Section 05 : Les séries chronologiques (Séance 12)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

12 avril 2022

Références

Obligatoires:

- **Notes de cours:** Section 5 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- **Woolridge:** chapitres 11, 12 et 19.

Complémentaires:

- **Gujarati et Porter:** chapitres 21 et 22

Plan de la séance

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

Processus moyennes mobiles

- Soit $\{\epsilon_t\}$ un processus bruit blanc.
- Considérons le processus $\{Y_t\}$ défini à partir de $\{\epsilon_t\}$ *commesuit* : *où*μ, θ sont des paramètres constants
- En d'autres termes, le processus $\{Y_t\}$ est une moyenne pondérée du présent et du passé immédiat de $\{\epsilon_t\}$, à une constante additive près.
- On dit que le processus $\{Y_t\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre 1, et on note MA (1).

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre 1

La moyenne non conditionnelle du processus est

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu + E(\epsilon_t) + \theta E(\epsilon_{t-1}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Sachant:

- $Var(\epsilon_t) = Var(\epsilon_{t-1}) = \sigma^2$
- $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) = Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) = 0$

La variance du processus est

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E(Y_t - \mu)^2 \\ &= E(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})^2 \\ &= (1+\theta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre 1

L'autocovariance du processus est

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) \\ &= E(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-2}) \\ &= \theta\sigma^2\end{aligned}$$

- Les autocovariances d'ordre supérieur à 1 sont nulles comme on peut le vérifier en utilisant le fait que

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h-1}) = 0, \forall h > 1$$

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre 1

- Tout processus MA(1) est faiblement stationnaire, car c'est une combinaison linéaire de bruits blancs et ces deux premiers moments satisfont les conditions de stationnarité peu importe la valeur prise par les coefficients estimés.
- La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$\rho(h) = \frac{\rho(h)}{\rho(0)} = \begin{cases} 1 & si \quad h = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & si \quad h = 1 \\ 0 & si \quad h > 1 \end{cases}$$

- La fonction d'autocorrélation devient nulle après une période; le signe de θ détermine le sens (négatif ou positif) de l'autocorrélation d'ordre 1.
- La fonction d'autocorrélation ne change pas si θ est remplacé par $1/\theta$.

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre q

Considérons maintenant le processus $\{Y_t\}$ défini par:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}$$

avec $\theta_0 = 1$ et $\{\epsilon_t\}$ est un processus bruit blanc.

- Alors, $\{Y_t\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q, on note MA(q).

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre q

- En utilisant les propriétés du processus bruit blanc, on obtient :

$$E(Y_t) = \mu$$

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 \quad si \quad h = 0 \\ (\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + \theta_{h+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-h})\sigma^2 \; si \; h = 1, 2, .., q \\ 0 \quad si \quad h > q \end{cases}$$

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre q

- Le processus est donc stationnaire quelles que soit les valeurs des paramètres θ_j, $j = 1, 2, \cdots, q$.
- La fonction d'autocorrélation devient nulle après un délai de q périodes.
- Plus généralement, définissons le processus limite du processus mobile d'ordre q lorsque $q \to \infty$. Cette limite s'écrit :

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$$

- Et est appelé moyenne mobile d'ordre infini, note $MA(\infty)$.

Processus moyennes mobiles

Processus moyenne mobile d'ordre q

Si

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

- Alors le processus moyenne mobile d'ordre infini est faiblement stationnaire.
- Sa moyenne, variance et autocovariance sont obtenues comme limites de la moyenne, de la variance et des autocovariances du processus moyenne mobile d'ordre q lorsque $q \to \infty$

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

Processus autoregressifs

- Un processus autorégressif d'ordre p est un processus qui satisfait une équation linéaire en différence stochastique d'ordre p de la forme :

$$Y_t = c + \sum_{j=1}^{p} \psi_j Y_{t-j} + \epsilon_t$$

où $\{\epsilon_t\}$ est un bruit blanc $(0, \sigma^2)$.

