UdeSantiago

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
MODELACIÓN Y SIMULACIÓN

Laboratorio 3

Esteban López Garrido

Profesor: Gonzalo Acuña
Ayudante: Jorge Plaza

Santiago - Chile
Lunes, 3 de enero de 2022
2-2021

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

El presente documento tiene como finalidad presentar los resultados obtenidos luego de realizar la experiencia número 3 del laboratorio de Modelación y Simulación, equivalente a la segunda nota de cátedra.

Comenzando por el marco teórico, se detallan los principales conceptos a evaluar y posteriormente, el desarrollo será dividido en dos partes, la primera corresponde al desarrollo de la primera parte del enunciado, en donde a partir de un diagrama de bloques con funciones de transferencia con variables, se llega a despejar su modelo equivalente en espacio de estados. Posteriormente, en la segunda parte del desarrollo, utilizando un modelo de vasos comunicantes, desarrollarlo de forma algebraica y calcular sus respuestas a un impulso, escalón y a una función previamente definida.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia de un sistema representa una relación entre una entrada y una salida, se define mediante una variable independiente, llamada entrada y la respuesta al sistema llamado salida. Se representa como el cociente entre dos polinomios (el de salida y el de entrada), donde el orden del sistema está indicado por el orden del polinomio del denominador.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathscr{L}[y(t)]}{\mathscr{L}[x(t)]}$$

2.2 MODELO DE ESTADO

Un modelo de estado o también llamado modelo en espacio de estados es la representación de un sistema en n ecuaciones diferenciales. Cada modelo de estado está conformado por variables de estado, que determina el comportamiento dinámico de un sistema (Castaño, s.f.).

Un modelo de estado se puede representar de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Donde:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el (vector de estados)

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el (vector de salidas)

$u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el (vector de entradas)

$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la (matriz de estados)

$B(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ es la (matriz de entrada)

$C(t) \in \mathbb{R}^{q\times n}$ es la (matriz de salida)

$D(t) \in \mathbb{R}^{q\times p}$ es la (matriz de transmisión directa)

$\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$

Para el caso de esta experiencia, las matrices A,B,CyD no dependen del tiempo, esto quiere decir que el sistema es continuo e invariante en el tiempo.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LA PRIMERA PARTE

3.1 DESARROLLO ALGEBRAICO

Del diagrama de bloques se puede desplegar lo siguiente

$$
\begin{aligned}
Y &= x_1 \\
x_2 &= x_1 H_2 \\
x_1 &= (U - x_2) H_1 \\
x_1 &= U H_1 - x_2 H_1 \\
x_1 &= U H_1 - x_1 H_2 H_1 \\
x_1 (1 + H_2 H_1) &= H_1 U \\
x_1 &= \frac{H_1 U}{1 + H_2 H_1} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= H(s) = \frac{H_1 U}{1 + H_2 H_1}
\end{aligned}
$$

Operando para obtener la función de transferencia se tiene:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow H_1 H_2 &= \frac{ad}{(bs-c)(es-f)} && / + 1 \\
\Rightarrow 1 + H_1 H_2 &= \frac{ad + (bs-c)(es-f)}{(bs-c)(es-f)} && / \frac{1}{[\,]} \\
\Rightarrow \frac{1}{1 + H_1 H_2} &= \frac{(bs-c)(es-f)}{ad + (bs-c)(es-f)} && / \cdot H_1 \\
\Rightarrow \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} &= \frac{a}{(bs-c)} \cdot \frac{(bs-c)(es-f)}{ad + (bs-c)(es-f)} \\
&= \frac{a(es-f)}{ad + (bs-c)(es-f)} = H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{aes - af}{ad + bes^2 - bfs - ces + cf} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{(ae)s - af}{(be)s^2 - (bf + ce)s + (ad + cf)} && / \cdot \frac{\frac{1}{be}}{\frac{1}{be}} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{a}{b}s - \frac{af}{be}}{s^2 + \frac{bf+ce}{-be}s + \frac{ad+cf}{be}}
\end{aligned}
$$

Luego, se definen 2 variables de estado

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{\frac{a}{b}s - \frac{af}{be}} = \frac{U(s)}{s^2 + \frac{bf+ce}{-be}s + \frac{ad+cf}{be}} = Q(s)$$
$$X_1(s) = Q(s)$$
$$X_2(s) = sQ(s)$$

