Exercices de colles

Simon Queric

2023

Il s'agit d'un polycopié d'exercices de mathématiques de première année de licence ou de prépa. Ce sont les exercices que je donne en colle chaque semaine à la MPSI1 du Lycée Charlemagne à Paris pendant l'année scolaire 2022/2023.

Contents

1 Logique, rédaction et applications

Questions de cours

1. Rappeler les relations coefficients/racines d'un polynôme de degré 2.
2. Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que pour tout $A, B \subseteq E$ on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et pour tout C, D $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
3. Soient deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que :
   (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
   (b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Exercices

Exercice 1

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ et $A = [-1, 4]$. Déterminer $f(A), f^{-1}(A)$. Déterminer $\sin([0, 2\pi]), \sin([0, \pi/2]), \sin^{-1}([$

Exercice 2

1. Trouver un ensemble E, une partie $F \subsetneq E$ et une fonction $f : F \to E$ bijective.
2. Trouver une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que tout entier n possède une infinité d'antécédants par f.

Exercice 3

Soient $A, B, C \subseteq E$. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$

Exercice 4

Montrer que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ avec égalité ssi $A \subseteq C$.

Exercice 5

Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que :

1. $\forall A \subseteq F \ f(f^{-1}(A)) \subseteq A$
2. $\forall B \subseteq E \ B \subseteq f^{-1}(f(B))$

Exercice 6

1. Soit $\varphi : X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto X \cap 2\,\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. φ est-elle injective ? surjective ? quelle est son image ?
2. Soit E un ensemble non vide, $A \subseteq E$ et $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto X \cup A \in \mathcal{P}(E)$. ϕ est-elle injective ? surjective ? Quelle est son image ?

Exercice 7

Soit E un ensemble non vide et $A, B \subseteq E$ et $\phi : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto (X \cap A, X \cap B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

1. Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ $A \cup B = E$.
2. Montrer que f surjective $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$
3. Trouver une CNS pour que f soit bijective et sous cette condition, exhiber f^{-1}

Exercice 8

Soit une fonction $f : E \to F$. Montrer que f est bijective ssi $\forall A \subseteq E, f(A^c) = f(A)^c$

Exercice 9

Montrer que $f : (n, p) \in \mathbb{N}^2 \to 2^n(2p + 1) \in \mathbb{N}^*$ est bijective.

Exercice 10

Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi elle est surjective.

Exercice 11

Soit E un ensemble non vide. Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ non décroissante. Montrer que f admet un point fixe.

2 Raisonnement par réccurence et relations binaires

2.1 Questions de cours

1. Montrer que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence d'un ensemble E forment une partition de E
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective et $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective
3. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2.2 Exercices

2.2.1 Réccurences

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ u_n = 2^{n-1}$

Exercice 3

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{n+1}u_{n-1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ 1 \leqslant u_n \leqslant n^2$

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$ $\exists(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ (avec les x_i 2 à 2 distincts) tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1$

2.2.2 Relations binaires

Exercice 1

On considère l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la relation définie sur cet espace par $u \sim v \Leftrightarrow u_n - v_n \longrightarrow 0$ est une relation d'équivalence. Trouver la classe d'équivalence de la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = 3$

Exercice 2

Montrer que la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in 2\,\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. Déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 3

Montrer que si $f : E \to F$ est une fonction, $\{f^{-1}(\{y\}),\ y \in f(E)\}$ forme une partition de E.

3 Fonctions usuelles et notion de groupe

Questions de cours

1. Soit f un morphisme de groupe de G vers G'. Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'. Montrer que si H' est un sous-groupe de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. Donner les relations coefficients/racines.
2. Montrer que le noyau d'un morphisme $f : G \to G'$ est un sous-groupe de G. Montrer que f est injectif ssi $\ker f = \{e\}$. Formulaire : $\cos(p) + \cos(q)$ et $\arctan'$
3. Si $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ sont des morphismes, montrer que $g \circ f$ en est un. Montrer que si f est un morphisme bijectif, f^{-1} est aussi un morphisme. Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Exercice 1

Trouver une relation polynomiale entre les fonctions $x : t \mapsto \cos(2t)$ et $y : t \mapsto \cos(3t)$

Exercice 2

Montrer que ln n'est pas le quotient de deux polynômes.

Exercice 3

Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

Exercice 4

Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 5

Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$. Quelle est la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \arctan \frac{1}{p^2+p+1}$?

