UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Laboratorio 2 : Funciones de Transferencia

Integrante:	Matías Osses Muñoz
Curso:	Modelación y Simulación
Profesor:	Gonzalo Acuña
Ayudante:	Bryan Salas

12 de Mayo de 2022

Tabla de contenidos

1. Introducción

En primer lugar, es importante entender que una función de transferencia es una expresión matemática que caracteriza relaciones entre una entrada y una salida de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLI). Además, una función de transferencia también se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida, a la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de condiciones iniciales cero (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, 2015).

El objetivo de este laboratorio es realizar el análisis de sistemas lineales por medio de sus funciones de transferencia mediante MATLAB. Para este análisis se utilizarán las respuestas de las funciones de lazo abierto y lazo cerrado y la utilización de funciones de MATLAB para la construcción de los mismos diagramas.

En primer lugar, se definirán los aspectos más importantes para el completo entendimiento de la experiencia, luego se procederá a mostrar el desarrollo de ambas partes del laboratorio por separado, mostrando los resultados de la implementación, explicando los aspectos interesantes de esta, y finalmente se analizará y concluirá acerca de la experiencia realizada, los problemas presentados, y posibles mejoras para futuras experiencias.

Para la realización de este laboratorio se hizo uso de distintas herramientas, tales como MATLAB, para la implementación de las funcionalidades solicitadas, y de LaTeX, para la redacción y estructuración del presente informe.

2. Marco Teórico

2.1. Función de transferencia

Una función de transferencia es una expresión matemática que caracteriza relaciones entre una entrada y una salida de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLI). Además, una función de transferencia también se define como la relación de la transformada de Laplace de la salida, a la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de condiciones iniciales cero (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, 2015).

2.2. Sistemas continuos

Los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Introducción a la teoría de vibraciones lineales, s f).

2.3. Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Un sistema lineal, en tiempo continuo o discreto, es aquel que posee la importante propiedad de la superposición. Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada produce el mismo desplazamiento en la señal de salida (Obando, 2017).

2.4. Lazo abierto

Al sistema de control en el cual la salida no afecta la acción de control se denomina sistema de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada (Moya, 2018).

2.5. Lazo cerrado

En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador con la señal de error de actuación, el cual es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (Moya, 2018).

2.6. Ganancia estática

Se denomina ganancia estática de un sistema a la la relación de ganancia entre la entrada y la salida del proceso. Es decir, cuando la entrada es constante (escalón) y la salida se estabiliza, la razón del cambio de la salida entre el cambio de la entrada nos da la ganancia estática del sistema (Castaño, s f).

2.7. Tiempo de estabilización

El tiempo de estabilización de un sistema dinámico se define como el tiempo necesario para que la salida alcance y se estabilice dentro de una banda de tolerancia determinada (Cabrera, s f).

2.8. Polos de una función de transferencia

Corresponden a las raíces del denominador de la función de transferencia (Montoya, s f).

2.9. Ceros de una función de transferencia

Corresponden a las raíces del numerador de la función de transferencia (Montoya, s f).

3. Desarrollo de la Primera Parte

En primer lugar, hay que obtener la función de transferencia de cada una de las ecuaciones diferenciales mostradas en la imagen 1.

1. $6\dot{y}(t) + 2y(t) = 8\dot{u}(t); \quad y(0) = 3; \quad u(0) = 1$
2. $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 3y(t) - 5\ddot{u}(t) - 7\dot{u}(t) - u(t) = 0; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0; \quad \dot{u}(0) = 1; \quad u(0) = 0$

Figura 1: Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

Para esto, desarrollaremos la primera que aparece en la imagen 1: En primer lugar se aplica transformada de Laplace a la ecuación, quedando:

$$6(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 8(sU(s) - u(0))$$

Luego reemplazamos los valores iniciales, lo que nos queda:

$$6(sY(s) - 3) + 2Y(s) = 8(sU(s) - 1)$$

Seguimos desarrollando:

$$6sY(s) - 18 + 2Y(s) = 8sU(s) - 8$$

Sumamos 18 a ambos lados:

$$6sY(s) + 2Y(s) = 8sU(s) + 10$$

Factorizamos por Y(s):

$$Y(s)(6s + 2) = 8sU(s) + 10$$

Dividimos en ambos lados por 6s + 2:

$$Y(s) = \frac{8s}{6s+2}U(s) + \frac{10}{6s+2}$$

Finalmente, sabemos que la función de transferencia H1(s) es igual al RESC dividido por U(s), entonces:

$$H1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8s}{6s+2} = \frac{4s}{3s+1}$$

Luego, se analiza esta función de transferencia ante una respuesta de lazo abierto y a una de lazo cerrado, obteniendo las siguientes funciones:
Lazo abierto:

$$\frac{4s}{3s+1}$$

Lazo cerrado:

$$\frac{4s}{7s+1}$$

Además, los gráficos obtenidos para cada una de estas 2 respuestas, se pueden ver en las figuras 2 y 3.

