Projekt C

Simon Winther <zlp616@ku.alumni.dk>
<Hold 6>
KU-ID: zlp616

13. juni 2023

1 Opgave 1

Opgave (a)

Vi skal betragte matricen:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & -6 & -13 \\ -4 & 12 & -16 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Vi kan lade $A = (\mathbf{u}_1|\dots|\mathbf{u}_n)$ være en $m \times n$ matrix med rank $A = n$. Derefter kan vi bruge Gram–Schmidt på søjlerne i A og definére tallene r_{ij} som følger:

$$r_{11} = \|u_1\| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{r}_{11}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{12} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}(-5+16-12-48) &= \frac{1}{7}(-5+16-12-48) \\ &= \frac{-49}{7} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{q}_2' = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{u}_2 + 7\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + 7\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = ||\mathbf{q}_2'|| = \sqrt{(-4)^2 + 10^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 100 + 16 + 64} = \sqrt{196} = 14$$

$$\boldsymbol{q_2} = \frac{\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_1}{\|\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_1\|} = \frac{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{r}_{22}} = \frac{\mathbf{q}_2'}{r_{22}} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{r_{13}}\color{black} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}(-5 + 16 - 26 + 64) = \frac{49}{7} = 7$$

$$\color{red}{r_{23}}\color{black} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(-4 + 80 + 52 - 128) = 0$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_3' = \mathbf{u}_3 - \color{red}{r_{13}}\color{black}\mathbf{q}_1 - \color{red}{r_{23}}\color{black}\mathbf{q}_2 = \mathbf{u}_3 - 7\mathbf{q}_1 - 0\mathbf{q}_2 = \mathbf{u}_3 - 7\mathbf{q}_1& \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} - 7\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\color{red}{r_{33}}\color{black} = ||\mathbf{q}_3'|| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-15)^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 36 + 225 + 144} = \sqrt{441} = 21$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{\color{red}{r_{33}}} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Da opnås følgende QR-faktorisering af A:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \mathbf{QR} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3) &\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5/7 & -4/14 & 6/21 \\ 2/7 & 10/14 & 6/21 \\ 2/7 & -4/14 & -15/21 \\ -4/7 & 8/14 & -12/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5/7 & -2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 5/7 & 2/7 \\ 2/7 & -2/7 & -5/7 \\ -4/7 & 4/7 & -4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Og hvis vi gangede de her to sammen, skulle vi gerne få **A**, og hermed er QR-faktoriseringen for A bestemt.

Opgave (b)

$$
\begin{aligned}
P = QQ^T &= \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{25}{49}+\frac{4}{49}+\frac{4}{49} & -\frac{10}{49}-\frac{10}{49}+\frac{4}{49} & -\frac{10}{49}+\frac{4}{49}-\frac{10}{49} & \frac{20}{49}-\frac{8}{49}-\frac{8}{49} \\ -\frac{10}{49}-\frac{10}{49}+\frac{4}{49} & \frac{4}{49}+\frac{25}{49}+\frac{4}{49} & \frac{4}{49}-\frac{10}{49}-\frac{10}{49} & -\frac{8}{49}+\frac{20}{49}-\frac{8}{49} \\ -\frac{10}{49}+\frac{4}{49}-\frac{10}{49} & \frac{4}{49}-\frac{10}{49}-\frac{10}{49} & \frac{4}{49}+\frac{4}{49}+\frac{25}{49} & -\frac{8}{49}-\frac{8}{49}+\frac{20}{49} \\ \frac{20}{49}-\frac{8}{49}-\frac{8}{49} & -\frac{8}{49}+\frac{20}{49}-\frac{8}{49} & -\frac{8}{49}-\frac{8}{49}+\frac{20}{49} & \frac{16}{49}+\frac{16}{49}+\frac{16}{49} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{33}{49} & -\frac{16}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{4}{49} \\ -\frac{16}{49} & \frac{33}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{4}{49} \\ -\frac{16}{49} & -\frac{16}{49} & \frac{33}{49} & \frac{4}{49} \\ \frac{4}{49} & \frac{4}{49} & \frac{4}{49} & \frac{48}{49} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 33 & -16 & -16 & 4 \\ -16 & 33 & -16 & 4 \\ -16 & -16 & 33 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 48 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Opgave (c)

