Section 02 : Régression et Moindres Carrés Ordinaires (Séance 2)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

18 Janvier 2022

Références

Obligatoires:

- **Notes de cours:** Section 2 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- **Woolridge:** chapitres 2 à 7

Complémentaires:

- **Gujarati et Porter:** chapitres 1 à 9.
- **Greene:** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20, appendices C et D

Plan de la séance

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Modèle de Régression

Modèle de Régression

- Espérance conditionnelle d'une variable indépendante **(X)** conditionnelle à la valeur connue des régresseurs **(Y)**

$$E(Y|X_i) = f(X_i)$$

  Où $f(X_i)$ est une fonction des variables explicatives **X**

- Relation conditionnelle linéaire

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

- Composate de Y:
  - Partie systématique ou déterministe, $E(Y|X_i)$
  - Partie aléatoire et non systématique, μ_i

Modèle de Régression

- Modèle de Régression Linéaire Simple

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu_i$$

- Prendre espérance des deux cotés

$$E(Y_i|X_i) = E(Y|X_i) + E(\mu_i)$$

Sachant $E(Y_i|X_i) = E(Y|X_i)$ alors $E(\mu_i) = 0$

- Les paramètres obtenus à partir d'un échantillon sont des estimateurs (notés avec $\hat{}$)

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\mu}_i$$

$\hat{\mu}_i$ représente l'estimateur du terme d'erreur, le résidu

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Définissons les résidus

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$$

- Choisir estimateurs de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ de facon à minimiser la somme des carrés des résidus

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2 = \left[\hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_2^2 + \ldots + \hat{\mu}_N^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Minimiser la somme des carrés des résidus par rapport à $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$

$$\min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2 = \min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2$$

- Équation normales

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^{N} X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \tag{2}$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

$$-2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i - N\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$

$$N\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{N} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

  On pose la propriété suivante:
  - $\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\overline{Y}$
  - $\sum_{i=1}^{N} X_i = N\overline{X}$

$$N\hat{\beta}_1 = N\overline{Y} - N\hat{\beta}_2\overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{N\overline{Y}}{N} - \frac{N\hat{\beta}_2\overline{X}}{N}$$

Solution de $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2\overline{X}$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$-2\sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

Sachant $\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - [\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}] \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{N} X_i \hat{\beta}_2 \overline{X} \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} + \hat{\beta}_2 N\overline{X}^2 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} = \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \hat{\beta}_2 N\overline{X}^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} = \hat{\beta}_2 \left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2 \right]$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2}$$

Sachant que

- $\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$
- $\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

Solution de $\hat{\beta}_2$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de la variable à expliquer **(n $\times$ 1)**

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Matrice de variables explicatives **(n $\times$ (k+1))**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de coefficients associés **(k+1 $\times$ 1)**

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

- Vecteur associé au terme d'erreur **(n $\times$ 1)**

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Modèle Univarié

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Que nous réécrirons comme suit:

$$Y = X\beta + u$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Hypothèses distributionnelles sur u
  - $u \sim iid$ et $E(u) = 0$
  - $V(u) = \sigma^2 I$
  - $u \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$

$$E(u) = \begin{pmatrix} E(u_1) = 0 \\ E(u_2) = 0 \\ \vdots \\ E(u_n) = 0 \end{pmatrix}$$

- Il n'y a pas de corrélation sérielle des erreurs

$$V(u) = E(uu') = \sigma^2 I$$

- Découle de l'indépendance

$$COV = [u_i, u_j] = 0$$

Pour $i \neq j$ $\forall i$ et $\forall j$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

$$E(uu') = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$$

$$E(uu') = E \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & u_2^2 & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 u_n & u_2 u_n & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1^2) & E(u_1 u_2) & \cdots & E(u_1 u_n) \\ E(u_1 u_2) & E(u_2^2) & \cdots & E(u_2 u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_1 u_n) & E(u_2 u_n) & \cdots & E(u_n^2) \end{pmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Rappel:

$$Var(u) = E(u)^2 - [E(u)]^2$$

Avec Hypothèse d'indépendance:

$$V(u) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\hat{\beta} = ARGMIN_{\beta}(\hat{u}'\hat{u})$$

$$\hat{\beta} = ARGMIN_{\beta}((Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}))$$