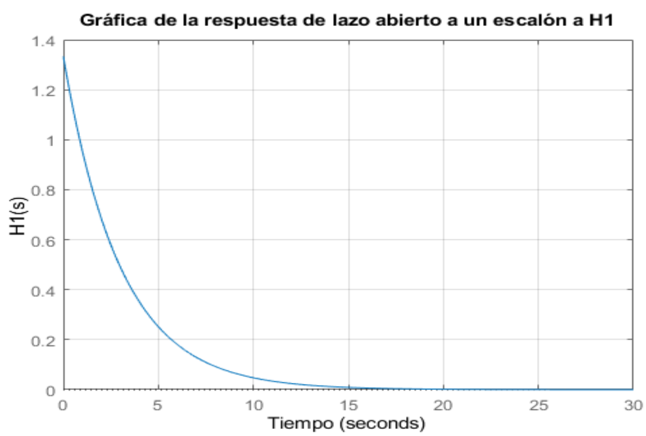

Figura 2: Gráfico de la respuesta a lazo abierto de la primera H1(s)

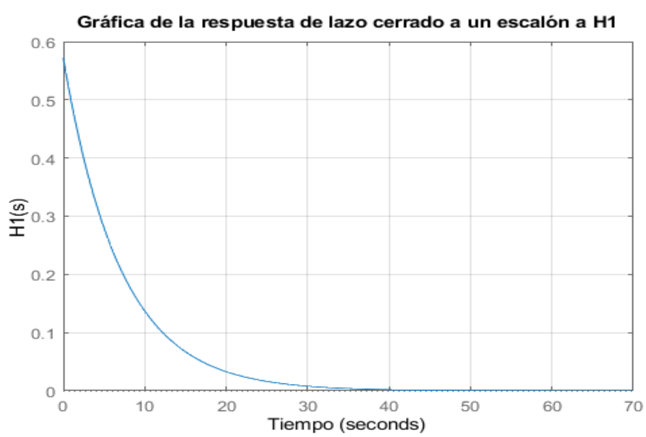

Figura 3: Gráfico de la respuesta a lazo cerrado de la primera H1(s)

Ahora, desarrollaremos la segunda ecuación diferencial: En primer lugar se reordena la ecuación para trabajarla igual que la primera, por lo que queda:

$$y'' + 6y' + 3y = 5u'' + 7u' + u$$

Ahora se aplica transformada de Laplace a la expresión:

$$(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+6(sY(s)-y(0))+3Y(s) = 5(s^2U(s)-su(0)-u'(0))+7(sU(s)-u(0))+U(s)$$

Reemplazamos los valores iniciales en la expresión anterior:

$$s^2Y(s) + 6sY(s) + 3Y(s) = 5(s^2U(s) - 1) + 7sU(s) + U(s)$$

Factorizamos por Y(s) en el lado izquierdo y por U(s) en el lado derecho:

$$Y(s)(s^2 + 6s + 3) = U(s)(5s^2 + 7 + 1) - 5$$

Dividimos a ambos lados por $s^2 + 6s + 3$:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 7 + 1}{s^2 + 6s + 3}U(s) - \frac{5}{s^2 + 6s + 3}$$

Finalmente, sabemos que la función de transferencia H2(s) es igual al RESC dividido por U(s), entonces:

$$H2(s) = \frac{5s^2 + 7 + 1}{s^2 + 6s + 3}$$

Luego, se analiza esta función de transferencia ante una respuesta de lazo abierto y a una de lazo cerrado, obteniendo las siguientes funciones:

Lazo abierto:

$$\frac{5s^2 + 7 + 1}{s^2 + 6s + 3}$$

Lazo cerrado:

$$\frac{5s^2 + 7 + 1}{6s^2 + 13s + 4}$$

Además, los gráficos obtenidos para cada una de estas 2 respuestas, se pueden ver en las figuras 4 y 5.

