matrices del modelo de estado, por lo que el desarrollo se muestra en las imágenes 1 y 2.

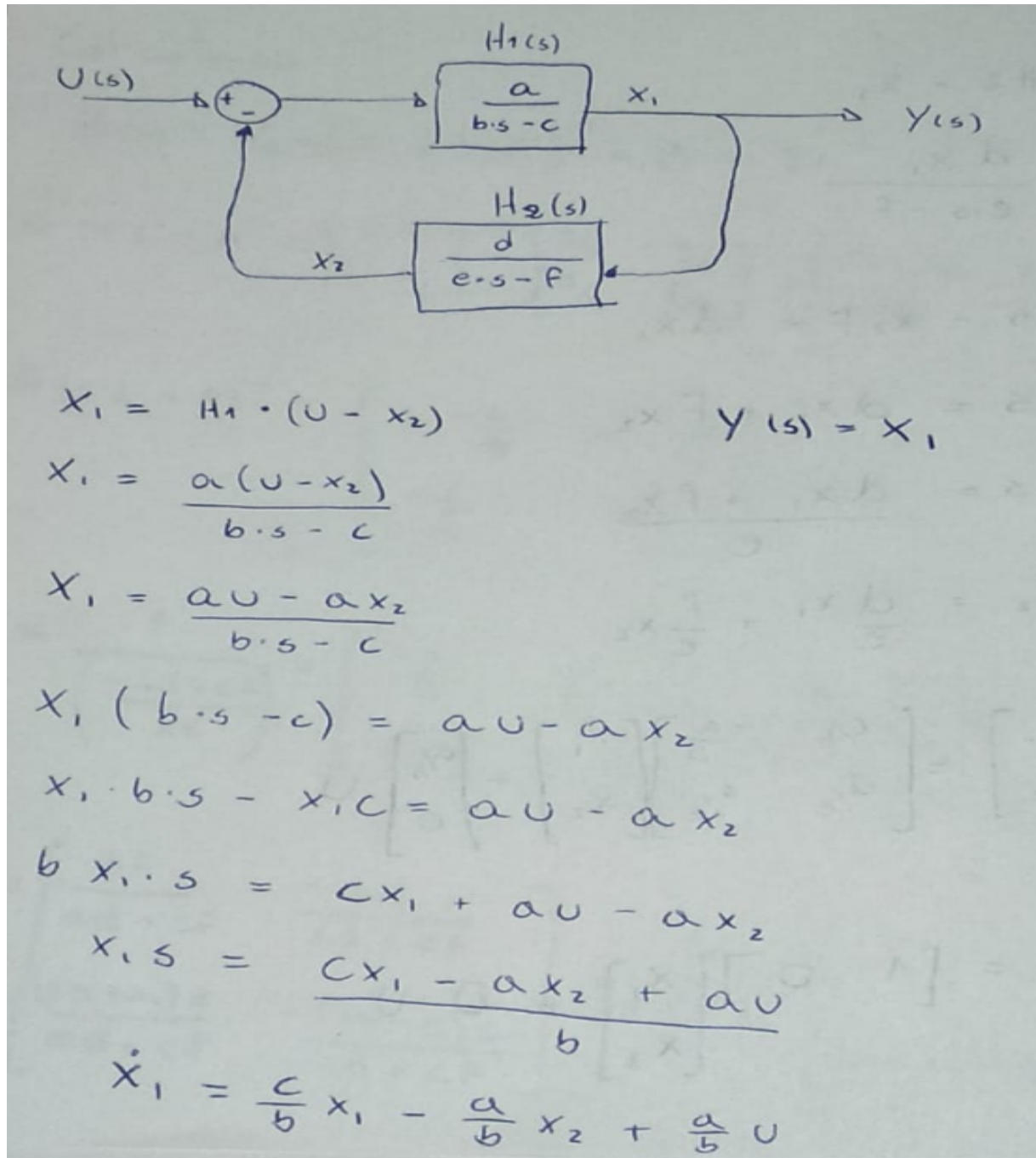


Figura 1: Primera parte del desarrollo del diagrama de cajas

$$x_2 = H_2 \cdot x_1$$

$$x_2 = \frac{d x_1}{e \cdot s - f}$$

$$x_2 \cdot e \cdot s - x_2 \cdot f = d x_1$$

$$e x_2 s = d x_1 + f x_2$$

$$x_2 s = \frac{d x_1 + f x_2}{e}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{e} x_1 + \frac{f}{e} x_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c/b & -a/b \\ d/e & f/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a/b \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 u$$

Figura 2: Segunda parte del desarrollo del diagrama de cajas

Dadas las matrices del modelo de estado resultantes del desarrollo anterior, se procede con la creación de la función *bam*, la cual recibirá los valores de a , b , c , d , e y f los cuales se inicializaron todos con el valor de 1 para realizar la experimentación, y que retornará la matrices correspondientes al modelo de estado. Por lo que en MATLAB, dentro de la función *bam*, se definen las matrices A, B, C y D con los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = 0$$

Luego de esto, se desea obtener la función de transferencia a través del uso de la fórmula $H(s) = C * (sI - A)^{-1} * B + D$, por lo que de manera algebraica resulta lo que se ve en las imágenes 3 y 4.

