Section 03 : Extensions au modèle linéaire simple (Séance 7)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

22 février 2022

Références

Obligatoires:

- **Notes de cours:** Section 3 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- **Woolridge:** chapitres 3, 8, 12.

Complémentaires:

- **Gujarati et Porter:** chapitres 10, 11, 12, 13 et appendice C.
- **Greene:** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20 C et D

Plan de la séance

Autocorrélation des erreurs

Transformation de Prais-Waisten

Transformation de Cochran-Orcutt

Le problème de ρ

Diagnostique de l'autocorrélation

Estimateur Robuste de Newey West

Autocorrélation des erreurs

- L'autocorrélation ou la corrélation sérielle des erreurs dans les séries chronologiques est assez fréquente.
- Elle découle souvent du fait qu'il y a une certaine inertie dans les données économiques et financières, c'est-à-dire que les observations passées se reflètent souvent dans les observations présentes et futures.
- Cela peut amener des problèmes de corrélation sérielle des erreurs si une variable autocorrelée est omise du modèle, par exemple.
- Il est important de s'assurer lorsque vous détecter de l'autocorrélation qu'elle n'est pas dû à la non-stationnarité de Y et X.
- En effet, si ces deux quantités sont non stationnaires, les erreurs le seront possiblement aussi et seront possiblement autocorrelées.

Autocorrélation des erreurs

- Même si le modèle est bien spécifié, on peut penser que les erreurs (les chocs) affectant les marchés boursiers aujourd'hui ont des chances d'influencer la magnitude et le signe des chocs affectant les marchés boursiers demain aussi.
- Dans la plupart des cas en finance, l'autocorrélation sera positive, mais il est possible en théorie d'avoir de l'autocorrélation négative.

Autocorrélation des erreurs

Soit le modèle de base :

$$y = X\beta + u$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_{K-1} X_{K-1t} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

Où ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance constante dans le temps.

Autocorrélation des erreurs

- La matrice de variance covariance des erreurs sera affectée, ce qui impliquera comme dans le cas hétéroscédasticitique que l'estimateur OLS standard ne sera pas BLUE et que la variance des estimateurs OLS fausse, bien que l'estimateur sera sans biais.
- La démonstration de ceci est du même ressort que celle faite pour l'hétéroscédasticité.
- En effet, bien que l'autocorrélation implique des erreurs homoscédastiques (la variance est constante), les termes hors diagonale ne sont pas nuls comme dans le cas de base du modèle linéaire.

Autocorrélation des erreurs

Regardons la matrice de variance-covariance des erreurs:

$$E(uu') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & E(u_1u_3) & \cdots & E(u_1u_T) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & E(u_2u_3) & \cdots & E(u_2u_T) \\ E(u_3u_1) & E(u_3u_2) & E(u_3^2) & \cdots & E(u_3u_T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_Tu_1) & E(u_Tu_2) & E(u_Tu_3) & \cdots & E(u_T^2) \end{bmatrix}$$

$$E(uu') = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \rho^2\sigma_u^2 & \cdots & \rho^{T-1}\sigma_u^2 \\ \rho\sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \cdots & \rho^{T-2}\sigma_u^2 \\ \rho^2\sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \rho^{T-3}\sigma_u^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1}\sigma_u^2 & \rho^{T-2}\sigma_u^2 & \rho^{T-3}\sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

Autocorrélation des erreurs

Regardons la matrice de variance-covariance des erreurs:

$$E(uu') = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(uu') = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_\epsilon^2 \Omega$$

Autocorrélation des erreurs

Composition de Ω:

$$\Omega = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Autocorrélation des erreurs

Hypothèses de départ:

$1 - \epsilon_t$ est un bruit blanc

- $E(\epsilon_t) = 0$
- $V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 \forall t$
- $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0 \forall t \neq s$

$2- \mid \rho \mid < 1$

- 1 sera une valeur critique. (Racine unitaire)
- Ceci implique que u_t est un processus stationnaire
  1. $E(u_t) = 0$
  2. $V(u) = \sigma_u^2, \forall t$
  3. $E(u_t u_{t-j}) = E(u_s u_{s-j}) \forall t, s$

Autocorrélation des erreurs

Hypothèses de départ:

$3 - \epsilon_t$ n'est pas corrélé avec les u_s donc l'indice (s) est antérieur à t. $\rightarrow$ ϵ_t n'est pas corrélé avec u_{t-1}

Écrivons la série des u_t en fonction des chocs présents et passés:

$$\begin{aligned}
u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \rho[\rho u_{t-2} + \epsilon_{t-1}] + \epsilon_t \\
&= \rho^2 u_{t-2} + \rho\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \rho^2[\rho u_{t-3} + \epsilon_{t-2}] + \rho\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \rho^3 u_{t-3} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \rho\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \rho^s u_{t-s} + \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots + \rho^{s-1}\epsilon_{t-(s-1)}
\end{aligned}$$

