

GSF-3100
Marchés des Capitaux
Volatilité dans le marché obligataire

June 22, 2021

Contents

1	Propriétés reliées à la volatilité	2
2	Caractéristiques affectant la volatilité	2
2.1	Anticipation sur les taux d'intérêts	3
3	Mesures de la volatilité	3
3.1	Prix d'un point de base	3
3.2	Valeur en rendement d'une variation de prix	4
3.3	Durée	4
4	Mesures de durée	5
4.1	Durée de macaulay	5
4.2	Durée modifiée	6
5	Propriétés de la durée	6
6	Approximation de la variation de prix	8
7	Introduction à la convexité	9
8	Mesure de convexité	9
9	Propriétés de la convexité	9
10	Approximation (quadratique)	10
11	Hypothèses importantes pour durée et convexité	11
12	Durée et convexité effectives	11

1 Propriétés reliées à la volatilité

- Les changements de prix en pourcentage d'une obligation dépendent grandement du type d'obligation.
- Petit changement dans le rendement requis sur une obligation
 - Changement en pourcentage du prix d'une obligation est similaire pour une hausse et une baisse de taux.
- Grand changement dans le rendement requis sur une obligation
 - Changement en pourcentage du prix d'une obligation est différente pour une hausse et une baisse de taux.
- Pour un grand changement dans le rendement requis
 - \downarrow taux = \uparrow prix = plus grande
 - \uparrow taux = \downarrow prix = plus faible

2 Caractéristiques affectant la volatilité

Afin de pouvoir poser les caractéristiques affectant la volatilité sur le marché des obligations, nous allons supposer que tous les autres facteurs à l'exception de la caractéristique en question, seront constants.

1. Taux de coupon (TC)

$$\begin{array}{lll} TC \downarrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \uparrow \\ TC \uparrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \downarrow \end{array}$$

2. Échéance (n)

$$\begin{array}{lll} n \uparrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \uparrow \\ n \downarrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \downarrow \end{array}$$

3. Taux de rendement (r)

$$\begin{array}{lll} r \uparrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \downarrow \\ r \downarrow & \Longleftrightarrow & \text{Volatilité } \uparrow \end{array}$$

2.1 Anticipation sur les taux d'intérêts

Si un investisseur anticipe une baisse des taux d'intérêts, il est préférable qu'il ajuste son portefeuille d'obligations pour avoir les caractéristiques suivantes.

- Faible taux de coupon
- Longue échéance
- Faible taux de rendement

Si un investisseur anticipe une hausse des taux d'intérêts, il est préférable qu'il ajuste son portefeuille d'obligations pour avoir les caractéristiques suivantes.

- Taux de coupon élevé
- Courte échéance
- Taux de rendement élevé

3 Mesures de la volatilité

Sur le marché des actions, la volatilité est souvent mesurée en calculant l'écart-type des rendements d'une action quelconque. Cependant pour une obligation cette mesure de volatilité n'est pas appropriée. Voici les trois mesures utilisées couramment afin de quantifier la volatilité sur le marché obligataire.

1. Prix ou valeur d'un point de base
2. Valeur en rendement d'une variation de prix
3. Durée (duration)

3.1 Prix d'un point de base

Cette mesure nous dit quel est le changement en dollar du prix d'une obligation suite à un changement d'un point de base du taux de rendement requis.

- Un point de base est équivalent à 0.01%
- Si la variation en dollar est grande suite à une variation d'un point de base du rendement, on peut dire que cette obligation est plus volatile.

3.2 Valeur en rendement d'une variation de prix

Cette mesure nous dit quel est le changement dans le rendement d'une obligation suite à une variation de prix donnée.

- La variation de prix reflète le changement minimal dans la cote du marché:
 - Marché obligataire gouvernemental américain: $\frac{1}{32}$
 - Marchés corporatif et municipal: $\frac{1}{8}$
- Si la variation du rendement est grande suite à une variation de prix donnée, on peut dire que cette obligation est moins volatile.

