Projekt A

Simon Winther <zlp616@ku.alumni.dk>
<Hold 6>
KU-ID: zlp616

23. maj 2023

Opgave 1

Vi er blevet givet følgende lineære transformation $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = Ax \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4. \tag{1}$$

Opgave a

Vi skal bestemme en basis for kernen af T (**kerT**), og dernæst skal vi angive dimensionen af dette underrum. Vi starter med at bestemme basis for kernen af T. Vi ved, at kernen af T er defineret ved følgende mængde:

$$ker\ T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0\} \tag{2}$$

Ved nærmere indsigt i, (2) kan vi se, at det er alle x-værdierne i vektorrummet $\mathbb{R}^n$ "such that" ligningen $T(x) = 0$ giver nul når vi løser/isolere for x. Og med andre ord, er dette altså også nulrummet for A. Altså, ker $\mathbf{T}$ = null $\mathbf{A}$. Vi kan derfor opstille den følgende ligning Ax=0 og få den om på reduceret række-echlonform.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_4 \to \mathbf{r}_4}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1r_1 \to \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_3 \to \mathbf{r}_3}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_3 + r_4 \to \mathbf{r}_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3 \to \mathbf{r}_3}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_2 + r_1 \to \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu er matricen på reduceret række-echlonform,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

og vi kan se, at vi har 2 pivotelementer, hhv. x_1, x_2 og frie variabler, hhv. $x_3 = s$ og $x_4 = t$. Derfor kan vi nu opskrive følgende ligninger:

$$x_1 = -s + 2t$$
$$x_2 = t$$

Derfra aflæses, at samtlige 2løsninger til ligningssystemet Ax $=0$ er følgende:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Vi ved at span S er mængden af alle linearkombinationer, og vi har altså nu fundet de 2 vektorer som udspænder nulrummet.

$$\text{span } S = span\{v_1, \dots, v_k\} := \{x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_k\mathbf{v_k} \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

Vi kan selvfølgelig aflæse, $x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_k\mathbf{v_k}$ ovenstående to vektorer som udspænder nulrummet af A, null A, dvs. vi altså konkludere, at:

$$\text{ker } \mathbf{T} = \text{null } \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

$$\text{En basis for null } \mathbf{A} \text{ er:} \qquad \beta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{6}$$

Og yderligere, gælder der for dimensionen af et nulrum A:

$$\begin{aligned} \dim(\text{null}\,\mathbf{A}) &= \text{antal frie variabler i ligningssystemet } \mathbf{Ax}{=}\mathbf{0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dermed er dimensionen af nulrummet for A bestemt til $\dim(\text{null}\,A) = 2$.

Opgave b

Vi skal nu bestemme en basis for billedet af T og angive dimensionen af dette underrum. Vi ved, at der gælder følgende definition for billede af T:

$$\text{ran } T = \text{col } \mathbf{A} \qquad \text{og} \qquad \text{col } \mathbf{A} = \text{span}\{\text{alle n søjlevektorer i A}\} \tag{7}$$

Find de søjlenumre $j_1, ..., j_r$ i den reducerede række-echelonform for **A** som har et pivot 1-tal (her er r lig med rank **A**). En basis β for col **A** udgøres af de tilsvarende søjler i **A**, dvs.

$$\beta = \{\mathbf{A_{j_1}},\ \dots,\ \mathbf{A_{j_r}}\} \tag{8}$$

Derfor kan vi nu finde tilsvarende søjlenumre i vores reducerede række-echelonform for **A** i (3) og da der er pivot 1-taller i søjlerne A_1, A_2 kan vi bestemme en basis for T ved følgende:

$$\begin{aligned}\operatorname{ran} T &= \operatorname{col} \mathbf{A} \\ &= \operatorname{span}\{\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2}\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4\end{aligned}$$

Dermed kan vi nu opskrive følgende basis for billedet af T:

$$\begin{aligned}\beta &= \{\mathbf{A_{j_1}},\ \dots,\ \mathbf{A_{j_r}}\} \\ &= \{\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2}\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Og yderligere, gælder der for dimensionen af et søjlerum A:

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{col} \mathbf{A}) &= \operatorname{rank} \mathbf{A} \\ &= \text{antallet af ikke-nul-rækker i en echelonform af } \mathbf{A} \\ &= 2 \quad \text{(jf. Ligning (3) har 2 ikke nul-rækker)}\end{aligned}$$

Dermed er dimensionen af vores søjlerum bestemt til $\dim(\operatorname{col} A) = 2$.

