Optimisation Convexe
Devoir Maison 2
Simon Queric

Exercice 1

1. Le lagrangien du problème s'écrit :

$$L(x, \lambda, \nu) = c^T x - \lambda^T x + \nu^T (Ax - b) = (c - \lambda + A^T \nu)^T x - \nu^T b$$

On obtient donc la fonction duale. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d, \nu \in \mathbb{R}^n$.

$$g(\lambda, \nu) = \begin{cases} -\nu^T b & \text{si } c - \lambda + A^T \nu = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème dual de (P) est donc :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\nu} & -\nu^T b \\ \text{tel que} & A^T \nu = \lambda - c \\ & \lambda \geqslant 0 \end{array}$$

Avec le changement de variable $y = -\nu$ et en se débarassant de la variable λ, il se réécrit :

$$\begin{array}{ll} \max_{y} & b^T y \\ \text{tel que} & A^T y \leqslant c \end{array}$$

On retrouve ainsi le problème (D).

2. Le problème (D) est équivalent à

$$\begin{array}{ll} \min_{y} & -b^T y \\ \text{tel que} & A^T y \leqslant c \end{array}$$

Le lagrangien est donc : $L(y, \lambda) = -b^T y + \lambda^T (A^T y - c)$
D'où

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\lambda^T c & \text{si } A\lambda = b \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$g(\lambda) = -\lambda^T c$ si $A\lambda = b$ Le problème dual est donc :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda} & -\lambda^T c \\ \text{tel que} & A\lambda = b \end{array}$$

qui est équivalent au problème (P).

3. Le lagrangien du problème (Self-Dual) s'écrit

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda, \mu, \nu) &= c^T - b^T y - \lambda^T x + \mu^T (A^T y - c) + \nu^T (Ax - b) \\ &= (c - \lambda + A^T \nu)^T x + (-b + A\mu)^T y - \mu^T c - \nu^T b \end{aligned}$$

On en déduit le problème dual :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\mu,\nu} & -c^T\mu - b^T\nu \\ \text{tel que} & A\mu = b \\ & A^T\nu + c = \lambda \\ & \lambda, \mu \geqslant 0 \end{array}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \max_{\mu,\nu} & -c^T\mu - b^T\nu \\ \text{tel que} & A\mu = b \\ & A^T\nu + c \geqslant 0 \\ & \mu \geqslant 0 \end{array}$$

qui est lui même équivalent, avec les changements de variables $x = \mu, y = -\nu$, au problème :

$$\begin{array}{ll} \max_{x,y} & -c^Tx + b^Ty \\ \text{tel que} & Ax = b \\ & A^Ty \leqslant c \\ & x \geqslant 0 \end{array}$$

Ce problème est bien le (Self-Dual) qui est donc bien auto-dual.

4. Montrons que la solution $[x^*, y^*]$ peut être obtenue en résolvant les problèmes (P) et (D).

   Soient $\tilde{x}, \tilde{y}$ les solutions optimales de (P) et (D) respéctivement. Alors $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ vérifie les contraintes de (Self-Dual) et on a pour $[x, y]$ vérifiant les contrainte de (Self-Dual), $c^T\tilde{x} \leqslant c^Tx$ et $-b^T\tilde{y} \leqslant -b^Ty$ d'où $c^T\tilde{x} - b^T\tilde{y} \leqslant c^Tx - b^Ty$.

   Ainsi $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ est solution optimale de (Self-Dual), et la valeur optimale de (Self-Dual) est $p^* - d^*$ où p^* et d^* sont les valeurs optimales respéctives de (P) et (D).

   On aurait aussi bien pu remarquer que la fonction objectif de (Self-Dual) est séparable et que les contraintes sur x sont indépendantes de celles sur y.

   Maintenant, les problèmes (P) et (D) sont linéaires et duaux. La dualité forte des problèmes linéaires nous donne $d^* = p^*$. La valeur optimale de (Self-Dual) est donc exactement 0.

