

# Section 05 : Les séries chronologiques (Séance 10)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Département de finance, assurance et immobilier  
Faculté des sciences de l'administration  
Université Laval

29 Mars 2022

# Références

## Obligatoires:

- ▶ **Notes de cours:** Section 5 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- ▶ **Woolridge:** chapitres 11, 12 et 19.

## Complémentaires:

- ▶ **Gujarati et Porter:** chapitres 21 et 22

# Plan de la séance

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Série chronologique

- **Définition:** Une **série chronologique** (ou série temporelle) est toute suite d'observations indexées par un ensemble ordonné  $T$  (un intervalle de temps).

$$(X_t : t \in T)$$

- Les séries chronologiques sont intéressantes, car plusieurs données économiques et financières ne sont pas indépendantes dans le temps.
- En effet, il est facile de constater qu'un graphique du prix d'un actif ou du PIB comporte une certaine tendance ou encore une dépendance d'une observation par rapport à la précédente.
- Un objectif de l'analyse en série chronologique est de modéliser cette dépendance dans le temps.

# Définitions des séries

## Séries continues

- ▶ L'indice  $t$  peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle de nombres réels.
- ▶ Rare dans les données économiques ou financières généralement disponibles puisque les relevés se font de façon discrète.
- ▶ **Exemples:** Séries de très haute fréquence, relevé de toutes les transactions sur un titre en temps continues

# Définitions des séries

## Séries discrètes

- ▶ L'indice  $t$  ne prend que des valeurs isolées dans  $T$ .
- ▶ L'ensemble des indices  $t$  est un sous-ensemble des nombres entiers.
- ▶ La durée qui sépare deux observations consécutives d'une série discrète est souvent la même et représente la fréquence des observations (mensuel, annuel, journalière, etc.).
- ▶ Parmi les séries discrètes, on distingue :
  - ▶ Les séries en niveau : Observations enregistrées instantanément, telle une photographie. En finance, ce sont les prix.
  - ▶ Les séries en flux : Valeurs cumulées sur un intervalle de temps reflétant de l'histoire d'un phénomène sur cette période de temps. En finance, on parle souvent de rendement.

# Définitions des séries

- ▶ Afin de lisser les séries chronologiques et d'éliminer les effets des unités de mesure, on utilise souvent une transformation logarithmique.
- ▶ Une série soumise à cette transformation est souvent plus stable en première différence (flux).
- ▶ Attention, certaines séries ne doivent pas être prises en log et cette transformation ne règle pas les effets des observations extrêmes.



Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Première différence

## La différence première définie par

$$\Delta \ln(X_t) = \ln(X_t) - \ln(X_{t-1})$$

- ▶ Elle donne souvent une série plus stable et surtout souvent stationnaire.
- ▶ Notez que  $\Delta \ln(X_t)$  est une approximation de la série des taux de croissance de  $X_t$ :

$$\Delta \ln(X_t) = \ln(X_t) - \ln(X_{t-1}) \approx \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$$

- ▶ En finance, les taux de croissance sont des rendements.

Série chronologique

Première différence

**Saisonnalité et Désaisonnalisation**

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Saisonnalité et Désaisonnalisation

- ▶ Certaines séries chronologiques présentent des comportements particuliers qui se reproduisent à des intervalles de temps réguliers : même mois, même trimestre, même période de l'année ou le même jour de la semaine.
  - ▶ On dit que ce sont des évènements saisonniers.
- ▶ Il faut enlever ces **effets saisonniers** avant de modéliser la série : **désaisonnalisation**.
- ▶ Pour désaisonnaliser une série :
  - ▶ Identifier les dates correspondant aux différents comportements saisonniers.
  - ▶ Construire des variables dummies pour ces dates.
  - ▶ Estimer un modèle comportant ces variables dummies.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

