

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

INFO-F-302 Informatique Fondamentale : Rapport de projet

OMER Nicolas
PICARD Simon



Contents

1	Introduction	2
2	Question 1	2
2.1	Définition des variables et symboles	2
2.2	Forme Normale Conjonctive	2
2.2.1	Contrainte d'existence	2
2.2.2	Un musicien ne peut être que dans un seul groupe	2
2.2.3	Un instrument par groupe	2
2.2.4	Un seul musicien peut jouer d'un certain instrument dans un groupe	3
2.2.5	Tous les instruments dans un groupe ou aucun	3
3	Question 2	3
3.1	Définition des variables et symboles	3
3.2	Forme Normale Conjonctive	3
3.2.1	Un musicien ne peut pas jouer dans plus de Max_a groupes	3
4	Question 3	4
4.1	Définition des variables	4
4.2	Forme Normale Conjonctive	4
4.2.1	Un seul musicien peut jouer d'un certain instrument dans un groupe	4
4.2.2	Tous les instruments dans un groupe ou aucun	5
4.2.3	Un instrument par groupe	5
4.2.4	Un musicien ne peut pas jouer dans plus de Max_a groupes	5

1 Introduction

Le but du projet d'informatique fondamentale est de former des groupes de musique sous certaines contraintes. Il s'agit d'exprimer les contraintes sous forme normale conjonctive afin de les encoder dans l'outil permettant de résoudre les différents problèmes donnés. Pour cela, nous utilisons le solveur *MiniSat* qui permet de déterminer, sous un ensemble de contraintes, si un problème est satisfaisable.

2 Question 1

2.1 Définition des variables et symboles

Dans cette section, nous définissons les différentes variables et symboles que nous utilisons dans l'expression des contraintes sous forme normale conjonctive.

- M est le nombre de musiciens.
- I est le nombre d'instruments.
- K est le nombre maximum de groupes.
- $X_{a,b,c}$ est une variable telle que pour tout musicien a , l'instrument b dans le groupe c , $X_{a,b,c} = \text{vrai}$ si et seulement si le musicien a joue de l'instrument b dans le groupe c .
- I_a représente la liste des instruments que a maîtrise.

2.2 Forme Normale Conjonctive

2.2.1 Contrainte d'existence

$$\bigwedge_{0 < a \leq M} \left(\bigvee_{0 < c \leq K} \bigvee_{b \in I_a} X_{a,b,c} \right)$$

Il s'agit simplement de dire que chaque musicien doit jouer un des instruments qu'il maîtrise dans un groupe.

2.2.2 Un musicien ne peut être que dans un seul groupe

$$\bigwedge_{0 < a \leq M} \bigwedge_{b_1 \in I_a} \bigwedge_{b_2 \in I_a} \bigwedge_{0 < c_1 \leq K} \bigwedge_{c_1 < c_2 \leq K} (\neg X_{a,b_1,c_1} \vee \neg X_{a,b_2,c_2})$$

Par musicien, nous disons qu'il ne peut pas, à la fois jouer d'un instrument b_1 quelconque dans un groupe c_1 et un instrument b_2 quelconque dans un autre groupe c_2 .

2.2.3 Un instrument par groupe

$$\bigwedge_{0 < a \leq M} \bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{b_1 \in I_a} \bigwedge_{\substack{b_2 \in I_a \\ b_2 \neq b_1}} (\neg X_{a,b_1,c} \vee \neg X_{a,b_2,c})$$

Par musicien, nous disons qu'il ne peut pas à la fois jouer d'un instrument b_1 dans un groupe c et d'un autre instrument b_2 quelconque dans le même groupe c .

2.2.4 Un seul musicien peut jouer d'un certain instrument dans un groupe

$$\bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{0 < a_1 \leq M} \bigwedge_{a_1 < a_2 \leq M} \bigwedge_{\substack{b \in I_{a_1} \\ b \in I_{a_2}}} (\neg X_{a_1, b, c} \vee \neg X_{a_2, b, c})$$

Nous exprimons ici que, dans un même groupe, une personne a_1 et autre a_2 ne peuvent pas jouer du même instrument dans un groupe.