Autocorrélation des erreurs

Considérons les possibilités suivantes :

- $u_0 = 0 \rightarrow$ la valeur initiale du processus des $u_t = 0$

$$(\rightarrow u_{t-s} = 0 \ \textbf{si} \ t - s = 0)$$

- Le processus des u_t a commencé au passé infini.

$$(\lim_{s \to \infty} \rho^s = 0)$$

- Dans les deux cas, si je recule assez dans le temps, la contribution de la valeur initiale est :

$$\rho^s u_{t-s} = 0$$

Autocorrélation des erreurs

- Les u_t peuvent donc être réécrit comme une somme de bruits blancs pondérés :

$$u_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \rho^3\epsilon_{t-3} + \cdots + \rho^{s-1}\epsilon_{t-(s-1)}$$

- On voit que l'effet des chocs les plus proches dans le passé est le plus important.

Autocorrélation des erreurs

- Calculons la variance de u_t

$$\begin{aligned}
\sigma_u^2 &= V(\epsilon_t) + \rho^2 V(\epsilon_{t-1}) + \rho^4 V(\epsilon_{t-2}) + ... + \rho^{2(s-1)} V(\epsilon_{t-(s-1)}) \\
&= \sigma_\epsilon^2 + \rho^2\sigma_\epsilon^2 + \rho^4\sigma_\epsilon^2 + \rho^6\sigma_\epsilon^2 + \rho^{2(s-1)}\sigma_\epsilon^2 \\
&= \sigma_\epsilon^2(1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \rho^{2(s-1)}) \\
&= \sigma_\epsilon^2 \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)
\end{aligned}$$

La stationnarité implique:

$$E(u_t^2) = E(u_{t-1}^2)$$

Ainsi $\sigma_u^2 = \rho^2\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2$ et $\sigma_u^2 = \left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}\right)$

Autocorrélation des erreurs

- On a donc démontré d'où viennent les coefficients sur la diagonale de la matrice Ω.

Calculez $E(u_t u_{t-1})$

$$u_t = \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1} + \rho^2\epsilon_{t-2} + \rho^3\epsilon_{t-3} + \cdots$$

$$u_{t-1} = \epsilon_{t-1} + \rho\epsilon_{t-2} + \rho^2\epsilon_{t-3} + \rho^3\epsilon_{t-4} + \cdots$$

Autocorrélation des erreurs

Rappel: $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0 \forall t \neq s$

$$
\begin{aligned}
E(u_t u_{t-1}) &= \rho E(\epsilon_{t-1}^2) + \rho^3 E(\epsilon_{t-2}^2) + \rho^5 E(\epsilon_{t-3}^2) + \ldots \\
&= \rho \sigma_\epsilon^2 + \rho^3 \sigma_\epsilon^2 + \rho^5 \sigma_\epsilon^2 + \ldots \\
&= \rho \sigma_\epsilon^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots) \\
&= \rho \sigma_\epsilon^2 \frac{1}{1 - \rho^2} \\
&= \rho \sigma_u^2
\end{aligned}
$$

Autocorrélation des erreurs

Rappel: $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0 \forall t \neq s$

Par le même raisonnement, on peut démontrer que

$$E(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_\epsilon^2 \frac{1}{1-\rho^2} = \rho^s \sigma_u^2$$

Autocorrélation des erreurs

Preuve alternative qui ne passe pas par l'infini, mais par l'hypothèse que ϵ_t n'est pas corrélé avec les u_t antérieurs.

$$u_t = \rho^s u_{t-s} + \epsilon_t + \rho\epsilon_{t-1}\rho^2\epsilon_{t-2} + \cdots + \rho^{s-1}\epsilon_{t-(s-1)}$$

$$\begin{aligned} u_t u_{t-s} = \rho^s u_{t-s}^2 + \epsilon_t u_{t-s} + \rho\epsilon_{t-1}u_{t-s}\rho^2\epsilon_{t-2}u_{t-s} \\ + \cdots + \rho^{s-1}\epsilon_{t-(s-1)}u_{t-s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(u_t u_{t-s}) = \rho^s E(u_{t-s}^2) + E(\epsilon_t u_{t-s}) + \rho E(\epsilon_{t-1}u_{t-s})\rho^2 E(\epsilon_{t-2}u_{t-s}) \\ + \cdots + \rho^{s-1}E(\epsilon_{t-(s-1)}u_{t-s}) \end{aligned}$$