**Processus stochastique**

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Processus stochastique

- ▶ Soit  $T$  un ensemble non vide.
- ▶ Un processus aléatoire sur  $T$  est un ensemble de variables aléatoires réelles  $X_t$  telles qu'à chaque élément  $t \in T$  est associé une variable aléatoire  $X_t$ .
- ▶ Notation:  $\{X_t : t \in T\}$
- ▶  $T$  peut être continu ou discret, fini ou infini, mais en général, on suppose qu'il est infini.
- ▶ Un processus stochastique est un ensemble d'observation de variables aléatoires ordonné en  $T$ .
- ▶ Chacune des observations du processus stochastique est une variable aléatoire.
- ▶ Nous utiliserons donc des réalisations de ce processus stochastique pour faire de l'inférence sur ce processus et l'expliquer.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

**Processus déterministe**

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Processus déterministe

- ▶ Soit  $\{X_t : t \in T\}$  un processus stochastique
  - ▶  $T_1 \subseteq T, I_t = \{X_s : s \leq t\}$
- ▶ On dit que  $\{X_t : t \in T\}$  est un processus déterministe dans  $T_1$  si et seulement si:
  - ▶ Il existe un ensemble de fonctions  $\{g_t(I_{t-1}) : t \in T_1\}$
  - ▶ Telles que  $X_t = g_t(I_{t-1})$  avec probabilité 1,  $\forall t \in T_1$ .
- ▶ Un processus déterministe peut être parfaitement prévu à partir de son propre passé aux points où le processus est déterministe ( $t \in T_1$ ).
- ▶ Il n'y a pas d'aléa associé à ce processus.



Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

**Les séries stationnaires**

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Les séries stationnaires

- ▶ Le processus  $\{X_t : t \in T\}$  est stationnaire au second ordre (faiblement stationnaire, ou stationnaire au sens large) si les trois conditions suivantes sont vérifiées:
  1.  $\forall t \in T, E(X_t^2) < \infty$ 
    - ▶ Assure que les moments d'ordre deux existent, car un processus stationnaire au sens large doit avoir une variance finie.
  2.  $\forall t \in T, E(X_t) = \mu$  et indépendant de  $t$ 
    - ▶ L'espérance des variables aléatoires  $X_t$  est la même quelques soit la période  $t$ .
  3.  $\forall t, s \in T \times T, \forall h \geq 0, COV(X_s, X_{s+h}) = \gamma(h)$  est indépendant de  $t$ .
    - ▶ Assure que la variance est constante dans le temps.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

**Les processus non stationnaires**

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Les processus non stationnaires

- ▶ Un processus non stationnaire est un processus qui n'est pas faiblement stationnaire; ou encore c'est un processus pour lequel au moins une des trois conditions qui caractérisent la stationnarité faible est violée.
- ▶ La marche aléatoire est un exemple important à la finance d'un processus non stationnaire.

$$X_t = \beta + X_{t-1} + \epsilon_t$$

Sachant les propriétés suivantes valables  $\forall t$

- ▶  $E(\epsilon_t) = 0$
- ▶  $V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$
- ▶  $E(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$

# Les processus non stationnaires

Considérez la série en commençant à  $t = 0$

- ▶ On peut exprimer  $X_1$  en fonction de  $X_0$  dans le cas de la marche aléatoire.

$$X_1 = \beta + X_0 + \epsilon_1$$

- ▶ On peut également exprimer  $X_2$  en fonction de  $X_1$ .

$$X_2 = \beta + X_1 + \epsilon_2$$

# Les processus non stationnaires

Considérez la série en commençant à  $t = 0$

- On peut voir facilement que nous pouvons incorporer la première équation donnant la solution de  $X_1$  dans la deuxième équation donnant la solution de  $X_2$ .

$$\begin{aligned}X_2 &= \beta + X_1 + \epsilon_2 \\&= \beta + [\beta + X_0 + \epsilon_1] + \epsilon_2 \\&= \beta + \beta + X_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 \\&= 2\beta + X_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2\end{aligned}$$

