Section 04 : Les modèles panels (Séance 9)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

22 Mars 2022

Références

Obligatoires:

- **Notes de cours:** Section 4 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- **Woolridge:** chapitres 13 et 14.

Complémentaires:

- **Gujarati et Porter:** chapitre 16

Plan de la séance

Le modèle within group estimator

Le modèle panel avec effets aléatoires

Le modèle empilé

Transformation de Fuller-Battese

Le modèle within group estimator

Le modèle panel avec effets aléatoires

Le modèle empilé

Transformation de Fuller-Battese

Le modèle within group estimator

- Le problème est que, typiquement, N est grand dans une base de données panel (surtout dans les panels courts ou si on veut un effet fixe temporel dans un panel long, par exemple).
- Il sera donc difficile de passer par l'estimation des alphas.
- On voudrait donc seulement estimer des coefficients de régressions sur les X qui tiennent compte des caractéristiques dans les dummies, mais sans les estimer.
- On peut obtenir ce résultat en purgeant (orthogonaisant) la régression des effets de la matrice D.

Le modèle within group estimator

Modèle transformé

- Le modèle est prémultiplié par la matrice de projection des dummies

$$M_D = I - D(D'D)^{-1}D' = \begin{bmatrix} M^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M^0 \end{bmatrix}$$

- M_D est de dimension $NT \times NT$ avec N matrice M^0 sur la diagonale de dimension $T \times T$

Le modèle within group estimator

Modèle transformé

$$M_D y = M_D X\beta + M_D D_\alpha + M_D + u$$

On obtient estimateur OLS de β:

$$\hat{b} = (X' M_D X)^{-1}(X' M_D y)$$

- Cet estimé permet d'obtenir les résidus qui nous intéressent et d'avoir des coefficients représentant l'effet des régresseurs sur la variable dépendante sans estimer α.

Le modèle within group estimator

Impact de cette transformation

$$M^0 Y_i = \left(I_T - \frac{1}{T} \imath_T \imath_T' \right) Y_i$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{iT} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{iT} \end{bmatrix} - \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} Y_{it} \\ \sum_{t=1}^{T} Y_{it} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} Y_{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{iT} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{Y}_i \\ \hat{Y}_i \\ \vdots \\ \hat{Y}_i \end{bmatrix} = Y_i - \hat{Y}_i \imath_T$$

Le modèle within group estimator

La régression transformée:

$$(Y_i - \hat{Y}_i) = (X_i - \hat{X}_i)\beta + (u_i - \hat{u}_i)$$

- Cette transformation donne donc le modèle avec les variables prises en écarts à la moyenne (ce qui élimine l'intercepte et les dummies).
- Donc, le modèle $M_D y = M_D X\beta + M_D D_\alpha + M_D + u$ représente les variations autour des moyennes de chaque groupe i **(WHITIN REGRESSION)**.
- L'intuition est quand enlevant la moyenne de chaque groupe, on enlève la partie de la régression qui est propre à ce groupe sans avoir à l'estimer par des coefficients dummy.

Le modèle within group estimator

- Les estimateurs within group sont convergents, mais non efficaces.
- Le gros désavantage de l'estimateur within group est qu'il est impossible d'ajouter d'autres variables non variantes dans le temps, mais observables, car leur déviation par rapport à la moyenne du groupe est nulle.
- En enlevant la moyenne, on enlève aussi les effets de long terme (que la moyenne échantillonnale peut changer dans le temps!) pour ne regarder que les effets de court terme.

Le modèle within group estimator

- Pour obtenir les interceptes que nous n'avons pas estimés dans le modèle within group :

$$\hat{\alpha}_i = \overline{Y}_i - \hat{b}'\overline{X}_i$$

- Sachant les éléments suivants:
  - $\overline{X}_i = \begin{bmatrix} \overline{X}_{i1} & \overline{X}_{i2} & \cdots & \overline{X}_{iK} \end{bmatrix}$
  - $\overline{X}_{iK} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{itk}$
  - $\overline{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{it}$
- $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes sur tout l'échantillon des $N \times T$ observations.

Le modèle panel avec effets aléatoires

- Postuler que la composante de groupe se retrouve dans le terme d'erreur plutôt que dans les régresseurs.
- Cette composante de groupe est aléatoire et non corrélée avec les régresseurs.
- Soit

$$Y_{it} = \beta' X_{it} + \gamma + \mu_i + u_{it}$$

- L'erreur sera:

$$\mu_i + u_{it}$$

- X_{it} est la t-ième ligne de la matrice X_i, $i = 1, \cdots, N$ et $t = 1, \cdots, T$

Le modèle panel avec effets aléatoires

Composante aléatoire (random effect)

- représenté par μ_i
- Cette composante est la partie du terme d'erreur (non observable) qui ne varie pas dans le temps, mais varie entre les équations.

