

Exercice 007

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Un chercheur considère deux spécifications de régression pour estimer la relation entre une variable X et une variable Y :

$$\log Y = \alpha_1 + \beta_1 \log X + U \quad (1)$$

$$\log \frac{Y}{X} = \alpha_1 + \beta_1 \log X + V \quad (2)$$

où les lettres grecques désignent des paramètres, et X et Y sont deux variables aléatoires pour lesquelles nous disposons d'un échantillon aléatoire de taille n .

- **a.** Déterminez si (2) peut être exprimée comme une version restreinte de (1).
- **b.** En utilisant les mêmes n observations des variables Y et X , le chercheur ajuste les deux spécifications à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Les ajustements sont :

$$\log \hat{Y} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \log X \quad (3)$$

$$\log \hat{XY} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \log X \quad (4)$$

Où les lettres grecques avec tilde représentent les valeurs estimées par les MCO. Utilisez l'expression des ajustements pour écrire $\hat{\beta}_2$ en fonction de $\hat{\beta}_1$.

- **c.** Écrivez $\hat{\alpha}_1$ en fonction de $\hat{\alpha}_1$.
- **d.** Démontrer que :

$$\hat{y} - \hat{x} = z \quad \text{où} \quad z = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 x$$

- **e.** Démontrer que les résidus de (3) sont identiques à ceux de (4).
- **f.** Démontrer que les erreurs standards de $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\beta}_1$ sont identiques.
- **g.** Déterminez la relation entre la statistique t utilisant $\hat{\beta}_2$ et la statistique t utilisant $\hat{\beta}_1$.
- **h.** Expliquez, avec des arguments détaillés, si R^2 serait identique dans les deux régressions.

