STRUKTURE PODATAKA
LETNJI SEMESTAR 2010/2011

GRAFOVI

Prof. Dr Leonid Stoimenov

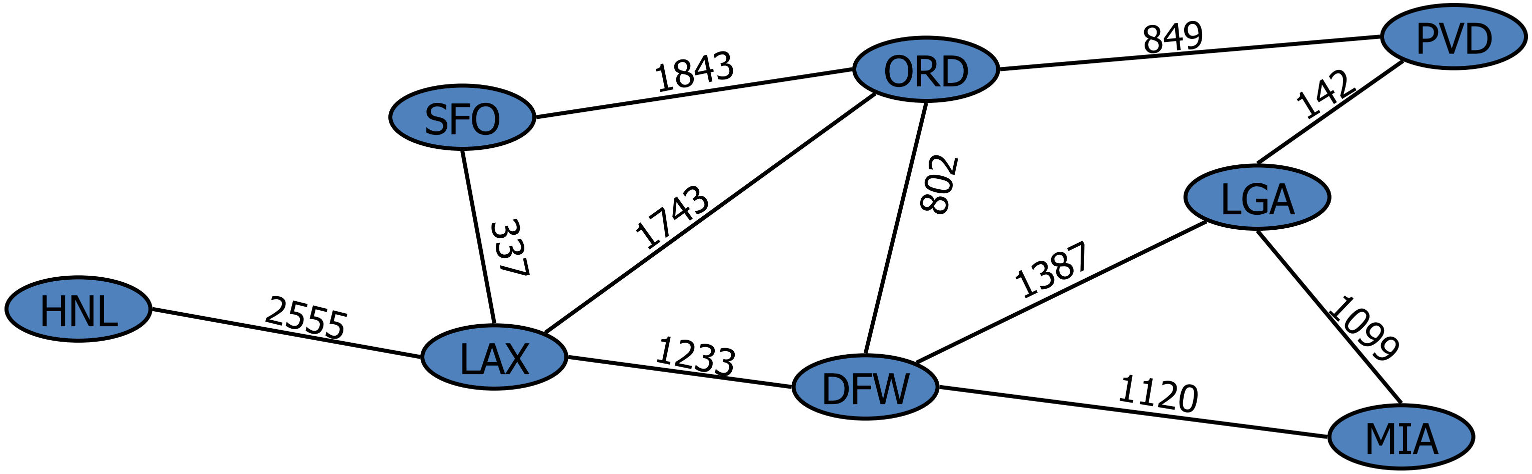
Katedra za računarstvo
Elektronski fakultet u Nišu

Graf - Pregled

- Graf
  - Definicije
  - Terminologija
  - Memorijska reprezentacija
    - Sekvencijalno - matrice
    - Lančano
- Operacije za rad sa grafom
  - ADT
  - Osnovne operacije
  - Traženje puteva
  - Obilazak grafa
  - Topološko sortiranje

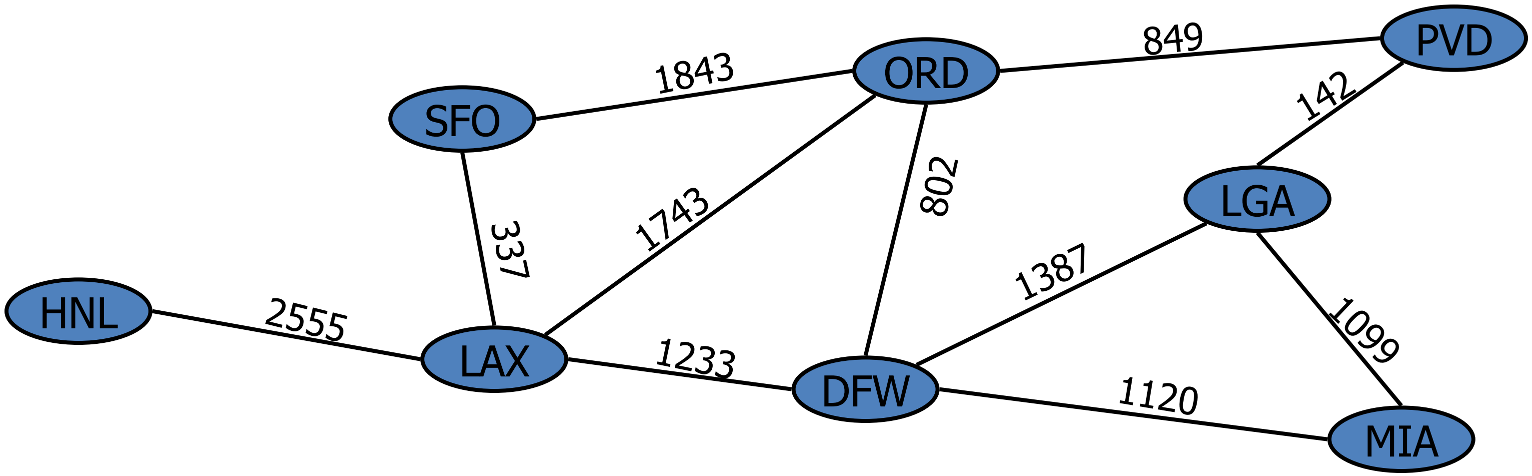
Graf - definicije

- Graf je uređeni par (***V, E***), gde je
  - ***V*** skup temena *v*, koji se zovu i čvorovi
  - ***E*** je kolekcija parova čvorova *e=[u,v]*, koji čine potege ili grane
- Čvorovi i grane čuvaju odgovarajuće vrednosti (graf je obeležen)
- Svakom potegu u grafu može biti pridružen broj i takav graf se naziva težinski graf ili mreža.
- Nenegativan broj pridružen potegu naziva se težina.



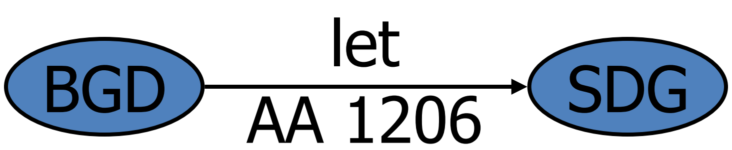
Graf – primer

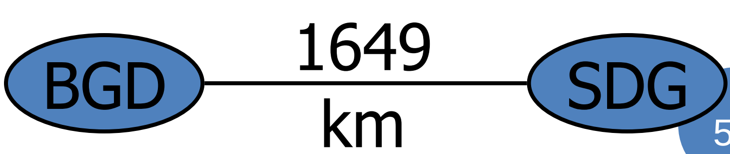
- Šta je graf:
  - Graf se sastoji od niza čvorova i niza potega.
  - Svaki poteg u grafu je određen parom čvorova.
- Primer:
  - Čvorovi su aerodromi i sadrže kod aerodroma
  - Poteg predstavlja rutu leta između dva aerodorma i sadrži vazdušno rastojanje



TERMINOLOGIJA

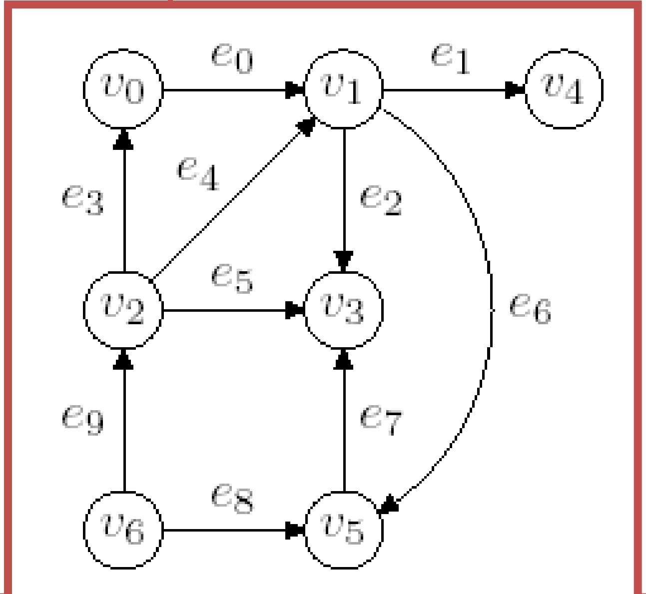
- **Orijetisani poteg**
  - Uređeni par čvorova (***u***,***v***)
  - Prvi čvor ***u*** je **početni**
  - Poteg iz njega **izvire**
  - drugi čvor ***v*** je **odredišni**
  - Poteg u njega **uvire**
  - <u>Primer</u>: avio let
- Orijetisani graf - digraf
  - Svi potezi su orijentisani
  - <u>Primer</u>: Mreža avio ruta
- **Neorijetisani poteg**
  - Neuređeni par (***u***,***v***)
  - <u>Primer</u>: trasa avio leta
- Neorijetisani graf
  - Svi potezi su neorijentisani
  - <u>Primer</u>: Mreža letova između gradova





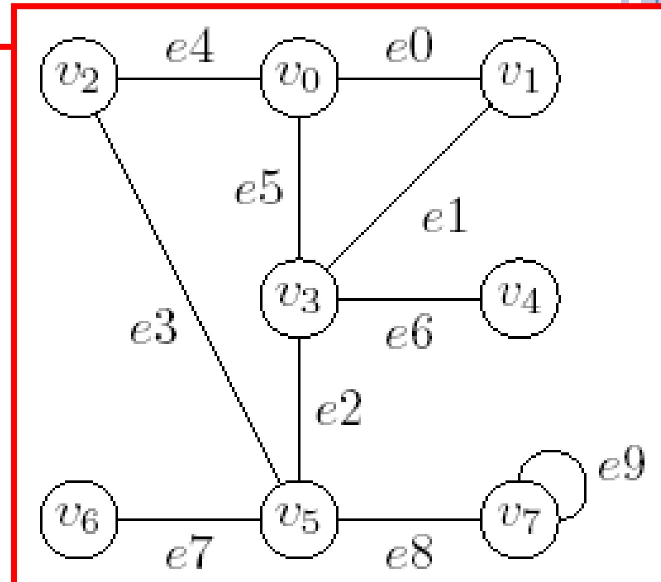
Primer grafova

- Orijentisani



V = {v0, v1, v2, v3, v4, v5, v6}
E = {e0 = (v0, v1), e1 = (v1, v4),
e2 = (v1, v3), e3 = (v2, v0), e4 = (v2, v1),
e5 = (v2, v3), e6 = (v1, v5), e7 = (v5, v3),
e8 = (v6, v5)}

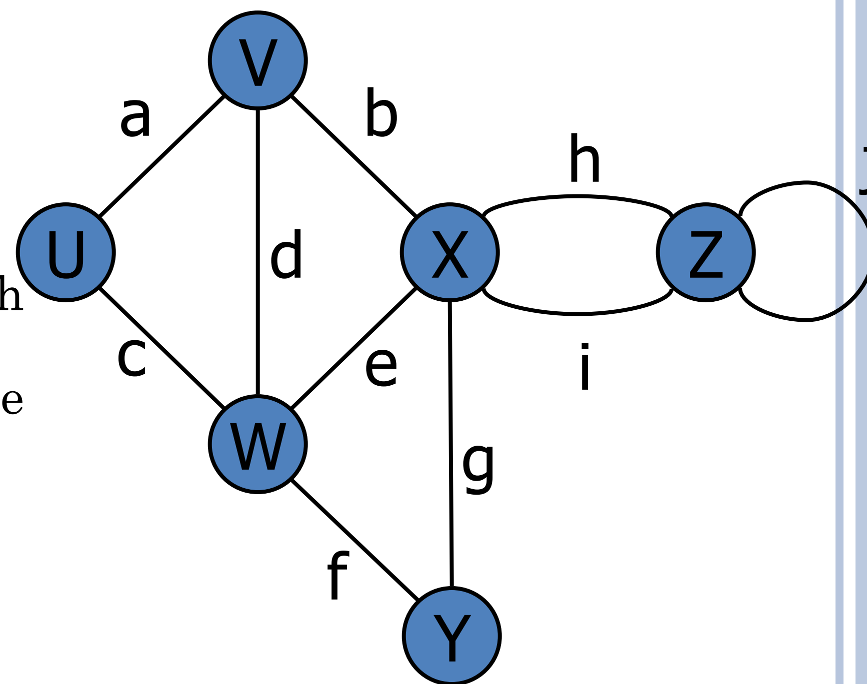
V = {v0, v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7}
E = {e0 = {v0, v1}, e1 = {v1, v3},
e2 = {v3, v5}, e3 = {v2, v5}, e4 = {v0, v2},
e5 = {v0, v3}, e6 = {v3, v4}, e7 = {v5, v6},
e8 = {v5, v7},
e9 = {v7, v7}}



- Neorijentisani

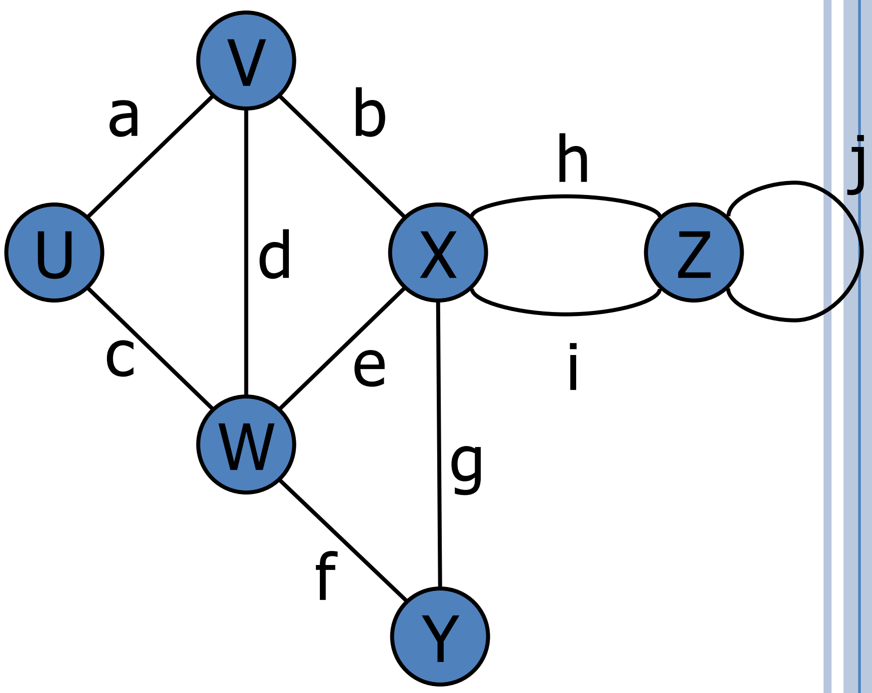
TERMINOLOGIJA (NAST.)