3.3 Durée

La durée (D) est une mesure de volatilité qu'il est possible de trouver en prenant la dérivé première de la fonction de prix de l'obligation par rapport au rendement.

$$D = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Nous allons définir notre fonction de prix comme suit:

$$P = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n}$$

Afin de faciliter la dérivé première, nous allons modifier notre fonction de prix afin d'avoir les exposants au numérateur.

$$P = C \times (1+y)^{-1} + C \times (1+y)^{-2} + \dots + C \times (1+y)^{-n} + M \times (1+y)^{-n}$$

On effectue maintenant la dérivé première.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -C \times (1+y)^{-2} - 2C \times (1+y)^{-3} - \dots - nC \times (1+y)^{-(n+1)} - nM \times (1+y)^{-(n+1)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-C}{(1+y)^2} + \frac{-2C}{(1+y)^3} + \dots + \frac{-nC}{(1+y)^{(n+1)}} + \frac{-nM}{(1+y)^{(n+1)}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{1+y} \times \left[\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right]$$

En divisant par P , on obtient la variation du prix en % due à une petite variation du rendement.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \times \frac{1}{P} = \frac{\partial P/P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P/P}{\partial y} = \frac{-1}{1+y} \times \frac{\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P}$$

4 Mesures de durée

Deux mesures de durée ont été développées à partir de cette dérivée:

1. Durée de Macaulay
2. Durée modifiée

4.1 Durée de macaulay

La durée de macaulay (D) peut être calculée à l'aide de l'équation suivante.

$$D = \frac{\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P}$$

$$D = \sum_{t=1}^n w_t t$$

où $w_t = \frac{FM_t(1+y)^{-t}}{P}$

La durée de macaulay (D) représente la moyenne pondérée des échéances t des flux monétaires FM_t , où chaque pondération correspond à la contribution au prix de l'obligation P du flux monétaire.

4.2 Durée modifiée

La durée modifiée est simplement une transformation de la durée de macaulay. On peut donc exprimer la durée modifiée comme étant une fonction de la durée de macaulay.

$$D_m = \frac{D}{1+y} = -\frac{\partial P/P}{\partial y}$$

- La durée modifiée est reliée à une variation du prix en pourcentage due à une petite variation du taux de rendement.
- Le signe négatif rappelle qu'il existe une relation inverse entre le prix et le taux de rendement.
- La durée modifiée est une meilleure mesure de la volatilité que la durée de Macaulay.

On peut également exprimer la durée modifiée en deux parties:

- terme de coupon
- terme de valeur nominale

$$D_m = \frac{\frac{C}{y^2} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] + \frac{n(M-C/y)}{(1+y)^{n+1}}}{P}$$

5 Propriétés de la durée

De façon générale, la durée de macaulay est toujours plus petite ou égale au temps avant l'échéance de notre obligation.

$$D \leq n$$

Pour ce qui est de la durée modifiée, elle est toujours strictement inférieure au temps avant l'échéance de notre obligation.

$$D < n$$

Par contre, si le taux de coupon est de 0 ($TC = 0$), c'est à dire que nous avons une obligation zéro-coupon, alors la durée de macaulay est égale au temps avant l'échéance de notre obligation et la durée modifiée est strictement inférieure au temps avant l'échéance de notre

obligation.

$$D = n$$

En gardant les paramètres de notre obligation constants, on peut poser les propriétés suivantes.

- Une hausse du taux de coupon et par le fait même du coupon lui même, entrainera une baisse de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow TC \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D$$

$$\uparrow TC \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D_m$$

- Une augmentation du temps avant l'échéance, entrainera normalement une augmentation de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow n \quad \Longleftrightarrow \quad \uparrow D$$

$$\uparrow n \quad \Longleftrightarrow \quad \uparrow D_m$$

- Une hausse du rendement requis entrainera une baisse de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow y \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D$$

$$\uparrow y \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D_m$$

Si nous avons un portefeuille contenant des obligations, nous pouvons trouver la durée du portefeuille en faisant simplement une moyenne pondérée de la durée de chacune des obligations individuellement. La proportion du portefeuille investie dans une obligation servira de pondération pour le calcul de la moyenne pondérée.

6 Approximation de la variation de prix

Un aspect intéressant de la durée modifiée est qu'elle nous permet d'approximer la variation en dollar du prix d'une obligation. Nous allons représenter une variation de prix en dollar par ΔP et non ∂P . En effet, ∂ représente un changement infinitésimal du prix, c'est à dire un changement à la limite de 0. Si nous posons maintenant l'équation de la durée modifiée suivante:

$$D_m = -\frac{\partial P/P}{\partial y}$$

On peut voir que dans la formule de la durée modifiée, les changements de taux y et de prix P sont de nature infinitésimale. Afin d'approximer la variation du prix P , nous substituons ∂P par ΔP et ∂y par Δy . Afin de rendre la formule valide, il faut modifier le signe égal = par le signe d'approximation \approx .