# Les processus non stationnaires

Considérez la série en commençant à  $t = 0$

- Supposons que nous continuons cette petite procédure, mais cette fois nous posons uniquement le processus  $X_t$ , dans lequel nous allons incorporer  $X_{t-1}$  et ensuite  $X_{t-2}$ , jusqu'à arriver à  $X_0$ .

$$\begin{aligned}X_t &= \beta + X_{t-1} + \epsilon_t \\&= \beta + [\beta + X_{t-2} + \epsilon_{t-1}] + \epsilon_t \\&= 2\beta + X_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= 2\beta + [\beta + X_{t-3} + \epsilon_{t-2}] + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= 3\beta + X_{t-3} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= \vdots \quad \quad \quad \vdots \\&= T\beta + X_0 + (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t)\end{aligned}$$

# Les processus non stationnaires

Considérez la série en commençant à  $t = 0$

- Étudions le terme d'erreur

$$v_t = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned} E(v_t) &= E(\epsilon_1) + E(\epsilon_2) + \cdots + E(\epsilon_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(v_t) &= V(\epsilon_1) + V(\epsilon_2) + \cdots + V(\epsilon_t) \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 + \cdots + \sigma_\epsilon^2 \\ &= T\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$



# Les processus non stationnaires

- ▶ On voit clairement que la variance du processus  $V(v_t)$  explose dans le temps étant donné le résultats:

$$V(v_t) = T\sigma_\epsilon^2$$

- ▶ Ce que l'on voit dans la variance de ce processus est que plus  $T$  sera grand alors plus la variance sera grande. Donc, plus le temps passe et plus nous aurons une variance élevée.
- ▶ Noter que la série est autorégressive, mais le coefficient de  $X_{t-1}$  est égal à 1.
- ▶ On parle alors de racine unitaire, de marche aléatoire et d'une série intégrée d'ordre 1,  $I(1)$ .

# Les processus non stationnaires

On considère à nouveau le processus non-stationnaires suivant:

$$X_t = \beta + X_{t-1} + \epsilon_t$$

- ▶ Si  $\beta \neq 0$ , ce processus est dit **marche aléatoire avec intercepte** (random walk with drift)
- ▶ Lorsque  $\beta = 0$ , on parle simplement de **marche aléatoire**. C'est un processus intégré d'ordre 1 également.

# Les processus non stationnaires

## Racine unitaire et (intégré d'ordre $p$ )

- ▶ Lorsqu'un processus  $\{Y_t, t \in T\}$  peut être représenté sous la forme d'une marche aléatoire avec ou sans tendance, On dit qu'il possède une racine unitaire ou qu'il est intégré d'ordre 1, et noté  $Y_t \sim I(1)$ .
- ▶ Si on doit différencier deux fois un processus  $\{Y_t, t \in T\}$  avant d'obtenir un processus stationnaire, on dit que ce processus est intégré d'ordre 2 et on note  $Y_t \sim I(2)$ .
- ▶ Plus généralement, un processus  $\{Y_t, t \in T\}$  est intégré d'ordre  $p$  s'il faut le différencier  $p$  successivement avant d'obtenir un processus stationnaire.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

## Régression fallacieuse

Nous allons poser deux séries non stationnaires:

$$X_t = X_{t-1} + v_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

- ▶ Nous savons que ces deux séries possèdent une racine unitaire et sont donc non-stationnaire.
- ▶ Le fait d'inclure dans une régression les variables  $X_t$  et  $Y_t$  engendrera certainement une régression fallacieuse.
- ▶ Sans ce préoccuper la stationnarité, nous serions tenté de conclure que  $X$  à un pouvoir explicatif sur  $Y$  alors que nous avons généré ceux-ci pour n'en avoir aucun.