Obteniendo las matrices A,B,C,D,

$$\Rightarrow \frac{U(s)}{s^2 + \frac{bf+ce}{-be}s + \frac{ad+cf}{be}} = Q(s)$$
$$s^2Q(s) = \frac{bf+ce}{be}sQ(s) - \frac{ad+cf}{be}Q(s) + U(s)$$
$$sX_2(t) = \frac{bf+ce}{be}x_2(s) - \frac{ad+cf}{be}X_1(s) + U(s) \qquad /\mathscr{L}^{-1}[\,]$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ad+cf}{be} & \frac{bf+ce}{be} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{\frac{a}{b}s - \frac{af}{be}} = Q(s)$$
$$Y(s) = \frac{a}{b}sQ(s) - \frac{af}{be}Q(s)$$
$$Y(s) = \frac{a}{b}X_2(s) - \frac{af}{be}X_1(s) \qquad /\mathscr{L}^{-1}[\,]$$
$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{af}{be} & \frac{a}{b} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

3.2 EVALUACIÓN DEL RESULTADO EN MATLAB

Una vez obtenidas las ecuaciones se procede a ingresar los resultados en matlab, pero primero se definen las funciones requeridas.

3.2.1 Propuesta 1

Para obtener las matrices del modelo en espacio de estados basta con crear una función que devuelva los valores numéricos en base a la entrada de los valores a,b,c,d,e y f.

```
function [A,B,C,D] = bam(a,b,c,d,e,f)
    A = [0 1; -1*(a*d+c*f)/(b*e) (b*f+c*e)/(b*e)];
    B = [0; 1];
    C = [-1*(a*f)/(b*e) a/b];
    D = [0];
end
```

Luego, para obtener la función de transferencia, basta con aplicar la siguiente formula:

$$H = C(sI - A)^{-1}B - D$$

Como se utiliza la variable s como simbólica, esta expresión puede ser transformada con la ayuda de la función *numden()* y *sym2poly()*

```
function H = mab(A,B,C,D)
    syms s
    H = C*inv(s*eye(2)-A)*B-D;
    % transformación de sym a tf
    [num,den] = numden(H);
    H = tf(sym2poly(num),sym2poly(den));
end
```

Tomando como valores a=1,b=4,c=1,d=5,e=2,f=4 escogidos de forma arbitraria, al graficar la función step utilizando por una parte las funciones detalladas anteriormente (leyenda manual) y por otra parte las funciones nativas de MATLAB **step(feedback(H1,H2, -1))** (leyenda nativa) se obtiene lo siguiente:

