Projekt A

Simon Winther <zlp616@ku.alumni.dk>
<Hold 6>
KU-ID: zlp616

9. maj 2023

1 Opgave 1

1.1 Delopgave a

Vi har følgende ligningssystem:

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = a \\ ax_1 + ax_2 + 4ax_3 = 1 \\ ax_1 + 2x_2 + 2a^2x_3 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Denne ligning kan skrives på totalmatrix form:

$$M = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ a & a & 4a & 1 \\ a & 2 & 2a^2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-ar_1 + r_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ a-a & a-2a & 4a-a^2 & 1-a^2 \\ a & 2 & 2a^2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & -a & -a^2+4a & 1-a^2 \\ a & 2 & 2a^2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-ar_1 + r_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & -a & -a^2+4a & 1-a^2 \\ a-a & 2-2a & 2a^2-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & -a & -a^2+4a & 1-a^2 \\ 0 & 2-2a & a^2 & 1-a^2 \end{array}\right] \xrightarrow{-1/a\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a-4 & -\frac{1}{a}+a \\ 0 & 2-2a & a^2 & 1-a^2 \end{array}\right]$$

Vi kan skrive $-2(1-a)r_2 + r_3 \rightarrow \mathbf{r}_3$ som $(-2+2a)r_2 + r_3 \rightarrow \mathbf{r}_3$.

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a-4 & -\frac{1}{a}+a \\ 0 & 2-2a & a^2 & 1-a^2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2+2a)r_2 + r_3 \rightarrow \mathbf{r}_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a-4 & -\frac{1}{a}+a \\ 0 & 2-2a-2+2a & a^2+2a^2-10a+8 & 1-a^2+\frac{2}{a}-2a+2a^2-2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a-4 & -\frac{1}{a}+a \\ 0 & 0 & 3a^2-10a+8 & \frac{2}{a}-2a+a^2-1 \end{array}\right]$$

Vi har nu foretaget de følgende rækkeoperationer som blev givet i den nævnte rækkefølge på vores totalmatrice for ligningssystemet, og dermed kom vi frem til følgende totalmatrice:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & a & a \\ 0 & 1 & a-4 & -1/a+a \\ 0 & 0 & 3a^2-10a+8 & \frac{2}{a}-2a+a^2-1 \end{array}\right] \tag{2}$$

1.2 Delopgave b

Der oplyses en matrice på reducerede rækkeechelonform:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -(2a^2+4a-5)/(3a-4) \\ 0 & 1 & 0 & 2(a^2-1)/(3a-4) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2-1))/(a(3a-4)) \end{array}\right] \tag{3}$$

for $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{4}{3}, 2\}$. Vi kan se i totalmatricen, at A kan skrives som et ligningssystem,

$$S = \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \ldots \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = \ldots \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = \ldots \end{cases}$$

hvor, at x_1, x_2 og x_3 er udtrykt ved korresponderende b værdier, derfor kan vi indsætte $a = 2$ og se hvad der sker.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -(2\cdot 2^2+4\cdot 2-5)/(3\cdot 2-4) \\ 0 & 1 & 0 & 2(2^2-1)/(3\cdot 2-4) \\ 0 & 0 & 1 & (2^2-1)/(2(3\cdot 2-4)) \end{array}\right] \tag{4}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -11/2 = -5.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6/2 = 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 = 0.75 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 3 \\ 3/4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ja, og hermed kan vi konkludere, at når a=2 findes der en løsning, som vi har udregnet i (5) og løsningssættet kan skrives som en 3-tuple $(-5.5, 3, 3/4)$.

1.3 Delopgave c

Her gør vi samme som oppe i b'eren og indsætter a ind på a's plads og udregner værdierne.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -(2a^2+4a-5)/(3a-4) \\ 0 & 1 & 0 & 2(a^2-1)/(3a-4) \\ 0 & 0 & 1 & (a^2-1))/(a(3a-4)) \end{array}\right]$$

$$a \textbf{ sættes til } 4/3$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -(2\cdot(4/3)^2+4\cdot(4/3)-5)/(3\cdot(4/3)-4) \\ 0 & 1 & 0 & 2((4/3)^2-1)/(3\cdot(4/3)-4) \\ 0 & 0 & 1 & ((4/3)^2-1))/((4/3)(3\cdot(4/3)-4)) \end{array}\right]$$

$$\textbf{Ganger ud}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -(80/9-45/9)/4-4 = -(35/9)/\mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & (32/9-18/9)/4-4 = 14/9/\mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & (16/9-1)/(48/9-16/3) = (16/9-1)/\mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$\textbf{Da der divideres med 0 er de alle sammen udefineret}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & Udefineret \\ 0 & 1 & 0 & Udefineret \\ 0 & 0 & 1 & Udefineret \end{array}\right]$$

Og dermed kan vi konkludere, at ligningsystemet ikke kan løses når $a = 4/3$ da vores løsningssæt er udefineret variabler.