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 1

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Sait que si $|\ \phi\ | \geq 1$, le processus explose ; le processus ne peut pas être stationnaire.
- Par contre, si $|\ \phi\ | < 1$, le processus est stable et on montre qu'il est faiblement stationnaire.

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 1

- En effet, si $\phi < 1$, on obtient en faisant de la substitution récursive :

$$
\begin{aligned}
Y_t &= (c + \epsilon_t) + \phi(c + \epsilon_t + \phi Y_{t-2}) \\
&= (c + \epsilon_t) + \phi(c + \epsilon_{t-1}) + \phi^2(c + \epsilon_{t-2} + \phi Y_{t-3}) \\
&= (c + \epsilon_t) + \phi(c + \epsilon_{t-1}) + \phi^2(c + \epsilon_{t-2}) + \phi^3(c + \epsilon_{t-3}) + \cdots \\
&= c(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \cdots) + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_2 + \phi^3\epsilon_3 + \cdots \\
&= \frac{c}{1-\phi} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_2 + \phi^3\epsilon_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

- Ce résultat montre que le processus AR(1) peut s'écrire comme un processus $MA(\infty)$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 1

Son espérance :

$$\mu = E(Y_t) = \frac{c}{1-\phi}$$

Sa variance :

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= E(Y_t - \mu)^2 \\
&= E(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \phi^3\epsilon_{t-3} + \cdots)^2 \\
&= (1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \cdots)\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 1

L'autocovariance d'ordre h :

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= E(Y_t-\mu)(Y_{t-h}-\mu) \\
&= E(\epsilon_t+\phi\epsilon_{t-1}+\phi^2\epsilon_{t-2}+\phi^3\epsilon_{t-3} \\
&+\cdots+\phi^h\epsilon_{t-h}+\phi^{h+1}\epsilon_{t-h-1}+\cdots) \\
&\times(\epsilon_{t-h}+\phi\epsilon_{t-h-1}+\phi^2\epsilon_{t-h-2}+\phi^3\epsilon_{t-h-3}+\cdots) \\
&= E(\phi^h\epsilon_{t-h}+\phi^{h+1}\epsilon_{t-h-1}) \\
&\times(\epsilon_{t-h}+\phi\epsilon_{t-h-1}+\phi^2\epsilon_{t-h-2}+\phi^3\epsilon_{t-h-3}) \\
&= \phi^h E(\epsilon_{t-h}+\phi\epsilon_{t-h-1}+\phi^2\epsilon_{t-h-2}+\phi^3\epsilon_{t-h-3}+\cdots)^2 \\
&= \frac{\phi^h\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 1

La fonction d'autocorrélation ρ :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h$$

et puisque $\mid \phi \mid < 1$, l'autocorrélation $\rho(h)$ décroit lorsque le retard h augmente.

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 2

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

- Ou encore sous la forme avec l'opération retard :

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = c + \epsilon_t$$

- Il n'est plus évident de savoir si le processus est stationnaire seulement en regardant la valeur d'un coefficient comme dans le cas AR(1).

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 2

- **Résultat connu que nous exploitons:** On sait que cette équation en différence est stable si les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique suivante

$$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$$

Sont de module inférieur à l'unité.

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 2

- Lorsque les racines sont réelles, elles sont données par la formule habituelle :

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

- Alors $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 2

La moyenne du AR(2) est donnée par

$$\mu = E(Y_t) = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

- Ce qui revient à en prenant le processus en déviation par rapport à la moyenne:

$$(Y_t - \mu) = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \epsilon_t$$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre 2

- Multiplier les deux membres de cette dernière relation par $(Y_{t-h} - \mu), h \geq 0$ et prendre l'espérance pour obtenir la fonction pour les autocovariances suivantes :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) & si \quad h \geq 0 \\ \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 & si \quad h = 0 \end{cases}$$

- Les autocorrélations obéissent également à une suite récurrente d'ordre 2 :

