

SUMMER CAMP 2022

Trường Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

presented by Đỗ Phan Thuận
dophanthuan@gmail.com

Khoa Học Máy Tính
Đại học Bách Khoa Hà Nội



Ngày 17 tháng 5 năm 2022

Bài 1. LIS

Bài 2. ICBUS

Bài 3. COBOX

Dãy con của một dãy là dãy thu được khi xóa đi một vài phần tử của dãy ban đầu và giữ nguyên thứ tự của các phần tử còn lại (có thể không xóa phần tử nào). Một dãy được gọi là tăng dần nếu phần tử sau lớn hơn phần tử trước.

Cho một dãy số nguyên a , hãy tìm dãy con tăng dài nhất của a

Subtask 1+2

- ▶ Subtask 1: Duyệt toàn bộ các dãy con, ĐPT $O(2^n)$
- ▶ Subtask 2: Cài đặt trực tiếp theo công thức qui hoạch động thông dụng, ĐPT $O(n^2)$

Subtask 3

QHD + Chia để trị

- ▶ ký hiệu $S[i]$ là độ dài dãy con tăng dài nhất kết thúc tại i
- ▶ Gọi $pos[k]$ là vị trí có giá trị trong mảng a nhỏ nhất mà có độ dài dãy con tăng là k
- ▶ Tức là $pos[k] = i$ khi $S[i] = k$ và $a[i]$ là nhỏ nhất trong các i thoả mãn $S[i] = k$
- ▶ Khi đó dãy $a[pos[k]]$ tăng dần khi k tăng lên
- ▶ Nên khi xét đến i , ta sẽ chắt nhệ phân để tìm ra k mà $a[pos[k]] < a[i]$
- ▶ Khi đó $S[i] = k + 1$ và $pos[k + 1] = \max(pos[k + 1], i)$

Bài 1. LIS

Bài 2. ICBUS

Bài 3. COBOX

Quốc gia Backoi có N thành phố, mỗi thành phố có một hệ thống xe chạy liên tỉnh khác nhau. Một xe có thể chạy từ thành phố i sang thành phố j nếu như có đường nối trực tiếp giữa hai thành phố này. Các con đường ở đây đều là đường 2 chiều. Mỗi hệ thống xe liên tỉnh có một số luật như sau:

- ▶ Hành khách muốn sử dụng hệ thống xe của thành phố i thì bắt buộc phải bắt xe tại thành phố i .
- ▶ Giá vé xe của thành phố i là đồng hạng C_i bất kể quãng đường bao xa.
- ▶ Hệ thống xe của thành phố i chỉ cho phép chạy tối đa qua D_i thành phố.

Quân là một hành khách muốn đi từ thành phố 1 đến thành phố N . Hãy giúp Quân tìm cách đi sao cho tổng chi phí là thấp nhất.

Thuật toán 100 điểm

$$2 \leq N \leq 5000; N - 1 \leq K \leq 10000$$

1. Loang tạo lại đồ thị trọng số mới giữa các đỉnh theo hệ thống tính giá vé xe bus rồi áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị mới.
2. Hoặc áp dụng thuật toán Dijkstra trực tiếp trên đồ thị ban đầu, vừa làm vừa tạo cạnh.
3. Lưu ý sử dụng FastI/O.

Bài 1. LIS

Bài 2. ICBUS

Bài 3. COBOX

COBOX

Cho n chiếc hộp được đánh số từ 1 đến n . Hộp thứ i có chiều dài a_i , chiều rộng b_i . Hộp i có thể đặt vào trong hộp j nếu i chưa bị chứa bởi hộp nào khác, j đang không chứa hộp nào khác và $a_i < a_j, b_i < b_j$. Cần tìm cách lồng các hộp vào nhau sao cho số hộp không bị lồng vào bất kỳ hộp nào là ít nhất. Nếu có nhiều cách lồng các hộp đều là tốt nhất, in ra cách bất kỳ

Thể loại bài

- ▶ Bài toán cần tìm Phân rã bè cực tiểu (Minimum Clique Cover - MCC) trên đồ thị comparability.
- ▶ Đồ thị comparability là loại đồ thị thoả mãn với bất kỳ bộ 3 đỉnh u, v, w nếu có cung uv và cung vw thì phải có cung wu .
- ▶ Phân rã bè cực tiểu MCC = tập độc lập cực đại MIS
- ▶ Bài toán dãy con tăng dài nhất chính là bài toán tập độc lập cực đại trên đồ thị mà mỗi đỉnh tương ứng với 1 số, mỗi cung tương ứng với số bên trái nhỏ hơn số bên phải. Ví dụ dãy: 5 3 7 thì đồ thị tương ứng có 3 đỉnh và 2 cung 57 và 37.

