GSF-3100
Marchés des Capitaux
Mathématiques des Obligations

June 22, 2021

Contents

1 Équivalence de taux

Afin de pouvoir comprendre le fonctionnement d'une obligation, il est important de bien maitriser le concept de taux d'intérêt nominal et effectif.

- Taux d'Intérêt Effectif (Notation : r)
  1. Il s'agit du taux utilisé dans le calcul de la capitalisation et de l'actualisation.
  2. Il s'agit également du taux réellement recu sur un investissement P_0 et rapportant I en intérêt.

$$I = P_0 \times r$$

- Taux d'Intérêt Nominal (Notation : $(i; m)$)
  1. Sera toujours accompagné d'un valeur m représentant le nombre de capitalisation par période.
  2. Il ne doit pas être utilisé dans les calculs d'actualisation et de capitalisation

Le taux d'intérêt effectif r est une fonction de notre taux d'intérêt nominal i et de notre nombre de capitalisation par période.

$$r = \frac{i}{m}$$

Nous allons maintenant regarder comment effectuer une équivalence de taux.

1.1 Taux effectif → Taux effectif

Transformer un taux effectif r_2 en un autre taux effectif r_1 à l'aide de l'équation suivante:

$$r_1 = (1 + r_2)^{\frac{u}{v}} - 1$$

Sachant

- r_1 est le taux effectif par u période
- r_2 est le taux effectif par v période

Voici les valeurs prises par u et v lorsque nous avons les taux effectifs suivants

r_1	r_2	u	v
Quotidien	**Annuel**	1	365
Hebdomadaire	**Annuel**	1	52
Mensuel	**Annuel**	1	12
Trimestriel	**Annuel**	1	4
Semestriel	**Annuel**	1	2
Quotidien	**Semestriel**	2	365
Hebdomadaire	**Semestriel**	2	52
Mensuel	**Semestriel**	2	12
Trimestriel	**Semestriel**	2	4

1.2 Taux effectif → Taux nominal

Transformer un taux effectif r en un taux nominal $(i; m)$ à l'aide de l'équation suivante:

$$i = r \times m$$

1.3 Taux nominal → Taux effectif

Transformer un taux nominal $(i; m)$ en un taux effectif r à l'aide de l'équation suivante:

$$r = \frac{i}{m}$$

2 Capitalisation et Actualisation

2.1 Valeur Future (Capitalisation)

Dans cette section, nous allons regarder comment capitaliser un montant unique. La capitalisation nous permet de déterminer la valeur future d'un montant d'argent investit aujourd'hui à un taux spécifié. Voici les paramètres que nous utiliserons:

- P_0 = Montant investi en $t = 0$
- r = Taux d'intérêt périodique reçu sur l'investissement
- n = Période pendant lequel le montant initial est investi
- P_n = Valeur future de notre investissement P_0 en $t = n$

Voici l'équation nous permettant de trouver la valeur future de notre investissement

$$P_n = P_0 \times (1 + r)^n$$

2.2 Valeur Présente (Actualisation)

Dans cette section, nous allons regarder comment actualiser un montant unique. L'actualisation nous permet de déterminer la valeur présente d'un montant d'argent que nous allons recevoir dans le future. Voici les paramètres que nous utiliserons:

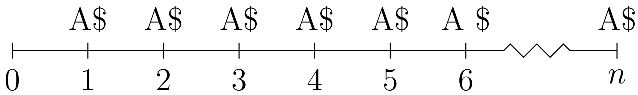
- P_0 = Montant à recevoir dans le futur en valeur d'aujourd'hui ($t = 0$), soit la valeur présente
- r = Taux d'intérêt périodique en vigueur dans l'économie
- n = Nombre de périodes avant que le montant soit reçu.
- P_n = Montant nominal à recevoir dans le futur ($t = n$)

Voici l'équation nous permettant de trouver la valeur présente d'un montant à recevoir dans le futur.

$$P_0 = \frac{P_n}{(1 + r)^n}$$

3 Annuité

Une annuité est tout simplement une suite de paiements identiques et reçus à intervalle constant pendant une période spécifiée. Voici une ligne du temps représentant une annuité.