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) \quad si \quad h \geq 1$$

- On peut alors calculer $\rho(1)$, $\rho(2)$, puis obtenir

$$\gamma(0) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]}$$

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre p

$$Y_t = c + \sum_{j=1}^{p} \phi_j Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Les racines de l'équation:

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p$$

- Sont de module inférieur à l'unité, le processus est stable et faiblement stationnaire

Processus autoregressifs

Processus autorégressif d'ordre p

$$\mu = E(Y_t) = \frac{c}{1 - \phi_1 + \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

On obtient de même une relation de récurrence d'ordre p pour les autocovariances:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \cdots + \phi_p\gamma(h-p) & si \quad h \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{p} \phi_i\gamma(i) + \sigma^2 & si \quad h = 0 \end{cases}$$

La même relation de récurrence vérifiée par les autocorrélations:

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \cdots + \phi_p\rho(h-p)$$

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

Processus ARMA (P,Q)

- Un processus $\{Y_t\}$ qui contient à la fois des termes autorégressifs à l'ordre p et des termes moyennes mobiles à l'ordre q est dit processus ARMA(p, q).
- Le processus ARMA (p, q) vérifie une équation en différence stochastique du type :

$$\begin{aligned} Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} \\ + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1 - L\phi_1 - L^2\phi_2 - \cdots - L^p) Y_t \\ = c + &(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t \end{aligned}$$

Processus ARMA (P,Q)

- La partie moyenne mobile du processus ARMA(p, q) étant toujours stationnaire, le processus est stationnaire si la partie autorégressive est stationnaire.
- Donc, la condition de stationnarité du processus ARMA(p, q) est que les racines de l'équation

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p$$

  sont de module inférieur à l'unité.
- Dans ce cas, la moyenne est

$$\mu = E(Y_t) = \frac{c}{1 - \phi_1 + \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

Processus ARMA (P,Q)

- Pour identifier les ordres p et/ou q d'un processus $ARMA(p, q)$ stationnaire, on peut fort utilement se servir des
  - Fonctions d'autocorrélation d'échantillon (graphiques corrélogramme et ACF).
  - Fonctions d'autocorrélation partielle d'échantillon (graphiques corrélogramme et PACF).

Processus ARMA (P,Q)

- On utilise les propriétés suivantes:
  1. Les autocorrélations d'un processus $ARMA(p, q)$ commencent à décroître et tendre vers 0 après q retards.
  2. Les autocorrélations partielles d'un processus $ARMA(p, q)$ commencent à décroître et tendre vers 0 après p retards.
  3. Pour un processus $AR(p)$, les autocorrélations partielles deviennent abruptement nulles (donc très faibles et non significatives) après p retards.
  4. Pour un processus $MA(q)$, les autocorrélations deviennent abruptement nulles (donc très faibles et non significatives) après q retards.

Processus ARMA (P,Q)

- Lorsqu'on sort de cette étape d'identification avec plus d'un modèle, on peut utiliser des critères de sélection de modèles pour choisir un modèle parmi ceux qui sont potentiellement candidats pour expliquer les données.
- Les deux critères de sélection de modèles les plus utilisés sont
  - Le critère d'information d'Akaike **(Akaike Information Criterion, AIC)**
  - Le critère bayésien de Schwartz **(Schwartz Bayesian Criterion, SBC)**.

Processus ARMA (P,Q)

- Pour un modèle donné, on procède à l'estimation et on calcule à l'aide des formules suivantes :

$$AIC = T \times ln(\textbf{somme des carrés des résidus}) + 2n$$

$$SBC = T \times ln(\textbf{somme des carrés des résidus}) + nln(T)$$

  - Où T est le nombre d'observations utilisées pour faire l'estimation, n est le nombre de paramètres estimés
  - Pour un $ARMA(p, q)$, $n = p + q +$ **possible intercepte**.
- Les valeurs de AIC et SBC devraient être les plus faibles possible (à meilleur ajustement, une plus grande proximité entre observations et ajustements, donc plus faibles résidus).
- Donc, en comparant deux modèles à l'aide de l'un de ces critères, on choisira le modèle pour lequel le critère utilisé est le plus petit.