Exercice 2

On choisit la convention $\infty \times 0 = 0$.

1. Calculons d'abord la conjuguée de la norme ℓ^1 en dimension 1. On a pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\sup_x \{yx - |x|\} = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| \leqslant 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   En dimension n, la conjuguée de $f(x) = \|x\|_1$ est

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \sup_x \left\{ \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n |x_i| \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \sup_{x_i} \{ y_i x_i - |x_i| \} \\
&= +\infty \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(|y_i|>1)} \\
&= +\infty \times \mathbb{1}_{(\|y\|_\infty > 1)} \\
&= \iota_{\mathcal{B}_\infty(0_n,1)}(y)
\end{aligned}
$$

2. Le problème est équivalent à :

$$
\begin{array}{ll}
\min_{x,y} & \|y\|_2^2 + \|x\|_1 \\
\text{tel que} & y = Ax - b
\end{array}
$$

Le lagrangien de ce problème est donc $L(x,y,\nu) = \|y\|_2^2 + \|x\|_1 + \nu^T(Ax - b - y)$

Pour obtenir la fonction duale, on doit minimiser une quadratique en y et $\|x\|_1 + (A^T\nu)^T x$ en x ce qui fait apparaître la fonction conjuguée de la norme ℓ^1 : $g(\nu) = -\frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 - \nu^T b - f^*(-A^T\nu)$

Le problème dual de (RLS) est donc :

$$
\begin{array}{ll}
\max_{\nu} & -\frac{1}{4}\|\nu\|_2^2 - \nu^T b \\
\text{tel que} & \|A^T\nu\|_\infty \leqslant 1
\end{array}
$$

Exercice 3

1. Supposons que l'on ait une solution réalisable (z^*, ω^*) du problème (2). Soit $(\omega, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$. Alors, en tenant compte des contraintes sur z^* :

$$
\frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\omega^*, x_i, y_i) + \frac{1}{2}\|\omega^*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{n\tau}\mathbf{1}^T z^* + \frac{1}{2}\|\omega^*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{n\tau}\mathbf{1}^T z + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2
$$

En prenant alors $z_i = \max(0, 1 - y_i(\omega^T x_i))$, on obtient :

$$
\frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\omega^*, x_i, y_i) + \frac{1}{2}\|\omega^*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\omega, x_i, y_i) + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2
$$

Le point ω^* est donc une solution du problème (1).

2. Le lagrangien du problème s'écrit :

$$
\begin{aligned}
L(\omega, z, \lambda, \pi) &= \frac{1}{n\tau}\mathbf{1}^T z + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(1 - y_i\omega^T x_i - z_i) - \pi^T z \\
&= \left(\frac{1}{n\tau}\mathbf{1} - \lambda - \pi\right)^T z + \frac{1}{2}\|\omega\|_2^2 - \omega^T \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i + \mathbf{1}^T\lambda
\end{aligned}
$$

$$
g(\lambda, \pi) = \begin{cases} \mathbf{1}^T\lambda - \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i\right\|_2^2 & \text{si } \lambda + \pi = \frac{1}{n\tau}\mathbf{1} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}
$$

Cela nous donne le dual suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\pi} & \mathbf{1}^T\lambda - \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i\right\|_2^2 \\ \text{tel que} & \lambda, \pi \geqslant 0 \\ & \lambda + \pi = \frac{1}{n\tau}\mathbf{1} \end{array}$$

qui est équivalent au problème :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda} & \mathbf{1}^T\lambda - \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i\right\|_2^2 \\ \text{tel que} & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{n\tau}\mathbf{1} \end{array}$$

Exercice 4

On doit montrer que la contrainte $\sup_{a\in\mathcal{P}} a^T x \leqslant b$ est équivalente aux contraintes $d^T x \leqslant b, Cz = x, z \geqslant 0$.