- $A\$$ représente le paiement reçu à chaque période
- n représente le nombre de paiements que versera l'annuité

3.1 Valeur future d'une annuité régulière

La valeur future d'une annuité régulière, nous donnera la valeur de la somme de tous les flux $A\$$ capitalisé à $t = n$. VF_{P_n} sera la notation que nous utiliserons pour la valeur future d'une annuité régulière. L'équation suivante montre comment obtenir la valeur future de notre annuité régulière.

$$VF_{P_n} = A \times (1+r)^{n-1} + A \times (1+r)^{n-2} + ... + A \times (1+r)^1 + A \times (1+r)^0$$

Si le nombre de période n est relativement faible, il sera simple de calculer la valeur future. Cependant, si nous avons un nombre important de périodes n, la formule suivante est plus pratique.

$$VF_{P_n} = A \left[\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right]$$

Sachant les paramètres suivants:

- VF_{P_n} = Valeur future d'une annuité régulière
- A = flux monétaire constant reçu à chaque période
- n = Nombre de flux monétaire qui sera versé dans cette annuité régulière
- r = taux d'intétêt périodique en vigueur

3.2 Valeur présente d'une annuité régulière

La valeur présente d'une annuité régulière, nous donnera la valeur de la somme de tous les flux $A\$$ actualisé en $t = 0$. VP_{P_0} sera la notation que nous utiliserons pour la valeur présente d'une annuité régulière. L'équation suivante montre comment obtenir la valeur présente de notre annuité régulière.

$$VP_{P_0} = \frac{A}{(1+r)^1} + \frac{A}{(1+r)^2} + ... + \frac{A}{(1+r)^{n-1}} + \frac{A}{(1+r)^n}$$

Si le nombre de période n est relativement faible, il sera simple de calculer la valeur présente. Cependant, si nous avons un nombre important de périodes n, la formule suivante est plus pratique.

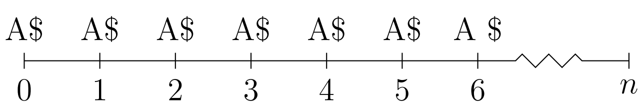
$$VP_{P_0} = A\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right]$$

Sachant les paramètres suivants:

- VP_{P_0} = Valeur présente d'une annuité régulière
- A = flux monétaire constant reçu à chaque période
- n = Nombre de flux monétaire qui sera versé dans cette annuité régulière
- r = taux d'intétêt périodique en vigueur

3.3 Annuité de début de période

Si nous sommes en présence d'une annuité de début de période, la ligne du temps sera modifiée comme suit:



La valeur future et présente d'une annuité de début de période pourra être trouvée en utilisant la formule pour l'annuité régulière avec un ajustement. En effet, la formule pour l'annuité régulière appliquée pour une annuité de début de période capitalisera l'ensemble des flux monétaire à $t = n - 1$ pour la valeur future et actualisera l'ensemble des flux monétaire en $t = -1$ pour la valeur présente. Afin de déplacer VF_{P_n} à $t = n$ et VP_{P_0} à $t = 0$, il faut multiplier la valeur présente et future de notre annuité régulière par $(1 + r)$.

- Valeur future d'une annuité de début de période $VF_{P_n^*}$

$$VF_{P_n^*} = VF_{P_n} \times (1 + r)$$

$$VF_{P_n^*} = A\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] \times (1+r)$$

- Valeur présente d'une annuité de début de période $VP_{P_0^*}$

$$VP_{P_0^*} = VP_{P_0} \times (1+r)$$

$$VP_{P_0^*} = A\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] \times (1+r)$$

4 Déterminer le prix d'une obligation

Dans cette section nous allons regarder comment trouver le prix de trois types d'obligations.