- **Završni čvorovi** nekog potega
  - Krajnje tačke potega
  - U i V su završni čvorovi za a
- **Incidentnost** potega i čvorova
  - Grana e je incidentna (vezana) za čvor v ukoliko je v jedna od krajnjih tačaka potega
  - Čvor v je incidentan potegu x ako je v jedan od čvorova u uređenom paru čvorova koji čine poteg x.
  - a, d, i b su *incidentni* za V
- **Susedni čvorovi**
  - Čvor u je susedan čvoru v ako postoji poteg od u do v.
  - Ako je čvor u susedan čvoru v onda se v naziva sledbenik čvora u, a čvor u je prethodnik čvora v.
  - U i V su susedni



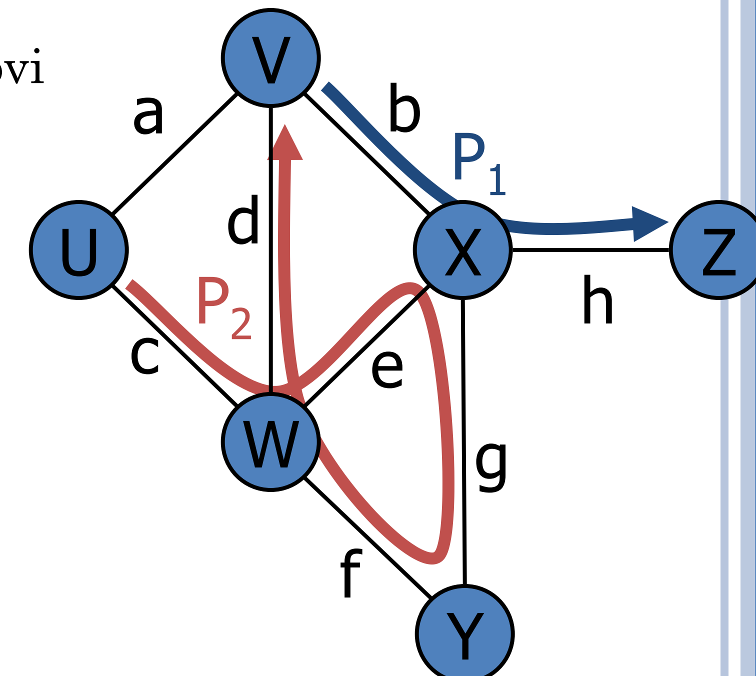
Terminologija (3)

- **Stepen čvora** deg(u)
  - broj potega incidentnih njemu
  - X ima *stepen* deg(X)=5
- **Izolovan čvor**
  - Ako je deg(u)=0
- **Orijetisani graf**
  - Ulazni stepen čvora indeg(u)
  - Izlazni stepen čvora outdeg(u)
- **Paralelni potezi**
  - Potezi između dva čvora
  - Potezi h, i su *paralelni potezi*
- **Petlja** (Self-loop)
  - Poteg koji počinje i završava se u istom čvoru.
  - j je *petlja*



Terminologija (4)

- **Put u grafu**
  - Sekvenca čvorova i potega
  - Počinje čvorom
  - Završava se čvorom
  - Za svaki poteg su poznati završni čvorovi
- ***Put dužine n*** od čvora *u* do čvora *v* se definiše kao sekvenca od n+1 čvorova $(v_0,v_1,v_2,\ldots,v_n)$ tako da je $\mathbf{v_0=u,\ v_n=v}$.
  - Za svaki čvor i između 1 i k važi da su čvorovi v_i i v_{i+1} susedni.
  - Dužina puta = broja grana na putu n
- **Prost put** (Simple path)
  - Put kod koga su svi čvorovi i potezi različiti
- Primer
  - P_1=(V,b,X,h,Z) je prost put
  - P_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V) je put koji nije prost

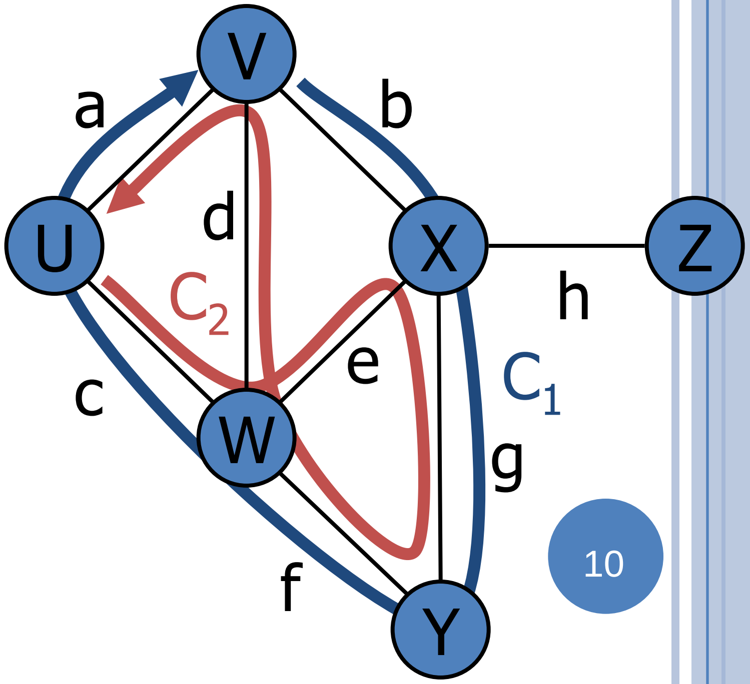


Terminologija (5)

- **Zatvoreni put**
  - Kružni put
  - $v_0 = v_n$
  - Prost zatvoren put
- **Ciklus** (Cycle)
  - Cirkularna sekvenca čvorova i potega
  - Svaki poteg je definisan završnim čvorovima
  - Put od čvora do njega samog se naziva *ciklus*.
- **Prost ciklus**
  - Ciklus kod koje su svi čvorovi i potezi različiti
- <u>Def</u>: Zatvoren prost put dužine >=3
- **K-ciklus**
  - Ciklus dužine k
- Ciklus dužine 1 = petlja

<u>Primer</u>

C1=(V,b,X,g,Y,f,W,c,U,a,↵)
je prost ciklus
C2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V,a,↵)
je ciklus koji nije prost

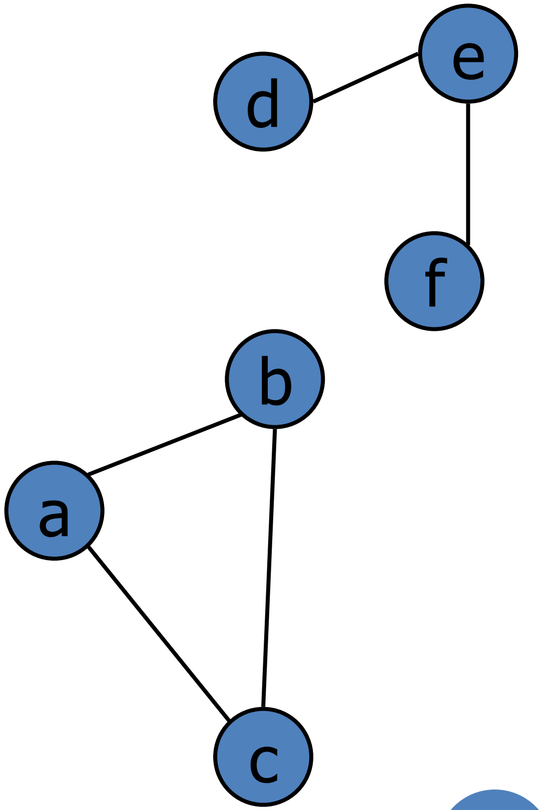


TERMINOLOGIJA (6)

- Aciklični graf
  - Graf koji nema cikluse
- Orijetisani aciklični graf
  - Orijentisani graf bez ciklusa
- Povezani graf
  - **akko** postoji prost put između bilo koja dva njegova čvora
- Strogo povezani graf
  - **akko** postoji samo po jedan put iz svakog čvora do svih ostalih čvorova

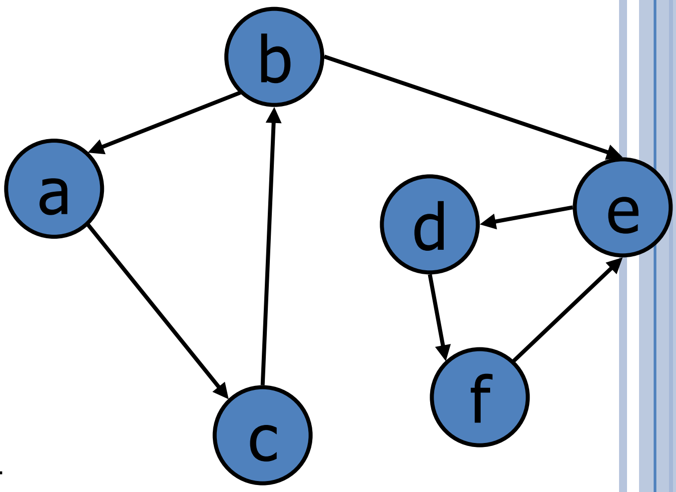
Terminologija (7)

- Neorijentisani graf je povezan ako postoji put u grafu između svakog para čvorova
- Primer: Nepovezan graf (ne postoji put između a i d)
  - V={a,b,c,d,e,f}
  - E={(a,b),(a,c),(b,c),(d,e),(e,f)}
- **Povezane** komponente – povezani podgrafovi grafa
- **Izolovane** komponente – izdvojeni podgrafovi grafa

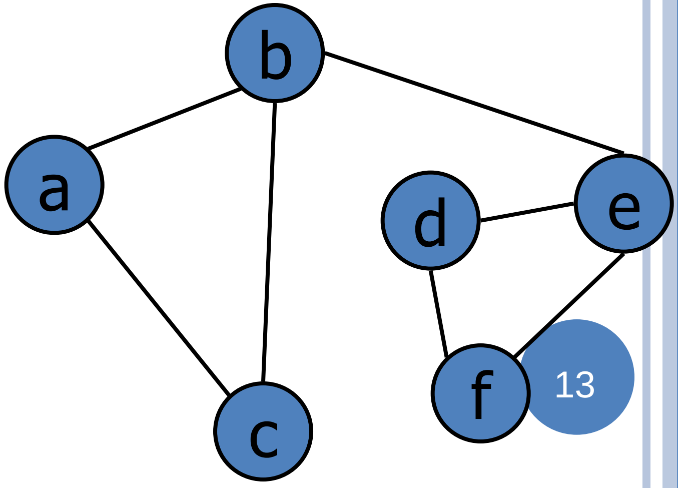


Terminologija (8)

- Orijentisani graf – strogo i slabo povezan
- Orijentisani graf je **strogo povezan** ako postoji put u grafu između svakog para čvorova
- Orijentisani graf je **slabo povezan** ako je odgovarajući neorijetisani graf povezan

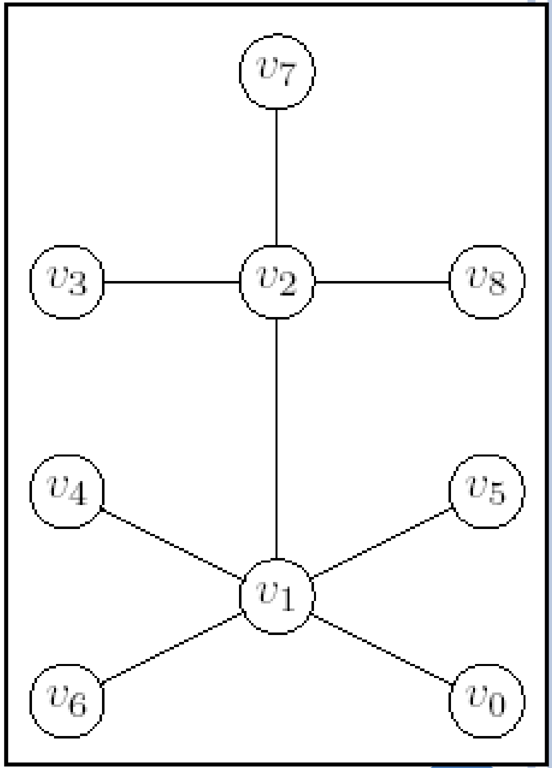


Primer: Graf nije strogo povezan, ali je slabo povezan (ne postoji put između nekog od čvorova d,e,f i čvorova a,b,c)



