

Exercices de colles

Simon Querie

1 Logique, rédaction et applications

1.1 Questions de cours

- 1) Rappeler les relations coefficients/racines d'un polynôme de degré 2.
- 2) Soit une fonction $f : E \rightarrow F$. Montrer que pour tout $A, B \subseteq E$ on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et pour tout $C, D \subseteq F$ $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- 3) Soient deux fonctions $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que :
 - (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
 - (b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

1.2 Exercices

Exercice 1

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ et $A = [-1, 4]$. Déterminer $f(A), f^{-1}(A)$.

Déterminer $\sin([0, 2\pi]), \sin([0, \pi/2]), \sin^{-1}([3, 4]), \sin^{-1}([-2, -1])$

Exercice 2

- (a) Trouver un ensemble E , une partie $F \subsetneq E$ et une fonction $f : F \rightarrow E$ bijective.
- (b) Trouver une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que tout entier n possède une infinité d'antécédants par f .

Exercice 3

Soient $A, B, C \subseteq E$. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$

Exercice 4

Montrer que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ avec égalité ssi $A \subseteq C$.

Exercice 5

Soit une fonction $f : E \rightarrow F$. Montrer que

- (a) $\forall A \subseteq F \quad f(f^{-1}(A)) \subseteq A$
- (b) $\forall B \subseteq E \quad B \subseteq f^{-1}(f(B))$

Exercice 6

- (a) Soit $\varphi : X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto X \cap 2\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. φ est-elle injective ? surjective ? quelle est son image ?
- (b) Soit E un ensemble non vide, $A \subseteq E$ et $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cup A \in \mathcal{P}(E)$. ϕ est-elle injective ? surjective ? Quelle est son image ?

Exercice 7

Soit E un ensemble non vide et $A, B \subseteq E$.

Soit $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto (X \cap A, X \cap B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

- (a) Mq f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.
- (b) Mq f surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- (c) Trouver une CNS pour que f soit bijective et sous cette condition, exhiber f^{-1}

Exercice 8

Soit une fonction $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective ssi $\forall A \subseteq E, f(A^c) = f(A)^c$

Exercice 9

Montrer que $f : (n, p) \in \mathbb{N}^2 \rightarrow 2^n(2p+1) \in \mathbb{N}^*$ est bijective.

Exercice 10

Soit E un ensemble. Soit $f : E \mapsto E$. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi elle est surjective.

2 Raisonnement par récurrence et relations binaires

2.1 Questions de cours

- 1) Montrer que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence d'un ensemble E forment une partition de E
- 2) Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective et $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
- 3) Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

2.2 Exercices

2.2.1 Réurrences

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1 \ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = 2^{n-1}$

Exercice 3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 1 \leq u_n \leq n^2$

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier $n \geq 3 \ \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ (avec les x_i 2 à 2 distincts) tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = 1$

2.2.2 Relations binaires

Exercice 1

On considère l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la relation définie sur cet espace par $u \sim v \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$ est une relation d'équivalence. Trouver la classe d'équivalence de la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = 3$

Exercice 2

Montrer que la relation sur \mathbb{Z} définie par $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in 2\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. Déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 3

Montrer que si $f : E \rightarrow F$ est une fonction, $\{f^{-1}(\{y\}), y \in f(E)\}$ forme une partition de E .

3 Fonctions usuelles et notion de groupe

Exercice 1

Trouver une relation polynomiale entre les fonctions $x : t \mapsto \cos(2t)$ et $y : t \mapsto \cos(3t)$

Exercice 2

Montrer que \ln n'est pas le quotient de deux polynômes.

Exercice 3

Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est constante sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^*

Exercice 4

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 5

Montrer que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$

Exercice 6

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}

Exercice 7

Soit x_1, \dots, x_n dans \mathbb{R} tel que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $x_i = 1$.

Exercice 8

Soit G un groupe fini (i.e un groupe dont le cardinal est fini). Soit $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de groupe. Montrer que $f(G) \subseteq \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Exercice 9

Montrer qu'une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.

Exercice 10

(1) $\arcsin x = \arcsin 4/5 + \arcsin 5/13$

(2) $2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$

(3) $\arccos x = \arcsin 2x$

(4) $\arccos(1-x)/(1+x) + \arccos 2\sqrt{x}/(1+x) = \pi$

(5) $\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = 7\pi/12$

4 Corps des nombres complexes

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z^2 + 1)^n = (z - 1)^{2n}$

Exercice 2

Donner la forme exponentielle de $\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta}$ et de $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

Exercice 3

On considère l'équation $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ pour un entier fixé $n \geq 2$.

- (1) Montrer que les solutions sont imaginaires pures.
- (2) Montrer que les solutions sont deux à deux opposées.
- (3) Résoudre l'équation.

5 Semaines 9 et 10 : Équations différentielles et calcul d'intégrales

Exercice 1

Soient a, b deux réels. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

Exercice 22

6 Intégration

Exercice 1

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

1. Etablir l'existence d'une subdivision $\sigma = (a_{n,i})_i$ de $[0, 1]$ telle que $\forall i \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^1 f$
2. Étudier le comportement de $\frac{a_{n,0} + \dots + a_{n,n}}{n+1}$

À rajouter : Exercices 30, 31, 32, 34