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

Processus ARIMA (P,D,Q)

- Si un processus ARMA(P,Q) n'est pas stationnaire, on peut
  - Introduire une fonction du temps pour enlever une éventuelle tendance.
  - Le différencier.
- En supposant que la série non stationnaire est intégrée d'ordre d, la série obtenue après d différences premières est stationnaire.
- Si cette nouvelle série peut être modélisée comme réalisation d'un processus $ARMA(p, q)$, on dit que la série initiale suit un processus $ARIMA(p, d, q)$.
- Dans cette représentation, le I est pour intégré, et le d est pour l'ordre d'intégration.
- Le processus $ARIMA(p, d, q)$ s'étudie de la même manière qu'un processus $ARMA(p, q)$ après l'avoir différencié d fois.

Processus moyennes mobiles

Processus autoregressifs

Processus ARMA (P,Q)

Processus ARIMA (P,D,Q)

L'analyse Box-Jenkins

L'analyse Box-Jenkins

- L'analyse Box-Jenkins fournit une méthodologie pour identifier le type du processus qui nous intéresse. Les quatre étapes de la méthode de Box-Jenkins sont :
  1. Identification
  2. Estimation
  3. Diagnostique
  4. Prévision

L'analyse Box-Jenkins

Identification

- La première chose à faire est de représenter la série par un graphique temporel pour voir son évolution dans le temps.
  - C'est une étape qui vise à identifier visuellement si la série a des bris, une tendance, des clusters de volatilité, etc.
- Testez la stationnarité: On doit avoir une série stationnaire pour procéder à l'analyse Box-Jenkins.
  - On utilise donc le test de Dickey-Fuller (ou Philipps-Perron) approprié pour investiguer la stationnarité.
  - Si la série n'est pas stationnaire, il faut la différencier.
- Il faut ensuite estimer et évaluer les autocorrélations et les autocorrélations partielles.
  - Elles peuvent difficile à étudier puisqu'il faut se rappeler que vous observez une réalisation du processus et non le processus lui-même et que les autocorrélations et autocorrélations partielles sont estimées elle aussi.

L'analyse Box-Jenkins

Identification

- Il faut ensuite estimer et évaluer les autocorrélations et les autocorrélations partielles.
  - En général, on reconnait les évolutions suivantes sur les processus:

Type de modèle	**Autocorrélations**	**Autocorrélations partielles**
AR(p)	Décrois exponentiellement ou en oscillant	Significatif jusqu'à p
MA(q)	Significatif jusqu'à q	Décrois exponentiellement
ARMA (p,q)	Décrois exponentiellement ou en oscillant après le lag q.	Décrois exponentiellement ou en oscillant après le lag p.

L'analyse Box-Jenkins

Identification

- Box-Jenkins suggère d'avoir les modèles les plus parcimonieux possible.
- Dans l'analyse des autocorrélations et des autocorrélations partielles, il convient de prioriser les choix de modèle le plus parcimonieux sans toutefois négliger des retards significatifs.

L'analyse Box-Jenkins

Estimation

- Estimez le modèle retenu.
- Lorsque plusieurs modèles ont été retenus à l'étape précédente, il faut tous les estimer.
- On choisit le meilleur modèle avec les critères de décision disponibles : R^2, test F ou test LR si vous tester des modèles emboités, AIC/SBC.

L'analyse Box-Jenkins

Diagnostique

- Faire un graphique des résidus du modèle choisi.
  - Il peut être plus facile de travailler avec des résidus standardisés par l'écart type pour voir les observations extrêmes.
- Tester si les résidus présentent : des autocorrélations, des effets ARCH ou de l'hétéroscédasticité.
  - Testez que les résidus sont bruits blancs avec un test portemanteau.

L'analyse Box-Jenkins

Prévision

- À partir du processus identifié, on peut faire de la prévision (souvent utilisé pour e court terme).
- Cette partie est présentée plus en détail dans les notes de la section 5.