Finalmente, con ayuda de los gráficos se pueden estimar las ganancias estáticas y los tiempos de estabilización, y con ayuda de las funciones de Matlab para calcular los ceros y los polos (*zero* y *pole* respectivamente) se obtuvo la siguiente tabla.

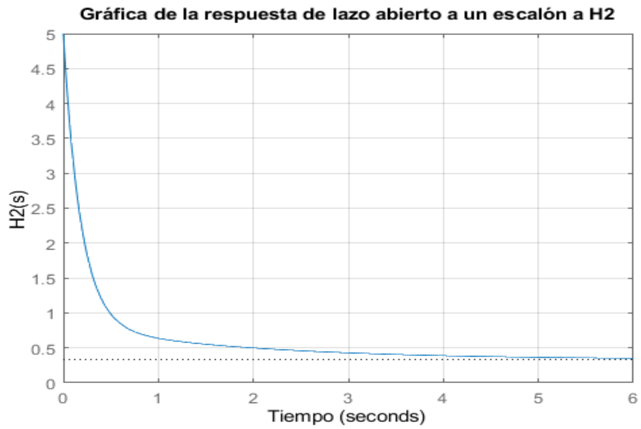

Figura 4: Gráfico de la respuesta a lazo abierto de la primera H2(s)

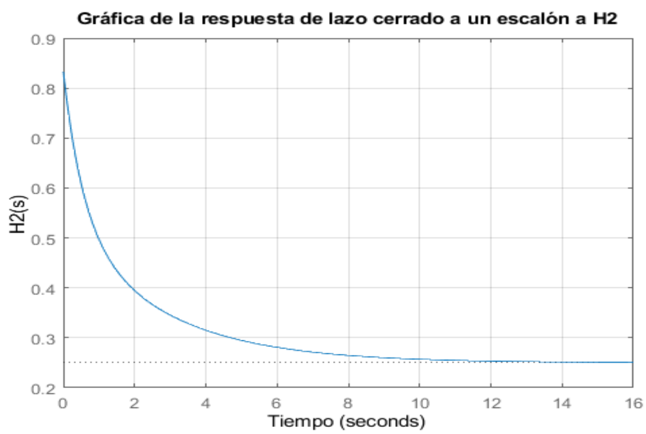

Figura 5: Gráfico de la respuesta a lazo cerrado de la primera H2(s)

Dado el cuadro 1, se puede observar que en ambas funciones de transferencia, los ceros encontrados en los lazos abierto como en los encontrados en los lazos cerrados son exactamente iguales, esto se debe a que en ambas funciones se mantiene el mismo numerador. Con respecto a los polos de las funciones, se puede ver que varían según si es de lazo abierto o si es de lazo cerrado, esto debido a la retroalimentación que se da en el lazo cerrado, lo que cambia el numerador del lazo cerrado con respecto al abierto.

Con respecto a la ganancia estática es interesante observar que en la primera función es 0 en ambos casos (lazo abierto y cerrado), en cambio en la segunda función toma los valores de 0.35 y 0.25 respectivamente, en estos casos, la ganancia estática es al valor que converge el sistema cuando se estabiliza, con respecto a esto mismo se pueden observar los

Tabla comparativa				
Respuesta	Ganancia Estática	Tiempo de estabilización (seg)	ceros	polos
L. A. H1	0	17.50	0	-0.33
L. C. H1	0	40	0	-0.14
L. A. H2	0.35	6	-1.24 y -0.16	-5.45 y -0.55
L. C. H2	0.25	14.70	-1.24 y -0.16	-1.80 y -0.37

Cuadro 1: tabla comparativa

distintos tiempos de estabilización que presentan las respuestas a las funciones, en donde se puede observar que, en ambos casos, la respuesta de lazo cerrado se demora más tiempo en estabilizarse que la de lazo abierto.