Subtask 1

$$n \leq 5000$$

$$O(n^2).$$

Subtask 2

$$a_i = b_i.$$

Qui hoạch động đơn giản giống bài dãy con tăng dài nhất. Độ phức tạp $O(n \log n)$.

Thuật toán 100 điểm

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9.$$

- ▶ Sắp xếp tăng theo a .
- ▶ Bài toán trở thành: Tìm cách phân hoạch dãy b thành ít nhất các dãy con tăng. Chính là độ dài dãy con không tăng dài nhất. Độ phức tạp $O(n \log n)$.

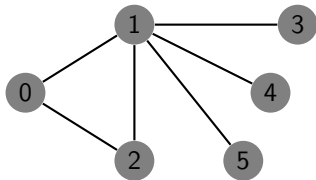
Có thể áp dụng cây BIT2D cho hai chiều của hình hộp cho độ phức tạp $O(n \log^2 n)$. Có thể mất một số test quá thời gian.

Một số bài toán quen thuộc trên đồ thị

- ▶ Đây là những bài toán cơ bản rất hay được sử dụng để ra bài trong các kỳ thi
- ▶ Thường xuyên được ẩn chứa kín trong phát biểu bài toán
- ▶ Xét một số ví dụ

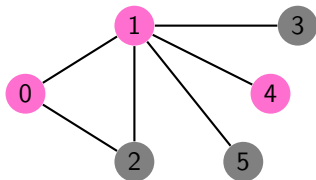
Bài toán phủ đỉnh - MVC

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một phủ đỉnh là một tập con các đỉnh S , sao cho với mỗi cạnh $(u, v) \in E$, hoặc u hoặc v (hoặc cả hai) thuộc S



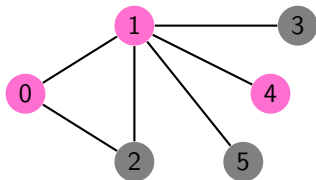
Bài toán phủ đỉnh - MVC

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một phủ đỉnh là một tập con các đỉnh S , sao cho với mỗi cạnh $(u, v) \in E$, hoặc u hoặc v (hoặc cả hai) thuộc S



Bài toán phủ đỉnh - MVC

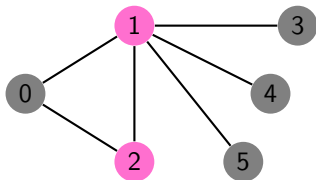
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một phủ đỉnh là một tập con các đỉnh S , sao cho với mỗi cạnh $(u, v) \in E$, hoặc u hoặc v (hoặc cả hai) thuộc S



- ▶ Hãy tìm một phủ đỉnh có lực lượng nhỏ nhất

Bài toán phủ đỉnh - MVC

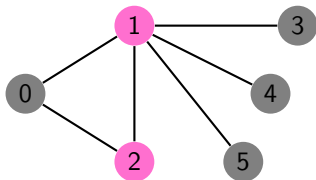
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một phủ đỉnh là một tập con các đỉnh S , sao cho với mỗi cạnh $(u, v) \in E$, hoặc u hoặc v (hoặc cả hai) thuộc S



- ▶ Hãy tìm một phủ đỉnh có lực lượng nhỏ nhất

Bài toán phủ đỉnh - MVC

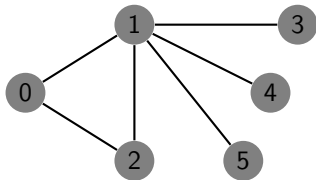
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một phủ đỉnh là một tập con các đỉnh S , sao cho với mỗi cạnh $(u, v) \in E$, hoặc u hoặc v (hoặc cả hai) thuộc S



- ▶ Hãy tìm một phủ đỉnh có lực lượng nhỏ nhất
- ▶ Đây là bài toán NP-khó đối với đồ thị tổng quát