Autocorrélation des erreurs

$$E(u_t u_{t-s}) = \rho^s E(u_{t-s}^2)$$

Sachant que

$$E(u_{t-s}^2) = \sigma_u^2 = \sigma_\epsilon^2 \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$E(u_t u_{t-s}) = \rho^s \left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2} \right) = \rho^s \sigma_u^2$$

Autocorrélation des erreurs

- Nous venons donc de démontrer comment la matrice de variance-covariance est obtenue selon différentes hypothèses de départ.
- On peut démontrer que la matrice P^{-1} associée sera :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

Autocorrélation des erreurs

Transformation de Prais-Waisten

Transformation de Cochran-Orcutt

Le problème de ρ

Diagnostique de l'autocorrélation

Estimateur Robuste de Newey West

Transformation de Prais-Waisten

- La transformation de Prais-Waisten consiste à multiplier les éléments de la régression par la matrice P^{-1}.

$$
\mathrm{P}^{-1}Y = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0\cdots & 0 & 0 & \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{T-1} \\ Y_T \end{bmatrix}
$$

Transformation de Prais-Waisten

- La transformation de Prais-Waisten consiste à multiplier les éléments de la régression par la matrice P^{-1}

$$P^{-1}Y = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}Y_1 \\ -\rho Y_1 + Y_2 \\ -\rho Y_2 + Y_2 \\ \vdots \\ -\rho Y_{T-2} + Y_{T-1} \\ = \rho Y_{T-1} + Y_T \end{bmatrix}$$

Transformation de Prais-Waisten

- La transformation sera la même pour chaque régresseur X.
- Le modèle transformé s'écrit :

$$\sqrt{1-\rho^2}Y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\beta_0 + \beta_1\sqrt{1-\rho^2}X_{11} + \beta_2\sqrt{1-\rho^2}X_{21} + \cdots + \sqrt{1-\rho^2}u_1$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (1-\rho)\beta_0 + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1,T-1}) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2,t-1}) + \cdots + \beta_{k-1}(X_{kt} - \rho X_{k-1,t-1}) + u_t - \rho u_{t-1}$$

- Il faut porter attention à la constante dans ce modèle qui n'est plus la constante d'origine.
- Si on a ρ inconnu, ce modèle n'est plus linéaire, mais on peut toujours l'estimer pas OLS.

Transformation de Cochran-Orcutt

- Une autre façon de transformer le modèle serait le laisser tomber la première observation et de transformer les Y comme suit :

$$Y_t = \rho Y_{t-1}, t = 2, ..., T$$

- Les X sont transformés de la même facon:

$$X_{it} - \rho X_{i,t-1}, t = 2, ..., T$$

- Le modèle transformé de Cochran-Orcutt s'écrit de la même façon que Prais-Winsten, mais sans la première observation :

$$\begin{aligned} Y_t - \rho Y_{t-1} = (1-\rho)\beta_0 + \beta_1(X_{1t} - \rho X_{1,T-1}) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2,t-1}) \\ + \cdots + \beta_{k-1}(X_{kt} - \rho X_{k-1,t-1}) + u_t - \rho u_{t-1} \end{aligned}$$

Le problème de ρ

- ρ est inconnu.
- Il faut donc trouver un estimateur.
- Plusieurs sont suggérés dans la littérature économétrique.

Un estimateur usuel:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2}$$

Où $\hat{u}_t$ est le résidu OLS de la régression de Y sur X. On peut montrer que $PLIM \; \hat{\rho} = \rho$

Le problème de ρ

Estimateur de Hildreth-LU:

- Cet estimateur ne passe pas par les OLS.
- En balayant l'intervalle $]1, 1[$, on peut choisir la valeur de ρ qui minimise la somme des carrés des erreurs du modèle transformé.

Le problème de ρ

Estimateur de Hildreth-LU:

Les étapes sont :

1. Choisir $\rho^{(1)} = 1$ (ou -0.99999)
2. Obtenir le modèle transformé correspondant.
3. Appliquer les OLS et sauvegarder $\hat{u}'\hat{u}_{\rho(1)}$.
4. Choisir une nouvelle valeur : $\rho^{(2)} = \rho^{(1)} + \textbf{step}$
5. Obtenir le modèle transformé correspondant
6. Appliquer les OLS et sauvegarder $\hat{u}'\hat{u}_{\rho(2)}$
7. Continuer jusqu'à ce que $]1, 1[$ est couvert.
8. Choisir la valeur $\rho^{(s)}$ telle que

$$\hat{u}'\hat{u}_{\rho(s)} = \min_i [\hat{u}'\hat{u}_{\rho(i)}]$$

Le problème de ρ

Estimateur de Hildreth-LU:

- L'estimateur FGLS obtenu à partir d'un estimateur de ρ sera convergent.
- Donc, lorsque la matrice d'information P dépend de paramètres inconnus qu'il faut estimer, on perd la propriété BLUE.
- L'estimateur qui est un FGLS au lieu de GLS, reste convergent si l'estimateur des paramètres inconnus sur lequel il est fondé est convergent.