Exercice 6

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 7

Soit $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $x_i = 1$.

Exercice 8

Soit G un groupe fini (i.e un groupe dont le cardinal est fini). Soit $f : (G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupe. Montrer que $f(G) \subseteq \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ \ |z| = 1\}$

Exercice 9

Montrer qu'une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes.

1. $\arcsin x = \arcsin 4/5 + \arcsin 5/13$
2. $2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$
3. $\arccos x = \arcsin 2x$
4. $\arccos (1-x)/(1+x) + \arccos 2\sqrt{x}/(1+x) = \pi$
5. $\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = 7\pi/12$

4 Corps des nombres complexes

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n = (z-1)^{2n}$

Exercice 2

Donner la forme exponentielle de $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}$ et de $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Exercice 3

On considère l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$ pour un entier fixé $n \geqslant 2$.

1. Montrer que les solutions sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions sont deux à deux opposées.
3. Résoudre l'équation.

Exercice 4

Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right) = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercice 5

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $(1+i\sqrt{3})^n$ est un réel positif.

Exercice 6

Posons $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

1. $|Z| = 1$
2. $|Z| = 2$
3. $Z \in \mathbb{R}$
4. $Z \in i\,\mathbb{R}$

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{U}$. On note $z_1, \cdots, z_n$ les racines n-ième de a. Montrer que les points d'affixes $(1+z_1)^n, \cdots (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 8

Trouver tous les nombres complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ en considérant le polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

Exercice 10

Soit $(z_i)_{1\leq i\leq n}, (w_i)_{1\leq i\leq n} \in \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}^n$. Montrer que $\left|\prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n w_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - w_i|$.

5 Équations différentielles et calcul d'intégrales

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soient a, b deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que $\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$

Exercice 2

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$. (**solution** : $p!q!/(p+q+1)!$)

Exercice 3 (Lemme de Gronwall)

Soit $g \geqslant 0$ et f deux fonctions continues et $K \in \mathbb{R}_+$ telles que $\forall t \geqslant t_0 \; f(t) \leqslant K + \int_{t_0}^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$.
Montrer que $\forall t \geqslant t_0 \; f(t) \leqslant K \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s\right)$.
En déduire une majoration d'une fonction y vérifiant $|y'| \leqslant \alpha + \beta|y|$.
(**Indication :** Poser $F : t \mapsto K + \int_{t_0}^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, multiplier par g dans les inégalités. On tombe sur $y' - a'y \leqslant 0$ on multiplie donc par $e^{-\int a}$)

Exercice 4

On considère le problème de Cauchy suivant : $(1-x)y' - xy = 0 \; \forall x \in]-1,1[$ et $y(0) = 1$.

1. Résoudre le problème. On note f son unique solution.
2. Jusifier que $f \; \in C^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})$.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$ expliciter $(1-x)f(x)$ puis exprimer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ (3) En utilisant la formule de Leibniz : $(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y + 4y = x$ (solution : $(\alpha x + \beta)e^{2x} + (x+1)/4$)
2. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (solution : $\alpha\sin(\sqrt{3}x) + \beta\cos(\sqrt{3}x) + e^x(x/7 - 4/49)$)
3. $2y'' - 3y' + y = e^x$ (solution : $\alpha e^{x/2} + \beta e^x + xe^x$)
4. $y'' + y = x^2$ (solution : $\alpha\cos x + \beta\sin x + x^2 - 2$)
5. $y'' - 2y' - 3y = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 6

Soit a, b deux fonctions continues respectivement impaire et paire. Montrer que (E) $y' + ay = b$ possède une unique solution impaire.

6 Corps des nombres réels

Question de cours

1. Montrer que f est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$.
2. Caractérisation de la borne supérieure.
3. Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les parties convexes de $\overline{\mathbb{R}}$.
4. Soit f un morphisme bijectif. Montrer que f^{-1} est aussi un morphisme.
5. L'ensemble des unités d'un anneau forme un groupe.
6. x n'est pas régulier à gauche ssi x n'est pas un diviseur de zéro à gauche.

Donner les exos 1 et 3 sur les groupes.

Exercice 1

On pose $A = \{1/n + (-1)^n \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que si f est continue et que 1 et $\sqrt{2}$ sont deux périodes de f alors f est constante.