$$D_m \approx -\frac{\Delta P/P}{\Delta y}$$

On peut ensuite effectuer une manipulation algébrique afin d'approximer la variation du prix de notre obligation avec la durée modifiée.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx D_m \Delta y$$

$$\Delta P \approx D_m P \Delta y$$

On voit dans cette formule que l'approximation de la variation du prix de notre obligation est une fonction de la durée modifiée, du prix lui même et de la variation du taux de rendement requis. Étant donné qu'il s'agit d'un approximation, il faut être prudent avec la valeur que nous obtiendrons. Plus la variation de y , (Δy) sera petite, plus la valeur obtenue par approximation sera précise. La durée modifiée est une mesure qui a pour unité de mesure le temps, plus précisément elle est exprimée sous la même unité de temps que la période avant l'échéance de notre obligation. Il est également possible d'exprimer la durée modifiée en dollar. Pour y arriver, il nous suffit de multiplier la durée modifiée par le prix de notre obligation.

$$D_m^{\$} = D_m P$$

7 Introduction à la convexité

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, la durée offre une mesure acceptable pour la volatilité du prix d'une obligation. On sait déjà que cette mesure est imparfaite pour de grande variation du taux de rendement. Une solution lorsque nous avons une forte variation du taux de rendement est d'utiliser une mesure de convexité. En effet, la durée ne tient pas en compte la convexité existant dans la relation prix et taux de rendement. Pour la durée, nous avons utilisé la dérivée première de notre fonction de prix par rapport au taux de rendement. Dans le cas de la convexité, il nous suffit de dériver à nouveau par rapport au taux de rendement. Plus précisément, on prend la dérivée seconde de notre fonction de prix par rapport au taux de rendement.

$$Conv = \frac{\partial^2 P / P}{\partial y^2}$$

8 Mesure de convexité

Nous allons maintenant voir la formule de la convexité. La première que nous allons voir est celle faisant la somme des flux monétaires actualisés.

$$Conv = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t(t+1)C}{(1+y)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}}}{P}$$

La deuxième formule remplace la série de coupons actualisés par une annuité dans le but de simplifier la première.

$$Conv = \frac{\frac{2C}{y^3} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] - \frac{2Cn}{y^2(1+y)^{n+1}} + \frac{n(n+1)(M-C/y)}{(1+y)^{n+2}}}{P}$$

Comme pour la durée, la convexité est exprimée en nombre de période de coupon. À la différence de la durée, l'unité de mesure de la convexité est élevée au carré. On parlera donc de (période de coupon²). Il existera également une mesure de convexité en dollar qui se trouve en multipliant la mesure convexité par le prix de l'obligation.

$$Conv^{\$} = Conv \times P$$

9 Propriétés de la convexité

1. Taux de rendement (r)

$$r \downarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Convexité} \uparrow$$

$$r \uparrow \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Convexité} \downarrow$$

2. Taux de coupon (TC)

$$TC \uparrow \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Convexité} \downarrow$$

$$TC \downarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Convexité} \uparrow$$

En posant l'hypothèse que le taux de rendement et le temps restant avant l'échéance reste constant.

Si on pose l'hypothèse que le taux de rendement et la durée modifiée sont constants dans le temps, il nous est possible de dire qu'un taux de coupon plus faible entraîne une convexité plus petite. La convexité possède une grande valeur sur le marché. En effet, un investisseur sera prêt à payer un prix plus élevé pour une obligation ayant une forte convexité. L'investisseur est donc prêt à accepter un rendement plus faible dans le cas d'une obligation ayant une forte convexité.

10 Approximation (quadratique)

En utilisant la durée et la convexité, il nous sera possible d'approximer la variation du prix d'une obligation grâce à l'expansion de Taylor. Voici la formule obtenue après quelques manipulations.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_m \Delta y + \frac{1}{2} Conv(\Delta y)^2$$

où

- D_m = durée modifiée
- $Conv$ = convexité
- y = taux de rendement
- Δy = variation dans le taux de rendement
- P = prix de notre obligation
- ΔP = variation dans le prix de notre obligation

11 Hypothèses importantes pour durée et convexité

- Les mesures présentées supposent une structure à terme des taux d'intérêt horizontale et des mouvements de taux parallèles.
- Elles sont valides pour des obligations standards. Elles ne s'appliquent pas toujours lorsqu'il y a des clauses optionnelles.
- En particulier, l'objectif de la durée est de mesurer la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt. La durée correspond à une moyenne pondérée des échéances presque'exclusivement pour des obligations standards.

12 Durée et convexité effectives

Il est possible d'approximer la durée modifiée et la convexité pour obtenir des mesures valides pour n'importe quel type d'obligations et n'importe quelle forme de la structure à terme des taux. Les mesures obtenues sont appelées la durée et la convexité effectives:

$$D_m \approx \frac{P_- - P_+}{2(P_0)(\Delta y)}$$

$$Conv \approx \frac{P_+ + P_- - 2P_0}{(P_0)(\Delta y)^2}$$