Opgave c

Vi skal bestemme en vektor $x \neq 0$ som tilhører både $\ker T$ og $\operatorname{ran} T$. For at finde en vektor x som tilhører begge underrum x_1, x_2, x_3, x_4 som udtrykker følgende linear kombinationerne for de to baser, hhv. basen for $\ker T = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2\}$, $\operatorname{ran} T = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$, med andre ord skal vi finde x som er $x = x_1\mathcal{K}_1 + x_2\mathcal{K}_2$ og $x = x_1\mathcal{R}_1 x_2\mathcal{R}_2$ og der gælder altså, at:

$$x_1\mathcal{K}_1 + x_2\mathcal{K}_2 = x_3\mathcal{R}_1 + x_4\mathcal{R}_2 \tag{9}$$

Dette kan også skrives på totalmatrix form, derfor opstiller vi følgende matrix $\langle \ker T \,|\, \operatorname{ran} T \rangle$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ved brug af følgende rækkeoperationer bliver der opnået reduceret echelonform

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_4}} \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_4}} \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\frac{\mathbf{r}_1}{2} \to \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_3}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_3 \\ 2\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu har vi fået den på reduceret række-echlonform og vi kan aflæse:

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= t \\ -x_3 + x_4 = 0 \leftrightarrow x_4 = x_3 \leftrightarrow x_3 &= t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Og her ses, at x_4 er sat til den frie variable t. Så får vi udtrykket $x_1, \ldots, x_4$ ved:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu kan vi indsætte en vilkårlig værdi for t, f.eks. $t = 1$, og så fåes.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu har vi hermed alle $x_1, \ldots, x_4$ og kan beregne x ud fra de 2 oprindelige ligninger vi frem fandt til i toppen ved $[kerT|ranT]$, når vi indsætter de tilsvarnede x værdier deri får vi følgende:

$$x = x_1\mathcal{K}_1 + x_2\mathcal{K}_2 = \mathbf{1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Vi har nu beregnet en vektor x som indgår i bådet $kerT$ og $ranT$. Vi kan dobbelttjekke at den befinder sig i underrummet, ved at indsætte koefficienterne x_3 og x_4 i basen $\mathcal{R}$:

$$x = x_3\mathcal{R}_1 + x_4\mathcal{R}_2 = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Og da vi får samme vektor x, kan det konkluderes, at vektor x befinder sig i begge underrum.

Opgave d

Vi er blevet givet $\mathbf{A}$ som er en blokmatrix:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \hline \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \tag{12}$$

Derudover, er vi givet X' og Y' som er 2 vilkårlige 2×2 matricer:

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{og,} \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

hvor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_4$ og $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_4$ er ubekendte. Derudover, er vi også blevet givet blokmatricerne.

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{X'} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}\right) \qquad \text{og,} \qquad \mathbf{Y} = (\mathbf{Y'} \mid \mathbf{O}) \tag{14}$$

hvor $\mathbf{O}$ betegner nulmatricen, $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi vil så gerne vise, at der gælder følgende sætning:

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{Y'A_{11}X'} \tag{15}$$

Det kan vi selvfølgelig benytte os af blokmatrixmultiplikation, og vise, at det der står på begge sider af lighedstegnet i Ligning (15) er sandt. Derfor lader vi stadig $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$ og $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4$ være ubekendte så vi også ved, at der er generelt og gælder for alle tal og laver blokmatrixmultiplikationen.

Venstre af lighedstegnet

Vi starter med at beregne det venstre af lighedstegnet $\mathbf{YAX}$. Der ville det være tilpas, at lave matrice multiplikation med $\mathbf{YA}$ først, og dernæst $(\mathbf{YA})\mathbf{X}$.