Luego de esto, se debe llegar al mismo resultado con la función *mab*, la cual recibe como entrada las matrices A, B, C y D, y retorna la función de transferencia correspondiente.

Para comprobar que las implementaciones funcionan de manera correcta, se calcula la función de transferencia usando la función *mab* y usando la función *feedback* y se grafican ambas tras la respuesta a un escalón con la función *step*, entregando el gráfico de la figura 5.

Tras observar el gráfico 5, se puede mencionar que con ambas funciones se obtiene el mismo resultado, por lo que es correcto decir que los cálculos que se realizan para calcular las matrices del modelo de estado con *bam* y los cálculos que se realizan para calcular la función de transferencia con *mab* son correctos.

calculando $H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c/b & -a/b \\ d/e & f/e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - c/b & a/b \\ -d/e & s - f/e \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{eb s^2 - (fb + ce)s + (fc + ad)}{be} \right)} \begin{bmatrix} s - \frac{f}{e} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & s - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{be}{eb s^2 - (fb + ce)s + (fc + ad)} \begin{bmatrix} s - \frac{f}{e} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & s - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{eb s^2 - (fb + ce)s + (fc + ad)} \begin{bmatrix} (se - f)b & -ae \\ db & (sb - c)e \end{bmatrix}$$

Figura 3: Primera parte del cálculo del diagrama de cajas

$$\begin{aligned}
 C \cdot (sI - A)^{-1} &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} (se-f)b & ae \\ -db & (sb-c)e \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} \cdot \begin{bmatrix} (se-f)b & ae \end{bmatrix} \\
 C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B &= \frac{1}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} \cdot \begin{bmatrix} (se-f)b & ae \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} \cdot ((se-f)a + 0) \\
 &\Rightarrow \frac{aes - fa}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} \\
 C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D &= \frac{aes - fa}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)} + 0 \\
 &\Rightarrow \frac{aes - fa}{es^2 - (fb+ce)s + (fc+ad)}
 \end{aligned}$$

Figura 4: Segunda parte del cálculo de la función de transferencia

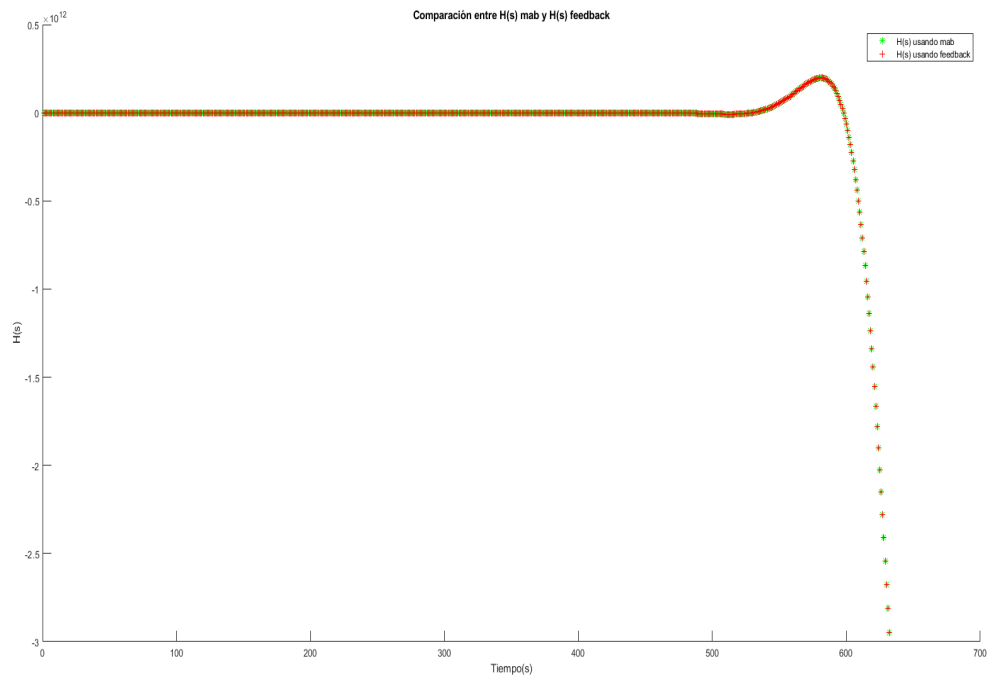


Figura 5: Gráfico comparativo de las funciones de transferencia calculadas con mab y con feedback

4. Desarrollo de la Segunda Parte

En primer lugar, se solicita realizar el desarrollo algebraico para encontrar las matrices del modelo de estado correspondiente al modelo fenomenológico que nos entregan, este desarrollo se puede ver en las imágenes 6, 7 y 8.