Composante du terme d'erreur (non observable) usuel

- représenté par u_{it}
- Il varie d'observation en observation, dans le temps et entre les équations.
- C'est un terme d'erreur standard.

Le modèle panel avec effets aléatoires

On doit faire des hypothèses sur ces composantes du terme d'erreur:

- Les deux composantes du terme d'erreur ne sont pas corrélées
- Le terme u_i

$$
\begin{aligned}
E(u_i) &= 0 \\
E(u_i u_i^{'}) &= \sigma_u^2 I_T \\
E(u_i u_j^{'}) &= 0 \\
\forall i
\end{aligned}
$$

Le modèle panel avec effets aléatoires

On doit faire des hypothèses sur ces composantes du terme d'erreur:

- Le terme μ_i

$$\begin{aligned} E(\mu_i) &= 0 \\ E(\mu_i^2) &= \sigma_\mu^2 \\ E(\mu_i \mu_j) &= 0 \\ \forall i \end{aligned}$$

Le modèle panel avec effets aléatoires

Le modèle Panel-random-coefficient se réécrit comme suit:

$$Y_i = X_i\beta + u_i + \wr_T\gamma + \wr_T\mu_i$$

avec

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Évidemment, la matrice de régresseurs X_i est sans colonne de 1.

Le modèle panel avec effets aléatoires

Dans le cas du modèle Panel-Random-Coefficient:

$$
\begin{aligned}
E[(u_i + \wr_T \mu_i)(u_i + \wr_T \mu_i)'] &= E(u_i u_i^{'}) + E[u_i(\wr_T \mu_i)'] \\
&+ E[(\wr_T \mu_i) u_i^{'}] + E[(\wr_T \mu_i)(\wr_T \mu_i)^{'}] \\
&= \sigma_u^2 I_T + 0 + 0 + E[\mu_i \wr_T \wr_T^{'} \mu_i^{'}] \\
&= \sigma_u^2 I_T + 0 + 0 + E[\mu_i^2 \wr_T \wr_T^{'}]
\end{aligned}
$$

- En sacant que μ_i est un scalaire aléatoire

Le modèle panel avec effets aléatoires

Dans le cas du modèle Panel-Random-Coefficient:

$$E[\mu_i^2 \wr_T \wr_T^{\prime}] = E \begin{bmatrix} \mu_i^2 & \mu_i^2 & \cdots & \mu_i^2 \\ \mu_i^2 & \mu_i^2 & \cdots & \mu_i^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_i^2 & \mu_i^2 & \mu_i^2 & \mu_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 \end{bmatrix}$$

Et donc

$$E(u_i + \wr_T \mu_i)(u_i + \wr_T \mu_i)' = \sigma_u^2 I_T + E[\mu_i \wr_T \wr_T^{\prime} \mu_i{}']$$

Le modèle panel avec effets aléatoires

Dans le cas du modèle Panel-Random-Coefficient:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

Le modèle empilé

$$y = \tilde{X}\delta + \tilde{u}$$

Avec

$$\delta = (\gamma\beta')' \quad , \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} \quad \textbf{et} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}_N \end{bmatrix}$$

Où

$$\tilde{u}_i = u_i + \wr_T \mu_i \quad \textbf{et} \quad \tilde{X}_i = \begin{bmatrix} \wr_T & X_i \end{bmatrix}$$

Le modèle empilé

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{u}\tilde{u}') &= \begin{bmatrix} E\tilde{u}_1\tilde{u}_1' & \cdots & E\tilde{u}_1\tilde{u}_i' & \cdots & E\tilde{u}_1\tilde{u}_N' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\tilde{u}_i\tilde{u}_1' & \cdots & E\tilde{u}_i\tilde{u}_i' & \cdots & E\tilde{u}_i\tilde{u}_N' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\tilde{u}_N\tilde{u}_1' & \cdots & E\tilde{u}_N\tilde{u}_i' & \cdots & E\tilde{u}_N\tilde{u}_N' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} V & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & V \end{bmatrix} = \Omega
\end{aligned}
$$