Exercice 3

Montrer que $\{x^3 \mid \forall x \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On pose $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\ \}$. Montrer que E admet une borne supérieure b et que $f(b) = b$. Si f est décroissante, admet-elle un point fixe ?

Exercice 5

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les bornes supérieures et inférieures (dans le cas où celle-ci existe) des ensembles suivant :

1. $\{\ a + bn, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{\ a + b/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $\{\ a + (-1)^n b/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $\{n/(mn + 1), (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$
5. $\{n/(mn + 1), (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$

Exercice 6

Soient deux réels $a, b > 1$. On pose $E = \{\lfloor an \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\ \}$ et $F = \{\lfloor bn \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\ \}$. Montrer l'équivalence entre :

1. E et F forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
2. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ et a et b sont irrationnels.

Exercice 7

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geqslant 2^n$

Exercice 8

Soit $F : A \times B \to \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\sup\limits_{x \in A}\ \inf\limits_{y \in B} F(x, y) \leq \inf\limits_{y \in B}\ \sup\limits_{x \in A} F(x, y)$
On dit que $(x^*, y^*) \in A \times B$ est un point selle si $\forall (x, y) \in A \times B\ F(x, y^*) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y)$.
Montrer que s'il existe un point-selle alors il y a égalité dans l'inégalité montrée précédemment.

7 Suites numériques

Question de cours

1. Montrer le Lemme de Cesaro.
2. Montrer le Théorème des suites adjacentes.
3. Montrer le Théorème des gendarmes.

Exercice 1 (Suites de Cauchy)

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Montrer qu'elle est bornée.
2. On suppose que u admet une valeur d'adhérence. Montrer que u converge.

Exercice 2 (Lemme sous-additif)

Soit (u_n) une suite telle que $\forall n, m\ u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$
Montrer que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $\inf \left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$. (**indication :** écrire la définition de la borne supérieure et poser une division euclidienne)

Exercice 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < a < b$. On pose $x_0 = a$ et $y_0 = b$. $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, y_{n+1} = 2x_n y_n/(x_n + y_n)$. Déterminer les limites des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.

Exercice 4

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x > 0\ f(f(x)) = 6x - f(x)$. (**indication** considérer $u_n = f^n(x)$) Écrire la solution.

Exercice 5

Déterminer le nombre a_n de façons de pavés avec des dominos un damier de dimension $2 \times n$.

Exercice 6 (Échauffement)

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes suivantes :
1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, u_0 = 3, u_1 = 5$ 2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, u_0 = 1, u_1 = 0$ 3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, u_0 = 1, u_1 = 2$

Exercice 7

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall m \geqslant n\ a_{n+m} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ et telle que $a_1 = 1$. Que vaut a_{2023} ?

Exercice 8

Soit $K \in \mathbb{Z}$. On définit la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0, a_1 = K$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = K^2 a_{n+1} - a_n$. Prouver que pour chaque entier n, $1 + a_n a_{n+1}$ divise $a_n^2 + a_{n+1}^2$.

Exercice 9

Soit $a \in]0,1[$ un réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $0 < u_0 < u_1$ et $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 10

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; u_n \leqslant \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$.
(a) Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = u_{n+1} - u_n$ est croissante.
(b) Montrer que si $(u_n)_n$ est bornée alors $v_n \to 0$. (**indication :** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, noter ℓ sa limite et supposer par l'absurde que $\ell \neq 0$)
Remarque : la propriété de cette suite fait penser à la propriété de convexité d'une fonction réelle. On peut donc faire un dessin de u_n pour se donner une intuition de ce qu'il se passe. (v_n) correspond à la dérivée discrète de (u_n).

Exercice 11 (Limites supérieure et inférieure)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. On pose $v_n = \inf\{u_k \mid k \geqslant n\}$ et $w_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) et (w_n) convergent et ont même limite et que dans ce cas $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 12

Montrer qu'il n'existe pas de bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tels que $\left(\dfrac{1}{\sigma(n)}\right)_{n\geq 1}$ est strictement croissante

8 Analyse : continuité, dérivation et fonctions convexes

Questions de cours

1. Démontrer la caractérisation séquentielle des limites et de la continuité.
2. Démontrer le théorème de Heine.
3. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
4. Montrer le théorème de Rolle.
5. Montrer l'égalité de Taylor Lagrange.
6. Montrer le théorème de la limite de la dérivée.

Exercices

Poser des exos de convexité, des inégalités etc...

Exercice 1

Montrer qu'une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.
Trouver un exemple de fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}_+$ non constante.