Entrada = f_e
salida = H_1 y H_2
estado = H_1 y H_2

si lo que varía es el volumen de los estanques
siendo $V_1 = h_1 A_1$ y $V_2 = h_2 A_2$
además se sabe que:

$$\frac{dv_1}{dt} = f_e + f_{i2} - f_{s1} - f_{i1}$$
$$\frac{dv_2}{dt} = f_e + f_{i1} - f_{s2} - f_{i2}$$

luego

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dh_1 \cdot A_1}{dt} = f_e + f_{i2} - f_{s1} - f_{i1}$$
$$\rightarrow \frac{dh_1}{dt} = \frac{f_e + f_{i2} - f_{s1} - f_{i1}}{A_1}$$

Figura 6: Primera parte del desarrollo del modelo fenomenológico

$$\Rightarrow \frac{dn_1}{dt} = \frac{f_e}{A_1} + \frac{h_2 - h_1}{R_{i2} \cdot A_1} - \frac{h_1}{R_{s1} A_1} - \frac{h_1 - h_2}{R_{i1} A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_1}{dt} = \frac{-h_1}{R_{i2} A_1} - \frac{h_1}{R_{s1} A_1} - \frac{h_1}{R_{i1} A_1} + \frac{h_2}{R_{i2} A_1} + \frac{h_2}{R_{i1} A_1} + \frac{f_e}{A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_1}{dt} = \frac{-h_1}{\frac{1}{8}} - \frac{h_1}{\frac{1}{5}} - \frac{h_1}{\frac{1}{2}} + \frac{h_2}{\frac{1}{8}} + \frac{h_2}{\frac{1}{2}} + \frac{f_e}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_1}{dt} = -15h_1 + 10h_2 + \frac{1}{2}f_e$$

luego

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{dn_2 A_2}{dt} = f_e + f_{i1} - f_{s2} - f_{i2}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_2}{dt} = \frac{f_e}{A_2} + \frac{f_{i1}}{A_2} - \frac{f_{s2}}{A_2} - \frac{f_{i2}}{A_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_2}{dt} = \frac{f_e}{A_2} + \frac{h_1 - h_2}{R_{i1} A_2} - \frac{h_2}{R_{s2} A_2} - \frac{h_2 - h_1}{R_{i2} A_2}$$

Figura 7: Segunda parte del desarrollo del modelo fenomenológico

$$\Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_{i1} \cdot A_2} + \frac{h_1}{R_{i2} A_2} - \frac{h_2}{R_{i1} \cdot A_2} - \frac{h_2}{R_{s2} A_2} - \frac{h_2}{R_{i2} A_2} + \frac{f_e}{A_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = h_1 + \frac{h_1}{\frac{1}{4}} - h_2 - \frac{h_2}{\frac{2}{5}} - \frac{h_2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} f_e$$

$$\Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = 5 h_1 - 4,5 h_2 + \frac{1}{4} f_e$$

Recopilando resultados

$$\dot{h}_1 = -15 h_1 + 10 h_2 + 0,5 f_e$$

$$\dot{h}_2 = 5 h_1 - 4,5 h_2 + 0,25 f_e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 5 & -4,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix} f_e$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 0 f_e$$

Figura 8: Tercera parte del desarrollo del modelo fenomenológico

Luego, con el resultado del desarrollo anterior, se obtienen las matrices A, B, C y D, que tienen los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 5 & -7,5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0$$

Por lo que con estas matrices, se puede obtener la función de transferencia asociada, la cual se calculó haciendo uso de la función anteriormente creada *mab*, con la que se obtuvieron 2 funciones de transferencia, dadas las 2 salidas.

Luego, se graficó la función de transferencia frente a 3 distintas entradas, las cuales fueron a un escalón, a un impulso, y a una función $u(t)$, las cuales se evaluaron gracias a las funciones de MATLAB *step*, *impulse* y *lsim* respectivamente.

Como resultado se obtuvo el gráfico de la figura 9, en donde se ven las 6 rectas, esto debido a que se obtienen 2 funciones de transferencia y se grafica ante 3 entradas. En rojo se pueden ver las funciones de transferencia ante la función $u(t)$, luego en verde se observan las funciones de transferencia frente a un escalón y finalmente en azul se pueden ver las funciones de transferencia ante un impulso.