## Régression Fallacieuse

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \epsilon_t$$

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

**Opérateur de retard**

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Opérateur de retard

- Pour toute série chronologique  $\{Y_t, t = \infty, \dots + \infty\}$ , l'opérateur retard, noté  $L$ , est un opérateur qui transforme toute observation en la valeur qui la précède :

$$L(Y_t) = Y_{t-1}, \quad \forall t$$

- L'utilisation du  $L$  sans aucun autre indicatif implique que nous sommes en présence d'un retard, alors que l'utilisation de l'opérateur retard avec un indicatif 2, 3 et  $p$  représente respectivement 2, 3 et  $p$  retard.

$$L^2(Y_t) = L(L(Y_t)) = L(Y_{t-1}) = Y_{t-2}$$

$$L^p(Y_t) = Y_{t-p}, \quad p > 1$$

- Il s'agit d'un opérateur qui représente une notation en série chronologique. Il a des propriétés comme les autres opérateurs.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

**Introduction au modèle AR(1)**

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker



# Introduction au modèle AR(1)

**Soit le processus:**

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$$

Où le terme d'erreur possède les propriétés suivantes:

- ▶  $E(\epsilon_t) = 0$
- ▶  $V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$
- ▶  $E(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ 
  - ▶ La série est stationnaire
  - ▶  $|\alpha| < 1$

# Introduction au modèle AR(1)

**Soit le processus:**

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$$

On pose également, les propriétés suivantes pour notre variable  $X_t$ :

- ▶  $E(X_t) = 0$
- ▶  $V(X_t) = \sigma_X^2$
- ▶  $E(X_t, X_{t-j}) = E(X_s, X_{s-j})$

# Introduction au modèle AR(1)

- ▶ Nous allons utiliser une méthode récursive afin de trouver la variance de notre série, soit  $V(X_t) = \sigma_X^2$ .
- ▶ On sait que la valeur au temps  $t$  de notre processus est  $X_t$ .
- ▶ Dans le cas du AR(1), on cherche à expliquer les variations de  $X_t$  en fonction de la même variable mais avec un retard  $X_{t-1}$  et des chocs  $\epsilon_t$ .
- ▶ Écrivons la série des  $X_t$  en fonction des chocs  $\epsilon_t$  présents et passés par récurrence (Prochaine diapo)

# Introduction au modèle AR(1)

$$\begin{aligned}X_t &= \alpha(X_{t-1}) + \epsilon_t \\&= X_t = \alpha(\alpha X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\&= \alpha^2 X_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= \alpha^2 (\alpha X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= \alpha^3 X_{t-3} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\&= \alpha^s X_{t-s} + \alpha^{s-1} \epsilon_{t-(s-1)} + \cdots + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t\end{aligned}$$

# Introduction au modèle AR(1)

- ▶ **Considérons les possibilités suivantes:**
  - ▶  $X_0 = 0$ . La valeur initiale du processus  $X_t = 0$ .
  - ▶ Le processus des  $X_t$  a commencé au passé infini.
- ▶ **Dans les deux cas, je recule assez dans le temps:**

$$\alpha^s X_{t-s} = 0$$

- ▶  $X_{t-s} = 0$ , car  $t - s = 0$
  - ▶  $\lim_{\infty} \alpha^s = 0$
- ▶ On peut écrire le processus  $X_t$  uniquement avec les chocs  $\epsilon$

$$X_t \approx \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha^3 \epsilon_{t-3} + \dots$$

# Introduction au modèle AR(1)

Calculons la variance de  $X_t$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= V(\epsilon_t) + \alpha^2 V(\epsilon_{t-1}) + \alpha^4 V(\epsilon_{t-2}) + \alpha^6 V(\epsilon_{t-3}) + \dots \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \alpha^2 \sigma_\epsilon^2 + \alpha^4 \sigma_\epsilon^2 + \alpha^6 \sigma_\epsilon^2 + \dots \\ &= \sigma_\epsilon^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \dots) \\ &= \sigma_\epsilon^2 \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \right)\end{aligned}$$

# Introduction au modèle AR(1)

Calculons  $E(X_t X_{t-1})$

$$X_t \approx \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha^3 \epsilon_{t-3} + \dots$$

$$X_{t-1} \approx \epsilon_{t-1} + \alpha \epsilon_{t-2} + \alpha^2 \epsilon_{t-3} + \alpha^3 \epsilon_{t-4} + \dots$$