Exercice 2

Soit n un entier. On pose $f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si} \\ |x| \leqslant 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Déterminer la classe de f.

Exercice 3

Soit P une fonction polynomiale de degré n. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que f est nulle.
indication : f est bornée et croissante. Si $f(x) \geq \varepsilon$ alors $\forall y \geq x\ f'(y) \geq 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$ donc f diverge.

Exercice 5

Soit P un polynôme impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ |f^{(n)}| \leq |P|$. Montrer que f est nulle.

Exercice 6

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f et f'' sont bornées par M_0 et M_2 respectivement alors f' est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 7

Soient f, g dérivables et convexes sur $[0,1]$ telles que $\max(f,g)$ soit positive sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $\alpha f + (1-\alpha) g$ est positive sur $[0,1]$.

Exercice 8

1. Trouver les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(2x) = -f(x)$.
2. Trouver les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(2x) = 2f(x)$.
3. Trouver les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(2x) = f(x)$.

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer la fonction $M : x \mapsto \sup\{f(t) : t \in [0,x]\}$ est une fonction croissante et continue.

Exercice 11

Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution

Prendre un point fixe s de f et poser $u_0 = s, u_{n+1} = g(u_n)$

Exercice 12

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(2x) - f(x) = x$.
Indication
Exprimer $f(x) - f(x/2^n)$

Exercice 13

Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 14

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in [0,1], f'(x) \geq f(x)^3$. Montrer que $f(0) \leq 1/\sqrt{2}$.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $t \mapsto f(t)/t$ tend vers une limite finie ℓ ou vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Montrer que si la limite est finie $\ell \in \mathbb{R}$ alors $t \mapsto (f(t) - \ell t)$ tend vers une limite finie ou vers $-\infty$.

Exercice 16

Soit $(x_j)_{1\leq j\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$ et étudier le cas d'égalité.

9 Intégration

Questions de cours

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale.
2. Démontrer l'égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégral.
3. Démontrer le théorème des sommes de Riemann.

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

1. Etablir l'existence d'une subdivision $\sigma = (a_{n,i})_i$ de $[0,1]$ telle que $\forall i \ \displaystyle\int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f$

2. Étudier le comportement de $\dfrac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1}$ (indication : utiliser le théorème des sommes de Riemann)

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f^n$ prend un nombre fini de valeurs. Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit $a > 0$ et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^a |ff'| \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'^2$
2. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 4

Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}$

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 6

Montrer le lemme de Gronwall.

Exercice 7

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 f''^2\right)$

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f' - f| \geq \frac{1}{e}$.

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 11

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} \mathrm{d}x$$

.

1. Montrer que $I_n \longrightarrow 0$.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Trouver un équivalent de I_n.

10 Développements limités

Exercice 1 (Oral des Mines 2021)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. $u_0 = x \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $\theta_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $u_{n+1} = 1/\sin\theta_n$. Montrer que $\dfrac{1}{\tan\theta_{n+1}} = \dfrac{1}{\tan\theta_n} + \dfrac{1}{\sin\theta_n}$
2. Déterminer θ_n puis donner un équivalent de u_n.

indication : Pour la (1) : utiliser la formule de récurrence en calculant $\tan(\theta_n)$ en fonction des u_k. Pour la (2) : transformer le tan en sin / cos puis utiliser une formule de trigonométrie.

11 Dénombrements et Probabilités sur un univers fini

11.1 Dénombrement

exercice serrage de mains, nombre de catalans sans séries entières, pavage d'un échiquier privé des cases gauche/haut et droit en bas, avec des dominos

Exercice 1 (Anagrammes)

1. Compter le nombre d'anagrammes du mot PERMUTATION telles que les voyelles sont dans l'ordre alphabétique.
2. Compter le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier. n personnes se serrent la main (certaines personnes peuvent ne pas se serrer la main). Montrer que deux personnes du groupe ont serré le même nombre de main.

Exercice 3 (nombre d'involutions)

Déterminer une relation de récurrence pour le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 4

Montrer la formule de Vandermonde.
nombres de dérangements, nombres de Stirling, nombres de Catalans

Exercice 5 (nombres de Stirling)

Compter le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. En déduire le nombre de Stirling $\{nk\}$ (le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ en k éléments).
Solution
Une première méthode est d'utiliser l'union suivante : $S_{n,k} = \bigcup_{p=1}^{n-k+1} \{f \in S_{n,k} | \# f^{-1}\{k\} = p\ \}$
Une deuxième méthode est de compter le nombre de non-surjections : on choisit un élément $p \geqslant 1$ éléments parmi k qui ne vont pas avoir d'antécédent. Il nous reste à choisir une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k-p]\!]$.