Diagnostique de l'autocorrélation

Test de Durbin-Watson

- C'est un test à borne.
- Vous avez deux points critiques à regarder dans la table.
- À l'origine, ce test était à borne, car on ne connaissait pas les vrais points critiques seulement des bornes à ceux-ci sous l'hypothèse de normalité.
- Maintenant, on a trouvé les vrais points critiques.

Diagnostique de l'autocorrélation

Test de Durbin-Watson

Hypothèses:

- $H_0 : \rho = 0$ contre l'alternative
- $H_A : \rho \neq 0$

Statistique de test:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{t-1}^2}$$

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

Diagnostique de l'autocorrélation

Test de Durbin-Watson

Hypothèses du test de Durbin-Watson:

1. Le modèle de régression inclue une constante pour pouvoir calculer RSS.
2. Les variables explicatives sont non stochastiques.
3. L'autocorrélation est d'ordre 1. On ne peut pas utilise Durbin-Watson avec les ordres supérieurs.
4. On ne peut pas utiliser ce test dans le cas de modèles autorégressifs.
5. Le test n'accommode pas les observations manquantes.

Diagnostique de l'autocorrélation

Test de Durbin-Watson

- Pour faire le test de Durbin-Watson, il s'agit de rouler la régression OLS et d'obtenir les résidus.
- Ensuite on calcule la statistique de Durbin-Watson avec ces résidus.
- On compare la statistique avec les points critiques de la distribution pour les statistiques de Durbin-Watson pour une taille d'échantillon donné et un K donné.

Diagnostique de l'autocorrélation

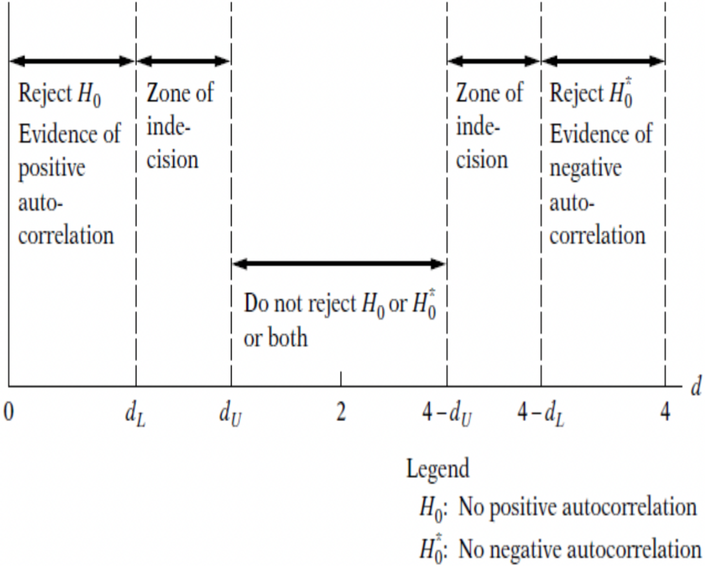
Test de Durbin-Watson

Règle de décision:

- La décision dépend de la valeur de d par rapport à deux points critiques d_L et d_U
  - $d < d_L \rightarrow$ rejet de H_0
  - $d_L < d < d_U \rightarrow$ test non conclusif
  - $d_U < d < 4 - d_U \rightarrow$ non rejet de H_0 et H_0^*
  - $4 - d_U < d < 4 - d_L \rightarrow$ test non conclusif
  - $d > 4 - d_L \rightarrow$ rejet de H_0^*
- H_0 : pas d'autocorélation positive
- H_0^* : pas d'autocorélation négative
- La statistique de Durbin-Watson est une **institution** en économétrie parce qu'il s'agit d'un des premiers tests à borne dérivés, mais les hypothèses sous-jacentes sont assez contraignantes.

Diagnostique de l'autocorrélation

Test de Durbin-Watson



Estimateur Robuste de Newey West

- Il existe une forme de correcteur robuste pour les problèmes d'autocorrélation des erreurs qui est une alternative au FGLS quand le nombre d'observations est assez élevé.
- Cette correction est asymptotique.
- C'est l'estimateur de la variance de Newey-West.
- L'intuition est la même que le correcteur de White, mais appliqué aux problèmes d'autocorrélation des erreurs.
- En fait, le charme de l'estimateur de Newey-West c'est qu'il corrige pour **l'autocorrélation** ET **l'hétéroscédasticité des erreurs** (c'est ce qu'on appelle l'estimateur **HAC**).
- Le correcteur de Newey West est déjà programmé dans les logiciels d'analyses de données comme Stata.