- Obligation régulière
- Obligation Zéro Coupon
- Obligation perpétuelle

4.1 Obligation régulière

Dans une obligation régulière un coupon est versé tous les semestres et le calcul du coupon est le suivant:

$$C = M * \frac{TC}{2}$$

Où

- C = coupon semetriel
- TC = taux de coupon annuel
- M = Valeur nominal de l'obligation

Les flux monétaire d'une obligation peuvent être séparés en deux importantes composantes.

1. Coupon payé de façon périodique jusqu'à l'échéance
2. Paiement de la valeur à l'échéance

Le prix d'une obligation peut être également séparé en deux composantes:

1. la valeur actuelle des paiements de coupons semestriels
2. la valeur actuelle de la valeur à l'échéance

Voici l'équation pour trouver le prix d'une obligation régulière:

$$P = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^2} + ... + \frac{C}{(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^n}$$

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n}$$

On peut donc remarquer la présence d'une annuité dans la dernière équation

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} = C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right]$$

On peut donc arriver à l'équation simplifiée pour le prix d'une obligation régulière.

$$P = C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] + \frac{M}{(1+r)^n}$$

4.2 Obligation Zéro Coupon

Une obligation zéro coupon à la particularité de ne pas payer de coupons. Une obligation zéro coupon possède comme unique flux monétaire, la valeur actuelle de la valeur à l'échéance. On peut donc trouver le prix d'une obligation zéro coupon en actualisant seulement la valeur à l'écheance M.

$$P_{zc} = \frac{M}{(1+r)^n}$$

Où P_{zc} représente le prix d'une obligation zéro coupon au temps $t = 0$ venant à échéance après n périodes

4.3 Obligation perpétuelle

Une obligation perpétuelle à la particularité de ne pas avoir d'échéance. En effet, on suppose que les coupons seront payés pendant une période infinie. Sachant cela, il nous possible de dire que la valeur d'une obligation perpétuelle est la suivante.

$$P_p = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t}$$

Après manipulation de la dernière équation, il est possible d'arriver à l'expression suivante pour le prix d'une obligation perpétuelle P_p.

$$P_p = \frac{C}{r}$$

5 Intérêt couru et cote

5.1 Prix d'une obligation entre deux dates de coupon

Il faut tout d'abord calculer le prix d'une obligation au moment où le dernier coupon a été versé. Si on suppose que le dernier coupon a été versé en t=0, alors le prix d'une obligation régulière à ce moment est trouvée comme suit:

$$P_0 = C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] + \frac{M}{(1+r)^n}$$

Le problème est que depuis le dernier coupon, une période de k s'est écoulée, alors le prix que nous venons de calculer est trop faible. Si le détenteur décidait de vendre sont obligation à $t = k$, au prix de $t = 0$, il laisserait la totalité du prochain coupon au prochain acheteur. Pour rectifier cette situation, il faut ajuster le prix P_0 pour tenir compte de l'intérêt accumulé entre $t = 0$ et $t = k$. Il s'agit tout simplement de capitaliser le prix P_0 sur k période.

$$P_k = P_0(1+r)^k$$

Nous obtiendrons ainsi le prix reflétant l'intérêt accumulé P_k, appelé **full price** ou **dirty price**. On trouve ainsi l'équation complète afin de déterminer le prix d'une obligation entre deux paiements de coupons.

$$P_k = \left(C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] + \frac{M}{(1+r)^n}\right) \times (1+r)^k$$

5.2 Cotation

Nous utiliserons le terme **cote** où **clean price** comme étant la valeur de l'obligation servant uniquement à rénumérer le vendeur de l'obligation pour la valeur intrinsèque. Pour trouver ce prix, il faut soustraire les intérêts courrus au prix P_k.

$$cote_k = P_k - IC_k$$

Où

- $cote_k$ = **clean price** à $t = k$
- P_k = **full price** ou **dirty price** à $t = k$
- IC_k = Intérêts courus à $t = k$

Pour trouver les intérêts courrus, il nous suffit de multiplier k par la valeur du coupon périodique.