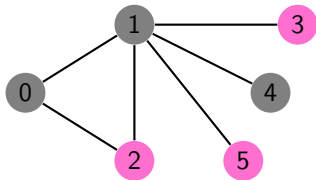
Bài toán tập độc lập - MIS

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tập độc lập là một tập con các đỉnh S , sao cho không có hai đỉnh u, v nào trong S kề với nhau trong G



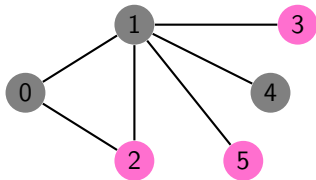
Bài toán tập độc lập - MIS

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tập độc lập là một tập con các đỉnh S , sao cho không có hai đỉnh u, v nào trong S kề với nhau trong G



Bài toán tập độc lập - MIS

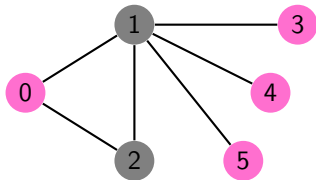
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tập độc lập là một tập con các đỉnh S , sao cho không có hai đỉnh u, v nào trong S kề với nhau trong G



- ▶ Hãy tìm một tập độc lập có lực lượng lớn nhất

Bài toán tập độc lập - MIS

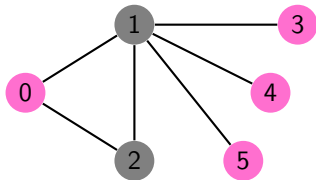
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tập độc lập là một tập con các đỉnh S , sao cho không có hai đỉnh u, v nào trong S kề với nhau trong G



- ▶ Hãy tìm một tập độc lập có lực lượng lớn nhất

Bài toán tập độc lập - MIS

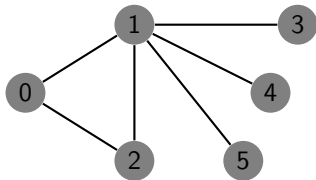
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tập độc lập là một tập con các đỉnh S , sao cho không có hai đỉnh u, v nào trong S kề với nhau trong G



- ▶ Hãy tìm một tập độc lập có lực lượng lớn nhất
- ▶ Đây là bài toán NP-khó đối với đồ thị tổng quát

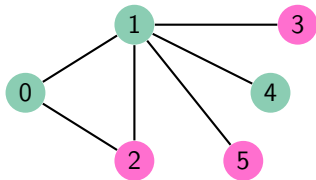
Mối quan hệ giữa MVC và MIS

- ▶ Hai bài toán trên có mối liên quan chặt chẽ với nhau
- ▶ Một tập con của các đỉnh là một phủ đỉnh khi và chỉ khi tập bù của nó là tập độc lập



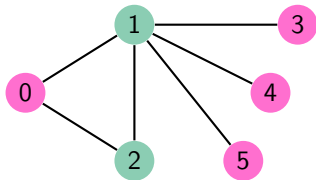
Mối quan hệ giữa MVC và MIS

- ▶ Hai bài toán trên có mối liên quan chặt chẽ với nhau
- ▶ Một tập con của các đỉnh là một phủ đỉnh khi và chỉ khi tập bù của nó là tập độc lập



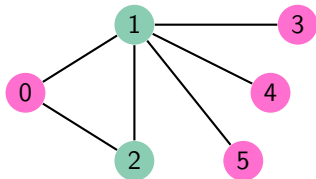
Mối quan hệ giữa MVC và MIS

- ▶ Hai bài toán trên có mối liên quan chặt chẽ với nhau
- ▶ Một tập con của các đỉnh là một phủ đỉnh khi và chỉ khi tập bù của nó là tập độc lập



Mối quan hệ giữa MVC và MIS

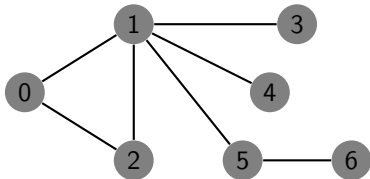
- ▶ Hai bài toán trên có mối liên quan chặt chẽ với nhau
- ▶ Một tập con của các đỉnh là một phủ đỉnh khi và chỉ khi tập bù của nó là tập độc lập