Esta parte se implementó en Matlab, utilizando solo las funciones de transferencia, ya que estas fueron calculadas a mano previamente, en primer lugar se colocaron las instrucciones de *clear* y *clc*, las cuales limpian el workspace y la consola respectivamente, para ver solo los datos que se están utilizando en cada ejecución, luego se utilizó la función *tf()* para crear el modelo de la función de transferencia, a continuación, se creó la función de transferencia H1 y se obtuvo su respuesta a un lazo abierto y cerrado, para el lazo abierto se utilizo la misma función y para el lazo cerrado se hizo uso de la función *feedback*, se realizaron los respectivos gráficos, con su título, grilla y nombres de cada eje, y luego de esto se calcularon los ceros y los polos de ambas respuestas, utilizando las funciones *zero* y *pole* respectivamente, posteriormente se realizó el mismo procedimiento para la función H2, para graficar y para calcular los ceros y polos.

4. Desarrollo de la Segunda Parte

Para obtener la función de transferencia del diagrama de bloque expuesto en la figura 6, se analizó y se observó que la función 1, 2 y la parte de abajo, están conectados en paralelo, y se juntan con un sumador, además, se identificó que la función 4 y 5 están conectadas en serie con la retroalimentación positiva de la función 3, y estos resultados a su vez, se conectan en paralelo sumándose en el sumador que está antes de la función 6, luego esta suma, se conecta en serie con la función 6, obteniendo finalmente el resultado de la parte de abajo y conectarlo con las funciones 1 y 2 a través del sumador como se explico anteriormente.

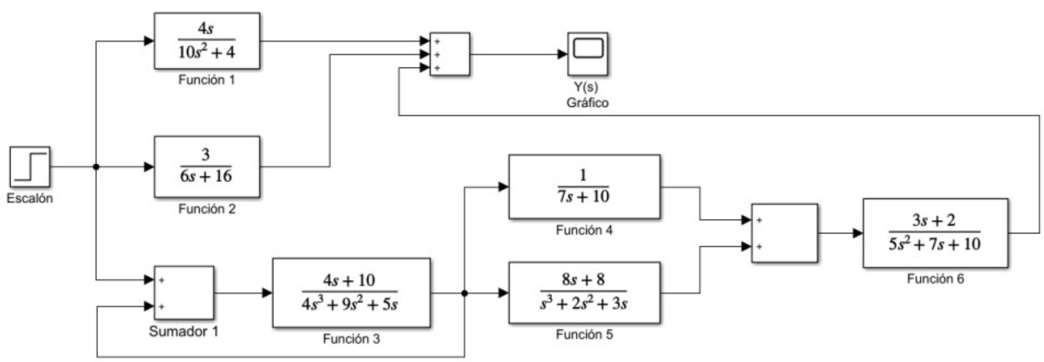

Figura 6: Diagrama de Bloque

El análisis mencionado anteriormente, se muestra paso a paso a continuación:

En primer lugar, se realiza la retroalimentación de función 3, utilizando feedback en Matlab, con el segundo parámetro +1 ya que se tiene una retroalimentación positiva:

$$retroalimentacion(3) = feedback(funcion3, +1)$$

Luego, se conectan en serie la retroalimentación con las funciones 4 y 5:

$$serie(3,4) = retroalimentacion(3) * funcion4$$

$$serie(3,5) = retroalimentacion(3) * funcion5$$

A continuación, se juntan los resultados anteriores en el sumador que viene antes de la función 6:

$$sumador = serie(3, 4) + serie(3, 5)$$

Después, este resultado se conecta en serie con la función 6:

$$parteInferior = sumador * funcion6$$

Finalmente, se conectan en paralelo las funciones 1, 2 y la parte inferior, a través del sumador que se encuentra antes de la salida:

$$H(s) = funcion1 + funcion2 + parteInferior$$

Luego, con ayuda de Matlab, se calculó la función de transferencia resultante, obteniendo la figura 7.

```
funcion_transferencia =

  30240 s^14 + 317936 s^13 + 1.67e06 s^12 + 5.802e06 s^11 + 1.495e07 s^10 + 3.082e07 s^9 + 5.313e07 s^8 + 7.666e07 s^7 + 9.098e07 s^6 + 8.766e07 s^5 + 6.685e07 s^4 + 3.861e07 s^3 + 1.663e07 s^2

                                                                                                                                     + 5.39e06 s + 1.024e06

  -----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

  33600 s^15 + 403040 s^14 + 2.326e06 s^13 + 8.722e06 s^12 + 2.384e07 s^11 + 5.03e07 s^10 + 8.466e07 s^9 + 1.157e08 s^8 + 1.293e08 s^7 + 1.183e08 s^6 + 8.782e07 s^5 + 5.218e07 s^4 + 2.407e07 s^3

                                                                                                                                     + 8.144e06 s^2 + 1.92e06 s
```

Figura 7: Función de Transferencia Obtenida

Con esta función de transferencia, se graficó su respuesta a un escalón como entrada, esto se puedo realizar, gracias a la ayuda de la función step() de Matlab que realiza la gráfica que se muestra en la figura 8. Cabe mencionar que dado el gráfico, el sistema es inestable, ya que no converge a ningún valor, sino que crece hasta el infinito.