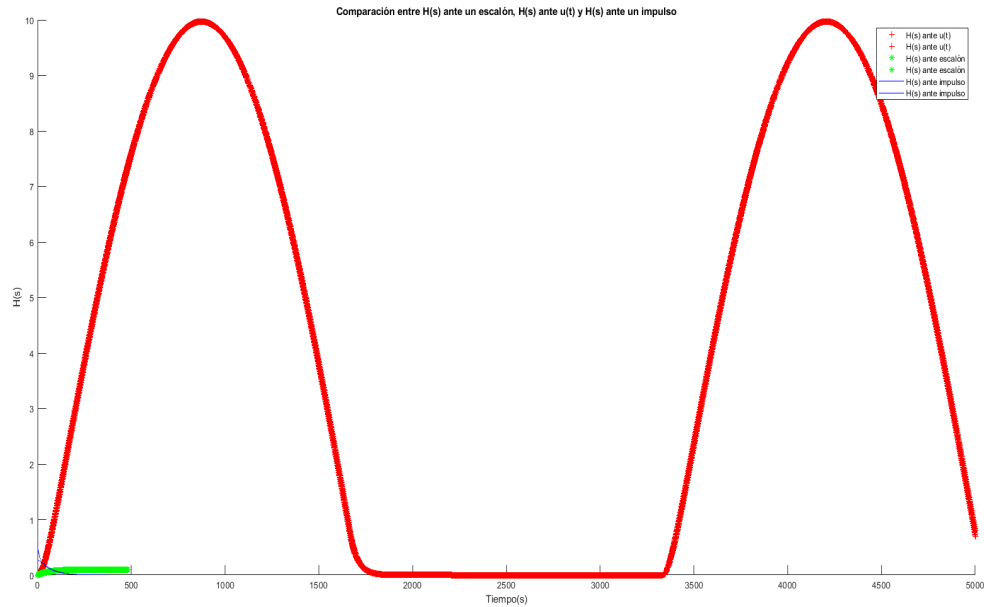


Figura 9: Gráfico comparativo de las distintas entradas a la función de transferencia obtenida

5. Desarrollo de la Tercera Parte

No se alcanzó a implementar ni desarrollar.

6. Conclusión

A modo de conclusión, se puede decir que no se cumplió el objetivo en su totalidad, ya que si bien, se lograron reforzar los conocimientos de modelos de estado, no se logró reforzar la parte de sistemas discretos.

En particular, en la primera parte, se lograron crear las funciones *bam* y *mab*, además de comparar gráficamente el resultado obtenido al usar las funciones implementadas con el resultado obtenido al usar la función *feedback* que provee MATLAB.

Con respecto a la segunda parte, se logró encontrar el modelo de estado que modela el problema planteado, permitiendo comprar gráficamente la función de transferencia obtenida dadas las 3 entradas solicitadas (escalón, impulso y $u(t)$).

Con respecto a la tercera parte, no se logró implementar dado problemas con la gestión del tiempo para la realización del laboratorio, siendo esta la sección afectada por la mala organización.

Gracias a esta experiencia, se lograron interiorizar los conocimientos de modelos de estado, al trabajar con el diagrama de bloques, las funciones de transferencia, y con el análisis del modelo fenomenológico, por otro lado, no se lograron reforzar los conocimientos de la parte de sistemas discretos, ya que no se alcanzó a implementar por una mala gestión del tiempo para realizar el laboratorio.

Para esta experiencia no existieron mayores dificultades más que las relacionadas al poco tiempo que se le asignó al trabajo del laboratorio.

Finalmente, se puede decir que gracias a las experiencias de laboratorio se lograron interiorizar de mejor manera los conocimientos de cada unidad, lo cual es clave para el desarrollo del curso.

Bibliografía

- Acuña, G. (s. f.). Mys clase 16. [Online] <http://www.udesantiagoovirtual.cl/moodle2/mod/folder/view.php?id=196036>.
- Castañó, S. (s. f.). Variables de estado o espacio de estados. [Online] <https://controlautomaticoeducacion.com/sistemas-dinamicos-lineales/variables-de-estado-espacio-de-estados/>.
- Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, D. d. I. M. (2015). Funcion transferencia. [Online] https://catedras.facet.unt.edu.ar/sistemasdecontrol/wp-content/uploads/sites/101/2015/12/CL03_Funci%C3%B3n_Transferencia_Modelado_y_an%C3%A1lisis_de_sistemas_2015.pdf.
- Introducción a la teoría de vibraciones lineales (s. f.). [Online] <https://cursos.aiu.edu/Cinematica%20y%20Dinamica/PDF/Tema%203.pdf>.
- Modelo Fenomenológico (s. f.). [Online] https://hmong.es/wiki/Phenomenological_model.