Derfor kan vi nu opskrive følgende ligning ved hjælp af $\mathbf{Y}$ (14) og $\mathbf{A}$ (12):

$$\mathbf{YA} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ y_3 & y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|r} 2y_1 + 0 + 0 + 0 & -y_1 + y_2 + 0 + 0 & 2y_1 + 0 + 0 + 0 & -3y_1 - y_2 + 0 + 0 \\ 2y_3 + 0 + 0 + 0 & -y_3 + y_4 + 0 + 0 & 2y_3 + 0 + 0 + 0 & -3y_3 - y_4 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2y_1 & -y_1 + y_2 & 2y_1 & -3y_1 - y_2 \\ 2y_3 & -y_3 + y_4 & 2y_3 & -3y_3 - y_4 \end{bmatrix}$$

Nu har vi fundet $\mathbf{YA}$, og vil nu finde $(\mathbf{YA})\mathbf{X}$ ved hjælp af $\mathbf{X}$ (14), og så har vi fundet frem til hvad der står på venstresiden.

$$(\mathbf{YA})\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2y_1 & -y_1 + y_2 & 2y_1 & -3y_1 - y_2 \\ 2y_3 & -y_3 + y_4 & 2y_3 & -3y_3 - y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2y_1x_1 + (-y_1 + y_2)x_3 + 0 + 0 & 2y_1x_2 + (-y_1 + y_2)x_4 + 0 + 0 \\ 2y_3x_1 + (-y_3 + y_4)x_3 + 0 + 0 & 2y_3x_2 + (-y_3 + y_4)x_4 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2y_1x_1 + (-y_1 + y_2)x_3 & 2y_1x_2 + (-y_1 + y_2)x_4 \\ 2y_3x_1 + (-y_3 + y_4)x_3 & 2y_3x_2 + (-y_3 + y_4)x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{YAX}$$

Nu har vi fundet frem til ventresiden, $\mathbf{YAX}$, og vil nu påbegynde matrice-multiplication på højresiden med $\mathbf{Y'A_{11}X'}$ for, at vise, at lighedstegnet er sandt.

Højre af lighedstegnet

Nu vil vi beregne $\mathbf{Y'A_{11}X'}$ som er på højresiden af lighedstegnet. Til at starte med igen, kunne det være passende, at starte med at beregne $\mathbf{Y'A_{11}}$ ved brug af $\mathbf{Y'}$ (13) og $\mathbf{A_{11}}$ (12) så vi opstiller og laver matrix multiplikation i følgende ligning:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{Y'A_{11}})\mathbf{X'} &= \left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2y_1 + 0 & -y_1 + y_2 \\ 2y_3 + 0 & -y_3 + y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2y_1x_1 + (-y_1 + y_2)x_3 & 2y_1x_2 + (-y_1 + y_2)x_4 \\ 2y_3x_1 + (-y_3 + y_4)x_3 & 2y_3x_2 + (-y_3 + y_4)x_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Konklusion

Nu har vi fundet $\mathbf{YAX}$ og $\mathbf{Y'A_{11}X'}$ og vi kan opstille ligningen fra Ligning (15) og tjekke om lighedstegnet er sandt.

$$
\mathbf{YAX} = \mathbf{Y'A_{11}X'}
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 2y_1x_1 + (-y_1 + y_2)x_3 & 2y_1x_2 + (-y_1 + y_2)x_4 \\ 2y_3x_1 + (-y_3 + y_4)x_3 & 2y_3x_2 + (-y_3 + y_4)x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1x_1 + (-y_1 + y_2)x_3 & 2y_1x_2 + (-y_1 + y_2)x_4 \\ 2y_3x_1 + (-y_3 + y_4)x_3 & 2y_3x_2 + (-y_3 + y_4)x_4 \end{bmatrix}
$$

Og da matricer på begge sider af lighedstegnene er identiske betyder det selvfølgelig, at $\mathbf{YAX} = \mathbf{Y'A_{11}X'}$ og det er hermed vist.