Distribution des termes de la multiplication matricielle:

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Sachant

$$Y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'Y$$

Alors:

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

- Dérivé de la somme des résidus au carrés par rapport à β

$$\frac{\partial(RSS)}{\partial\hat{\beta}} = \frac{\partial(Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}}$$

Sachant

$$\frac{\partial([Y'X]\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = [Y'X] = X'Y$$

$$\frac{\partial(\hat{\beta}'[X'X]\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = 2[X'X]\hat{\beta}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\frac{\partial(RSS)}{\partial\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'Y = X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Estimateur de $\hat{\beta}$ par MCO

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

- Il n'existe pas d'estimateur de σ^2 pour la méthode des Moindres carrés ordinaires
- On peut estimer empiriquement comme suit

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = \frac{\hat{u}' \hat{u}}{n}$$

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

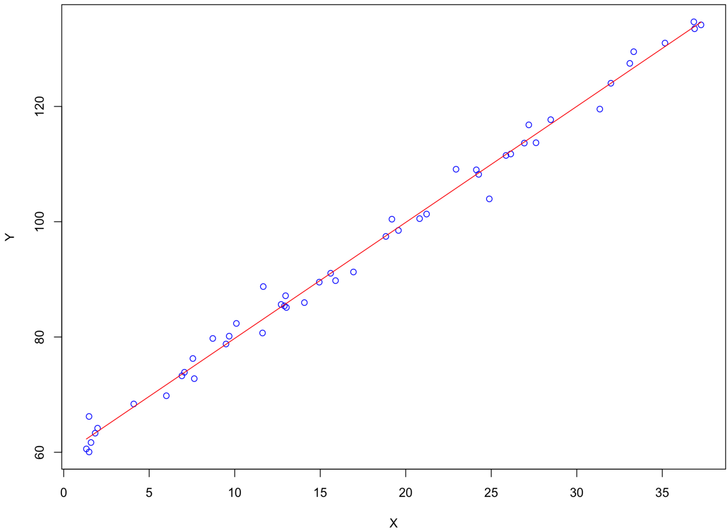
Exemple Numérique

- Nous allons générer des variables aléatoires à l'aide d'un modèle dont nous allons déterminer les paramètres.
- Nous allons utiliser un modèle linéaire simple ayant le format suivant:

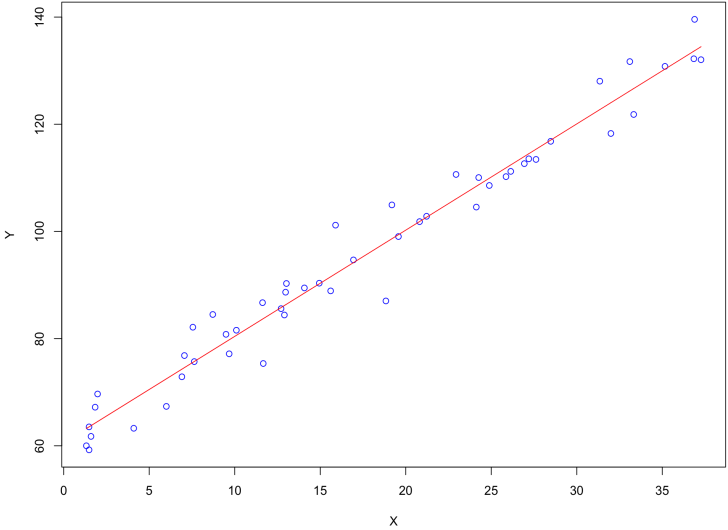
$$y = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i$$

  - L'intercepte de notre modèle sera de $\beta_1 = 60$.
  - La pente de notre modèle sera de $\beta_2 = 2$.
  - Nous allons faire l'hypothèse que notre terme d'erreur suit une loi normale de moyenne 0 et variance 4 ($\epsilon \sim N(0, 4)$).
- Il nous est maintenant possible de déterminer une valeur pour chaque y_i en utilisant les x_i.
- Pour les x_i nous allons générer uniformément 40 observations entre 0 et 40.

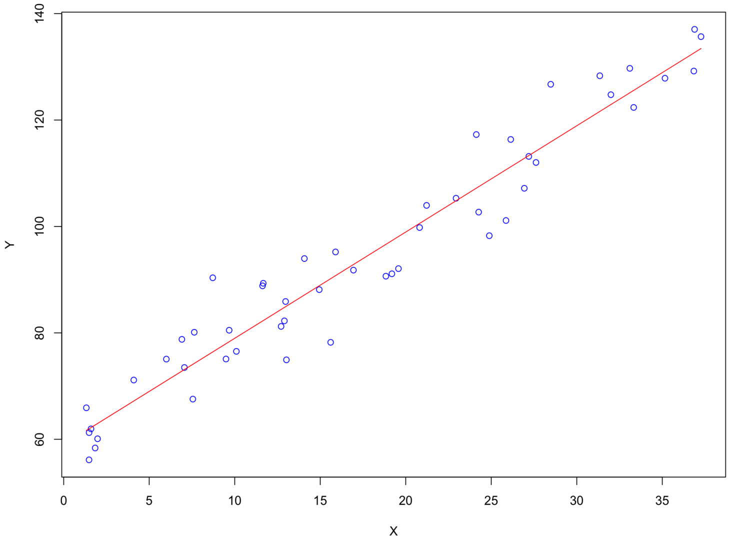
Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0,2)$)



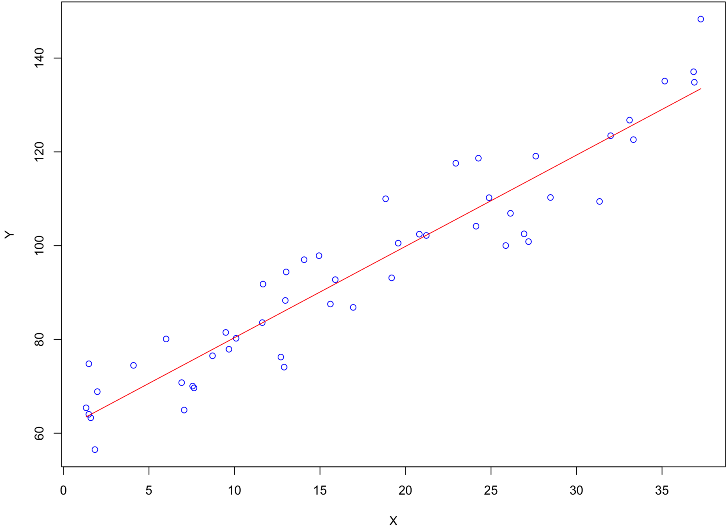
Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 4)$)



Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0,6)$)



Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0,8)$)



Exemple Numérique

	$\epsilon \sim N(0,2)$	$\epsilon \sim N(0,4)$	$\epsilon \sim N(0,6)$	$\epsilon \sim N(0,8)$
(Intercept)	59.30^{***}	59.28^{***}	60.89^{***}	55.68^{***}
	(0.68)	(1.35)	(2.43)	(2.31)
x	2.02^{***}	2.03^{***}	2.00^{***}	2.13^{***}
	(0.03)	(0.06)	(0.10)	(0.10)
R^2	0.99	0.96	0.89	0.91
Adj. R^2	0.99	0.96	0.89	0.91
Num. obs.	50	50	50	50

$^{***}p < 0.001$; $^{**}p < 0.01$; $^{*}p < 0.05$

Table: Table de régression