Terminologija (9)

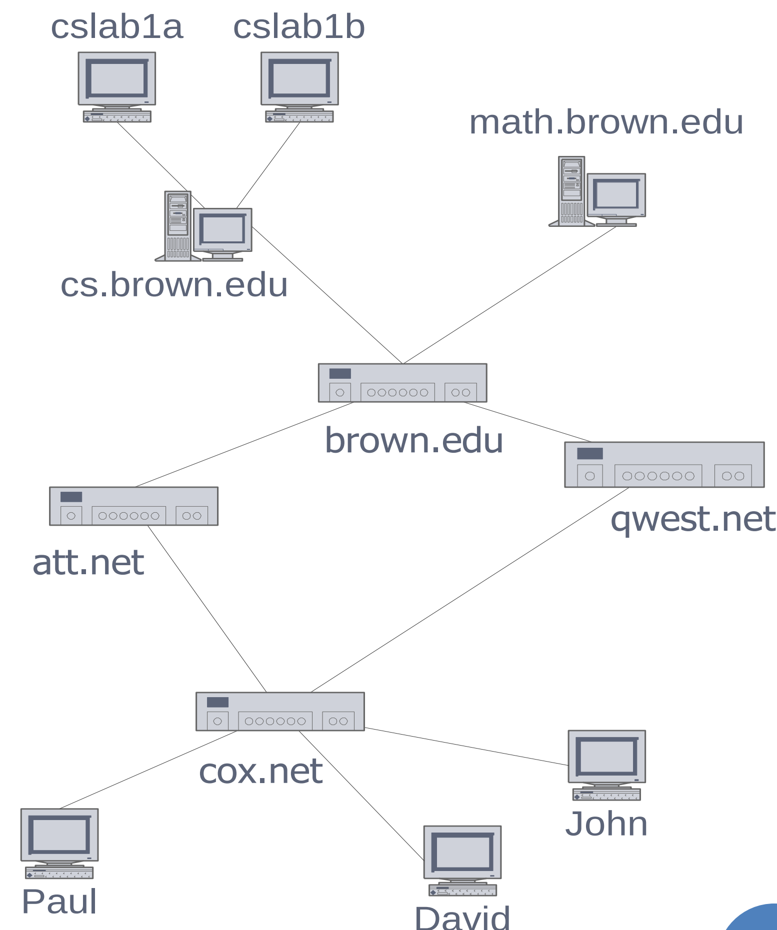
- Graf je **kompletan** ako je svaki čvor u susedan sa svakim čvorom v iz grafa.
- Kompletan graf sa n čvorova imaće n(n-1)/2 potega
- Kompletan graf je povezan
- Povezan graf bez ciklusa je stablo
- U stablu postoji jedinstveni prost put između bilo koja dva čvora.
- Stablo sa m čvorova ima m-1 poteg.
- Multigraf G=(V,E,f) je sastavljen od skupa čvorova V, skupa potega E i funkcije $f: E \rightarrow \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \text{ i } v_i \neq v_j\}$
- Pseudograf je multigraf kod koga su dopuštene petlje, tj ne važi $v_i \neq v_j$



Primer stabla

PRIMENA GRAFOVA

- Elektronska kola
  - Štampane ploče
  - Integrisana kola
- Transportne mreže
  - Mreža puteva
  - Mreža letova
- Računarske mreže
  - LAN
  - Internet
  - Web
- Baze podataka
  - Entity-relationship dijagram
- ...



SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA – MATRICA SUSEDSTVA

- Matrica susedstva
  - Dimenzije: nxn, gde je n broj čvorova
  - Elementi m_{ij} matrice definišu broj potega koji spajaju čvorove i i j:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

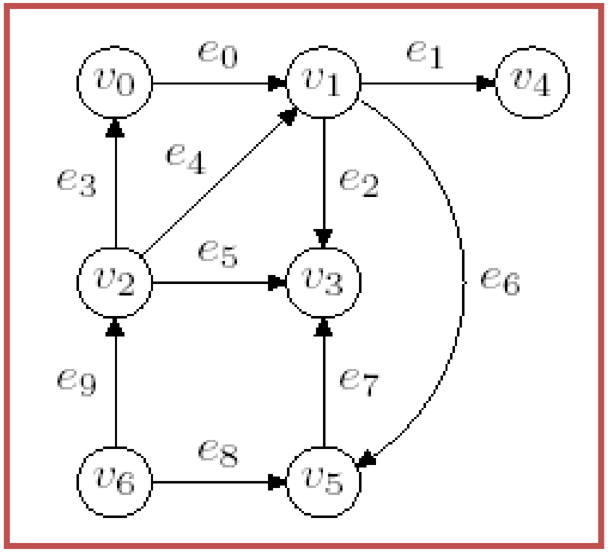
- Za neorijentisani graf matrica susedstva je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu
- Za digrafove to ne mora biti slučaj.
- Prema gornjoj definiciji, ako u čvoru i ne postoji petlja, tada je element $m_{ii} = 0$

MATRICA SUSEDSTVA (NAST.)

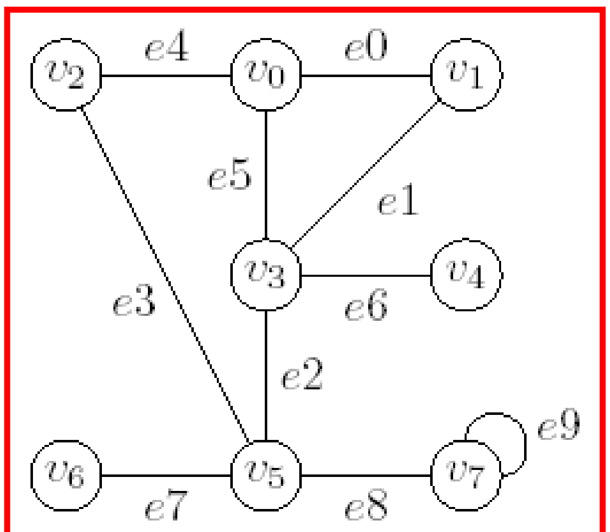
- Generalizacija matrice susedstva:
  - Element matrice m_{ij} je jednak broju grana između dva čvora v_i i v_j
  - A_{ij} = broj grana između v_i i v_j

- Graf sa relativno malo potega je redak (sparse),
- Graf sa mnogo potega je gust (dense)
- Redak graf $G=(V,E)$: $|E|=O(|V|)$
- Gust graf $G=(V,E)$: $|E|=O(|V|^2)$
  - $|V|$ - broj čvorova
  - $|E|$ - broj grana

PRIMER MATRICE SUSEDSTVA



$$
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matrica težina

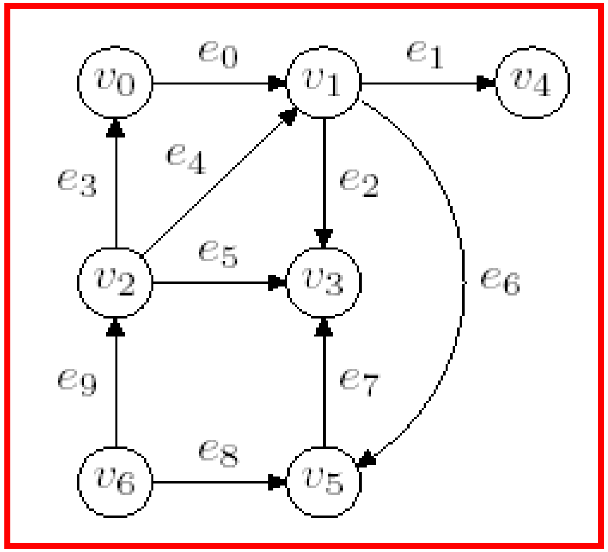
- Težinski graf
  - Ako je svakom potegu dodeljena težina
  - Matrica susedstva -> matrica težina
  - Vrednost elementa matrice težina w_{ij} koji definiše poteg od čvora i do čvora j:
    - umesto 1 sadrži vrednost težine tog potega
    - 0 ili ∞, u zavisnosti od implementacije

$$W_{ij} = \begin{cases} t & (v_i, v_j) \in E \\ \infty & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

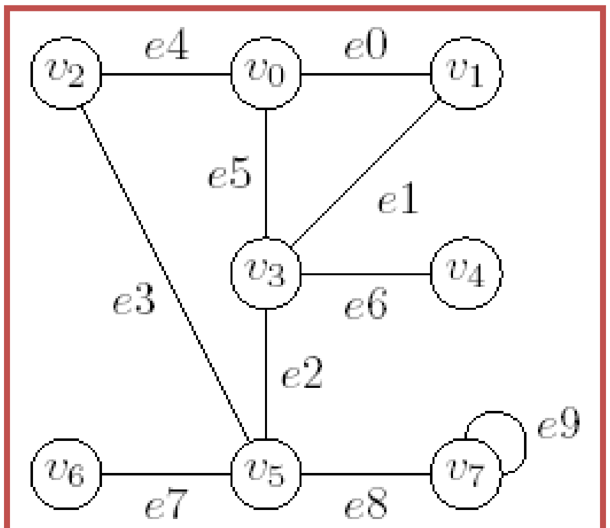
Sekvencijalna reprezentacije - Matrica incidencije

- Matrica incidencije – zasniva se na incidenciji čvorova i potega
- Neka graf G ima n čvorova ($v_0, \ldots, v_{n-1}$) i m potega ($e_0, \ldots, e_{m-1}$)
- Dimenzije matrice su n x m (|V| x |E|)
- Matrica incidencije je matrica čiji je element m_{ij} broj koliko puta su čvor v_i i poteg e_j incidentni.
- Vrednosti elementa m_{ij}:
  - 0 - nisu incidentni,
  - 1 - incidentni
  - [2 - čvor v_i spaja sam sebe (petlja) potegom e_j].
- Ako je graf usmeren, broj može biti +1 (ulazak u čvor) ili -1 (izlazak iz čvora).

Primer matrice incidencije



$$
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+1 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



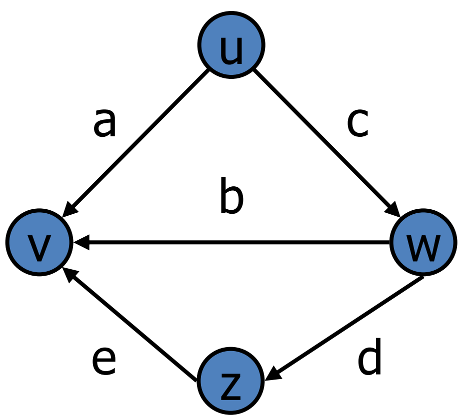
$$
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

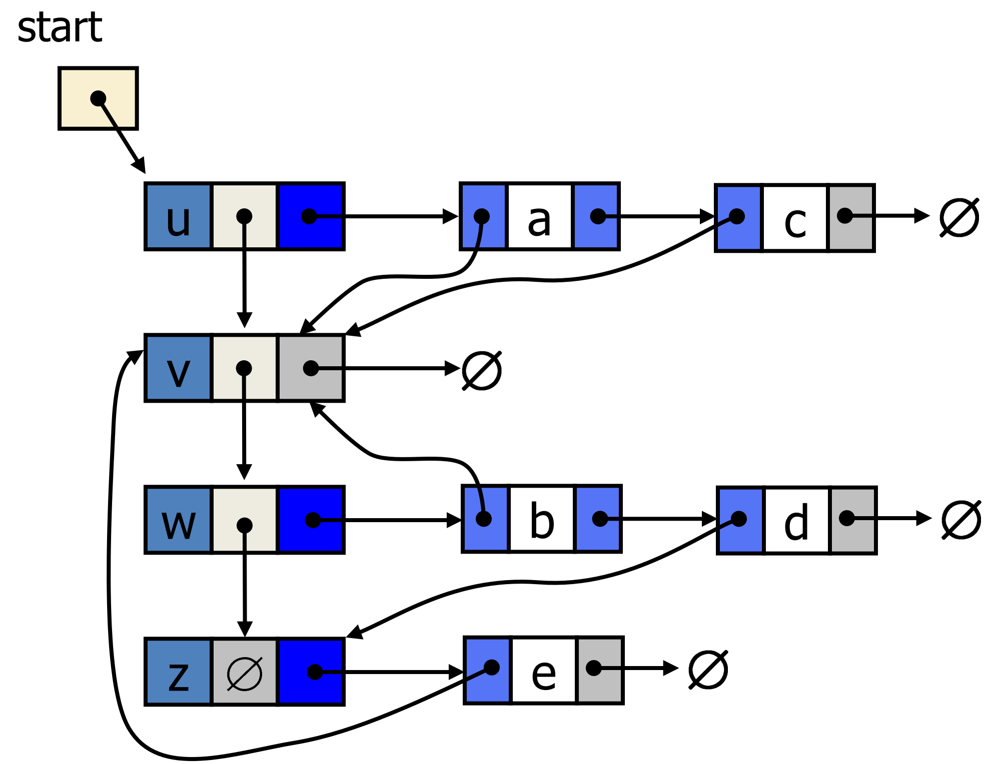
Lančana reprezentacija grafa

- Pogodna za retke grafove
- Lančane liste
  - Jedna lančana lista za čvorove
  - Po jedna lančana lista za potege nekog čvora
- Element za čvor:
  - node – vrenost čvora
  - next – pokazivač na sledeći el. u listi
  - adj – pokazivač na listu potega za taj čvor