- ▶ Lực lượng của một phủ tập có kích thước nhỏ nhất cộng với lực lượng của tập độc lập có kích thước lớn nhất bằng tổng số đỉnh của đồ thị

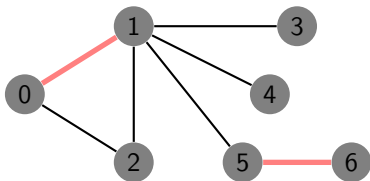
Bài toán ghép cặp

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một cặp ghép là một tập con các cạnh F sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa một cạnh trong F



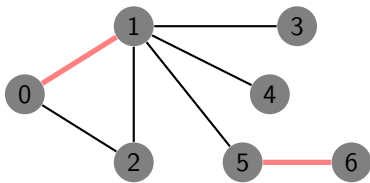
Bài toán ghép cặp

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một cặp ghép là một tập con các cạnh F sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa một cạnh trong F



Bài toán ghép cặp

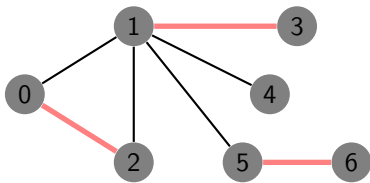
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một cặp ghép là một tập con các cạnh F sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa một cạnh trong F



- ▶ Hãy tìm một cặp ghép có lực lượng lớn nhất

Bài toán ghép cặp

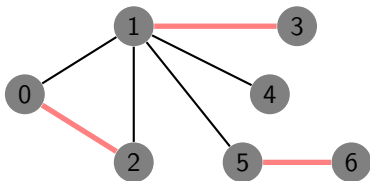
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một cặp ghép là một tập con các cạnh F sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa một cạnh trong F



- ▶ Hãy tìm một cặp ghép có lực lượng lớn nhất

Bài toán ghép cặp

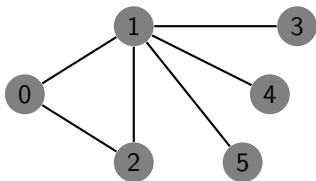
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một cặp ghép là một tập con các cạnh F sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa một cạnh trong F



- ▶ Hãy tìm một cặp ghép có lực lượng lớn nhất
- ▶ Có thuật toán $O(|V|^4)$ cho đồ thị tổng quát, nhưng cài đặt khá phức tạp

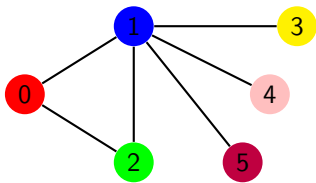
Bài toán tô màu đồ thị

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tô màu của đồ thị là một cách gán các màu vào các đỉnh sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu



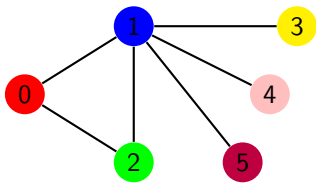
Bài toán tô màu đồ thị

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tô màu của đồ thị là một cách gán các màu vào các đỉnh sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu



Bài toán tô màu đồ thị

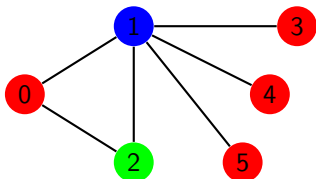
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tô màu của đồ thị là một cách gán các màu vào các đỉnh sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu



- ▶ Hãy tìm một cách tô màu sao cho sử dụng ít màu khác nhau nhất

Bài toán tô màu đồ thị

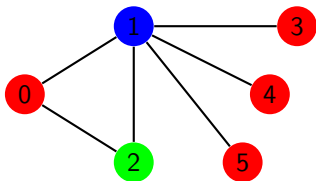
- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tô màu của đồ thị là một cách gán các màu vào các đỉnh sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu



- ▶ Hãy tìm một cách tô màu sao cho sử dụng ít màu khác nhau nhất

Bài toán tô màu đồ thị

- ▶ Cho đồ thị vô hướng không trọng số $G = (V, E)$
- ▶ Một tô màu của đồ thị là một cách gán các màu vào các đỉnh sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu



- ▶ Hãy tìm một cách tô màu sao cho sử dụng ít màu khác nhau nhất
- ▶ Đây là bài toán NP-khó trên đồ thị tổng quát