Vi skal betragte vektoren $\mathbf{x} = (1,1,1,0)^\top \in \mathbb{R}^4$ *og bestemme den ortogonale projektion samt spejlingen af* $\mathbf{x}$ *på underrummet* $\mathcal{U}$.. Vi starter med at bestemme den ortogonale projektion:

$$proj_{\mathcal{U}}(v) = Pv \qquad \text{hvor } v \text{ er vektoreren } \mathbf{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$= \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 33 & -16 & -16 & 4 \\ -16 & 33 & -16 & 4 \\ -16 & -16 & 33 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Dernæst skal vi bestemme spejlingen af $\mathbf{x}$ *i underrummet* $\mathcal{U}$. Da vi har projektionsmatricen for $\mathcal{U}$ kan vi bruge den til at bestemme spejlingsmatricen for $\mathcal{U}$.

$$refl_{\mathcal{U}}(v) = \mathbf{R}v = (2\mathbf{P} - \mathbf{I})v \qquad \text{hvor v er vektoreren } \mathbf{x}$$

$$= \left(\frac{2}{49}\begin{bmatrix} 33 & -16 & -16 & 4 \\ -16 & 33 & -16 & 4 \\ -16 & -16 & 33 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 48 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{49}\begin{bmatrix} 66 & -32 & -32 & 8 \\ -32 & 66 & -32 & 8 \\ -32 & -32 & 66 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 49/49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49/49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49/49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49/49 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 17 & -32 & -32 & 8 \\ -32 & 17 & -32 & 8 \\ -32 & -32 & 17 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 47 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -47 \\ -47 \\ -47 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Altså

- Der er den ortogonale projektion af $\mathbf{x}$ på underrummet $\mathcal{U}$ bestemt til $proj_{\mathcal{U}}(x) = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

- Spejlingen af $\mathbf{x}$ i underrummet $\mathcal{U}$ er bestemt til $refl_{\mathcal{U}}(x) = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -47 \\ -47 \\ -47 \\ 24 \end{bmatrix}$

Opgave (d)

Vi skal bestemme en ortonormal basis for det ortogonale komplement underrum $\mathcal{U}^\perp$ til $\mathcal{U}$. Vi ved, at der gælder følgende ligning:

$$\mathcal{U}^\perp = (\operatorname{col} A)^\perp = \operatorname{null} A^\top \tag{2}$$

Hvor at, $A^\top = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 8 & -6 & 12 \\ 1 & 8 & -13 & -16 \end{bmatrix}$ Nulrummet af $\mathbf{A}$ er givet ved:

$$\begin{aligned} \operatorname{null} \mathbf{A} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & -6 & -13 \\ -4 & 12 & -16 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nu har vi den på reduceret række-echelonform og har 3 pivot elementer x_1, x_2, x_3 og vi har en fri variabel $x_4 = t$. Vi har altså:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er en uendelige løsninger til ligningen, der er altså uendelige baser, og en basis kunne f.eks. være $t = 1$, og dermed får vi at én basis for den ortogonale basis, $\mathcal{O}$, kunne f.eks. være:

$$\mathcal{O} = \{o_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3}$$

Da det dog er en ortonormal basis og ikke en ortogornal basis, kan vi normaliserer vektoreren i den ortogornale basis, da den vektor så bliver til en enhedsvektor med længde/norm på 1, og derfor har vi nu en basis hvor alle vektorerne er vinkelrette og har en længde på én, altså en ortonormal basis. Vi normaliserer vektoreren:

$$b_1 = \frac{o_1}{||o_1||} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dermed har vi bestemt en følgende ortonormale basis for underrummet $U^\perp$.

$$\mathcal{B} = \{b_1\} = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

Opgave (e)