Opgave e

Vi skal finde en 4×2 matrix X og en 2×4 matrix Y som opfylder $\mathbf{YAX} = I_2$. Vi har i opgave d vist at $\mathbf{YAX} = \mathbf{Y'A_{11}X'}$ derfor kan vi i stedet opstille følgende ligning:

$$
\mathbf{Y'A_{11}X'} = \mathbf{I_2} \tag{16}
$$

Dette gør det lidt simplere i form af, at alle har sammen dimensionerne 2×2 matricer. Herefter, kan vi vælge, at sætte $\mathbf{Y'}$ til $\mathbf{A_{11}^{-1}}$, det har vi gjort, da vi så vil få følgende:

$$
\mathbf{A_{11}^{-1}A_{11}X'} = \mathbf{I_2} \iff \mathbf{I_2X'} = \mathbf{I_2} \tag{17}
$$

Og da vi ved, at $A_{11}^{-1}A_{11} = I_2$ giver enhedsmatricen, så står der i virkeligheden $I_2 \cdot X' = I_2$. Nu har vi, at Y' er A_{11} invers, og vi kan så sætte X' til enhedsmatricen, og så fås:

$$
\mathbf{I_2I_2} = \mathbf{I_2} \tag{18}
$$

Og så får vi, at $Y' = A_{11}^{-1}$ og $X' = I_2$ som vi kan beregne ud nu.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbf{Y}' = A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 0 \cdot -1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Og så kan vi altså opskrive $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ som:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Opgave 2

Vi er blevet oplyst tre vektorer, b_1, b_2, b_3 som er i vektorrummet $\mathbb{R}^4$. Disse tre udgør en basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ for underrummet $\mathcal{U} = \text{span}\{b_1, b_2, b_3\}$, og derfor vigtigt, at de er lineært uafhængige, som det også oplyses i opgavebeskrivelsen, at de er. De tre vektorer er således udtrykt:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Derudover, oplyses der yderligere en anden basis for underrummet $\mathcal{U}$, netop $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Med den er der oplyses basisskiftmatricen, $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$, som er udtrykt ved:

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Opgave a

Da basisskiftmatricen er givet ved følgende Ligning (23) og vi ved, at der gælder $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \,|\, [c_2]_{\mathcal{B}} \,|\, [c_3]_{\mathcal{B}})$, så kan vi opskrive c_1, c_2 og c_3 som en linearkombination af disse da hver søjle svarer til koordinaten til c_k i basen $\mathcal{B}$, og så får vi følgende:

$$c_1 = \mathbf{0}b_1 + -\mathbf{1}b_2 + \mathbf{1}b_3 = \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = -\mathbf{1}b_1 + \mathbf{1}b_2 + \mathbf{1}b_3 = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \mathbf{1}b_1 + \mathbf{0}b_2 + -\mathbf{1}b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Og dermed er vektorerne $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$, **og** $\mathbf{c_3}$ bestemt.

Opgave b

Vi skal her bestemme basisskiftmatricen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Vi ved, at hvis vi er givet to forskellige ordnede baser, $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$, givent at de er baser for samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^4$ og da det er beskrevet i opgavebeskrivelsen at det er de, ved vi, at basisskift matricen i Ligning (23) $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ er invertibel og der gælder følgende om den inverse til basisskift matricen:

$$(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \tag{24}$$

Den ligning løser vi nu med basisskift matricen i Ligning (23) og der gælder da

$$
\begin{aligned}
(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] && \xrightarrow{r_1 + r_2 \to \mathbf{r_2}} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] && \xrightarrow{r_3 + r_2 \to \mathbf{r_2}} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] && \xrightarrow{r_2 + r_3 \to \mathbf{r_3}} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] && \xrightarrow{r_3 + r_1 \to \mathbf{r_1}} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] && \xrightarrow{-r_2 + r_1 \to \mathbf{r_1}} \\
&= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I|X] \qquad \text{(hvor X er invers til } \mathbf{A}\text{)}
\end{aligned}
$$

Og dermed har vi nu fundet frem til basisskift matricen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Opgave c

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ betragtes vektoren $\mathbf{u}_a = (1, 1, a, -a)^T \in \mathbb{R}^4$. Jeg antager, at transpose egentlig bare fremhæver, at $\mathbf{u_a}$ er en søjlevektor frem for en rækkevektor.