Cherchons le dual du problème consistant à maximiser $a^T x$ comme proposé par l'indication. En reformulant le problème sous forme standard, le lagrangien s'écrit :

$$L(a, \lambda) = -a^T x + \lambda^T(C^T a - d)$$

On calcule facilement la fonction duale et on en tire le

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda} & -d^T\lambda \\ \text{tel que} & \lambda \geqslant 0 \\ & C\lambda = x \end{array}$$

Supposons que ce problème admette un point réalisable z. La dualité forte des problèmes linéaires nous donne :

$$-d^T z \leqslant d^* = p^* \leqslant -a^T x$$

Si l'on trouve un z qui satisfait les contraintes du dual et tel que $d^T z \leqslant b$ alors on est assuré que $\sup_{a\in\mathcal{P}} a^T x \leqslant b$. De même, s'il est garantit que $\sup_{a\in\mathcal{P}} a^T x \leqslant b$ alors, pour z^* solution optimale, on a $d^T z^* \leqslant b$.

On a bien équivalence entre les deux problèmes de l'énoncé.

Exercice 5

1. Le lagrangien du problème s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\nu) &= c^T x + \lambda^T(Ax - b) + \sum_{i=1}^n \nu_i x_i(1 - x_i) \\ &= c^T x + \lambda^T(Ax - b) + \nu^T x - \sum_{i=1}^n x_i^2 \nu_i \\ &= (c + \nu + A^T\lambda)^T x - \lambda^T b - x^T \mathrm{diag}(\nu) x \end{aligned}$$

Ainsi, en minimisant par rapport à la variable x :

$$g(\lambda,\nu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \exists i \in [\![1,n]\!], \nu_i > 0 \\ -\infty & \text{si } \exists i \in [\![1,n]\!], \nu_i = 0 \text{ et } c_i + a_i^T\lambda \neq 0 \\ -\lambda^T b + \frac{1}{4}(c + \nu + A^T\lambda)^T \mathrm{diag}(1/\nu)(c + \nu + A^T\lambda) & \text{sinon} \end{cases}$$

En notant a_i les colonnes de A, le problème dual se réécrit donc sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\nu} & -\lambda^T b + \frac{1}{4}\sum_{i=1,\nu_i\neq 0}^n \frac{1}{\nu_i}(a_i^T\lambda + c_i + \nu_i)^2 \\ \text{tel que} & 0 \preceq \lambda \text{ et } \nu \preceq 0, \nu_i = 0 \Rightarrow a_i^T\lambda + c_i = 0 \end{array}$$

En prenant en compte l'indication de l'énoncé, on peut réécrire le problème avec une seule variable duale :

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda} & -\lambda^T b + \sum_{i=1}^n \min\left(0, a_i^T\lambda + c_i\right) \\ \text{tel que} & 0 \preceq \lambda \end{array}$$

2. Le lagrangien du problème (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\phi,\psi) &= c^T x + \lambda^T(Ax - b) - \phi^T x + \psi^T(x - 1) \\ &= (c - \phi + \psi + A^T\lambda)^T x - \lambda^T b - \psi^T 1 \end{aligned}$$

On en déduit la fonction duale :

$$g(\lambda,\phi,\psi) = \begin{cases} -\lambda^T b - \psi^T 1 & \text{si } c - \psi + \phi + A^T\lambda = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\phi,\psi} & -\lambda^T b - \sum_{i=1}^n \phi_i \\ \text{tel que} & a_i^T\lambda + c_i = \psi_i - \phi_i \\ & \lambda, \psi, \phi \geqslant 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} \max_{\lambda,\psi} & -\lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(a_i^T\lambda + c_i - \psi_i\right) \\ \text{tel que} & a_i^T\lambda + c_i - \psi_i \leqslant \min\left(0, a_i^T\lambda + c_i\right) \\ & \lambda \geqslant 0 \end{array}$$

Ce problème est équivalent au problème dual de (2). On obtient donc la même borne inférieure de la valeur optimale du problème LP booléen.