- Element za poteg:
  - dest – pointer na odredište potega
  - link – sledeći u listi potega
  - Opciono: vrednost potega (napr weight)

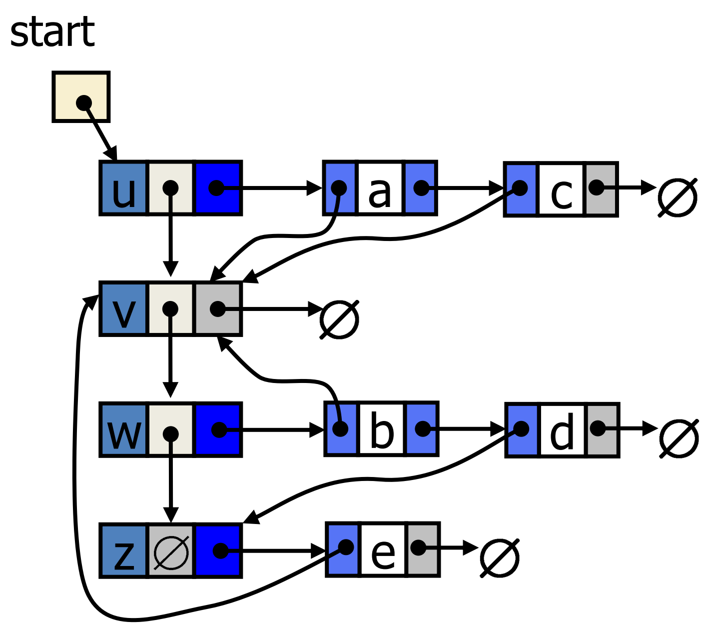
PRIMER LANČANE REPREZENTACIJE GRAFA





Graf - Operacije

- Traženje puta
  - proizvoljnog puta
  - najkraćeg puta
- Traženje elemenata grafa
  - traženje potega
  - traženje čvora
- Umetanje
  - potega
  - čvora
- Brisanje
  - potega
  - čvora
- Obilazak grafa
- Topološko sortiranje
- Testiranje povezanosti grafa
- Da li graf ima cikluse
- ...



Graf ADT - Osnovne metode

- Čvorovi i potezi
  - Pozicije
  - Čuvaju elemente
- Accessor metode
  - aVertex()
  - incidentEdges(v)
  - endVertices(e)
  - isDirected(e)
  - origin(e)
  - destination(e)
  - opposite(v, e)
  - areAdjacent(v, w)
- Update metode
  - insertVertex(o)
  - insertEdge(v, w, o)
  - insertDirectedEdge(v, w, o)
  - removeVertex(v)
  - removeEdge(e)
- Generičke metode
  - numVertices()
  - numEdges()
  - vertices()
  - edges()

Pogledati Praktikum !!

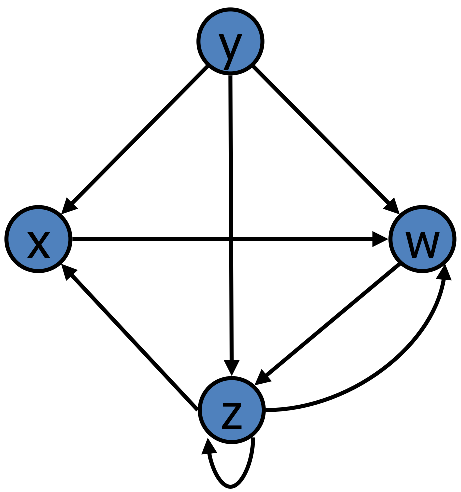
Traženje puteva u grafu
sekvencijalna reprezentacija grafa

- Element a_k matrice A^k jednak je broju puteva dužine k od čvora v_i do čvora v_j
- Element $b_r(i,j)$ matrice $B_r = A+A^2+A^3+\ldots+A^r$ jednak je broju puteva dužine $\leq r$ od čvora v_i do čvora v_j
- Matrica puta ili matrica dostupnosti $P=[p_{ij}]$ definiše se kao:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako postoji put iz } v_i \text{ u } v_j \\ 0, \text{ u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

- Ako je $A=[a_{ij}]$ matrica susedstva i $P=[p_{ij}]$ matrica puta orijentisanog grafa sa m čvorova, tada je $p_{ij}=1$ ako i samo ako matrica $B_m = A+A^2+A^3+\ldots+A^m$ ima nenulti element b_{ij}
- Ako graf ima m čvorova tada prost put ili ciklus mora biti dužine $\leq$ m
- Matrica P strogo povezanog grafa nema nultih elemenata

Primer izračunavanja matrice puta P



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$A^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$A^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$B_4 = A+A^2+A^3+A^4= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{array} & \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \end{array}$$

y se ne može doseći!

Algoritam za nalaženje matrice puta P

- Na osnovu definicije matrice P:
  - **Algoritam G.1**. Matrica P za graf sa m čvorova
    - Naći matricu susedstva A
    - Naći redom matrice A^2, A^3, ..., A^m
    - Naći matricu $B = [b_{ij}] = A+A^2+A^3+ ...+A^m$
    - Generisati matricu P korišćenjem matrice B
      - $p_{ij}=1$, ako je $b_{ij} \neq 0$
      - $p_{ij}=0$, ako je $b_{ij} = 0$
- Bolja varijanta: Warshall-ov algortiam

Warshall-ov algoritam

- Definišemo matrice P_0, P_1, ... P_m, tako da je matrica P_k:
  - $P_k[i,j]=1$, ako postoji prost put od čvora v_i do čvora v_j koji ne koristi nijedan drugi čvor osim eventualno čvorova v_1, v_2, ... , v_k
  - $P_k[i,j]=0$, u ostalim slučajevima.
- Primer:
  - $P_0[i,j]=1$, ako postoji poteg od v_i do v_j
  - $P_1[i,j]=1$, ako postoji poteg od v_i do v_j, koji ne koristi nijedan drugi čvor osim možda v_1
  - $P_2[i,j]=1$, ako postoji poteg od v_i do v_j, koji ne koristi nijedan drugi čvor osim možda v_i i v_j
- Može se uočiti da je:
  - $P_0=A$,
    pošto je jedini put od čvora i do čvora j bez prolaska kroz druge čvorove direktan put od i do j
  - $P_m=P$,
    pošto put može da prođe kroz bilo koji čvor obeležen od 1 do m.

Warshall-ov algoritam (2)

- Tada važi da je
  $P_k[i,j]=1$,
  ako i samo ako važi jedan od sledeća dva uslova:
  - Ako postoji prost put od v_i do v_j koji ne koristi nijedan drugi čvor osim možda $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$:
    $P_{k-1}[i,j]=1$,
  - Ako postoji prost put od v_i do v_k i prost put od v_k do v_j i ako oba ova puta ne koriste nijedan drugi čvor osim možda $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$:
    $P_{k-1}[i,k]=1$ i $P_k[k,j]=1$
- Odnosno, matrica P_k se može dobiti na osnovu prethodne matrice P_{k-1}
- Element $P_k[i,j]$ se može izračunati na osnovu prethodno ozračunatih vrednosti:

$$P_k[i,j]= P_{k-1}[i,j] \text{ OR } (P_k[i,k] \text{ AND } P_k[k,j])$$

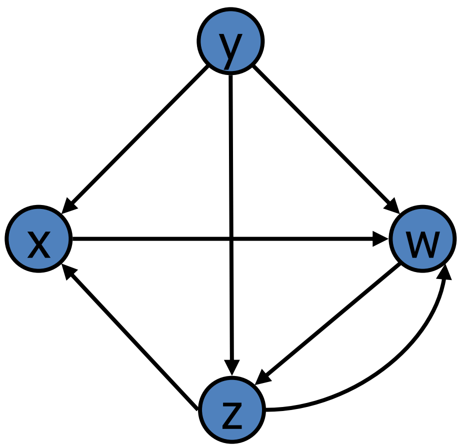
Warshall-ov algoritam – pseudokod

Algoritam G.2. Warshall-ov algoritam

Warshall(A,m)

```
{// data je matrica susedstva A i broj čvorova m
 // algoritam generiše matricu P
repeat for (i=1,m)       //inicijalizacija matrice P0
     { repeat for (j=1,m)
          { if (A[i,j]=0)
               then P[i,j ]=0
               else P[i,j ]=1 }}
 repeat for k=1,m      //Azuriranje P
    {repeat for i=1,m
       {repeat for j=1,m
          P[i,j ]=P[i,j] or (P[i,k] and P[k,j]) }}
return }
```

WARSHALL-OV ALGORITAM - PRIMER



$$P_0 = A = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 & 1 & 1 \\ w & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P_1 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 & 1 & 1 \\ w & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

put preko x

$$P_2 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 & 0 & 1 \\ w & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

put preko x,y

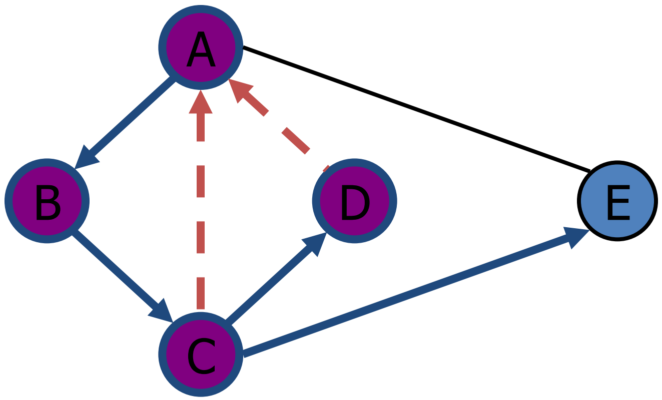
$$P_3 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 & 1 & 1 \\ w & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

put preko x,y,z

$$\mathbf{P=P_4} = \begin{array}{c|cccc|} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{y} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{z} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{w} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array}$$

putevi preko x,y,z,w

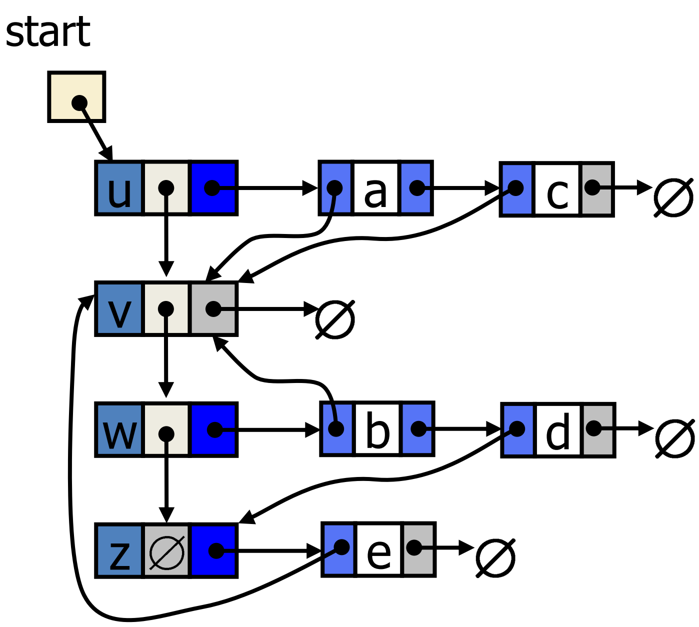
OSTALE OSNOVNE OPERACIJE (LANČANA REPREZENTACIJA)



- Traženje čvora i potega
- Dodavanje čvora i potega
- Brisanje čvora i potega
- Depth-First Search

TRAŽENJE ČVORA I TRAŽENJE POTEGA

- Lančana reprezentacija grafa
- **Traženje čvora**
  - Zadata vrednost čvora koji se traži
  - Procedura vraća lokaciju čvora
- **Traženje potega**
  - Zadati završni čvorovi potega A i B
  - Rezultat je lokacija čvora B u listi grana čvora A