2 Opgave 2

Delopgave a

Først lyder opgaven på, at bestemme de elementære matricer $\mathbf{E_i}$ tilsvarende deres rækkeoperation $\mathbf{ero_i}$. Vi ved fra definition 2.9 i lærebogen, at en matrix er en elementærmatrice, hvis den er et resultat af at udføre ÉN af de tre følgende rækkeoperationer, replacement, interchange og scaling på enhedsmatricen I_n.

$$\mathbf{ero_1} = 2a\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2} \rightarrow \mathbf{r_2} \qquad \mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ero_2} = 3\mathbf{r_3} \rightarrow \mathbf{r_3} \qquad \mathbf{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ero_3} = \mathbf{r_1} \leftrightarrow \mathbf{r_2} \qquad \mathbf{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ero_4} = 5/a\mathbf{r_3} + \mathbf{r_1} \rightarrow \mathbf{r_1} \qquad \mathbf{E_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hermed har vi for hvert $i = 1, 2, 3, 4$ bestemt den tilsvarende elementære matrix $\mathbf{E_i}$.

Vi ved fra teori 2.7 i lærebogen, at lave en rækkeoperation på en matrix er det samme som at gange den tilsvarende elementærmatrix på matricen fra venstre, dvs. at det er selvfølgelig $\mathbf{E_4E_3E_2E_1A}$ da A ganges ind i $\mathbf{E_1}$ først, dernæst $\mathbf{E_2}$, så $\mathbf{E_3}$ og til sidst $\mathbf{E_4}$, derudover er det også $\mathbf{AE_4E_3E_2E_1}$ da $\mathbf{E_1}$ ganges på $\mathbf{E_2}$, og produktet af det, ganges på $\mathbf{E_3}$ ... og til sidst ganges produktet af elementærmatricerne på A.

Delopgave b

Elementærmatricer er invertible, dvs. vi ved der gælder følgende:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   Dette gælder, da hvis vi har byttet om på de to rækker, kan vi naturligvis bare bytte om på dem igen.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$
   Dette gælder også, da hvis vi har ganget en række med en vilkårlig værdi $t \neq 0$, så kan vi selvfølgelig også gå tilbage ved at gange med 1/t.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   Dette gælder også, da hvis vi har lagt s gange række i til række j, så kan vi selvfølgelig også gå tilbage ved at gange -s gange række i til række j.

Dette kan vi nu bruge til at bestemme de elementære matricer E_i^{-1} for hvert i.

$$\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E_3^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E_4^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi bliver fortalt øverst i opgaven, at en ukendt 3×3 matrix A, ved rækkeoperationerne ero_1, ero_2, ero_3 og ero_4 i denne rækkefølge kan omformes til enhedsmatricen. Det betyder, at der gælder, at $E_4E_3E_2E_1A = I$, og derfor omvendt må der også gælde følgende (hvor vi bruger reglen for produktet af inverse matricer $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B^{-1}A^{-1}}$):

$$\begin{aligned}
A = \mathbf{E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\qquad \mathbf{E_3^{-1}E_4^{-1}} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\qquad \mathbf{E_2^{-1}(E_3^{-1}E_4^{-1})} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&\qquad \mathbf{E_1^{-1}(E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1})} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

Vi kan også tjekke om koefficientmatricen A er rigtigt ved at se om elementærmatrice produktet på A giver enhedsmatricen, altså ved nærmere ligninger:

$$\mathbf{E_k \cdots E_1 A = I}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AE_k \cdots E_1 = I}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -\frac{5}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Og da de begge er lig med enhedsmatricen passer pengene.

Delopgave c

Vi lader X være en 2×3 matrix, som har værdierne fra de første 2 rækker i koefficientmatrix A. Derudover er vi givet B som er en 3×2 matrix og vi skal her vise, at X er venstre-invers til B. Vis, at X er venstre-invers til B, det kan vi gøre ved at vise, at $XA = I$ altså: .. nåede ikke længere med tiden desværre..