2.2.5 Tous les instruments dans un groupe ou aucun

$$\bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{0 < a_1 \leq M} \bigwedge_{b_1 \in I_{a_1}} \bigwedge_{\substack{0 < b_2 \leq I \\ b_2 \neq b_1}} \left(\neg X_{a_1, b_1, c} \vee \bigvee_{\substack{0 < a_2 \leq M \\ a_2 \neq a_1 \\ b_2 \in I_{a_2}}} X_{a_2, b_2, c} \right)$$

Ici nous voulons exprimer la contrainte groupe complet ou vide, pour ce faire nous utilisons une implication qui dit que, dans chaque groupe, si un musicien a_1 joue d'un instrument b_1 , alors ceci implique que, pour chaque autre instrument b_2 , un des autres musiciens maîtrisant ce dernier, a_2 , le joue dans ce groupe.

3 Question 2

3.1 Définition des variables et symboles

- Max_a représente le nombre maximum de groupe dans lequel le musicien a peut jouer.
- $|I_a|$ représente la cardinalité de I_a soit le nombre d'instruments dont a peut se servir.

Les variables et symboles restants sont identiques à ceux de la question 1.

3.2 Forme Normale Conjonctive

3.2.1 Un musicien ne peut pas jouer dans plus de Max_a groupes

Pour implémenter cela, nous allons étendre la solution "un groupe maximum" qui, pour rappel, voulait exprimer $\neg(groupe_1 \wedge groupe_2) \wedge \neg(groupe_2 \wedge groupe_3) \dots$ Dans la conjonction se trouveront $Max_a + 1$ littéraux. Pour se faire, on commence par générer tous les sous-ensembles de groupe de taille $Max_a + 1$ et toutes les combinaisons de I_a de taille $Max_a + 1$. Car un joueur ne peut pas jouer d'un même instrument dans différents groupes ni de différents instruments dans différents groupes.

À la seconde étape, on génère toutes les combinaisons d'identifiants (t et s) et finalement, il ne reste qu'à choisir une des combinaisons avec les variables x et y .

Cette contrainte est exprimée par la première ligne de la forme normale conjonctive suivante. On peut illustrer cela par un exemple où $K = 3$ et $Max_a + 1 = 2$

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{0 < a \leq M} \bigwedge_{0 < c_1 \leq K} \bigwedge_{c_1 < c_2 \leq K} \dots \bigwedge_{c_{Max_a} < c_{Max_a+1} \leq K} \bigwedge_{b_1 \in I_a} \bigwedge_{b_2 \in I_a} \dots \bigwedge_{b_{Max_a+1} \in I_a} \\
& \bigwedge_{0 < t_1 \leq Max_a+1} \dots \bigwedge_{0 < t_{Max_a+1} \leq Max_a+1} \bigwedge_{0 < s_1 \leq Max_a+1} \dots \bigwedge_{0 < s_{Max_a+1} \leq Max_a+1} \\
& \bigwedge_{0 < y \leq Max_a+1} \left(\bigvee_{0 < z \leq Max_a+1} \neg X_{a, b_{s_y}, c_{t_z}} \right)
\end{aligned}$$

Nous nous rendons compte qu'avec cette contrainte, nous vérifions aussi la contrainte *Un instrument par groupe* puisque parfois, pour tout y , s_y sera identique pour toute la clause, dès lors nous n'avons plus besoin de cette contrainte. Pour le reste, les autres contraintes sont identiques.

Le nombre de clauses crée sera égal à :

$$\sum_{a=1}^M \left(\binom{K}{Max_a+1} * |I_a|^{Max_a+1} * (Max_a+1)^{Max_a+1} * (Max_a+1)^{Max_a+1} * (Max_a+1) \right)$$

Soit

$$\sum_{a=1}^M \left(\binom{K}{Max_a+1} * |I_a|^{Max_a+1} * (Max_a+1)^{2*(Max_a+1)+1} \right)$$

Sachant que chaque clause est composée des Max_a littéraux. Cependant, il y aura des doublons dans les clauses générées, mais le solveur MiniSat se chargera de les supprimer pour nous¹.

4 Question 3

4.1 Définition des variables

- L'instrument qui a comme valeur I est toujours l'instrument *chant*.

Les variables et les symboles sont identiques à ceux de la question 2.