TRAŽENJE U GRAFU – PSEUDOKOD

Algoritam G.6. Traženje čvora

findNode(start, A, loc)

```
{
  pok = start
  repeat while (pok <> null)
  {   if (pok.info=A)
      then     {
        loc=pok
        return  }
      else pok=pok.link
  }
 loc= null
 return
}
```

node	next	adj

weight	dest	link

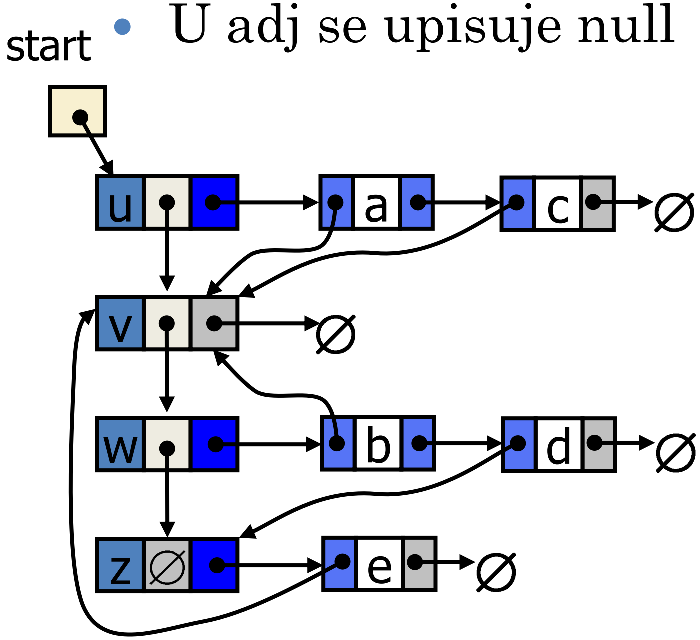
Algoritam G.7. Traženje potega

findEdge(start, A, B, loc)

```
{ call findNode(start, A, locA)
   call findNode(start, B, locB)
   if (locA=null or locB=null)
   then loc=null
   else {
        pok = locA.adj
        repeat while (pok <> null)
        {   if (pok.dest=locB)
            then          {
                loc=pok
                return     }
            else pok=pok.link
        }
    loc= null
    return
}
```

OPERACIJE UMETANJA – DODAVANJE ČVORA ILI GRANE

- Dodavanje čvora
  - Čvor se dodaje na početak liste čvorova
  - Odogovara operaciji dodavanja elementa na početak liste
  - U adj se upisuje null

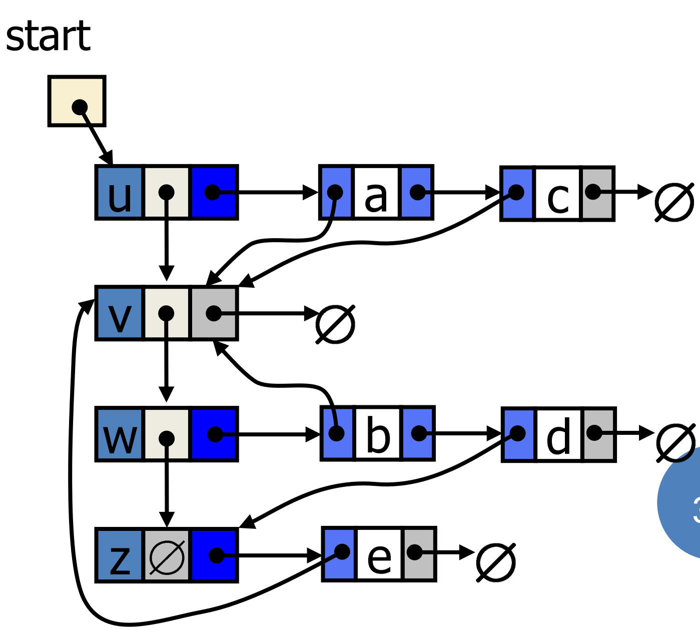


- Dodavanje potega
  - Podrazmeva se da čvorovi A i B postoje
  - Zadati su svojom vrednošću, pa se najpre pozivom *findNode* određuju lokacije u listi čvorova
  - Novi poteg se dodaje kao prvi element u listu potega prvog čvora
  - U *dest* se upisuje lokacija drugog čvora

BRISANJE POTEGA

- Brišemo poteg između dva zadata čvora A i B
- Nalazimo lokacije oba čvora
- U listi potega prvog čvora brišemo element koji ukazuje na drugi čvor
- Ovaj deo odgovara operaciji brisanja zadatog elementa liste

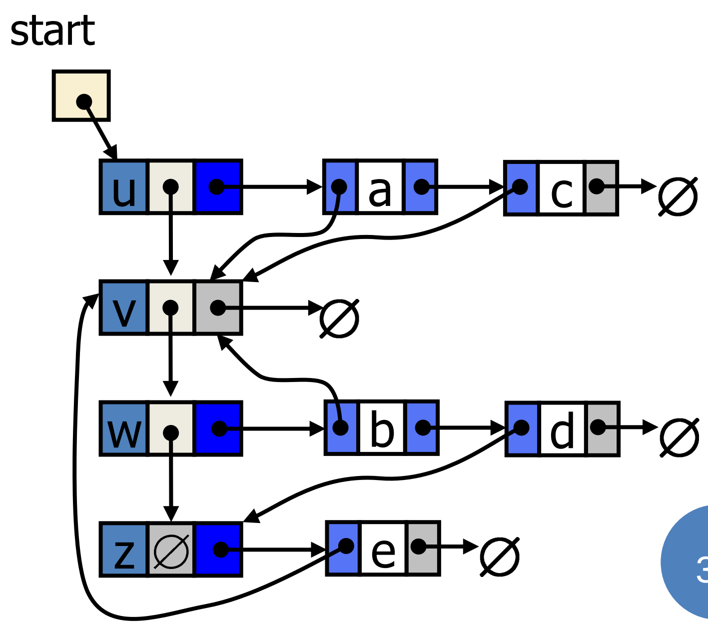
- locA=findNode(A)
- locB=findNode(B)
- Brisanje
  - Iz liste locA.adj
  - Element locB



Brisanje čvora

- Nalazimo lokaciju čvora N
- Obrisati sve potege koji se završavaju na čvoru N
  - Zahteva obilazak celog grafa, tj liste čvorova, i za svaki čvor obilazak njegove liste potega
  - Obrisati poteg prema N iz listi potega svih čvorova
- Obrisati listu potega čvora N
  - Odogovara brisanju cele liste
- Obrisati čvor N iz liste čvorova
  - Ovaj deo odgovara operaciji brisanja zadatog elementa liste

- Neophodne operacije
  - Obilazak liste čvorova
  - Obilazak liste potega
  - Brisanje zadatog elementa iz liste potega
  - Brisanje cele liste potega
  - Brisanje zadatog elementa iz liste čvorova



Obilazak grafa

- Sistematski se ispituju svi čvorovi i grane grafa
- Svaki čvor se obilazi samo jednom
- Obilazak po širini – BFS
  - Red kao pomoćna struktura
- Obilazak po dubini – DFS
  - Magacin kao pomoćna struktura
- Status čvorova
  - 1 (spreman): inicijalno stanje
  - 2 (čekanje): čvor čeka na obradu
  - 3 (obrađen): čvor je obrađen
- Ako neki od čvorova nisu obiđeni, ponoviti postupak počev od prvog čvora kome je status ostao 1.

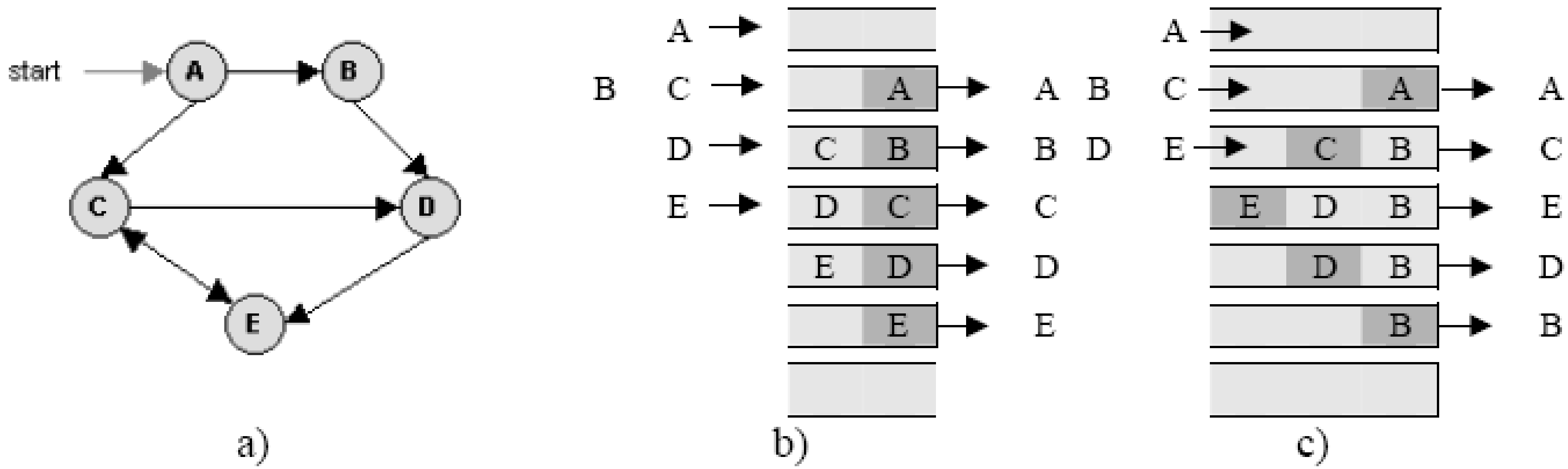
OBILAZAK PO ŠIRINI/DUBINI

BFS/DFS – razlika je u pomoćnoj strukturi !!

Algoritam G.8 Obilazak po **širini** / **dubini**

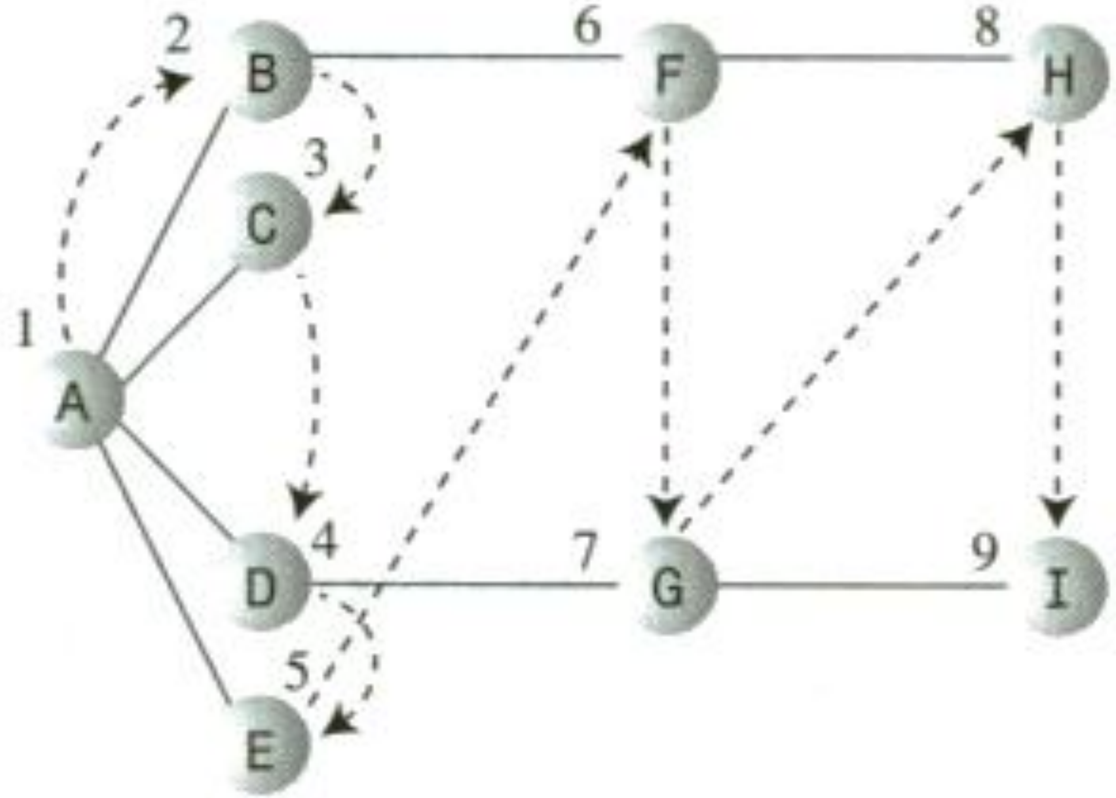
1. Postaviti sve čvorove u STATUS=1
2. Upisati prvi čvor u **RED** / **MAGACIN** i promeniti mu status na STATUS=2
3. Sve dok **RED** / **MAGACIN** ne bude prazan
   a) Uzeti čvor sa početka **REDa** / **MAGACINa**. Obraditi N u promeniti mu STATUS=3
   b) Dodati u **RED** / **MAGACIN** sve susede čvora N čiji je STATUS=1. Promeniti im STATUS=2
4. Kraj.