3 Opgave 3

3.1 Delopgave a

Vi skal bestemme nabomatricen for den orienterede graf fremvist på figuren i opgavebeskrivelsen. Nabomatricen er den $n \times n$ matrix **N** der har elementerne:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textbf{hvis der er kant fra } v_i \textbf{ til } v_j \\ 0 & \textbf{ellers} \end{cases} \tag{6}$$

Med den definition fra lærebogen samt grafen, kan vi nu bestemme nabomatricen for figuren, og den fås til at være.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Der angives en nabomatrice N^3 og vi ved fra lærebogen, at potensen af nabomatricen indeholder information om antallet af veje af en given længde i en graf.

$$N^3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Og da vi skal angive antallet af veje fra knude 4 til knude 5 af længde netop 6, så kræver det også, at vores nabomatrice har potens 6. Det kan vi gøre ved at multiplicere med N^3, altså:

$$N^3N^3 = N^6 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Meeen, dette ville tage utrolig lang tid, hvis vi skulle bruge matrix multiplikation gennem hele matricen, derfor kan vi i stedet bare bruge information givet til at bestemme den specifikke placering vi skal bruge. Med andre ord, er vi altså kun interesseret i hvad der står på række fire, søjle 5, som vi kan regne ud ved brug af matrix multiplikation.

$$a_{4,5} = \mathbf{4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 18} \tag{9}$$

Der er altså angiveligt 18 veje af længde 6 fra knude 4 til knude 5.

Delopgave b

I denne opgave skal vi opskrive linkmatricen A for grafen i opgavebeskrivelsen. Et hint var at gøre brug af google's page ranking, det vil vi naturligvis også gøre. De to første fremgangsmetoder virker ikke, da de ikke tager højde for alle faktorer, så vi vil selvfølgelig gøre brug af den tredje og sidste fremgangsmetode hvor vi gør brug af normalisering. Vi vil altså gerne sætte scoren x_k for side k til summen af scorerne for alle de sider, som henviser til side k, men hvor vi har en samlede score som en side kan give til de andre er 1. Det kan vi altså opnå ved at gange scoren for side k med normaliseringen, altså $\frac{1}{N_j}$. Så får vi altså $\frac{1}{Nj} \cdot x_j = \frac{x_j}{Nj}$. Lad os gøre det i praksis. Først lad os definere N_j som er de udadgående links fra side j, for hver side og det kan vi gøre ud fra nabomatricen i (7).

$$N_1 = \sum_{j=1}^{5} a_{1,j} = 2 \quad N_2 = \sum_{j=1}^{5} a_{2,j} = 2 \quad N_3 = \sum_{j=1}^{5} a_{3,j} = 1 \tag{10}$$

$$N_4 = \sum_{j=1}^{5} a_{4,j} = 4 \; N_5 = \sum_{j=1}^{5} a_{5,j} = 2 \tag{11}$$

Dernæst kan vi opskrive ligningerne, men for at kunne opskrive ligningerne, skal vi have kendskab til de indkommende links og der kan vi igen kigge på

(7) og kigge aflæse på søjlerne hvilke der referer til siderne (og ellers kunne man også kigge på grafen selvfølgelig):
x_1 har x_3, x_4 *og* x_5
x_2 har x_1, x_4
x_3 har $x_2, x_4,$ *og* x_5
x_4 har x_1
x_5 har x_2 *og* x_4
Nu kan vi altså opskrive dem som ligninger for tallene x_1, x_2, x_3 og x_4:

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{2}$$
$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_4}{4}$$
$$x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{2}$$
$$x_4 = \frac{x_1}{2}$$
$$x_5 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4}$$

Ved brug af ligningerne kan linkmatricen opskrives som følgende:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Delopgave c

Vi skal bestemme en vektor $x \neq 0$ som opfylder ligningen $Ax = x$. Derefter skal vi foretage på grundlag af dette en rangordning af siderne i webbet. Vi starter naturligvis med det første. Da vores ligningssystem ovenover allerede er skrevet på formen $Ax = x$, kan vi omskrive systemet til $Ax - x = 0$ og opskrive tilsvarende totalmatrix som vi kalder $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{4r_1 \to r_1 \\ 4r_2 \to r_2 \\ 4r_3 \to r_3 \\ 4r_4 \to r_4 \\ 4r_5 \to r_5}} \left[\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{4r_1 \to r_1 \\ 4r_2 \to r_2 \\ 4r_3 \to r_3 \\ 4r_4 \to r_4 \\ 4r_5 \to r_5}} \left[\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Nåede heller ikke længere her, men ville have bragt den på reduceret rækkechelonform.