Le modèle empilé

Produit Kroneker

- Note : $\otimes$ est le produit Kroneker
- Chaque élément de la matrice I_N sera multiplié par la matrice V.
- Propriétés importantes:
  - si les dimensions rendent la multiplication possible:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

  - si et seulement si A et B sont inversibles:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Le modèle empilé

L'estimé par FGLS s'obtient comme suit:

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}X$$

Estimé convergent de σ_u^2

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{NT - N - K}$$

Estimé convergent de σ_μ^2

- Considérons le modèle de base, en prenant les moyennes dans le temps de chaque groupe (BETWEEN REGRESSION)

$$\overline{Y}_i = \gamma + \beta'\overline{X}_i + \overline{u}_i + \mu_i$$

  Sachant $i = 2, \cdots, N$.
- Cette régression vise à trouver l'écart entre les groupes dû à μ_i

Le modèle empilé

Sous les hypothèses du modèle:

$$\sigma^2_{BETWEEN} = V(\overline{u}_i + \mu_i) = \frac{\sigma_u^2}{T} + \sigma_\mu^2$$

- Si on estime ce modèle par OLS sur toutes les équations (N) on obtient le vecteur de dimensions $(N \times 1)$ des résidus qu'on notera $\hat{v}$ (attention ici, comme vous prenez la moyenne, vous n'avez plus qu'une équation avec N observations)

$$\sigma^2_{BETWEEN} = \frac{\hat{v}'\hat{v}}{N - (K+1)}$$

$$\sigma^2_\mu = \hat{\sigma}^2_{BETWEEN} - \frac{\hat{\sigma_u}}{T}$$

Le modèle within group estimator

Le modèle panel avec effets aléatoires

Le modèle empilé

Transformation de Fuller-Battese

Transformation de Fuller-Battese

- Ayant les estimés de $\hat{\sigma}_{\mu}^2$ et $\hat{\sigma}_u^2$, on peut maintenant trouver $\hat{V}$ et avoir Ω.
- On trouve $\hat{\beta}_{FGLS} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}X$
- Par contre, il faut inverser $\hat{\Omega}$ ce qui n'est pas nécessairement facile.
- Sachant que $\Omega = I_N \otimes V$, il existe la transformation de Fuler-Battese qui nous aide à inverser cette matrice.

Transformation de Fuller-Battese

Rappel:

- Un GLS consiste à transformer le modèle de sorte à le ramener à un contexte où les OLS sont optimaux.
- $\forall \Omega$ inversible, $\exists$ une matrice P telle que: **Solution pour Omega:**

$$P_\Omega P_\Omega' = \Omega$$

Solution pour Omega inverse:

$$\Omega^{-1} = [P_\Omega P_\Omega']^{-1} = [P_\Omega']^{-1}[P_\Omega']^{-1}$$

Transformation de Fuller-Battese

Le modèle transformé en question est donc:

$$P_{\Omega}^{'-1} y = P_{\Omega}^{'-1} \tilde{X} \beta + P_{\Omega}^{'-1} \tilde{u}$$

- Sachant que $\Omega = I_N \otimes V$, on se concentre sur V.
- On peut montrer que la matrice P_V^{-1} peut être obtenue comme suit :

$$P_V^{-1} = \frac{1}{\sigma_u} \left[I - \frac{\theta}{T} \wr_T \wr_T' \right]$$

$$\theta = 1 - \frac{\hat{\sigma}_u}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 + T \hat{\sigma}_\mu^2}}$$

- Où σ_u est l'écart type.

Transformation de Fuller-Battese

Remarque:

- Cette approche est très similaire au modèle en déviation par rapport à la moyenne où nous utilisons la matrice M pour purger des effets des dummies.
- Elle diffère seulement par θ.
- Comparer la matrice $\sigma_u P_V^{-1}$ à la matrice précédente :

$$M^0 = I_T - \frac{1}{T} \wr_T \wr_T^{'}$$

Transformation de Fuller-Battese

Multiplication par θ:

$$P_{\Omega}^{\prime -1} = v \begin{bmatrix} P_V^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_V^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_V^{-1} \end{bmatrix}$$

- L'estimateur FGLS peut être obtenu comme un OLS appliqué à un modèle transformé par $P_{\Omega}^{\prime -1}$ ou encore $\sigma_u P_{\Omega}^{\prime -1}$.
- L'élément type de cette dernière transformation (Fuller-Battese (1974)) est:

$$Y_{it} - \theta \overline{Y}_i$$

- Il faut faire de même pour les X et ensuite estimer le modèle par OLS.