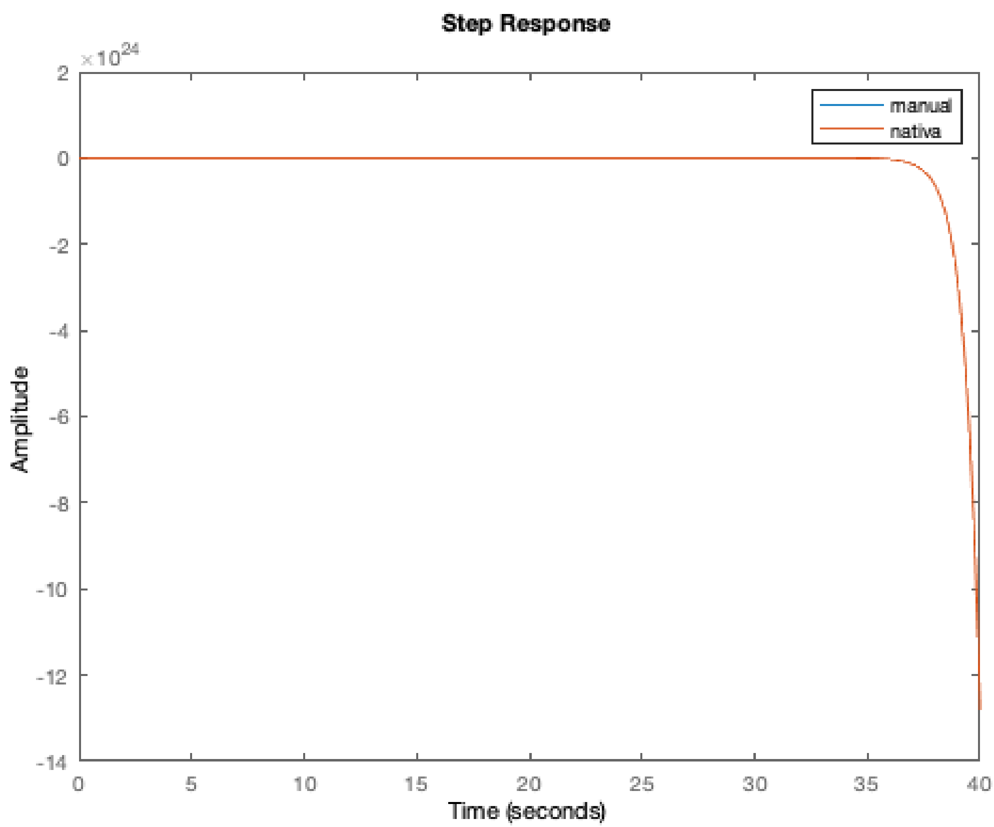

Figura 3-1: Gráfico de la respuesta del sistema

Como se puede ver, las curvas se sobreponen, indicando que el resultado está correcto.

3.2.2 Propuesta 2

Se puede obtener el mismo resultado utilizando la función *tf2ss()* para transformar la función de transferencia a modelo de espacio de estados y también *ss2tf()* para el caso inverso. El resultado de esta propuesta no será analizado.

```
function [A,B,C,D] = bam2(a,b,c,d,e,f)
    s = tf("s");
    H1 = a/(b*s-c);
    H2 = d/(e*s-f);
    [num,den] = tfdata(feedback(H1,H2, -1),'v');
    [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
end

function H = mab2(A,B,C,D)
    [b,a] = ss2tf(A,B,C,D);
    H = tf(b,a);
end
```

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DE LA SEGUNDA PARTE

4.1 DESARROLLO ALGEBRAICO

De la figura se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
V_1 &= A_1 \cdot h_1 \\
V_2 &= A_2 \cdot h_2 \\
\frac{dV_1}{dt} &= F_e - F_{i1} - F_{s1} + F_{i2} \\
\frac{dV_2}{dt} &= F_e - F_{i2} - F_{s2} + F_{i1}
\end{aligned}
$$

Reemplazando las funciones del enunciado en las derivadas se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA_1h_1}{dt} &= F_e - \frac{h_1 - h_2}{R_{i1}} - \frac{h_1}{R_{s1}} + \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}} \\
&= F_e - \frac{h_1}{R_{i1}} + \frac{h_2}{R_{i1}} - \frac{h_1}{R_{s1}} + \frac{h_2}{R_{i2}} - \frac{h_1}{R_{i2}} \\
&= F_e - [\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_1 + [\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dA_2h_2}{dt} &= F_e - \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}} - \frac{h_2}{R_{s2}} + \frac{h_1 - h_2}{R_{i1}} \\
&= F_e - \frac{h_2}{R_{i2}} + \frac{h_1}{R_{i2}} - \frac{h_2}{R_{s2}} + \frac{h_1}{R_{i1}} - \frac{h_2}{R_{i1}} \\
&= F_e - [\frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{s2}} + \frac{1}{R_{i1}}]h_2 + [\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_1
\end{aligned}
$$

Como A_1 y A_2 son constantes, se pueden sacar de la derivada:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}F_e - \frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_1 + \frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_2$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}F_e - \frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{s2}} + \frac{1}{R_{i1}}]h_2 + \frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]h_1$$

Y luego:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{i2}}]x_1 + \frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]x_2 + \frac{1}{A_1}u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}]x_1 - \frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{s2}} + \frac{1}{R_{i1}}]x_2 + \frac{1}{A_2}u(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{i2}}] & \frac{1}{A_1}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}] \\ \frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}] & -\frac{1}{A_2}[\frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{s2}} + \frac{1}{R_{i1}}] \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{A_2} \end{bmatrix}}_{B} u$$

Reemplazando los valores constantes del problema:

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 5 & -7{,}5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}}_{B} u$$