Exercice 6

Combien y a-t-il de parties de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs ?

11.2 Probabilités

12 Structures algébriques

Exercice 1

Soit G un groupe. Soit H et K deux sous-groupes de G tels que $H \cup K$ est un groupe. Montrer que $H \subseteq K$ ou que $K \subseteq H$.

Exercice 2

Soit G un groupe non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments x, y dans G commutent est inférieur à 5/8. ($\#\{(x,y) \in G^2 \mid xy = yx\})/\#G^2 \leqslant 5/8$).

Exercice 3

Soit G un groupe tel que $\forall x \in G\ x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 4

On note $\mathbb{H} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe non abélien de $GL_2(\mathbb{C})$.

Exercice 5

Soit G un groupe fini dont l'ensemble des automorphismes est réduit à l'identité. Que peut-on dire de G ?

Indication

Un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 a un cardinal égal à une puissance de 2.

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'ensemble des permutations de S_n laissant fixe n forme un sous-groupe de S_n. À quoi ce sous-groupe est-il isomorphe ?

Exercice 7

Montrer que, dans un groupe abélien, les éléments d'ordre fini forment un sous-groupe.

Exercice 8

Soit $(G, .)$ un groupe.

1. Montrer que si un élément g de G est d'ordre fini alors g^{-1} est de même ordre.
2. Montrer que si a et b sont deux éléments de G d'ordres finis alors aba^{-1} et b ont même ordre. En déduire que les éléments ab et ba ont même ordre.
3. Montrer que si un élément a de G est d'ordre fini alors a^k est d'ordre $|a|/\text{pgcd}(|a|, k)$
4. Montrer que si a et b sont deux éléments de G d'ordres finis premiers entre eux qui commutent alors ab est d'ordre $|a||b|$.

13 Arithmétique dans un anneau intègre

Questions de cours

1. Démontrer l'identité de Bézout dans un anneau principal.
2. Énoncer l'algorithme d'Euclide. Démontrer sa correction et sa terminaison.
3. Démontrer que si K est un corps alors $K[X]$ est un anneau principal.

Exercice 1

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2 \;\; f(x)^{f(y)} = y^x$? (Indication : choisir un bon couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$)

Exercice 10

Montrer que si p et $p^2 + 8$ sont premiers alors $p^3 + 8p + 2$ l'est également. (**indication :** Tester pour de petits nombres premiers p)

Exercice 11

Montrer que si l'on divise un nombre premier par 30 alors le reste de la division est soit 1 soit un nombre premier.

Exercice 100

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que 24 divise $1 + nm$. Montrer que 24 divise $n + m$.
Solution
Montrons que $n+m$ est divisible par 24. on a $24 = 3{\cdot}8$ et 3 et 8 sont premiers entre eux. Ils suffit donc de montrer que 3 divise $n + m$ et que 8 divise $n + m$. Comme $nm = -1 \mod 3$ on a que $n, m \;\neq 0 \mod 3$. De plus, si $x \neq 0 \mod 3$ alors $x^2 = 1 \mod 3$. Ainsi $(n+m)^2 = n^2+m^2+2nm = 1+1-2 \mod 3 = 0 \mod 3$. Donc 3 divise $(n + m)^2$ et donc 3 divise $n + m$. En écrivant sur une feuille la table de multiplication de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ on s'aperçoit que si $nm = 7 \mod 8$ alors $\{\overline{n}, \overline{m}\} = \{\,3, 5\}$ et donc $n + m = 0 \mod 8$.
On a donc que 3 et 8 divisent $n + m$ donc 24 divise $n + m$.

Exercice 101 (Équation de Pell)

On considère l'équation diophantienne $x^2 - Ky^2 = 1$ où K est un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que s'il existe une solution $(x_0, y_0) \in (\mathbb{N}^*)^2$ alors l'équation admet une infinité de solutions entières.
Question intermédiaire : montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{K}] = \{a + \sqrt{K}b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\ \}$ est un anneau.

Exercice 110 (Équation diophantienne de degré 2)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^4 - y^2 = 17$.

