6 Vertical modes

Ausgehend von den Bewegungsgleichungen in hydrostatischer Approximation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho' + w\frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho', \tag{4}$$

werden die nichtlinearen Terme $u \cdot \nabla\rho', u \cdot \nabla u$ und $u \cdot \nabla v$ vernachlässigt, sodass sich die Gleichungen vereinfachen (linearisieren) zu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho' \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

wobei Gleichung (8) die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide darstellt. Die Dichte und der Druck werden geteilt in einen Hintergrund- und einen Störungsterm $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x,t), \quad p = \bar{p}(z) + p'(x,t) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\rho$. Gleichzeitig wird die Brunt-Väisällä-Frequenz $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}$ eingeführt. So ergibt sich eine weitere Gleichung:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\rho_0}{g} w N^2(z) = 0 \tag{9}$$

Nun wird auf die Gleichungen (5,6,7,8 und 9) ein Separationsansatz angewendet, der wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ p'(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \\ \rho'(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x,y,t)\Phi(z) \\ \tilde{v}(x,y,t)\Phi(z) \\ \rho_0\tilde{p}(x,y,t)\Phi(z) \\ \tilde{w}(x,y,t)/N^2(z)\frac{d\Phi(z)}{dz} \\ \rho_0\rho'(x,y,t)\frac{d\Phi(z)}{dz} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Kontinuitätsgleichung (8) ändert sich zu

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)\Phi + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)\Phi + \tilde{w}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{N^2}\frac{d\Phi}{dz}\right) = 0 \tag{11}$$

- Umformung der Gleichung (11):

$$\frac{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}}{\tilde{w}} = -\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{N^2}\frac{d\Phi}{dz}\right)}{\Phi}$$

- Das linke Handglied ist eine Funktion von x, y und t, während das andere von z abhängt. Beide Seiten müssen konstant sein, z.B. $\frac{1}{\tilde{g}H}$, daher:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{N^2}\frac{d\Phi}{dz}\right) = -\frac{\Phi}{\tilde{g}H}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{g}H}$$

- Lösung für $N^2 = \text{const}$ ist $\Phi = B\cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right)$ und $\tilde{g} = \frac{HN^2}{n^2\pi^2|f|}$, $R = \sqrt{\tilde{g}H/|f|} = \frac{HN}{n\pi|f|}$ für $n = 1, 2, \ldots$ (erster, zweiter, dritter usw. barokliner Modus).
- $n = 0$ entspricht dem barotropen Fall mit $R \approx \sqrt{gH/|f|}$ und $\Phi \approx \text{const}$.

Somit ergibt sich folgende Darstellung: