Section 03 : Extensions au modèle linéaire simple (Séance 6)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

15 février 2022

Références

Obligatoires:

- **Notes de cours:** Section 3 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- **Woolridge:** chapitres 3, 8, 12.

Complémentaires:

- **Gujarati et Porter:** chapitres 10, 11, 12, 13 et appendice C.
- **Greene:** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20 C et D

Plan de la séance

Hétéroscédasticité

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité

Tests diagnostiques d’hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité

Homoscédasticité

- OLS makes the assumption that the variance of the error term is constant.

$$V(u_i) = \sigma^2$$

Hétéroscédasticité

- Si les résidus n'ont pas une variance constante, on dit qu'ils sont hétéroscédastiques.

$$V(u_i) = \sigma_i^2$$

Hétéroscédasticité

Forme de Ω

- On connait rarement Ω, il faut spécifier une forme pour cette matrice qui est gérable.
- Estimation de tous les σ_i^2 pour chaque observations.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix}$$

  - N'est pas une forme estimable, car le nombre de paramètres à estimer $T + K > T$.
- Il faut donc spécifier un modèle (une paramétrisation) pour la forme de matrice Ω pour réduire le nombre de paramètres inconnus.

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

- On a une variance hétéroscédastique, mais en sous-groupe.
- À l'intérieur du sous-groupe, la variance est constante.

$$\sigma_t^2 = \sigma_{10}^2, \qquad t = 1, ..., T_1$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_{20}^2, \qquad t = T_{1+1}, ..., T$$

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

$$\Omega = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{10}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sigma_{20}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{20}^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

On peut réécrire la matrice Ω, avec hétéroscédasticité groupée comme suit:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{10}^2 I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 I_{T_2} \end{bmatrix}$$

Sachant:

$$\sigma_{10}^2 I_{T_1} = \begin{bmatrix} \sigma_{10}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{10}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix} \textbf{ et } \sigma_{20}^2 I_{T_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{20}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{20}^2 \end{bmatrix}$$

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

Dans un cadre plus général:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{10}^2 I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{20}^2 I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{G0}^2 I_{T_G} \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{10}^2 I_{T_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{20}^2 I_{T_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{G0}^2 I_{T_G}} \end{bmatrix}$$

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

Dans un cadre plus général:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{10} I_{T_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{20} I_{T_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{G0} I_{T_G}} \end{bmatrix}$$

- Les moindres carrés sont donc pondérés par la matrice P^{-1}, ce qui revient à pondérer par l'écart type qui est hétéroscédastique par groupe G.

Hétéroscédasticité

Hétéroscédasticité groupée

Modèle transformé:

$$\begin{bmatrix} \frac{Y_1}{\sqrt{Z_1}} \\ \frac{Y_2}{\sqrt{Z_2}} \\ \vdots \\ \frac{Y_T}{\sqrt{Z_T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{Z_1}} \\ \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{Z_T}} \end{bmatrix} \beta_0 + \begin{bmatrix} \frac{X_{11}}{\sqrt{Z_1}} \\ \frac{X_{12}}{\sqrt{Z_2}} \\ \vdots \\ \frac{X_{1T}}{\sqrt{Z_T}} \end{bmatrix} \beta_1 + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{X_{K-11}}{\sqrt{Z_1}} \\ \frac{X_{K-12}}{\sqrt{Z_2}} \\ \vdots \\ \frac{X_{K-1T}}{\sqrt{Z_T}} \end{bmatrix} \beta_K + \begin{bmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{Z_1}} \\ \frac{u_2}{\sqrt{Z_2}} \\ \vdots \\ \frac{u_T}{\sqrt{Z_T}} \end{bmatrix}$$

- Remarquez que le modèle devient sans constante. Ceci a des implications entre autres pour le R^2 du modèle.

Hétéroscédasticité

Variance varie en fonction de plusieurs variables exogènes

Soit le modèle suivant:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_{K-1} X_{k-1t} + u_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \cdots + \alpha_H Z_{Ht} + \epsilon_t$$

Hétéroscédasticité

Variance varie en fonction de plusieurs variables exogènes

- Cette paramétrisation de la variance demande d'estimer $\hat{\sigma}_t^2$ par une régression artificielle.
  - On utilise les résidus au carré, $\hat{u}^2$, pour avoir une proxy de σ_t^1.
  - On régresse les $\hat{u}^2$ sur les variables exogènes pour trouver les paramètres α_h définissant la variance.
  - On trouve les valeurs des $\hat{\sigma}_t^2$ estimés par le modèle avec les résultats de la régression auxiliaire :

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Z_{1t} + \cdots + \hat{\alpha}_H Z_{Ht}$$

- Cette technique demande des données supplémentaires sur les exogènes.

Hétéroscédasticité

Variance varie en fonction de plusieurs variables exogènes

Le modèle transformé sera:

$$\frac{Y_t}{\hat{\sigma}_T} = \beta_0 \frac{1}{\hat{\sigma}_t} + \beta_1 \frac{X_{1t}}{\hat{\sigma}_t} + \cdots + \beta_{K-1} \frac{X_{K-1t}}{\hat{\sigma}_t} + \frac{u_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Où

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Z_{1t} + \cdots + \hat{\alpha}_H Z_{Ht}}$$

En estimant par OLS

- Contrairement au cas à une seule variable exogène, les estimateurs des β_K sont obtenus par FGLS et nom par GLS, car nous avons estimé la matrice Ω à partir de variable exogène.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

- Nous introduisons des tests pour savoir si les régressions considérées souffrent de problème d'hétéroscédasticité des erreurs (et résidus).
- Une approche intuitive serait de regarder un graphique des résidus de régression dans le but de trouver des anomalies.
- Une approche par analyse de graphique n'est pas un test statistique formel de la présence d'hétéroscédasticité.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Goldfeld-Quandt (GQ)

Modèle:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_{K-1} X_{K-1i} + u_i$$

- On teste l'hypothèse nulle d'une variance constante dans le temps contre l'alternative que la variance augmente de manière monotone selon un exogène Z_{1i}.
- Hypothèse nulle:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \forall i$$

- Hypothèse alternative:

$$H_A : \sigma_i^2 \ \textbf{augmente de manière monotone selon} \ Z_{1i}$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Goldfeld-Quandt (GQ)

Marche à suivre:

1. Ordonner les observations selon la variable Z.
2. Omettre c observation centrale
3. Effectuer deux régressions séparées sur les $\frac{N-c}{2}$ premières et les $\frac{N-c}{2}$ dernières observations et calculer $\hat{\sigma}_1^2$ et $\hat{\sigma}_2^2$
4. La statistique de test est:

$$GQ = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \sim F\left(\frac{N-c-2K}{2}, \frac{N-c-2K}{2}\right)$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Goldfeld-Quandt (GQ)

- les estimateurs de $\hat{\sigma}_1^2$ et de $\hat{\sigma}_2^2$ sont calculés à partir des deux régressions en sous-groupe.
- Le nombre d'observations sera $\frac{N-c}{2}$ et le nombre de degrés de liberté sera $\frac{N-c}{2-k}$.
- Ceci est équivalent à

$$\frac{N-c-2K}{2}$$

qui représente les degrés de liberté du numérateur et du dénominateur de la statistique.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Goldfeld-Quandt (GQ)

- Le test est exact et non asymptotique.
- On perd les observations du centre, car on veut voir ce qui se passe aux extrémités.
- Si les erreurs sont normales, le test suit exactement une loi F et non asymptotiquement.
- On n'a donc pas besoin d'une grande taille d'échantillon pour ce test.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Breusch-Pagan (BP)

- Le test est plus général que le précédent et plus utilisé
- En présence d'exogènes:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_{K-1} X_{K-1t} + u_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \cdots + \alpha_H Z_{Ht} + \epsilon_t$$

$$H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_H = 0 \forall h$$

$$H_A : \exists \alpha_h \neq 0$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Breusch-Pagan (BP)

- Le test est basé sur une régression artificielle suivante :

$$u_t^2 = \hat{\alpha_0} + \hat{\alpha_1} Z_{1t} + \cdots + \hat{\alpha_H} Z_{Ht}$$

- Le test porte sur tous les coefficients de la régression, sauf la constante.
- Il est donc naturel qu'il soit basé sur le R2 de la régression artificielle.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de Breusch-Pagan (BP)

Statistique de test:

$$BP = T \times R^2_{regartificielle}$$

$$BP^{asy} \sim X^2(H)$$

- Le R^2 de la régression artificielle sera petit, mais cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'hétéroscédasticité, car le test est basé sur $(T \times R^2)$.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test d'effet ARCH sur les résidus de régression.

- **ARCH:** autoregressive conditionnal heteroscedasticity
- On veut tester l'hypothèse de **volatility clostering**, la variabilité d'aujourd'hui est reliée à la variabilité d'hier.

$$u_t = \epsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2}$$

Sachant

$$\epsilon_t \sim N(0, 1)$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test d'effet ARCH sur les résidus de régression.

- **Variance conditionnelle au passé:**

$$E(u_t^2 \mid u_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

- La variance conditionnelle au passé est hétéroscédastique (varie dans le temps ici)
- $V(u_t)$ (la variance inconditionnelle) est invariante dans le temps si $\mid \alpha_1 \mid < 1$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test d'effet ARCH sur les résidus de régression.

- **Variance inconditionnelle:**

$$E(u_t^2) = E(\epsilon_t^2) \times E(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2) + cov(\epsilon_t, u_{t-1})$$

$$V(u_t) = V(u) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

- Pour évaluer cette hypothèse, on peut appliquer un test de Breusch-Pagan basé sur une régression artificielle des $\hat{u}_t^2$sur une constante et $\hat{u}_{t-1}^2$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de White

- Ce test s'applique pour tester l'hétéroscédasticité de forme générale.
- On ne spécifie pas de forme pour la variance.
- L'hypothèse nulle est que la variance est homoscédastique contre une alternative hétéroscédastique générale.

Soit le modèle:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

Le test est basé sur une régression artificielle:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_{11} X_{1t}^2 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_{22} X_{2t}^2 + \alpha_{12} X_{1t} X_{2t} + \epsilon_t$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Test de White

Statistique de test:

$$WHITE = T \times R^2_{reg.art}$$

$$WHITE^{asy} \sim X^2(H)$$

- L'avantage du test de White est qu'il est très général.
- Par contre, on perd des degrés de liberté de la régression artificielle, car on doit estimer les produits croisés et les régresseurs au carré.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Le Correction de White

- Lorsque q'on ne peut spécifier une forme paramétrique pour la variance hétéroscédastique des erreurs, on ne peut pas utiliser les estimateurs GLS et FGLS définis plus haut.
- Une approche alternative est d'utiliser l'estimateur de $\hat{\beta}_{OLS}$, mais de corriger l'estimateur de sa variance pour tenir compte de l'hétéroscédasticité.
- On se souvient que $\hat{\beta}_{OLS}$ était toujours sans biais pour les cas hétéroscédastiques, mais que sa variance était fausse. On trouve donc une correction pour la variance des OLS.

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Estimateur de la variance suggéré

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{OLS}) = T(X'X)^{-1}\hat{\Lambda}(X'X)^{-1}$$

Où

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 (x_t' x_t)$$

Où x_t est la $t^{ième}$ ligne de la matrice X. Cet estimateur est difficile à visualiser.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum \hat{w}_{ji}^2 \hat{u}_i^2}{(\sum \hat{w}_{ji}^2)^2}$$

Tests diagnostiques d'hétéroscédasticité

Estimateur de la variance suggéré

- Les $\hat{u}_i$ sont les résidus de la régression originale et les $\hat{w}_j$ sont les résidus obtenus d'une régression auxiliaire du régresseur j sur tous les autres.
- Le correcteur de White est donc une approximation de la variance qui pondère les observations des résidus en fonction des régresseurs dans le calcul de la variance.
- En général, si on a des indices sur la structure de la matrice Ω, il est préférable de passer par l'estimateur FGLS si la qualité de l'information ajoutée est bonne.
- Le correcteur de White est très utile lorsqu'on n'a aucune idée de la forme fonctionnelle à donner à Ω.