ILUSTRACIJA RADA DFS/BFS



Obilazak grafa: a) primer grafa, b) obilazak po širini, c) obilazak po dubini

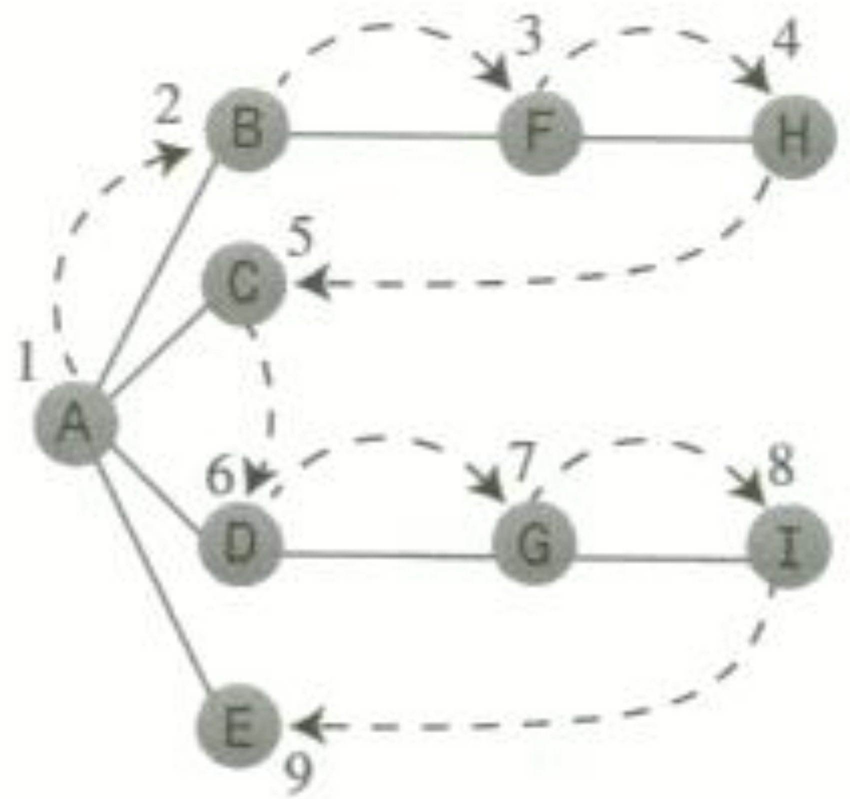
REDOSLED OBILASKA PO BFS



DFS

- DFS je generalna tehnika za obilazak grafa
- DFS obilazak
  - Obiđi sve čvorove i potege grafa G
  - Određuje da li je graf povezan
  - Određuje povezane komponente grafa G
  - Određuje *spanning forest* grafa G
- DFS za graf sa $\boldsymbol{n}$ čvorova i $\boldsymbol{m}$ potega zahteva $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m})$
- DFS se može proširiti da reši neke probleme kod grafa
  - Naći i prikazati put između dva zadata potega
  - Pronaći cikluse u grafu

REDOSLED OBILASKA PO DFS



Primer za DFS

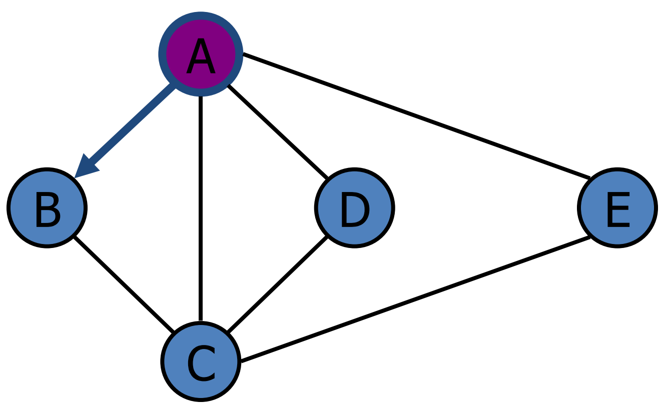
A Čvor kome je SATUS=1

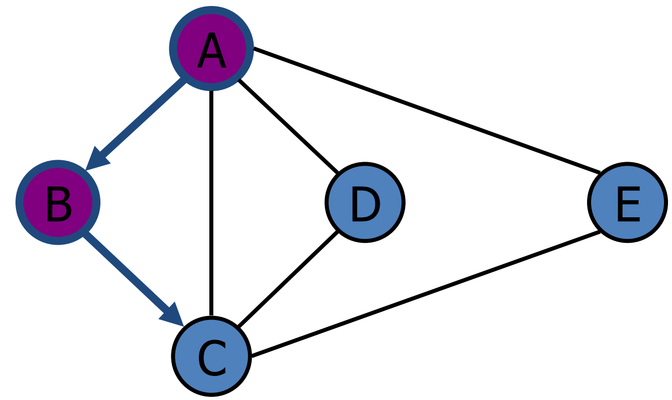
A STATUS=3

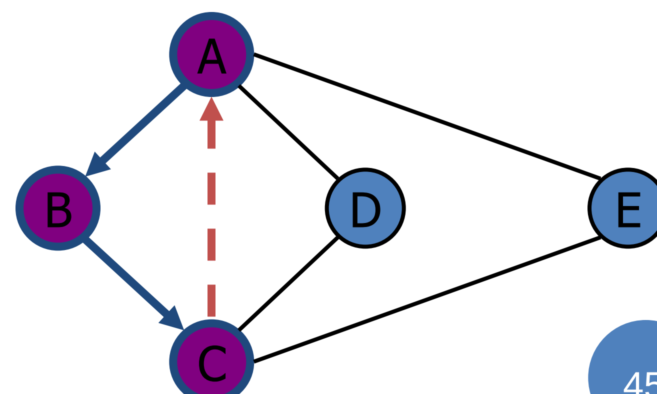
Neobrađeni poteg

Poteg koji se obrađuje

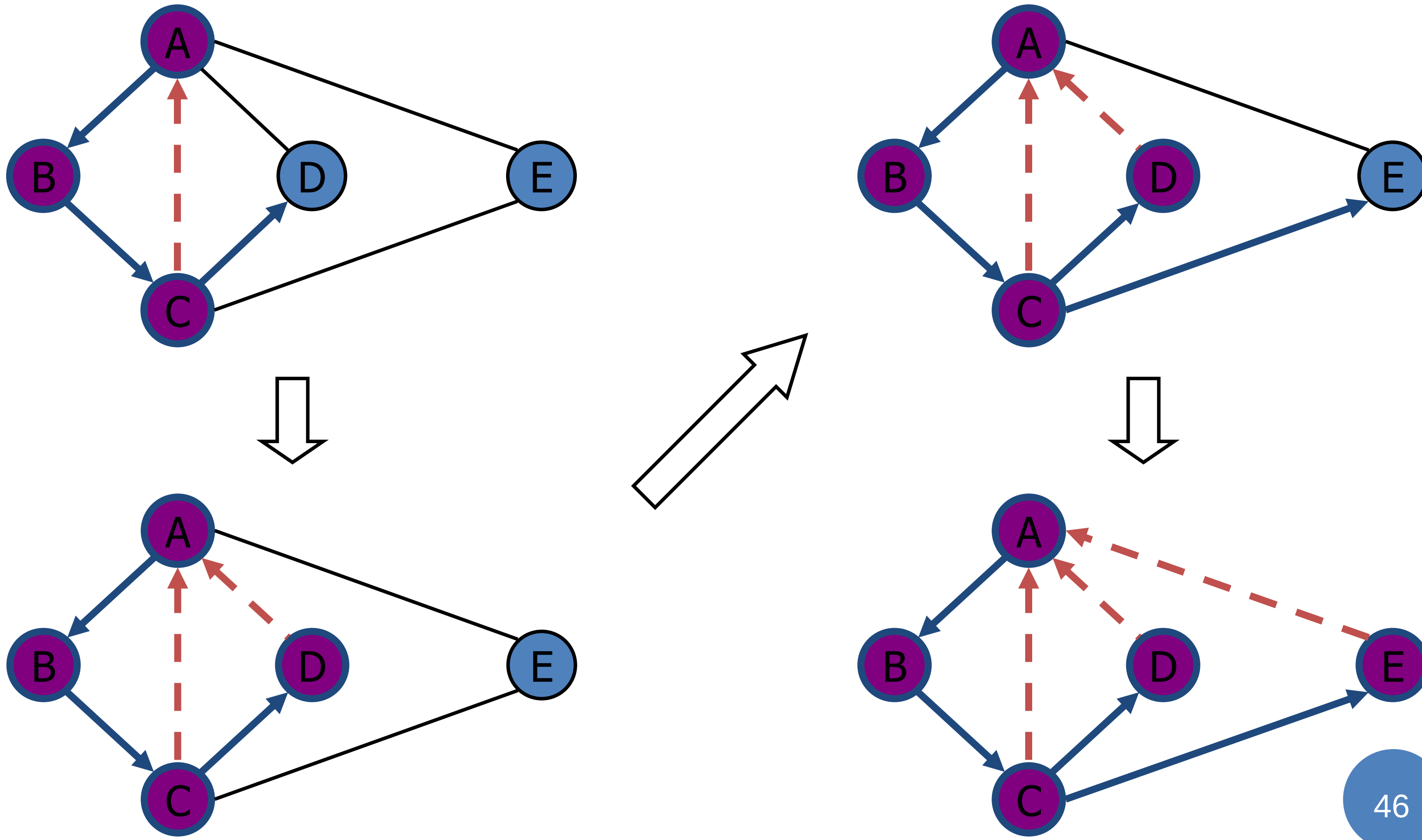
Povratni poteg







PRIMER ZA DFS (NAST.)



TOPOLOŠKO SORTIRANJE

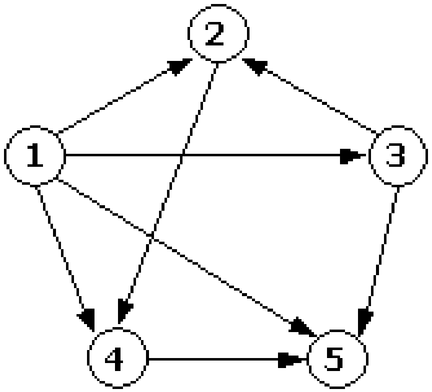
- Neka je G orijentisani graf bez ciklusa (parcijalno uređeni skup)
- Topološko sortiranje T skupa G je linearno uređivanje čvorova iz G tako da se održi početna parcijalna uređenost skupa G.
- Ako je $u<v$ u G (tj ako postoji put od u do v), tada u dolazi pre v u T
- Za nalaženje T treba prvo naći čvor sa ulaznim stepenom 0 (nema prethodnika), i on je prvi element u T
- Ponoviti sledeća dva koraka, sve do praznog skupa G:
  - Naći čvor sa nultim ulaznim stepenom
  - Obrisati N i njegove grane iz G
- Red kao pomoćna struktura
- Polje INDEG za ulazni stepen
- Možese primeniti modifikovani obilazak po širini

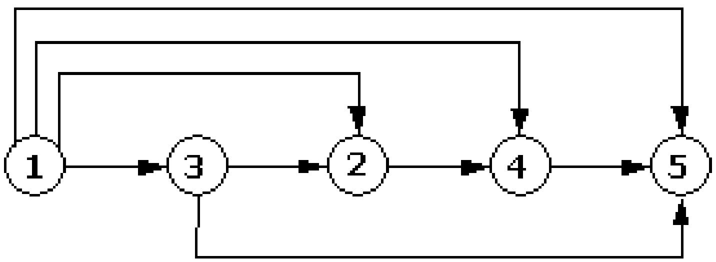
Topološko sortiranje - algoritam

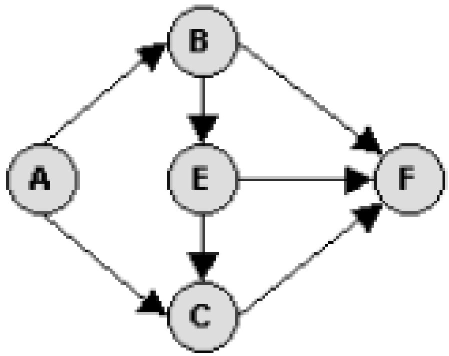
Algoritam G.8 Topološko sortiranje

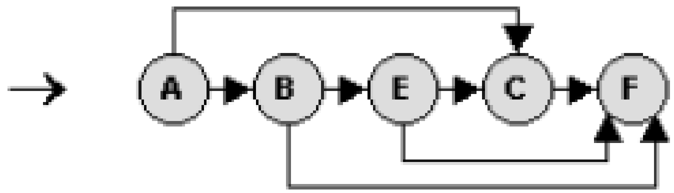
1. Naći ulazni stepen svih čvorova u G
2. Upisati u red sve čvorove sa ulaznim stepenom 0
3. Ponoviti sve dok se red ne isprazni
   a. Uzeti čvor N sa početka reda
   b. Ponoviti obradu za sve susede čvora N, M_i
      Smanjiti ulazni stepen čvora M_i za 1 (ovim se briše grana od N do M_i)
      Ako je ulazni stepen za $M_i = 0$, dodati ga u red
4. Kraj

