Exercices de colles

Simon Queric

2022-2023

Il s'agit d'un polycopié d'exercices de mathématiques de première année de licence ou de prépa. Ce sont les exercices que je donne en colle chaque semaine à la MPSI1 du Lycée Charlemagne à Paris.

1 Logique, rédaction et applications

1.1 Questions de cours

1) Rappeler les relations coefficients/racines d'un polynôme de degré 2.

2) Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que pour tout $A, B \subseteq E$ on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et pour tout C, D $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

3) Soient deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que :
(a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
(b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

1.2 Exercices

Exercice 1

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ et $A = [-1, 4]$. Déterminer $f(A), f^{-1}(A)$.

Déterminer $\sin([0, 2\pi]), \sin([0, \pi/2]), \sin^{-1}([3, 4]), \sin^{-1}([-2, -1])$

Exercice 2

(a) Trouver un ensemble E, une partie $F \subsetneq E$ et une fonction $f : F \to E$ bijective.
(b) Trouver une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que tout entier n possède une infinité d'antécédants par f.

Exercice 3

Soient $A, B, C \subseteq E$. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$

Exercice 4

Montrer que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ avec égalité ssi $A \subseteq C$.

Exercice 5

Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que
(a) $\forall A \subseteq F \ f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ (b) $\forall B \subseteq E \ B \subseteq f^{-1}(f(B))$

Exercice 6

(a) Soit $\varphi : X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto X \cap 2\,\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. φ est-elle injective ? surjective ? quelle est son image ?

(b) Soit E un ensemble non vide, $A \subseteq E$ et $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cup A \in \mathcal{P}(E)$. ϕ est-elle injective ? surjective ? Quelle est son image ?

Exercice 7

Soit E un ensemble non vide et $A, B \subseteq E$.
Soit $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto (X \cap A, X \cap B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

(a) Mq f injective $\Leftrightarrow$ $A \cup B = E$.
(b) Mq f surjective $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$
(c) Trouver une CNS pour que f soit bijective et sous cette condition, exhiber f^{-1}

Exercice 8

Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que f est bijective ssi $\forall A \subseteq E, f(A^c) = f(A)^c$

Exercice 9

Montrer que $f : (n, p) \in \mathbb{N}^2 \to 2^n(2p + 1) \in \mathbb{N}^*$ est bijective.

Exercice 10

Soit E un ensemble. Soit $f : E \mapsto E$. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi elle est surjective.

2 Raisonnement par réccurence et relations binaires

2.1 Questions de cours

1) Montrer que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence d'un ensemble E forment une partition de E
2) Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective et $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective
3) Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2.2 Exercices

2.2.1 Réccurences

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1 \ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ u_n = 2^{n-1}$

Exercice 3

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{n+1}u_{n-1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ 1 \leqslant u_n \leqslant n^2$

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$ $\exists (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ (avec les x_i 2 à 2 distincts) tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1$

2.2.2 Relations binaires

Exercice 1

On considère l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la relation définit sur cet espace par $u \sim v \Leftrightarrow u_n - v_n \longrightarrow 0$ est une relation d'équivalence. Trouver la classe d'équivalence de la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = 3$

Exercice 2

Montrer que la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in 2\,\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. Déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 3

Montrer que si $f : E \to F$ est une fonction, $\{f^{-1}(\{y\}), \ y \in f(E)\}$ forme une partition de E.

3 Fonctions usuelles et notion de groupe

Questions de cours

(1) Soit f un morphisme de groupe de G vers G'. Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'. Montrer que si H' est un sous-groupe de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. Donner les relations coefficients/racines.

(2) Montrer que le noyau d'un morphisme $f : G \to G'$ est un sous-groupe de G. Montrer que f est injectif ssi $\ker f = \{e\}$. Formulaire : $\cos(p) + \cos(q)$ et $\arctan'$

(3) Si $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ sont des morphismes, montrer que $g \circ f$ en est un. Montrer que si f est un morphisme bijectif, f^{-1} est aussi un morphisme. Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Exercice 1

Trouver une relation polynomiale entre les fonctions $x : t \mapsto \cos(2t)$ et $y : t \mapsto \cos(3t)$

Exercice 2

Montrer que ln n'est pas le quotient de deux polynômes.

Exercice 3

Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

Exercice 4

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 5

Montrer que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$

Exercice 6

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 7

Soit $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $x_i = 1$.

Exercice 8

Soit G un groupe fini (i.e un groupe dont le cardinal est fini). Soit $f : G \to \mathbb{C}$ un morphisme de groupe. Montrer que $f(G) \subseteq \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ \ |z| = 1\}$

Exercice 9

Montrer qu'une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes.

(1) $\arcsin x = \arcsin 4/5 + \arcsin 5/13$

(2) $2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$

(3) $\arccos x = \arcsin 2x$

(4) $\arccos (1-x)/(1+x) + \arccos 2\sqrt{x}/(1+x) = \pi$

(5) $\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = 7\pi/12$

4 Corps des nombres complexes

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n = (z-1)^{2n}$

Exercice 2

Donner la forme exponentielle de $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}$ et de $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Exercice 3

On considère l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$ pour un entier fixé $n \geqslant 2$.

(1) Montrer que les solutions sont imaginaires pures.

(2) Montrer que les solutions sont deux à deux opposées.

(3) Résoudre l'équation.

Exercice 4

Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right) = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercice 5

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$

Exercice 6

Posons $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :
(1) $|Z| = 1$

(2) $|Z| = 2$

(3) $Z \in \mathbb{R}$

(4) $Z \in i\,\mathbb{R}$

5 Équations différentielles et calcul d'intégrales

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soient a, b deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)dt \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$

Exercice 2

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

Exercice 22

6 Corps des nombres réels

À écrire...

7 Suites numériques

À écrire... Lemme sous-additif u_n/n, $u_{n+1} = f(u_n)$

8 Analyse : continuité, dérivation et fonctions convexes

exos de convexité

9 Intégration

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

1. Etablir l'existence d'une subdivision $\sigma = (a_{n,i})_i$ de $[0,1]$ telle que $\forall i$ $\displaystyle\int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f$
2. Étudier le comportement de $\dfrac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1}$

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f^n$ prend un nombre fini de valeurs. Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit $a > 0$ et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'^2$

(2) Étudier les cas d'égalité.

Exercice 4

Trouver un équivalent quand $n \Leftrightarrow +\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}$

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 6

Montrer le lemme de Gronwall.

Exercice 7

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 f''^2\right)$

À rajouter : Exercices 30, 31, 32, 34

10 Développements limités

11 Dénombrements et Probabilités sur un univers fini

exercice serrage de mains, nombre de catalans sans séries entières

12 Arithmétique dans un anneau intègre

13 Polynômes

14 Algèbre linéaire

15 Matrices

16 Groupe symétrique et déterminant

exo cassini

17 Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens

18 Séries numériques

critères de D'alembert, cauchy, calcul de sommes

retrouver le maths C pour me donner des idées.

19 Sources

- exo7
- bibmaths
- Calculus
- The Cauchy-Schwartz masterclass
- cassini