Vi skal lade $Q = (q1|q2|q3)$ være Q-matricen i QR-faktoriseringen fra delspørgsmål (a) og så skal vi lade $\{q4\}$ være den ortonormale basis for det ortogonale komplemt underrum $\mathcal{U}^\perp$ vi fandt i delspørgsmål (d). Vi skal betragte matricen:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3|\mathbf{q}_4) \qquad \text{samt vektoren} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{11} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Bestem den inverse matrice, $\mathbf{B}^{-1}$, til matricen $\mathbf{B}$. Vi ved fra vores QR-faktorisering og Gram-Schmidt processen, at den finder en ortonormal basis, derfor vil q_1, q_2, q_3 være parvist ortonormale, men det er vigtigt, at alle permutationer der kan opstå af q_4 og opfylder, at $q_4 \cdot q_1 = q_4 \cdot q_n = 0 \quad$ hvor $n = 3$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_4 &= ((5/7 * 4/7 - 2/7 * 4/7) - 2/7 * 4/7) - 4/7 * 1/7 \\ &= ((20/49 - 8/49) - 8/49) - 4/49 \\ &= (12/49 - 8/49) - 4/49 \\ &= 4/49 - 4/49 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_4 &= ((2/7 * 4/7 + 5/7 * (-1) * 4/7) + 2/7 * 4/7) + 4/7 * 1/7 \\ &= ((8/49 - 20/49) + 8/49) + 4/49 \\ &= (-12/49 + 8/49) + 4/49 \\ &= -4/49 + 4/49 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3 * \mathbf{q}_4 &= (-2/7 * 4/7 - 2/7 * 4/7) + (-5/7) * (-1) * 4/7 - 4/7 * 1/7 \\ &= (-8/49 - 8/49) + (20/49) - 4/49 \\ &= -16/49 + 20/49 - 4/49 \\ &= 4/49 - 4/49 \\ &= 0\end{aligned}$$

Vi har nu vist, at mængden af alle vektorne er parvist ortogonale da vi har vist at der gælder, at $u_i \cdot u_j = 0 \qquad$ for alle $i \neq j$. Man kunne også have vist, $Q^\top Q = I_k$, altså at $Q^\top$ er venstre-invers til Q.

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Og da vi kan se det giver enhedsmatricen I så er matricen altså ortogonal. For en ortogonal matrix Q gælder for den inverse, $Q^{-1} = Q^\top$. Derfor får vi:

$$Q^{-1} = Q^\top = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Bestem $||Bv||$, altså normen af vektoren $\mathbf{Bv}$. Vi ved at der gælder følgende generelle formel for normen:

$$\begin{aligned}
||Bv||^2 &= (Bv)^\top Bv && \text{Der gælder } (Bv)^\top = v^\top B^\top \text{ dermed får vi} \\
&= v^\top B^\top Bv && \text{Da vi i ovenstående formel viste, at } Q^\top Q = B^\top B = \mathbf{I} \text{ får vi} \\
&= v^\top \mathbf{I} v \\
&= v^\top v = ||Bv||^2 \\
&= \sqrt{v^\top v} = ||Bv||
\end{aligned}$$

Dermed er normen/længden af $||\mathbf{Bv}||$ lig med kvadratroden af v transponeret prikprodukt v.

$$\begin{aligned}
||Bv|| = \sqrt{v^\top v} &= \sqrt{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{11} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{11} \end{bmatrix}} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{11} \end{bmatrix}} \\
&= \sqrt{\sqrt{4} + \sqrt{25} + \sqrt{49} + \sqrt{121}} \\
&= \sqrt{2 + 5 + 7 + 11} = \sqrt{25} = 5 \\
= ||Bv||
\end{aligned}$$

Dermed har vi bestemt normen af $\mathbf{Bv}$ til $||\mathbf{Bv}|| = 5$.