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-1}) &= \alpha E(\epsilon_{t-1}^2) + \alpha^3 E(\epsilon_{t-2}^2) + \alpha^5 E(\epsilon_{t-3}^2) + \dots \\ &= \alpha \sigma_\epsilon^2 + \alpha^3 \sigma_\epsilon^2 + \alpha^5 \sigma_\epsilon^2 \\ &= \alpha \sigma_\epsilon^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) \\ &= \alpha \sigma_\epsilon^2 \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \right) \\ &= \alpha \sigma_X^2 \end{aligned}$$

# Introduction au modèle AR(1)

**On peut montrer de la même façon le cas plus général:**

$$E(X_t, X_{t-s}) = \alpha^s \sigma_\epsilon^2 \left( \frac{1}{1 - \alpha^2} \right) = \alpha^s \sigma_X^2$$

**Nous avons calculé:**

$$E(X_{t-s}^2) = \left( \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} \right) = \sigma_X^2 \quad \forall \text{ l'indice}$$

- ▶ Maintenant que nous avons un exemple de processus stochastique en série chronologique en tête, revenons au concept général.
- ▶ Nous voulons maintenant définir et caractériser la dépendance et l'évolution dans le temps du processus stochastique.
- ▶ Pour ce faire, nous définirons certains concepts pour un processus faiblement stationnaire  $\{X_t : t \in T\}$ .



Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

**La fonction d'autocovariance  $\gamma$**

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# La fonction d'autocovariance $\gamma$

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightarrow \gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}), \forall t \in T.$$

- ▶ La fonction d'autocovariance ne dépend que de  $h$  et non de  $t$ .  
les observations entre elles dépendent de l'écart qui les séparent et non de leur position dans la série chronologique.
- ▶ L'autocovariance est donc la variance avec soit même à une même période où  $h = 0$ . Lorsque  $h \neq 0$ , alors on parle d'autocovariance entre deux périodes.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# La fonction d'autocorrélation $\rho$

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightarrow \rho(h) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{[\text{Var}(X_t) \times \text{Var}(X_{t+h})]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \forall t \in T$$

- ▶ La fonction d'autocorrélation représente donc la corrélation entre deux observations de la série chronologique.
- ▶ Ces deux fonctions ne dépendent que de  $h$  qui existe entre les deux dates auxquelles correspondent les variables aléatoires  $X_t$  et  $X_{t+h}$  étudiées.

# La fonction d'autocorrélation $\rho$

$$\forall h, \gamma(h) = \gamma(-h)$$

$$\rho(h) = \rho(-h)$$

- ▶ Il est clair dans ce cas que pour  $h = 0$ , la fonction d'autocorrélation est égale à 1.
- ▶ La fonction d'autocorrélation possède une représentation graphique appelée un corrélogramme ou ACF (autocorrélation fonction).
- ▶ En pratique, nous aurons seulement une réalisation du processus d'intérêt donc nous regarderons le corrélogramme de l'échantillon (SACF).

# La fonction d'autocorrélation partielle

- ▶ Pour tout processus  $\{X_t : t \in T\}$ , possiblement non stationnaire, on définit la fonction d'autocorrélation partielle (partial autocorrelation function, PACF).
- ▶ L'autocorrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-h}$  prend en compte les corrélations indirectes éventuelles entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$ ,  $X_{t-1}$  et  $X_{t-2}$ ,  $\dots$ , et entre  $X_{t-h+1}$  et  $X_{t-h}$ .
- ▶ Par contre, l'autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t-h}$  élimine les effets de  $X_t$  et  $X_{t-1}$ ,  $X_{t-1}$  et  $X_{t-2}, \dots$ ,  $X_{t-h+1}$ .