La implementación de lo anterior, se realizó utilizando Matlab, en primer lugar se colocaron las instrucciones de *clear* y *clc*, las cuales limpian el workspace y la consola respectivamente, para ver solo los datos que se están utilizando en cada ejecución, luego se utilizó la función *tf()* para crear el modelo de la función de transferencia, a continuación, se pasaron las 6 funciones del diagrama a Matlab, para luego operar siguiendo la metodología anteriormente explicada, finalmente se obtuvo la función de transferencia del diagrama de

Figura 8: Gráfico de la respuesta de la función de transferencia obtenida a un escalón

bloques y se graficó la función *step()*, añadiendo el título, la grilla y los nombres de los ejes respectivos.

5. Conclusión

A modo de conclusión, se puede decir que se cumplió el objetivo de analizar los sistemas lineales por medio de las funciones de transferencia utilizando Matlab, además de analizar igualmente las respuestas a los lazos abiertos y cerrados para ambas funciones entregadas. Por otro lado, se logró igualmente trabajar con los diagramas de bloques con ayuda de Matlab y sus funciones.

En particular, se logró obtener y analizar las funciones de transferencia de cada una de las ecuaciones diferenciales entregadas, graficándo las respuestas a un lazo abierto y a uno cerrado en cada caso. Además de comparar sus ganancias estáticas, tiempos de estabilización, polos, y ceros de las funciones obtenidas.

Con respecto a la segunda parte, se logró obtener la función de transferencia del diagrama de bloque para poder ver su respuesta frente a un escalón, utilizando los conocimientos previos acerca la conexión en como funcionan las conexiones en serie y en paralelo.

Gracias a esta experiencia, se logró reforzar los conocimientos de trabajar con ecuaciones diferenciales para obtener las respectivas funciones de transferencia, así como también se reforzó el trabajo con diagramas de bloques y las respuestas que tienen las funciones de transferencia a un escalón.

Finalmente la mayor dificultad fue obtener las ganancias estáticas y los tiempos de estabilización por confusiones con los conocimientos previos, lo que se solucionó con búsqueda de información en internet.

Bibliografía

Cabrera, J. (s. f.). Tiempo de asentamiento: ¿qué es? [Online] https://telcom.jaol.net/tiempo-de-asentamiento/#:~:text=El%20tiempo%20de%20estabilizaci%C3%B3n%20de,una%20banda%20de%20tolerancia%20determinada.

Castaño, S. (s. f.). Sistemas dinámicos de primer orden. [Online] https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/sistemas-dinamicos-de-primer-orden/#:~:text=Se%20denomina%20ganancia%20est%C3%A1tica%20de,la%20ganancia%20est%C3%A1tica%20del%20sistema.

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, D. d. I. M. (2015). Funcion transferencia. [Online] https://catedras.facet.unt.edu.ar/sistemasdecontrol/wp-content/uploads/sites/101/2015/12/CL03_Funci%C3%B3n_Transferencia_Modelado_y_an%C3%A1lisis_de_sistemas_2015.pdf.

Introducción a la teoría de vibraciones lineales (s. f.). [Online] https://cursos.aiu.edu/Cinematica%20y%20Dinamica/PDF/Tema%203.pdf.

Montoya, A. (s. f.). Ejemplo de solución de sli mediante laplace. [Online] https://udeasytes.wordpress.com/ecuaciones/clases/semana-10-transformada-inversa-de-laplace-y-solucion-a-sli/ejemplo-de-solucion-de-sli-mediante-laplace/.

Moya, S. (2018). Conceptos básicos: Sistemas de control. [Online] https://www.isamex.org/intechmx/index.php/2018/12/24/conceptos-basicos-sistemas-de-control/.

Obando, L. F. (2017). Sistemas lineales e invariantes en el tiempo. [Online] https://dademuch.com/2017/11/13/sistemas-ldcid-modeling-fundamentos/.