$$\mathbf{u}_a = (1, 1, a, -a)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \tag{26}$$

Vi ved, at hvis vi har en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}\}$ som er en ordnet basis for et underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^n$ så gælder der, at for hver vektor i underrumet $\mathcal{U}$ findes der entydigt bestemte tal $x_1, \ldots, x_k$ så, at vektoren v, er bestemt ved en linear kombination således:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b_1} + \cdots + x_k\mathbf{b_k} \tag{27}$$

Vektoren med disse tal $x_1 \ldots x_k$ kaldes koordinaterne for vektoren v med hensyn til basen $\mathcal{B}$. Vi vil altså først gerne finde koordinaterne til $[\mathbf{u}_a]_{\mathcal{B}}$, dvs. koordinaterne til vektoren $\mathbf{u_a}$ med hensyn til base $\mathcal{B}$. Og det gør vi ved at opstille ligningen som vi beskrev oppe i (27)

$$x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + x_3\mathbf{b_3} = \mathbf{u_a} \iff x_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\a\\-a\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\a\\-a\end{bmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & a\\0 & 0 & 1 & -a\end{array}\right] \xrightarrow{-r_1 + r_2 \to \mathbf{r_2}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & a\\0 & 0 & 1 & -a\end{array}\right] \xrightarrow[r_3 + r_4 \to \mathbf{r_4}]{-r_2 + r_4 \to \mathbf{r_4}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & a\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[-r_3 \to \mathbf{r_3}]{-r_2 + r_3 \to \mathbf{r_3}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{-r_3 + r_4 \to \mathbf{r_2}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & a\\0 & 0 & 1 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Nu den på reduceret række-echelonform og vi aflæser.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = a$$
$$x_3 = -a$$

Det vil altså sige, at $\mathbf{u} = 1\mathbf{b_1} + a\mathbf{b_2} - a\mathbf{b_3}$, og derfor er:

$$[\mathbf{u_a}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

Og nu kan vi bruge den fundne koordinat for u_a i base $\mathcal{B}$ til at bestemme koordinaten for $\mathbf{u_a}$ i base $\mathcal{C}$ ved følgende formlen som også tager baseskift matricen i brug.

$$[\mathbf{u}_a]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{u}_a]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Konklusionen er, at vektoren $\mathbf{u}_a$ kan udtrykkes som en linearkombination af vektorerne i basen $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$. Da ethvert element i underrummet $\mathcal{U}$ kan repræsenteres som en linearkombination af basisvektorerne, følger det, at vektoren $\mathbf{u}_a$ tilhører underrummet $\mathcal{U}$. Med andre ord kan vi sige, at $\mathbf{u}_a$ er indeholdt i $\mathcal{U}$ på grund af dens linearkombination med basisvektorerne $\mathcal{B}$.

Opgave d

For hvert tal $x \in \mathbb{R}$ betragtes nu vektorerne $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1 + x\mathbf{b}_3 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = x\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$ og $\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_1 + x\mathbf{b}_2$. Vi skal bestemme for hvilke tal af $x \in \mathbb{R}$ er vektorerne v_1, v_2, v_3 lineært afhængige. Vi ved, at lineært afhængighed, er når linearkombination $x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_k\mathbf{v_k} = 0$ eneste løsning er hvor $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Derfor er vi naturligvis interesseret i løsningen til ligningen:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$$

Men det kræver, at vi kender $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ hvilket var givet i opgavebeskrivelsen, så lad os starte med at udregne disse.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{b}_1 + x\mathbf{b}_3 \\
\mathbf{v}_2 &= x\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{b}_1 + x\mathbf{b}_2 \\
&\Updownarrow \\
\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 1+x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nu kan vi opskrive vores ligning:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1\begin{pmatrix}1\\1+x\\0\\x\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}x\\1+x\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1+x\\x\\1\end{pmatrix} = 0$$
$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & x & 1 & 0\\1+x & 1+x & 1+x & 0\\0 & 0 & x & 0\\x & x & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\mathbf{r}_4 - x\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_4]{\mathbf{r}_2 - (1+x)\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & x & 1 & 0\\0 & -x^2+1 & 0 & 0\\0 & 0 & x & 0\\0 & -x^2+x & -x & 0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & x & 1 & 0\\0 & -x^2+1 & 0 & 0\\0 & 0 & x & 0\\0 & -x^2+x & -x & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\mathbf{r}_4 - (-1)\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_4]{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & x & 1 & 0\\0 & -x^2+1 & 0 & 0\\0 & 0 & x & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Nu kan vi opskrive følgende:

$x_2 = s$ frie variabel

$x_3 = t$ frie variabel

$x_1 = -s - t$

Og følge deraf fås:

$$s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Det kan altså herudfra ses, at hvis $x = 1 \vee 0 \vee -1$ vil det altså betyde, at vektorerne vil være lineært afhængige. Det kan også ses på følgende eksempel, at hvis $x = 1$ må $v_1 = v_2$ $x = 0$, hvis $x = 0$ må $v_1 = v_3$, og hvis $x = -1$, så må $v_1 = -1 \cdot v_2$, og der er dermed lineær afhængighed.

Opgave e

Vi skal vise, at fællesmængden $U \cap \mathcal{V}$ er en linie gennem origo og så skal vi bestemme en retningsvektor for denne. Vi ved, at der betrages en x_3x_4-plan i $\mathbb{R}^4$, dvs. underrummet $\mathcal{V} = \{(0,0,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Alle punkter i underrummet kan skrives som en linearkombination $x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = U$, derfor kan fællesmængden findes ved at løse følgende ligning:

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = \mathcal{U} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-r_2+r_3 \to r_3 \\ r_3+r_4 \to r_3}]{-r_1+r_2 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[-1r_3 \to r_3]{r_3+r_2 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{array}\right)$$

Nu har vi den på reduceret rækkeechelon form, og vi kan tydelig se på nulrækken i bunden, at hvis der skal være én løsning til ligningen, så kræver det, at $x_4 + x_3 = 0$ ellers findes der ikke en løsning. Derfor gælder der også, at $x_3 = -x_4$ da vi bare rykker x_4 om på den anden side. Og så kan vi skrive

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Hvis vi sætter $x_4 = 0$ så får vi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og dermed har jeg vist, at linjen går igennem origo, og samtidig fået retningsvektoren på $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

I computerspillet, for eksempel Asteroids (Atari Inc, 1979), har spilleren kontrol over et rumskib, der har form som en trekant, i et todimensionelt koordinatsystem. Spilleren styrer rumskibet ved hjælp af piletastern. Matematisk set kan rumskibets position i koordinatsystemet defineres ved hjælp af to punkter: centrum $\mathbf{C} = (c_1, c_2)$ og spidsen $\mathbf{S} = (s_1, s_2)$.

Opgave a

Vi skal bestemme en 4×4 matrix $\mathbf{F}$ som opfylder:

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Vi bliver hintede, at rumskibet parallelforskydes med vektoren $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$

Fordi at, rumskibets position, i den ene vektor $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathbb{R}^4$ i virkeligheden er to sæt af koordinater i $\mathbb{R}^2$ i planen, hhv. $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \in \mathbb{R}^2$ og $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathbb{R}^2$ vil en parallelforskydning svare til at parallelforskyde hvert punkt, dvs. vi får altså følgende.

$$\begin{bmatrix} c_1 + s_1 - c_1 \\ c_2 + s_2 - c_2 \\ s_1 + s_1 - c_1 \\ s_2 + s_2 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Nu kan vi skrive den 4×4 matrice $\mathbf{F}$ som opfylder, at når du ganger på rumskibets vektorposition $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathbb{R}^4$ med $\mathbf{F}$ får man rumskibets position parallelforskudt fremad. Og vi har også vist i nedenstående ligning, at når vi ganger med vektorpositionen får vi det samme som oppe i Ligning (30).