# Processus autorégressif d'ordre 1

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim i.i.d$$

- ▶ L'autocorrélation partielle de  $X_t$  et  $X_{t-2}$  est l'effet de  $X_{t-2}$  sur  $X_t$  lorsqu'on a déjà contrôlé l'effet de  $X_{t-1}$
- ▶ En conséquence les autocorrélations partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 sont nulles, même si  $X_t$  et  $X_{t-1}$  sont corrélés et que ce dernier est corrélé avec  $X_{t-2}$

# Autocorrélations partielles

**On calcule les autocorrélations partielles d'un processus  $\{X_t : t \in T\}$  de la façon**

1. Centrer la série : calculer la moyenne  $\mu$  de la série et obtenir la série centrée constituée des  $X_t^* = X_t - \mu$ .
2. Former l'équation autorégressive d'ordre 1:

$$X_t^* = \phi_{11}X_{t-1}^* + e_t$$

$\phi_{11}$  est l'autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t-1}$ .

3. Former l'équation autorégressive d'ordre 2:

$$X_t^* = \phi_{21}X_{t-1}^* + \phi_{22}X_{t-2}^* + e_t$$

$\phi_{22}$  est l'autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$  ou encore la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$  lorsque l'effet de  $X_{t-1}$  est éliminé.



# Autocorrélations partielles

**On calcule les autocorrélations partielles d'un processus  $\{X_t : t \in T\}$  de la façon**

- 4.** Répéter successivement ce procédé pour calculer l'autocorrélation partielle entre  $X_t$  et  $X_{t-h}$ ,  $h \geq 2$ 
  - ▶ Avec cette méthode, on obtient les résultats de la fonction d'autocorrélation partielle du processus  $\{X_t : t \in T\}$ .
  - ▶ Lorsqu'on utilise un échantillon de données pour faire les calculs, on obtient les autocorrélations partielles d'échantillon.

Série chronologique

Première différence

Saisonnalité et Désaisonnalisation

Processus stochastique

Processus déterministe

Les séries stationnaires

Les processus non stationnaires

Régression fallacieuse

Opérateur de retard

Introduction au modèle AR(1)

La fonction d'autocovariance  $\gamma$

La fonction d'autocorrélation  $\rho$

Équations de Yule-Walker

# Équations de Yule-Walker

- Pour un processus stationnaire, les équations de Yule-Walker permettent d'obtenir les autocorrélations partielles,  $\phi_{hh}$ ,  $h = 1, 2, \dots$  à partir des autocorrélations  $\rho(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ .

$$\phi_{11} = \rho(1)$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

$$\phi_{ss} = \frac{\rho(s) - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j} \rho(s-j)}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j} \rho(j)}$$

Où  $\phi_{sj} = \phi_{s-1,j} - \phi_{ss} \phi_{s-1,s-j}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, s-1$

# Équations de Yule-Walker

- ▶ Sachant que les trois définitions présentées ci-haut prennent des formes particulières propres à des processus d'intérêt, ces estimations seront très utiles pour déterminer le processus spécifique le plus probable suivi par un échantillon de données.
- ▶ De plus, ils peuvent nous documenter intuitivement sur la stationnarité d'un processus. Comment?
- ▶ Intuitivement, nous savons que les bruits blancs sont stationnaires par construction.
- ▶ Donc, si notre processus à des caractéristiques proches à un bruit blanc en terme d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, nous pourrions en déduire qu'il est probablement stationnaire.
- ▶ Ce n'est pas un test formel toutefois et cela contient une part d'arbitraire .

# Équations de Yule-Walker

- ▶ Comment savoir si cette série est vraiment non stationnaire avec le visuel? Il faudra faire un test formel.
- ▶ Il y a aussi la question de savoir combien de retard sur l'autocorrélation il convient de calculer pour diagnostiquer un processus.
- ▶ Une règle du pouce serait de calculer les autocorrélations pour environ un quart du nombre total d'observations.
- ▶ L'approche la plus souvent adoptée dans ce cas sera de regarder les critères d'information d'Akaike et de Schwarz (définis plus bas).
- ▶ Il est aussi possible de faire des tests statistiques de significativité sur les autocorrélations.