$$IC_k = k \times C$$

5.3 Convention pour la valeur de k

Il est important de comprendre que k possède comme unité de mesure, une période de coupon. Pour faciliter la compréhension, si on est exactement à mi-chemin entre deux versements de coupons, la valeur prise par k sera de 0.5. De façon très générale k est déterminé avec la formule suivante:

$$k = \frac{N_{C_t}^{C_{t+k}}}{N_C}$$

Où

- $N_{C_t}^{C_{t+k}}$ est le nombre de jours depuis le dernier coupon.
- N_C est le nombre de jours dans une période de coupon.

De plus, tout dépendant du type d'obligation, une convention différente pour trouver la valeur de k sera appliquée.

- Titres gouvernementaux

$$k = \frac{Exact}{Exact}$$

  - Numérateur : le nombre de jours exacts depuis le dernier coupon
  - Dénominateur : le nombre de jours exacts dans une période de coupon.

- Marché monétaire américain

$$k = \frac{Exact}{360}$$

  - Numérateur : le nombre de jours exacts depuis le dernier coupon
  - Dénominateur : 360/nombre de coupons par année

- Obligations corporatives

$$k = \frac{30}{360}$$

  - Numérateur : le nombre de jours depuis le dernier coupon en accordant aux mois entiers depuis le dernier coupon une valeur de 30 jours.
  - Dénominateur : 360/nombre de coupons par année

- Autre

$$k = \frac{Exact}{365}$$

  - Numérateur : le nombre de jours exacts depuis le dernier coupon
  - Dénominateur : 365/nombre de coupons par année

6 Rendement réalisé

Dans cette section, nous allons définir les étapes afin de calculer le rendement réalisé lorsque nous avons acheté une obligation à $t = 0$ ayant une échéance à $t = n$ et que nous l'avons vendue par la suite à $t = m$. De plus nous allons supposer les élèments suivants:

- Le coupon prendra C comme valeur La valeur à l'échéance de l'obligation prendra M comme valeur
- Les coupons seront réinvestit au taux $r_{réinvestissement}$
- L'obligation sera acheté avec un rendement à l'échéance de r_{achat}
- L'obligation sera vendu à rendement à l'échéance de r_{vente}
- L'obligation versera 2 coupons chaque année, soit de façon semestrielle.

Par la suite, nous allons effectuer les 4 étapes suivantes:

1. Calculer le prix d'achat en $t = 0$
2. Calculer la valeur future des coupons à $t = m$, pour tenir compte du réinvestissement des coupons.
3. Calcul du prix de vente à $t = m$
4. Calcul du rendement réalisé avec les valeurs trouvées dans l'étape 1, 2 et 3.

6.1 Étape 1

Voici l'équation qui nous permet de trouver le prix d'achat en $t = 0$

$$P_0 = C \times \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{(1+r_{achat})^n} \right)}{r_{achat}} \right] + \frac{M}{(1 + r_{achat})^n}$$

6.2 Étape 2

Voici l'équation qui nous permet de calculer la valeur future des coupons à $t = m$.

$$VF_m^{coupon} = C \times \left[\frac{(1 + r_{réinvestissement})^m - 1}{r_{réinvestissement}} \right]$$

6.3 Étape 3

Voici l'équation qui nous permet de trouver le prix de vente en $t = m$

$$P_m = C \times \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{(1+r_{vente})^{n-m}} \right)}{r_{vente}} \right] + \frac{M}{(1 + r_{vente})^{n-m}}$$

6.4 Étape 4

Voici l'équation qui nous permet de trouver le rendement réalisé R

$$R = \left[\frac{P_m + VF_m^{coupon}}{P_0} \right]^{\frac{1}{n/2}}$$

7 Mesure du rendement du obligation

Jusqu'à présent, nous avons présenté les méthodes pour obtenir le prix d'une obligation. Supposons maintenant que nous connaissons les caractéristiques d'une obligation et le prix qu'elle a actuellement sur le marché. Nous verrons qu'il nous est maintenant possible de trouver le rendement implicite de cette obligation. En effet, le rendement implicite a l'avantage d'être déduit des données présentes sur le marché obligataire. Il est impossible de trouver le rendement implicite d'un obligation en utilisant simplement une équation, il nous faudra utiliser une méthode itérative similaire à celle utilisé pour le taux de rendement interne.