Exercice 111 (Critère de divisibilité)

Montrer les critères de divisibilité par 7 et 17 :
1. 17 divise $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \iff$ 17 divise $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} - 5a_0$
2. 7 divise $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \iff$ 7 divise $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} + 5a_0$

Exercice 1000

Trouver toutes les paires d'entiers naturels (x, y) tels que $x \leqslant y$ et $\text{pgcd}(x, y) = 5!$ et $\text{ppcm}(x, y) = 50!$.

Exercice 1001

Quel est le plus grand diviseur commun aux nombres $p^8 - 1$ avec p premier strictement supérieur à 5 ?

Exercice 1010

Combien existe-t-il de nombres naturels multiples de 15 possédant exactement 15 diviseurs positifs ?

14 Polynômes

Questions de cours

1. Comparaison de divisibilité.
2. Démontrer la formule de Taylor.
3. Démontrer que si K est un corps alors $K[X]$ est un anneau principal.

Exercice 1

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X-16)P(2X) = 16(X-1)P(X)$

Exercice 2

Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation $(x+1995)(x+1997)(x+1999)(x+2001)+16 = 0$

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que $P(19) = 3, P'(19) = 0, P''(19) = 8, P^{(3)}(19) = 18$. Que vaut $P(16)$? (indication : utiliser la formule de Taylor)

Exercice 4

Soit $a < b$ deux réels. On définit la longueur des intervalles $[a,b],]a,b[,]a,b], [a,b[$ par $\ell([a,b]) = b-a$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\displaystyle\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ est une union disjointe d'intervalles dont la somme des longueurs vaut 1988.

Solution

écrire la solution...

Exercice 5

Montrer qu'un corps fini n'est jamais algébriquement clos.

Solution

Soit P admettant tous les éléments de K comme racines. Alors $P+1$ n'a pas de racine.

Exercice 6

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$.
4. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Exercice 7

Trouver tous les polynômes P tel que P' divise P^2.

Exercice 8

Combien y-a-t-il de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $X^n - 1 \mid P^2 - X$?

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P(k) = k/(k+1)$. Combien vaut $P(n+1)$?

Exercice 10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

1. Rappeler pourquoi toutes les dérivées $P^{(i)}$ sont scindées sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x)$
3. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$

Exercice 11

Soit E un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $|P^{-1}(E)| \leqslant n|E|$
2. Calculer le degré de $P \wedge P'$
3. Montrer que $|P^{-1}(E)| \geqslant (|E| - 1)n + 1$

Exercice 12

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $Q(x) \geqslant 0$.

Exercice 13

Alice choisit un polynôme $P \in \mathbb{N}[X]$. Comment Bob peut-il déterminer les coefficients de P en demandant à Alice deux évaluations $P(a), P(b)$ avec $a, b \in \mathbb{N}$?

Exercice 14 (Calcul de $\zeta(2)$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $P_n(\text{cotan}^2 t) = \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}$
2. Trouver les racines de P_n et calculer leur somme.
3. À l'aide de l'encadrement $\text{cotan}^2(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(t)$ pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, calculer $\zeta(2)$.

15 Fractions rationnelles

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, scindé à racines simples non nulles $x_1, \ldots, x_n$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$
2. Combien vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$?

Exercice 2

Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes deux à deux disjoints. On pose $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - z_i)$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)}$.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ donner la dérivée p-ième de $\dfrac{1}{X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Écrire sous forme irréductible la fraction $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$

16 Algèbre linéaire et théorie de la dimension

Questions de cours

1. Montrer la caractérisation de la somme directe.
2. Montrer la formule du rang.
3. Projection : définition et propriétés
4. Symétrie : définition et propriétés
5. Hyperplan : définition et caracterisation, caracterisation dans un espace de dimension finie

Exercice 1

Soit E, F deux K espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V, W deux s.e.v de E. Montrer que :

$$f(V) \subseteq f(W) \iff V + \ker(f) \subseteq W + \ker(f)$$

Exercice 2

Lesquels de ces espaces sont des espaces vectoriels ? (Détailler le corps, les lois de groupe et externe) :

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 5z = 2\}$

(ii) $\left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \displaystyle\int_a^b f = 0\right\}$

(iii) $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on a l'équivalence :

$$\ker f = \mathrm{Im} f \iff f \circ f = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E), f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id}$$

Exercice 4

Soient E un $K-$espace vectoriel, p, q deux projections sur E telles que $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} q$. Montrer que $\forall \lambda \in K$, $\lambda p + (1 - \lambda) q$ est une projection de même image que p et q.