Luego, se sabe que $y_1 = F_{s1} = \frac{h_1}{R_{s1}} = \frac{1}{R_{s1}}x_1$ y $y_2 = F_{s2} = \frac{h_2}{R_{s2}} = \frac{1}{R_{s2}}x_1$:

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{s1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{s1}} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$
$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

4.2 EVALUACIÓN DEL RESULTADO EN MATLAB

Finalmente, se ingresa el valor de las matrices del modelo de estado resultante en MATLAB y se gráfica la respuesta a un impulso, escalón y a la función u(t) para ambas salidas

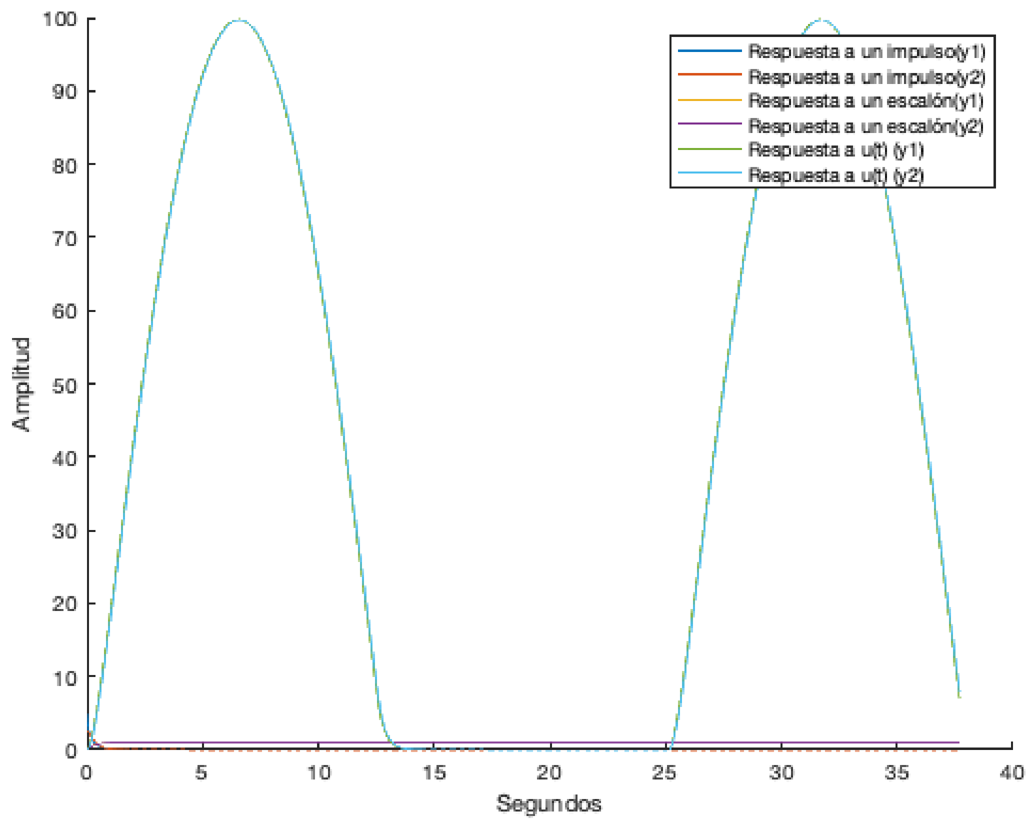

Figura 4-1: Gráfico de la respuesta del sistema

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

MATLAB es un potente software matemático el cual cuenta con una gran cantidad de funciones integradas útiles en cuanto se refiere a modelamiento de sistemas, lo cual ayuda al análisis e interpretación de los mismos.

La experiencia actual utilizó las propiedades del software con el fin de generar gráficos y calcular las funciones de transferencia de funciones en el dominio del tiempo y sistemas compuestos.

Finalmente, se logró cumplir los objetivos de la experiencia en su totalidad, contrastando los resultados obtenidos del desarrollo algebraico con los lanzados al momento de ejecutar las mismas acciones en el software MATLAB.

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

Castaño, S. (s.f.). *Variables de Estado o Espacio de Estados*. Control Automático Educación. Consultado el 21 de diciembre de 2021, desde https://controlautomaticoeducacion.com/sistemas-dinamicos-lineales/variables-de-estado-espacio-de-estados/