7.1 Méthode pour trouver le TRI

Afin de trouver le taux de rendement interne d'une série de flux monétaire généré par un projet quelconque, nous allons utiliser poser l'équation suivante:

$$0 = \frac{CF_1}{1 + y} + \frac{CF_2}{(1 + y)^2} + \frac{CF_3}{(1 + y)^3} + ... + \frac{CF_n}{(1 + y)^n}$$

Dans cette équation, CF_n représente le flux monétaire du projet à $t = n$ et le TRI (taux de rendement interne) est tout simplement la valeur du taux y qui permet de rendre cette équation vrai, soit égale à 0.

7.2 Méthode pour trouver le rendement d'une obligation

Afin de trouver le rendement d'une obligation, nous allons utiliser la même structure utilisée pour le calcul du TRI. Les différences majeures seront les suivantes:

- Notre objectif ne sera pas d'égaliser notre série de flux monétaire à 0 mais plutôt à P_0, soit le prix de l'obligation sur le marché à $t = 0$.
- Les flux monétaires du projet seront remplacés par la valeurs des coupons C.
- Le dernier flux monétaire sera particulier car il sera composé du dernier coupon C et de la valeur à l'échéance M

$$P_0 = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \frac{C}{(1+y)^3} + ... + \frac{C+M}{(1+y)^n}$$

En trouvant la valeur du taux y qui permet de rendre cette équation vrai, nous trouvons le rendement périodique de notre obligation. En supposant que nous sommes dans le cas d'une obligation régulière versant un coupon semestriellement, on peut trouver le rendement annualisé de la façon suivante.

$$y_{annuel} = (1+y)^2$$

y_{annuel} est souvent appelé rendement à l'échéance (Yield to Maturity)

7.3 Trouver y avec une calculatrice financière

Procédure pour trouver le rendement d'une obligation avec une calculatrice financière

1. $-P_0 \rightarrow PV$
2. $M \rightarrow FV$
3. $C \rightarrow PMT$
4. $n \rightarrow N$
5. $CPT \rightarrow I/Y$

La valeur I/Y que votre calculatrice trouvera représentera le rendement périodique de votre obligation.

8 Relation Prix - Taux de rendement

Nous allons maintenant regarder la relation entre le prix de notre obligation et le taux de rendement. Une obligation est émise avec un taux de coupon TC. Par la suite le rendement y, requis pour ce type d'obligation risque de varier dans le temps. Le taux de rendement requis risque soit de surpasser le taux de coupon ou d'être inférieur à celui-ci. Voici maintenant les trois possibilités pour la relation prix et taux de rendement.

- Le taux de rendement requis surpasse le taux de coupon , ce qui rend le prix de notre obligation inférieur à la valeur nominale.
  - On dit que cette obligation est vendue à escompte
  - $TC < y \rightarrow P < M$
- Le taux de rendement requis devient inférieur au taux de coupon , ce qui rend le prix de notre obligation supérieur à la valeur nominale.
  - On dit que cette obligation est vendue à prime
  - $TC > y \rightarrow P > M$
- Le taux de rendement requis reste égal au taux de coupon , ce qui rend le prix de notre obligation égale à la valeur nominale.
  - On dit que cette obligation est vendue au pair
  - $TC = y \rightarrow P = M$

On peut conclure en disant qu'il existe une relation inverse entre prix d'une obligation et son rendement. Il est important de comprendre que cette relation est également convexe. En effet, une hausse du taux de rendement entraine une baisse de prix plus faible que la hausse de prix qu'entraine une baisse de taux équivalent.