Exercice 5

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $E_0, E_1, \cdots, E_{k+1}$ avec $E_0 = E_k = \{0\}$. Soit pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f_i \in \mathcal{L}(E_i, E_{i+1})$
On suppose que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!], \mathrm{Ker}(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \dim(E_i) = 0$

Exercice 6

1. Soit E, F, G, trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f : E \to F, g : E \to G$.
   (a) Montrer que si $h : F \to G$ alors $\ker(f) \subseteq \ker(h \circ f)$.
   (b) Montrer que si $\ker(f) \subseteq \ker(g)$ alors il existe $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u : E \to E$ une application linéaire nilpotente. Montrer que $u^n = 0$.

Indication

Par l'absurde, supposer que $u^n \neq 0$ et considérer $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$ où $p > n$ est l'indice de nilpotence de u.

Exercice 8

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux.

1. Montrer que si u, v sont des applications linéaires $u(\mathrm{Im}(v)) = \mathrm{Im}(u \circ v)$.
2. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors $u(\ker(v)) \subseteq \ker(v)$.
3. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors $u(\mathrm{Im}(v)) \subseteq \mathrm{Im}(v)$.
4. Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 9

Montrer que la famille des fonctions $x \mapsto \cos(\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est libre.

17 Matrices

Questions de cours

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Quels sont les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = I_n$
3. Montrer que la relation d'équivalence entre matrices est une relation d'équivalence. Montrer la caracterisation de l'équivalence.

Exercice 1

Soit V un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$. On pose l'ensemble : $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G\ g(x) = x\}$. Montrer que $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g) = \dim V^G$.

Exercice 2

Soit A la matrice avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Calculer A^k pour tout entier k.

Exercice 3

Montrer que le produit de n matrices triangulaires supérieures strictes est nul.

Exercice 4 (Matrices de permutations et Théorème de Birkoff-Von Neumann)

On pose $\mathcal{B}_n = \left\{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | P_{i,j} \geqslant 0, \sum_i P_{i,j} = 1, \sum_j P_{i,j} = 1\right\}$ l'ensemble des matrices bistochastiques.
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit C un ensemble convexe. On note $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C, i.e les $x \in C$ tel que $\forall y, z \in C, x = \dfrac{y+z}{2} \Rightarrow x = y = z$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
2. Montrer que $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{B}_n$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un ensemble convexe.
4. Quels sont les points extrémaux d'un carré ? et du disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$?
5. Théorème de Birkoff-Von Neumann : Montrer que $\mathcal{E}(\mathcal{B}_n) = \mathcal{P}_n$.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (i + j - 2)^2$. Quel est le rang de A ?

Exercice 6

1. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui peuvent se mettre sous la forme $BC - CB$ avec $B, C \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$

Indication

Soit ϕ une forme linéaire non nulle. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\phi : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$. Noter r le rang de A et ecrire $A = PBQ$ avec B bien choisie.

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$à coefficients strictement positifs et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Une telle matrice et dite strictement stochastique. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de A^k.
On pose aussi $\alpha_j^{(k)} = \min_i \left\{a_{i,j}^{(k)}\right\}, \beta_j^{(k)} = \max_i \left\{a_{i,j}^{(k)}\right\}$ et $\delta_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} - \beta_j^{(k)}$.
Enfin, soit $\varepsilon = \min_{i,j}\{a_{i,j}\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est strictement stochastique.
2. Montrer $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$ et $\delta_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)\delta_j^{(k)}$.
3. En déduire que $(a_{i,j}^{(k)})$ converge pour tous i, j quand k tend vers $+\infty$.

18 Groupe symétrique et déterminant

Questions de cours

1. Soit φ une forme p-linéaire sur E.
   (a) Montrer que φ est alternée ssi elle est antisymétrique.
   (b) Montrer que $\varphi \in \mathcal{A}_p(E)$ ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \forall (u_1, \ldots, u_p) \in E, \varphi(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(u_1, \ldots, u_n)$
2. Démontrer la formule de la comatrice.
3. Calculer le déterminant de Vandermonde.

Exercice 1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 2

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ tel que $\sigma(k) = 2k - 1$ et $\sigma(n+k) = 2k$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\varepsilon(\sigma)$.