2 Opgave 2

Lad **A** *være matricen*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

2.1 Opgave (a)

Bestem samtlige egenværdier for **A***.* Vi ved at λ er en egenværdi for en $n \times n$ matrix **A**, hvis der findes en vektor $x \neq 0$ sådan at,

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

En sådan vektor x er en egenvektor hørende til egenværdien λ. Egenværdierne for A (som kan være reelle eller komplekse) bestemmes således:

- Udregn det karakteristiske polynomium $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \lambda - 1/2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1/2) \cdot (\lambda - 1/2) - (1/2 \cdot (-1)1/2) \\ &= \lambda^2 - 1/2\lambda - 1/2\lambda + 1/4 - (-1/4) \\ &= \lambda^2 - 1/2\lambda - 1/2\lambda + 1/4 + 1/4 \\ &= \lambda^2 - \lambda + 1/2 \end{aligned}$$

- Løs den karakteristiske ligning $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$
  Beregner diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -1 \tag{10}$$

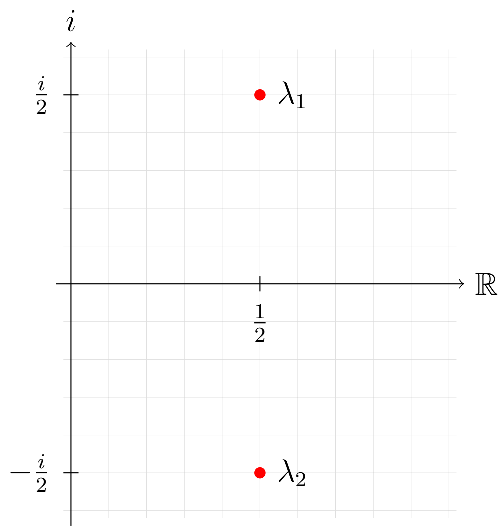
$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{-1}}{2\cdot1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = 0,5 + i \cdot 0,5 \\ \lambda_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{-1}}{2\cdot1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0,5 - i \cdot 0,5 \end{cases}$$

Dermed har vi bestemt følgende egenværdier for **A**:

$$\lambda_1 = 0,5 + i \cdot 0,5 \tag{11}$$

$$\lambda_2 = 0,5 - i \cdot 0,5 \tag{12}$$

Indtegn egenværdierne i den komplekse plan



2.2 Opgave (b)

Bestem for hver egenværdi λ det tilhørende egenrum E_λ. For hver egenværdi λ for A er egenvektorerne hørende til λ netop ikke-nul løsningerne $x \neq 0$ til ligningen $(A - \lambda I)x = 0$. Vi skal altså lave elementære rækkeoperationer på ligningssystemet $(A - \lambda I)x = 0$

Udregning af $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1/2 - (1/2 + i/2) & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 - (1/2 + i/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2 - i/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 - 1/2 - i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ -1/2 & -i/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dernæst løses ligningen

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ -1/2 & -i/2 \end{pmatrix} = 0 \xrightarrow[]{\substack{2\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ 2\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{i\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\begin{pmatrix} -i^2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 + r_2 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\begin{pmatrix} -i^2-1 & 0 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$$

$$\begin{pmatrix} -i^2-1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{i^2=-1}$$

$$\begin{pmatrix} -(-1)-1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Her er x_2 en fri variabel, $x_2 = t$, så har vi x_1 udtrykt ved, $x_1 = -it$. Dermed får vi altså følgende ligning:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er nulrummet altså

$$\operatorname{null}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{En basis for null}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \text{ er } E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Udregning af $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1/2 - (1/2 - i/2) & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 - (1/2 - i/2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2 + i/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 - 1/2 + i/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -1/2 & i/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dernæst løses ligningen

$$
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -1/2 & i/2 \end{pmatrix} = 0 \xrightarrow[]{\substack{2\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ 2\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}}
$$

$$
\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{-i\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}
$$

$$
\begin{pmatrix} i \cdot -i & 1 \cdot -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1}
$$

$$
\begin{pmatrix} -i^2 + (-1) & -i + i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 - 1 & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{i^2 = -1}
$$

$$
\begin{pmatrix} -(-1) - 1 & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2}
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Her er x_2 en fri variabel, $x_2 = t$, så har vi x_1 udtrykt ved, $x_1 = it$. Dermed får vi altså følgende ligning:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Dermed er nulrummet altså

$$\text{null}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{En basis for null}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \text{ er } E_\lambda = \left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Konklusion

Egenværdien $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ har tilsvarende egenrum $E_\lambda = \left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Egenværdien $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ har tilsvarende egenrum $E_\lambda = \left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Opgave (c)

Vi skal betragte vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og så skal vi bestemme komplekse tal α og β så, at det opfylder:

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} i\alpha - i\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Nu den på $Ax = b$ form og vi kan opskrive totalmatricen M som:

$$\begin{bmatrix} i\alpha - i\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/i\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/i \\ 0 & 2 & 1 - 1/i \end{bmatrix} \xrightarrow{1/i = -i} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i \\ 0 & 2 & 1+i \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i + (i+1)/2 \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (-i^2 - i)/2 \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & (-(-1) - i)/2 \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

Dermed kan vi aflæse følgende værdier:

$$\alpha = \frac{1-i}{2}$$

$$\beta = \frac{1+i}{2}$$

Og vi kan selvfølgelig teste om det gælder ved at indsætte α og β og se om det giver $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \iff \frac{(1-i)}{2} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(1+i)}{2} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Og det gør det, heldigvis.

Opgave (d)

Skitsér vektorerne v, Av, A^2v og A^3v i XY-planen. Hvilken vinkel synes der at være mellem v og Av, mellem Av og A^2v, og mellem A^2v og A^3v? Vi starter med at beregne vektorerne:

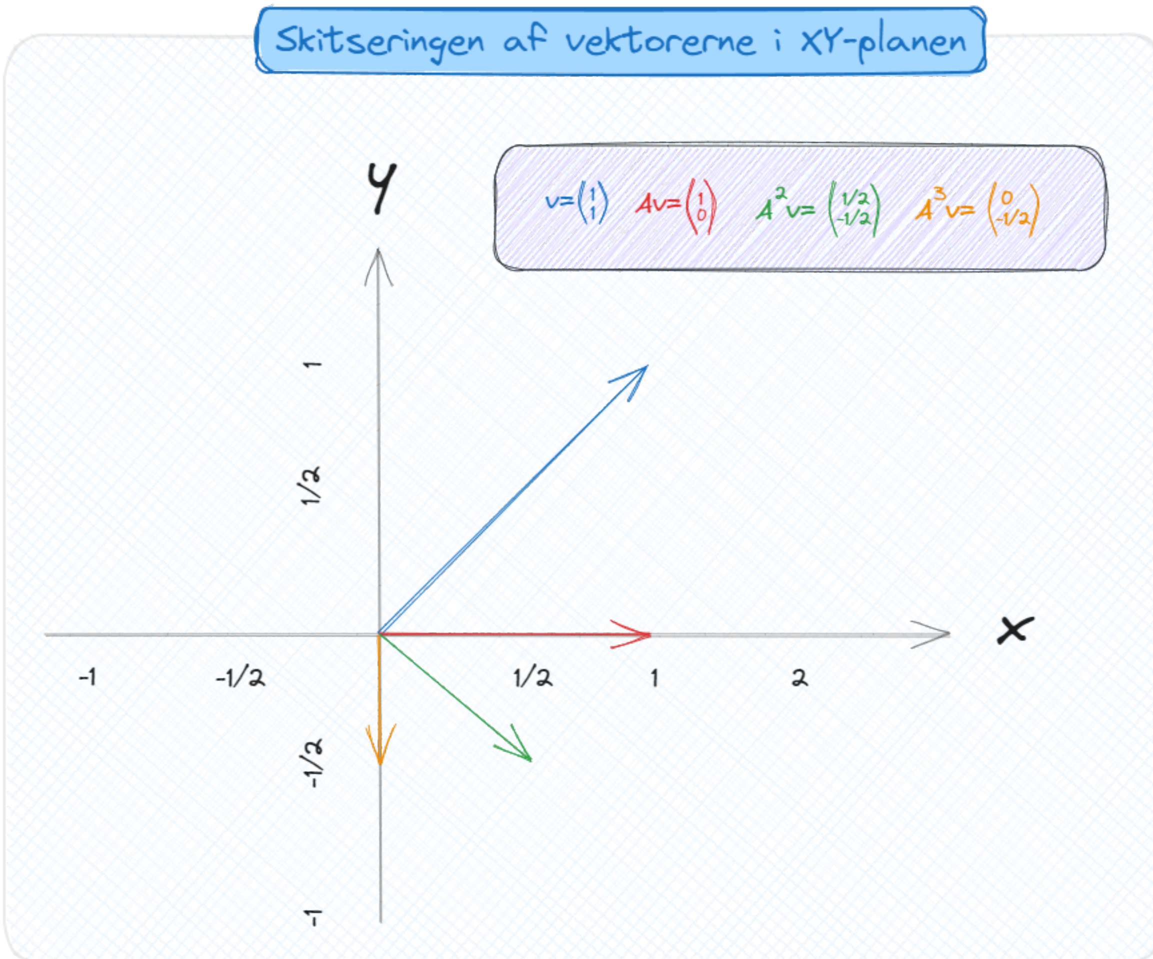
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vi indtegner disse vektorer i XY-planen og følgende billede ses på Figur 1:



Figur 1: Skitséring af vektorerne $\mathbf{v}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{A^2v}$ og $\mathbf{A^3v}$ i XY-planen

Hvilken vinkel synes der at være mellem $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{Av}$*, mellem* $\mathbf{Av}$ *og* $\mathbf{A^2v}$*, og mellem* $\mathbf{A^2v}$ *og* $\mathbf{A^3v}$*?* I Figur 1 synes vinklen mellem vektorerne $\mathbf{v}$ og $\mathbf{Av}$, mellem $\mathbf{Av}$ og $\mathbf{A^2v}$, samt mellem $\mathbf{A^2v}$ og $\mathbf{A^3v}$ at være omkring 45°. Det skal dog bemærkes, at denne vurdering er baseret på en visuel observation, som også var underlagt opgavebeskrivelsen. Vi kan også se, at det danner en spiral, da den ikke har nogle egenværdier, men kun har komplekse egenværdier.

Opgave (e)

Vi er givet en 2×2 matrix og en 2 dimensionel vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker at vise, at for et positivt heltal k er udtrykket $A^k v$ lig med:

$$\frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}} \begin{pmatrix} \sin((k+1)\frac{1}{4}\pi) \\ \cos((k+1)\frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix}$$

Vi har beregnet den k-te potens af A i form af en diagonaliseret matrix $A^k = PDP^{-1}$ (hvor D er diagonal matricen, og P er matrixen af egenvektorer), og dermed fåes:

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z1^k + z2^k) & -\frac{1}{2}i(z1^k - z2^k) \\ \frac{1}{2}i(z1^k - z2^k) & \frac{1}{2}(z1^k + z2^k) \end{pmatrix}$$

hvor

$$z1 = \frac{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad z2 = \frac{\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)}{\sqrt{2}}.$$

Efter at have ganget A^k med vektoren v, fik vi:

$$A^k \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z1^k + \frac{1}{2}z2^k - \frac{i}{2}(z1^k - z2^k) \\ \frac{i}{2}(z1^k - z2^k) + \frac{1}{2}z1^k + \frac{1}{2}z2^k \end{pmatrix}$$

Udfør Eulers formel:

$$A^k \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\cdot\pi/4})^k + \frac{1}{2}(e^{-i\cdot\pi/4})^k - \frac{i}{2}((e^{i\cdot\pi/4})^k - (e^{-i\cdot\pi/4})^k) \\ \frac{i}{2}((e^{i\cdot\pi/4})^k - (e^{-i\cdot\pi/4})^k) + \frac{1}{2}(e^{i\cdot\pi/4})^k + \frac{1}{2}(e^{-i\cdot\pi/4})^k \end{pmatrix}$$

Power of power reglen $(3^a)^b = 3^{ab}$

$$A^k \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\cdot\pi/4\cdot k}) + \frac{1}{2}(e^{-i\cdot\pi/4\cdot k}) - \frac{i}{2}((e^{i\cdot\pi/4\cdot k}) - (e^{-i\cdot\pi/4\cdot k})) \\ \frac{i}{2}(e^{i\cdot\pi/4\cdot k}) - (e^{-i\cdot\pi/4\cdot k})) + \frac{1}{2}(e^{i\cdot\pi/4\cdot k}) + \frac{1}{2}(e^{-i\cdot\pi/4\cdot k}) \end{pmatrix}$$

Udfører komplekst konjugat på ovenstående:

$$e^{-ix} = cos(x) - i * sin(x).$$

$$e^{i\cdot\pi/4\cdot k} = \cos(\pi/4 \cdot k) + i \cdot \sin(\pi/4 \cdot k)$$

$$e^{-i\cdot\pi/4\cdot k} = \cos(\pi/4\cdot k) - i\cdot\sin(\pi/4\cdot k)$$

Jeg ledte efter en måde at forenkle dette udtryk yderligere for at matche ligning under, men kunne umiddelbart ikke komme videre, desværre.

$$\frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}}\begin{pmatrix}\sin((k+1)\frac{1}{4}\pi)\\ \cos((k+1)\frac{1}{4}\pi)\end{pmatrix}.$$

3 Opgave 3

Opgave (a)

Vi skal benytte mindste kvadraters metode til at bestemme forskriften for den bedste rette linie, $\ln y \simeq at + b$*, gennem punkterne* $(t, \ln y)$ *fra Tabel 2 opgivet i opgavebeskrivelsen.* Vi vil altså dermed gerne finde den bedste rette linje $\ln y \simeq at + b$ gennem de målepunkter givet i tabel 2 $(t, \ln y)$, det svarer til at vi gerne vil finde den bedste tilnærmede løsning til følgende ligningssystem:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a \cdot 2010 + b = 35.481 \\ a \cdot 2011 + b = 36.891 \\ a \cdot 2012 + b = 37.331 \\ a \cdot 2013 + b = 38.061 \\ a \cdot 2016 + b = 39.071 \\ a \cdot 2018 + b = 39.345 \\ a \cdot 2020 + b = 40.568 \\ a \cdot 2022 + b = 42.140 \\ a \cdot 2023 + b = 43.056 \end{cases}$$

Hvor at:

$$A = \begin{bmatrix} 2010 & 1 \\ 2011 & 1 \\ 2012 & 1 \\ 2013 & 1 \\ 2016 & 1 \\ 2018 & 1 \\ 2020 & 1 \\ 2022 & 1 \\ 2023 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad \textbf{og} \qquad b = \begin{bmatrix} 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \\ 42.140 \\ 43.056 \end{bmatrix}$$

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} &= \boldsymbol{(A^\top A)^{-1} A^\top b} \\ &= \begin{bmatrix} 36582527 & 18145 \\ 18145 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7.0965345\,10^5 \\ 351.94399999999996 \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} 0.498934807916347 \\ -966.803121071729 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Og den bedste rette linie gennem målepunkterne fra Tabel 2 $(t, \ln y)$ er derfor:

$$\ln y \simeq \bar{a}t + \bar{b} = 0.4989348079163347t - 966.803121071729 \tag{15}$$

Opgave (b)

Jeg skal begrunde, at der gælder følgende tilnærmede forskrift for funktionen $y = y(t)$:

$$y = y(t) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)}$$

Hvis vi starter med at tage den naturlige logaritmen (ln) på begge sider af lighedstegnet.

$$\ln y(t) \simeq \ln(4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)})$$

Så kan vi bruge reglen $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\ln y(t) \simeq \ln(4.56 \cdot 10^{15}) + \ln(e^{0.499(t-2010)})$$

Eksponenten e^x og den naturlige logaritme (ln) ophæver hinanden, fordi de er inverse funktioner:

$$\ln y(t) \simeq \ln(4.56 \cdot 10^{15}) + 0.499(t-2010) = \ln(4.56 \cdot 10^{15}) + 0.499t - 2010 \cdot 0.499$$

Nu kan vi forsøge at arrangere på formen som $y = at + b$

$$\ln y(t) \simeq 0.499t + \ln(4.56 \cdot 10^{15}) - 2010 \cdot 0.499$$

Og det må betyde, at der skal gælde, at $\ln(4.56 \cdot 10^{15}) - 2010 \cdot 0.499 = 966.8031 \cdots$ for at vi kan sige, at det er sandt. Og heldigvis gælder der, at:

$$\ln(4.56 \cdot 10^{15}) - 2010 \cdot 0.499 = -966.934 \cdots$$

Hvis vi så indsætter det i ligningen får vi:

$$\ln y(t) = \ln y \simeq 0.499t - 966.934 \tag{16}$$

Og hvis vi kigger i ligning (15) som var:

$$\ln y \simeq \bar{a}t + \bar{b} = 0.4989348079163347t - 966.803121071729 \tag{17}$$

Kan vi nu se, at Ligning (16) og Ligning (17) er ens med en lille afvigelse i decimaler. Da der bruges "$\simeq$"(tilnærmelsesvis lig med) i ligningen, er den lille afvigelse i decimalerne allerede taget i betragtning. Derfor kan vi konkludere, at ligning (16) og ligning (17) er ens med en lille afvigelse, hvilket bekræfter gyldigheden af den tilnærmede forskrift for funktionen $y = y(t)$.

Opgave (c)

Jeg skal benyt tilnærmelsen til at give et estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kunne præstere i år 2000. Dernæst, skal jeg også benytte tilnærmelsen til at give et estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kan præstere i år 2030. Vi ved, at $y = y(t)$ er det antal FLOPS som verdens bedste supercomputer kunne præstere i år t. Derfor skal vi egentlig bare udregne hhv, $y(2000)$ og $y(2030)$. Ved følge udregninger fås.

$$y(t) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)} \iff y(2000) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(2000-2010)} \simeq 3.103383008 \times 10^{13}$$

$$y(t) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(t-2010)} \iff y(2030) \simeq 4.56 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.499(2030-2010)} \simeq 9.845182523 \times 10^{19}$$

4 Opgave 4

4.1 SquareSubMatrix

```
static member SquareSubMatrix (A : Matrix) (i : int) (j : int) : Matrix =
   let N = A.N_Cols - 1

   let mutable M = Matrix(N, N)

   let mutable rowOffset = 0
   let mutable colOffset = 0

   for row = 0 to N - 1 do
       if row = i then
           rowOffset <- 1
           colOffset <- 0

       for col = 0 to N - 1 do
           if col = j then
               colOffset <- 1
           M[row, col] <- A[row + rowOffset, col + colOffset]
       colOffset <- 0
   M
```

4.2 Determinant

```
static member Determinant (A : Matrix) : float =
    //Using the recursive definition for determinants
    let rec det (subA:Matrix) =
            if (subA.N_Cols = 1) then
                subA.[0, 0]
            else
                let mutable d: float = 0.0
                for j in 0 .. subA.N_Cols - 1 do
                    d <- d + subA.[0, j] * Math.Pow(-1.0, 2.0 + float j)
                          * (AdvancedOps.SquareSubMatrix subA 0 j |> det)
                d
    det A
```

4.3 SetColumn

```
static member SetColumn (A : Matrix) (v : Vector) (j : int) =
   //M-by-N matrix
```

```
    for i in 0 .. v.Size - 1 do
        A[i, j] <- v[i]
    A
```

4.4 GramSchmidt

```
static member GramSchmidt (A : Matrix) : Matrix * Matrix =
    let m = A.M_Rows
    let n = A.N_Cols
    let Q = Matrix(m, n)
    let R = Matrix(n, n)

    for j = 0 to n - 1 do
        let mutable v = A.Column j

        for i = 0 to j - 1 do
            R.[i, j] <- Q.Column i * v
            v <- v - Q.Column i * R.[i, j]

        R.[j, j] <- AdvancedOps.VectorNorm v

        let norm = R.[j, j]
        for k = 0 to m - 1 do
            Q.[k, j] <- v.[k] / norm

    (Q, R)
```