Topološko sortiranje – primer

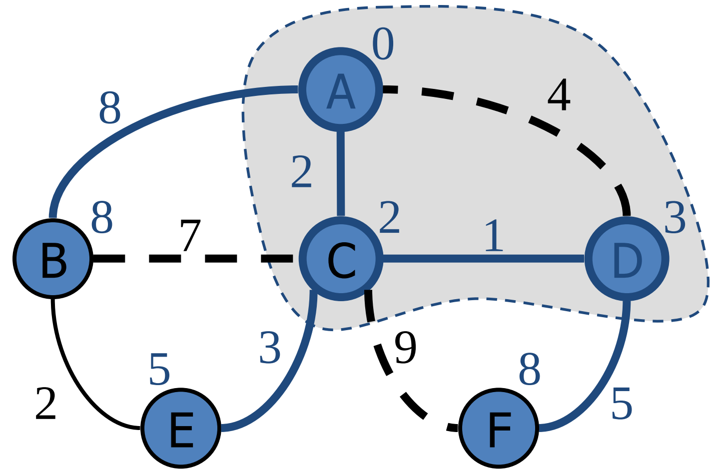








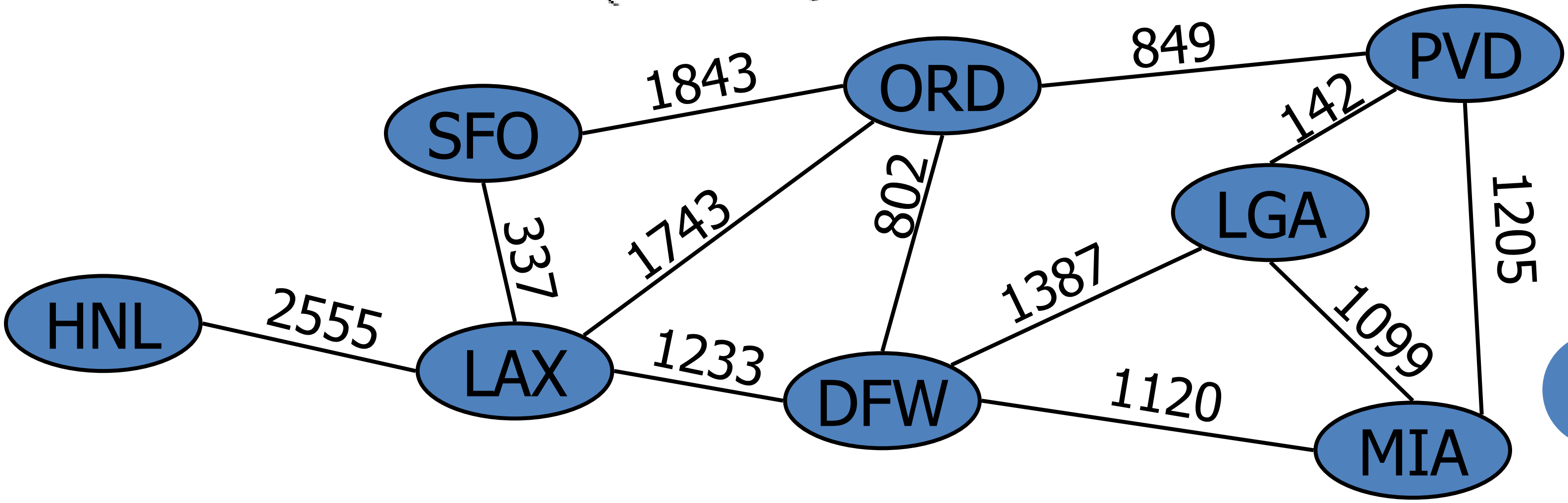
Najkraći put u grafu



Podsetnik: Težinski graf

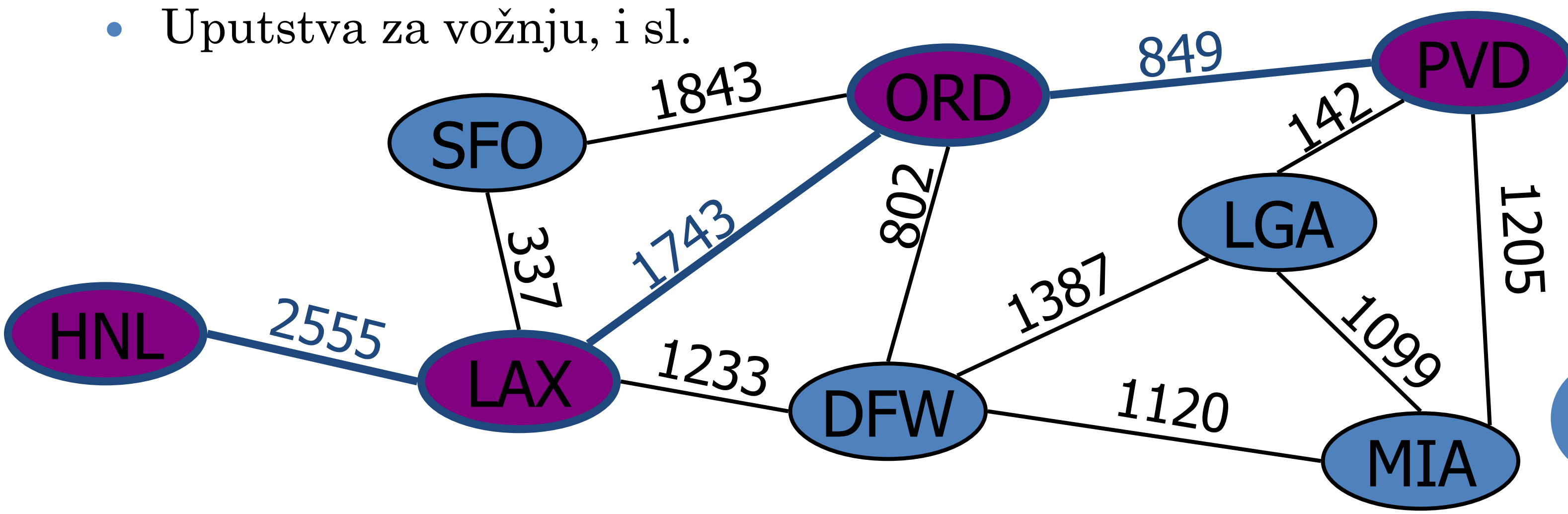
- U težinskom grafu svaki poteg ima dodeljen broj, koji definiše težinu potega
- Težina može biti rastojanje, cena, ili neka druga vrednost
- Primer:
  - U grafu koji predstavlja trase letova, težine potega su rastojanja između dva aerodroma
- Matrica težina: umesto 1 i 0, vrednosti su težine potega 0 ili ∞ (definisano kod implementacije)

$$W_{ij} = \begin{cases} t & (v_i, v_j) \in E \\ \infty & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$



Problem najkraćeg puta

- Ako je dat težinski graf, i dva čvora ***u*** i ***v***, treba naći put sa minimalnom ukupnom težinom između ***u*** i ***v.***
  - Dužina puta je zbir težina potega koji su deo puta.
- Primer:
  - Najkraći put između aerodroma u Providence PVD i Honolulu HNL
- Primena
  - Rutiranje Internet paketa
  - Rezervacije letova
  - Uputstva za vožnju, i sl.



Najkraći put - osobine

Osobina 1:

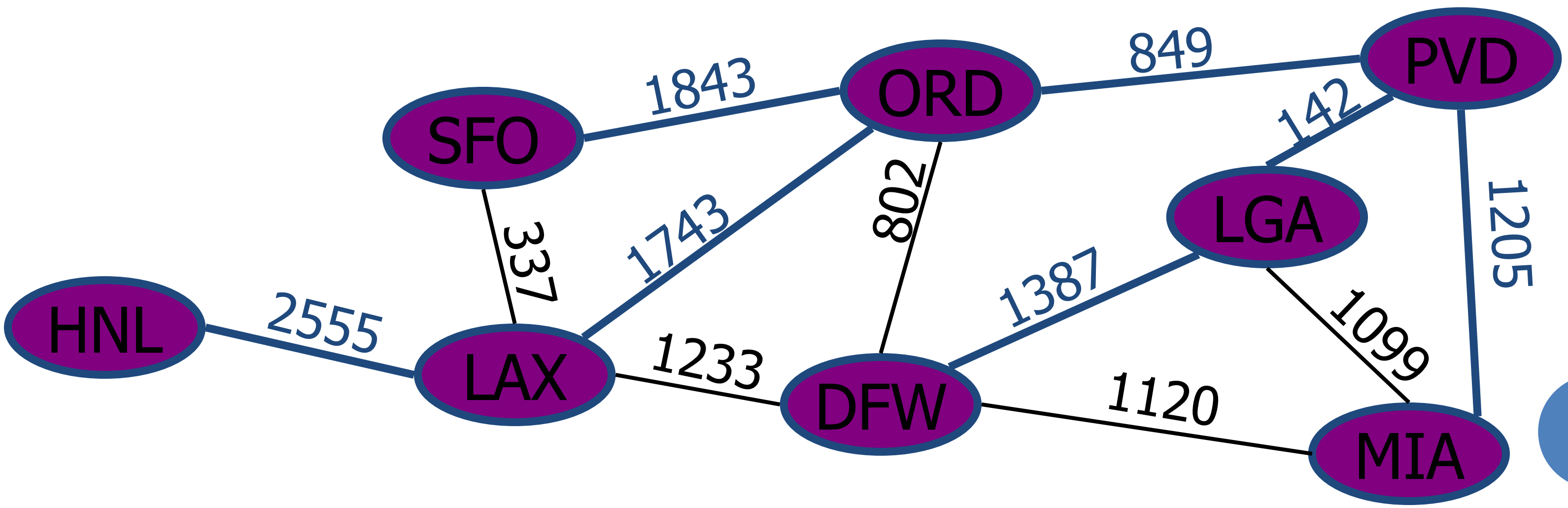
Put koji je deo najkraćeg puta je takođe najkraći put

Osobina 2:

Počev od startnog čvora, postoji stablo najkraćih puteva do svih ostalih čvorova

Primer:

Stablo najkraćih puteva od aerodroma u Providence-u PVD



Traženje najkraćeg puta u grafu – sekvencijalna reprezentacija

- Polazimo od matrice težina W
- Matrica P pokazuje da postoji put između dva čvora
- Grafimo matricu Q, čiji elementi sadrže dužinu najkraćeg puta
- Modifikovani Warshall-ov algoritam - za nalaženje matrice Q
- Definišemo matrice Q_0, Q_1, ... Q_m, tako da je matrica Q_k:

$$Q_k[i,j]=\min(Q_{k-1}[i,j], (Q_{k-1}[i,k] + Q_{k-1}[k,j])$$

- Može se uočiti da je:
  - $Q_0=W$
  - $Q_m=Q$
- Ako je graf zadat matricom A, podrazumeva se da su težine za svaki poteg = 1, i primenjuje se isti algoritam

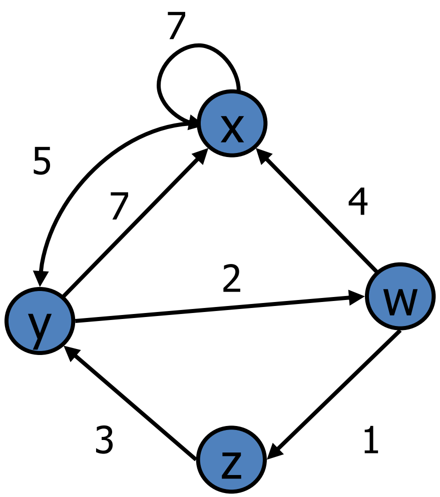
Modifikovani Warshall-ov algoritam – pseudokod

Algoritam G.3. Modifikovani Warshall-ov algoritam

ModifWarshall(W,m)

```
{// data je matrica težina W i broj čvorova m
 // algoritam generiše matricu Q
repeat for (i=1,m)      //inicijalizacija matrice Q0
    { repeat for (j=1,m)
        { if (W[i,j]=0)
              then Q[i,j]=MAX
              else Q[i,j]=W[i,j] }}
 repeat for k=1,m      //Azuriranje Q
    {repeat for i=1,m
       {repeat for j=1,m
          Q[i,j]=min(Q[i,j], (Q[i,k] + Q[k,j]) }}
return}
```

MODIFIKOVANI WARSHALL-OV ALGORITAM - PRIMER



$$Q_0 = W = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 7 & 5 & \infty & \infty \\ y & 7 & \infty & \infty & 2 \\ z & \infty & 3 & \infty & \infty \\ w & 4 & \infty & 1 & \infty \end{array}$$

+

min

$$Q_1 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 7 & 5 & \infty & \infty \\ y & 7 & 12 & \infty & 2 \\ z & \infty & 3 & \infty & \infty \\ w & 4 & 9 & 1 & \infty \end{array}$$

$$Q_2 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 7 & 5 & \infty & 7 \\ y & 7 & 12 & \infty & 2 \\ z & 10 & 3 & \infty & 5 \\ w & 4 & 9 & 1 & 11 \end{array}$$

$$Q_3 = \begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & w \\ x & 7 & 5 & \infty & 7 \\ y & 7 & 12 & \infty & 2 \\ z & 10 & 3 & \infty & 5 \\ w & 4 & 4 & 1 & 6 \end{array}$$

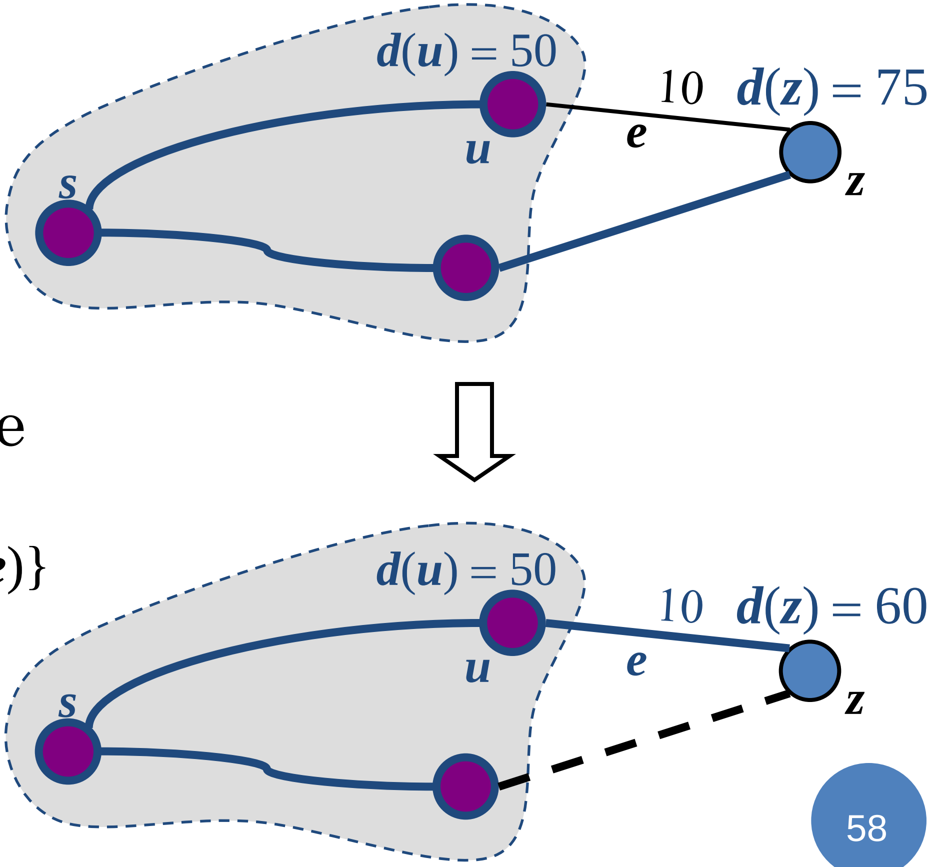
$$\mathbf{Q=Q_4} = \begin{array}{c|cccc|} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{y} & \mathbf{7} & \mathbf{11} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{z} & \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{w} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{array}$$

Najkraći put u grafu: Dijkstra-in algoritam – lančana reprezentacija grafa

- Rastojanje čvora ***v*** od čvora ***s*** je dužina najkraćeg puta između ***s*** i ***v***
- Dijkstra-in algoritam računa rastojanja za sve čvorove počev od startnog čvora ***s***
- Pretpostavke:
  - Graf je povezan
  - neorijetnisan
  - Težine potega su ne-negativne
- Algoritam počinje od startnog čvora obradom svih njegovih potega, tako što se formira "oblak"
- Za svaki čvor ***v*** pamti se vrednost/labela ***d***(***v***) koja predstavlja rastojanje ***v*** od ***s*** u pod-grafu koji se sastoji od "oblaka" i povezanih čvorova
- U svakom koraku
  - Dodajemo"oblaku" čvor ***u*,** koji je izvan oblaka, i sa najmanjom vrednosti distance ***d***(***u***)
  - Ažuriramo vrednosti distanci za sve čvorove susedne sa ***u***

Relaksacija potega

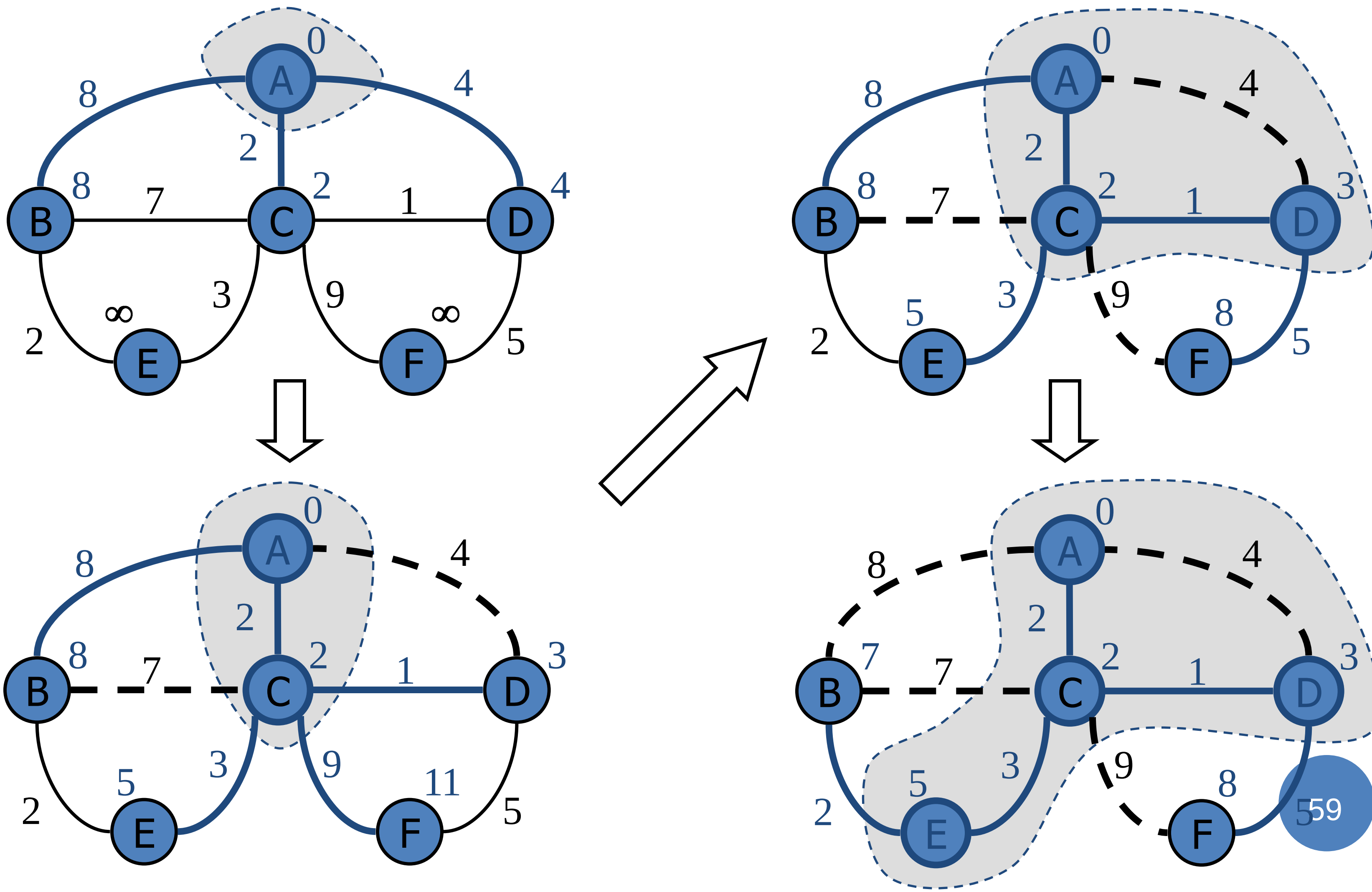
- Posmatramo poteg $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})$ takav da je
  - ***u*** čvor koji je skoro dodat oblaku
  - ***z*** nije u oblaku



- Relaksacija potega ***e*** podrazumeva ažuriranje $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z})$:

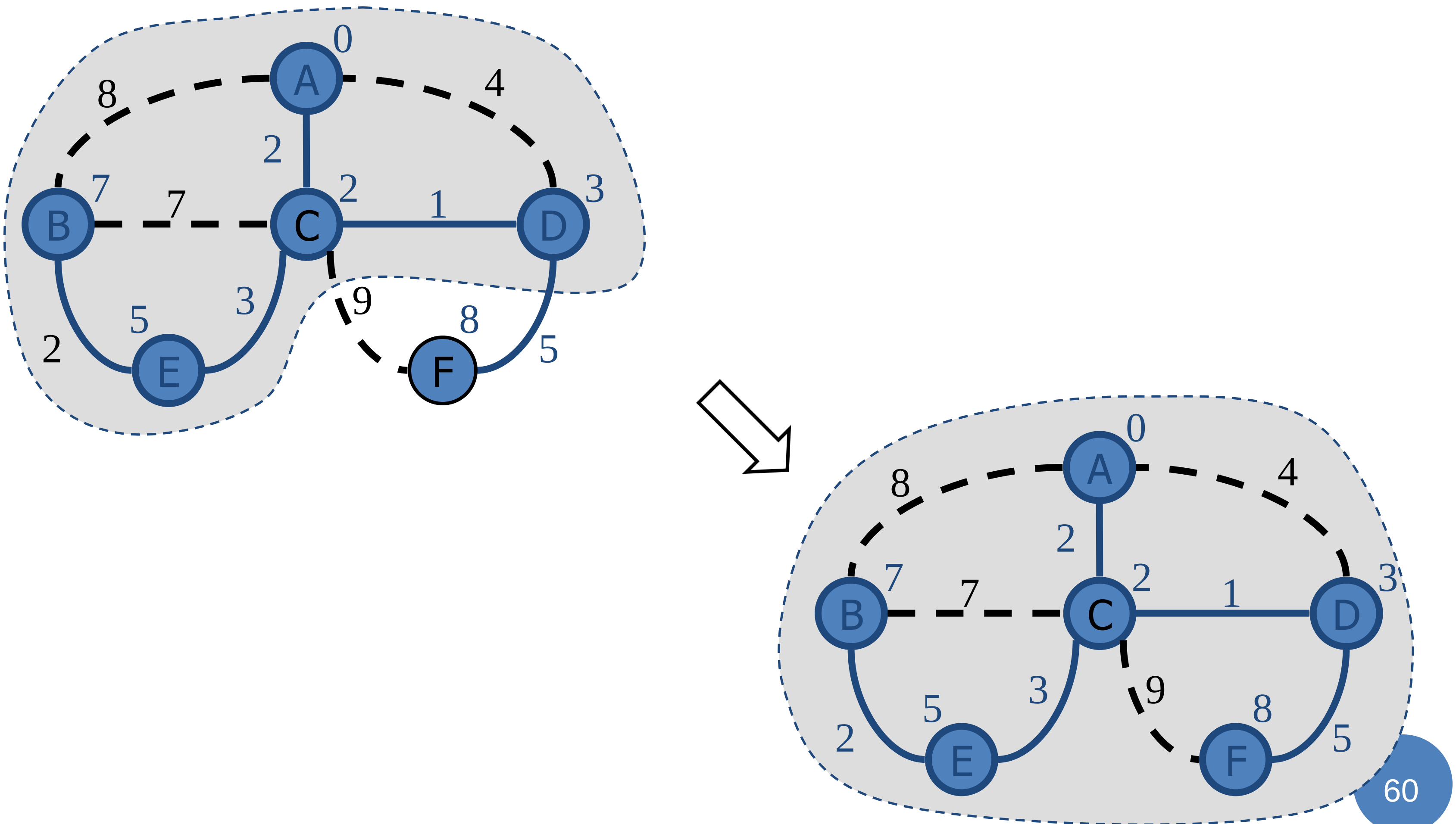
$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}) \leftarrow \min\{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{weight}(\boldsymbol{e})\}$$

PRIMER



A
B
C
D
E
F
0
8
4
2
8
7
2
1
4
3
9
∞
∞
2
5
0
8
4
2
8
7
2
1
3
3
9
5
11
2
5
0
8
4
2
8
7
2
1
3
5
3
9
8
2
5
0
4
8
2
7
7
2
1
3
5
3
9
8
2
5

PRIMER (NAST.)



Dijkstra-in Algoritam

- Red sa proritetom čuva čvorove koji su van oblaka
  - Ključ *Key*: distanca
  - Element: čvor
- Locator-based metoda
  - *insert*(*k*,*e*) vraća locator
  - *replaceKey*(*l*,*k*) menja vrednost ključa zadatog elementa
- Čuvamo dve labele za svaki čvor:
  - distanca (labela d(v))
  - lokator u redu sa prioritetom

Algoritam G.4. ***DijkstraDistances***(***G***, ***s***)
    Q ← new heap-based priority queue
    for all *v* ∈ ***G.vertices***()
        if *v* = ***s***
            setDistance(***v***, 0)
        else
            setDistance(***v***, ∞)
        l ← ***Q.insert***(***getDistance***(***v***), ***v***)
        setLocator(***v***,***l***)
    while ¬***Q.isEmpty***()
        u ← ***Q.removeMin***()
        for all *e* ∈ ***G.incidentEdges***(***u***)
            { relax edge ***e*** }
            z ← ***G.opposite***(***u***,***e***)
            r ← ***getDistance***(***u***) + ***weight***(***e***)
            if ***r*** < ***getDistance***(***z***)
                setDistance(***z***,***r***)
                Q.replaceKey(***getLocator***(***z***),***r***)

Proširenje Dijkstra-inog algoritma – stablo najkraćih puteva

- Vraća stablo najkraćih puteva od startnog čvora do svih ostalih
- Pamtimo uz svaki čvor treću labelu:
  - Roditeljski poteg u stablu najkraćeg puta
- U procesu relaksacije potega ažuriramo i ovu labelu

Algoritam G.5.
***DijkstraShortestPathsTree*(*G, s*)**

```
    ...

  for all  v ∈ G.vertices()
    ...
    setParent(v, ∅)
    ...

    for all  e ∈ G.incidentEdges(u)
      { relax edge e }
      z ← G.opposite(u,e)
      r ← getDistance(u) + weight(e)
      if  r < getDistance(z)
        setDistance(z,r)
        setParent(z,e)
        Q.replaceKey(getLocator(z),r)
```

PITANJA, IDEJE, KOMENTARI