Exercice 3

Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(f(n)) = n + 2023$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Indication

Montrer qu'une permutation d'un ensemble fini de cardinal impair admet un point fixe.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'ensemble des permutations de Sn vérifiant $\sigma(n) = n$ forme un sous-groupe de S_n. À quoi ce sous-groupe est-il isomorphe ?

Exercice 5 (Matrice circulante)

On pose $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$
Trouver une matrice J et un polynôme P tels que $A = P(J)$ et $J^n = I_n$. Trouver une base de vecteurs propres de J de $\mathbb{C}^n$. En déduire que J peut s'écrire $P^{-1}DP$ avec D diagonale. Donner une expression du déterminant de A et le calculer pour $P = \sum_{k=1}^{n} kX^k$

Exercice 6

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
Calculer $\det(A)$.

Indication

Développer par rapport à la deuxième colonne ($\Delta_n = 2 - n$).

Exercice 7

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est triangulaire, alors $\mathrm{Com}(A)$ l'est aussi.

Exercice 8

Calculer le determinant de la matrice $(|i-j|)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Indication

On retire la première colonne à tout le monde, puis la deuxième pour simplifier presque tous les termes sous la diagonale. On n'a alors plus qu'une permutation qui donne un produit non nul, et $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)^{2n-2}$.

Exercice 9

Dans le cas où $a^2 = 4bc$, calculer le déterminant de taille $n \times n$ suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 10

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note P_σ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficient $\delta_{i,\sigma(j)}$. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupe de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

19 Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens

Questions de cours

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Démontrer le théorème de représentation.
3. Montrer que si $(E, (|))$ est de dimension finie et si F est un sev de E alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exercice 1

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$. On pose $f_\lambda : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_2 \in \mathbb{R}_+$
Montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $f_\lambda(x) > \|b\|$.
indication : Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire.

Exercice 2

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \ |f(a) = 0\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et qu'il s'agit d'un espace préhilbertien s'il est munit du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt$

Exercice 3

Soientt $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soient $f_1, \dots, f_n$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \|f_i\| < 1/\sqrt{n}$. Montrer que $e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4

On note $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour f et g dans E on pose :$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg + f'g'$ On pose également $V = \{f \in E|f'' = f\}$ et $W = f \in E|f(0) = f(1) = 0$.

1. Vérifier que $\langle\rangle$ est un produit scalaire pour lequel V et W sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Déterminer la plus petite valeur possible, pour $f \in E$ avec $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$, de $\|f\|^2$.

Indication

1. Intégrer par parties pour qu'ils soient orthogonaux, et résoudre $f'' = f$ avec conditions au bord pour qu'ils soient supplémentaires.
2. Soit p la projection orthogonale sur V : on cherche à minimiser $\|f\|^2$ avec $p(f) = \cdots$ donc il faut prendre f égale à cette dernière fonction.

Exercice 5

On munit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et on pose $H = \{f \in E|f(0) = 0\}$. Déterminer $H^{\perp}$.

Indication

Soit $g \in H^\perp$: on pose $f(x) = x2g(x)$: l'intégrale de fg est nulle, donc $xg(x) = 0$ pour tout x et g est nulle.

20 Séries numériques

Exercice 1 (Calcul de somme)

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$. Trouver un équivalent de a_n.

Exercice 3

Soit $(p_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. La série $\sum p_n \ln 1/p_n$ est-t-elle convergente ? (**indication :** penser aux séries de Bertrand)

Exercice 4

Déterminer les valeurs de a, b et c telles que la série de terme générale $a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$ converge. Si elle converge, calculer sa somme.

Exercice 5 (Lemme de Raab-Duhamel)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et $\alpha > 0$ telle que : $u_{n+1}/u_n = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donner un équivalent de (un).

Exercice 6

Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$.

Exercice 7

Soit $(v_n)_n$ une suite convergeant vers 0 et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c = 0$. Montrer que la série de terme général $u_n = av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n$ converge.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où $a, b \geq 0$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et donner sa somme en fonction de a et b quand elle converge.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \longrightarrow -\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Montrer que $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste.

Sources

[1] Exo7

[2] Bibmaths

[3] Exercices de colles de Thomas Budzinski : https://perso.ens-lyon.fr/thomas.budzinski/colles.pdf

[4] Exercices de mathématiques oraux x-ens algèbre 1, cassini

[5] Mathraining