4.2 Forme Normale Conjonctive

4.2.1 Un seul musicien peut jouer d'un certain instrument dans un groupe

C'est toujours vrai sauf quand l'instrument considéré est le chant.

$$\bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{0 < a_1 \leq M} \bigwedge_{a_1 < a_2 \leq M} \bigwedge_{\substack{b \in I_{a_1} \\ b \in I_{a_2} \\ b \neq I}} (\neg X_{a_1, b, c} \vee \neg X_{a_2, b, c})$$

¹addendum au nombre de clauses créé à la section 4.2.4

4.2.2 Tous les instruments dans un groupe ou aucun

La contrainte reste vraie, cependant si un musicien utilise un autre instrument que sa voix, ceci peut impliquer qu'il chante et inversement (s'il maîtrise ces instruments bien surs).

$$\bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{0 < a_1 \leq M} \bigwedge_{b_1 \in I_{a_1}} \bigwedge_{\substack{0 < b_2 \leq I \\ b_2 \neq b_1}} \left(\neg X_{a_1, b_1, c} \vee \bigvee_{\substack{0 < a_2 \leq M \\ b_2 \in I_{a_2}}} \left(\bigvee_{\substack{a_2 \neq a_1 \\ b_1 \neq I}} X_{a_2, b_2, c} \vee \bigvee_{b_1 = I} X_{a_2, b_2, c} \vee \bigvee_{\substack{a_2 = a_1 \\ b_2 = I}} X_{a_2, b_2, c} \right) \right)$$

Dans la parenthèse la plus imbriquée, le premier grand ou est le même que précédemment, le second signifie que, si a_1 chante, alors a_2 peut chanter aussi et le dernière représente le fait que si a_1 joue d'un instrument et qu'il sait chanter, il peut faire les deux.

4.2.3 Un instrument par groupe

La contrainte *Un instrument par groupe* et la contrainte *Un musicien ne peut pas jouer dans plus de Max_a groupes* ne peuvent plus être combinées, puisque la première n'est plus toujours vraie depuis l'arrivée de la composante du chant.

Commençons par réintroduire cette dernière :

$$\bigwedge_{0 < a \leq M} \bigwedge_{0 < c \leq K} \bigwedge_{\substack{b_1 \in I_a \\ b_1 \neq I}} \bigwedge_{\substack{b_2 \in I_a \\ b_2 \neq b_1 \neq I}} (\neg X_{a, b_1, c} \vee \neg X_{a, b_2, c})$$

Il s'agit de la même expression que dans la première question sauf que b_1 et b_2 ne peuvent pas valoir I , le *chant*.

4.2.4 Un musicien ne peut pas jouer dans plus de Max_a groupes

Cette contrainte reste vraie, sauf pour l'instrument I et il ne faut plus introduire en même temps la contrainte décrite ci-dessus. Voici la forme normale conjonctive :

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{0 < a \leq M} \bigwedge_{0 < c_1 \leq K} \bigwedge_{c_1 < c_2 \leq K} \dots \bigwedge_{c_{Max_a} < c_{Max_a+1} \leq K} \bigwedge_{\substack{b_1 \in I_a \\ b_1 \neq I}} \bigwedge_{\substack{b_2 \in I_a \\ b_2 \neq I}} \dots \bigwedge_{\substack{b_{Max_a+1} \in I_a \\ b_{Max_a} \neq I}} \\ & \bigwedge_{0 < t_1 \leq Max_a+1} \dots \bigwedge_{t_{Max_a} < t_{Max_a+1} \leq Max_a+1} \bigwedge_{0 < s_1 \leq Max_a+1} \dots \bigwedge_{0 < s_{Max_a+1} \leq Max_a+1} \\ & \bigwedge_{0 < y \leq Max_a+1} \left(\bigvee_{0 < z \leq Max_a+1} \neg X_{a, b_{s_y}, c_{t_z}} \right) \end{aligned}$$

Ici, nous ne prenons plus tous les ensembles d'indices de c , t mais uniquement les ensembles différents, nous nous retrouvons alors avec un coefficient binomial $\binom{Max_a}{Max_a}$ qui vaut 1, en effet il

s'agit simplement de la suite des indices ce qui nous donne bien ce qu'on souhaite, chaque c_t sera différent des autres.

Dans ce cas, les clauses générées auront pour but unique d'introduire une contrainte *au plus k* et il y en aura :

$$\sum_{a=1}^M \left(\binom{K}{Max_a + 1} * |I_a|^{Max_a + 1} * (Max_a + 1) * (Max_a + 1)^{Max_a + 1} * (Max_a + 1) \right)$$

Soit

$$\sum_{a=1}^M \left(\binom{K}{Max_a + 1} * |I_a|^{Max_a + 1} * (Max_a + 1)^{Max_a + 3} \right)$$

Il est important de noter qu'on omettra l'instrument *chant* dans l'ensemble I_a .