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og vi kan se} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{bmatrix}$$

Opgave b

Vi skal nu gøre rede for, at der gælder følgende formler:

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

hvor $\mathbf{L}_\theta$ og $\mathbf{R}_\theta$ er følgende 4×4 matricer:

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{32}$$

Fremgangsmåden her er meget ligesom i b, men på en måde bare omvendt rækkefølge. Vi kan starte med, at bruge den information der er blevet givet til os i opgavebeskrivelsen. Der står altså, når man klikker på venstre piltast gælder der følgende, $c_1^L = c_1$ og $c_2^L = c_2$, som betyder at rumskibets centrum er uændret. Hvis vi kigger på Ligning (32) kan vi se de to pivot elementer i række 1 søjle 1, og række 2 søjle 2 er hhv 1, dette svarer til, at $c_1^L = c_1$ og $c_2^L = c_2$ forbliver uændret når der ganges på matricen. Dette gælder selvfølgelig både for $\mathbf{L}_\theta$ og $\mathbf{R}_\theta$, så nu har vi i hvert fald redegjort for de 2 første rækker for begge to.

Venstre rotation L_θ

Vi bliver givet rumskibets spids efter rotation til venstre $\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_1^L \end{pmatrix}$, hvis vi opskriver denne og regner lidt videre på det får vi følgende:

$$\begin{bmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (s_1 - c_1)\cos\theta - \sin\theta(s_2 - c_2) \\ (s_1 - c_1)\sin\theta + \cos\theta(s_2 - c_2) \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + (s_1 - c_1)\cos\theta - \sin\theta(s_2 - c_2) \\ c_2 + (s_1 - c_1)\sin\theta + \cos\theta(s_2 - c_2) \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + \cos\theta s_1 - \cos\theta c_1 - \sin\theta s_2 + \sin\theta c_2 \\ c_2 + \sin\theta s_1 - \sin\theta c_1 + \cos\theta s_2 - \cos\theta c_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 - \cos\theta c_1 + \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 - \sin\theta s_2 \\ -\sin\theta c_1 + (1 - \cos\theta)c_2 + \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Vi kan nu prøve, at gange $\mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ ud:

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 - \cos\theta c_1 + \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 - \sin\theta s_2 \\ -\sin\theta c_1 + (1 - \cos\theta)\, c_2 + \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Vi kommer frem til denne ligning, og hvis vi så kigger på s_1^L og s_2^L i overstående ligning samt den vi fandt frem til før, kan vi se, at de er lig med hinanden, og vi kommer altså frem til det samme for både $c_1^L, c_2^L, s_1^L, s_2^L$ og dermed har vi redegjort for formlen $\mathbf{L}_\theta$.

Højre rotation R_θ

Vi får her et hint om, at vi skal bruge $R_\theta = L_{-\theta}$, og vi ved følgende gælder:

$$\begin{aligned} -\cos(-\theta) &= -\cos\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ -\sin(-\theta) &= \sin\theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin\theta \end{aligned}$$

Og så får vi:

$$\mathbf{L}_{-\theta} = \begin{bmatrix} c_1 - \cos -\theta c_1 + \sin -\theta c_2 + \cos -\theta s_1 - \sin -\theta s_2 \\ -\sin -\theta c_1 + (1 - \cos -\theta) c_2 + \sin -\theta s_1 + \cos -\theta s_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 - \cos\theta c_1 - \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 + \sin\theta s_2 \\ \sin\theta c_1 + (1 - \cos\theta) c_2 - \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Og hvis vi kigger på s_1^R, s_2^R i ligningen kan vi se, at det er næsten identisk bortset fra nogle fortegn (+/-) med Ligning (42), som vi jo har redegjort for var sand for $\mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$. Hvis vi starter med at kigge på rækkerne s_1^R og s_2^R for Ligning (42) som var den ligning vi redegjorde for i venstre rotation L_θ:

$$\begin{aligned} c_1 - \cos\theta c_1 + \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 - \sin\theta s_2 \\ -\sin\theta c_1 + (1 - \cos\theta) c_2 + \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{aligned} \tag{42}$$

Dernæst, kigger vi på rækkerne s_1^R og s_2^R for $R_\theta = L_{-\theta}$ som vi lige har fundet frem til.

$$\begin{aligned} c_1 - \cos\theta c_1 - \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 + \sin\theta s_2 \\ +\sin\theta c_1 + (1 - \cos\theta) c_2 - \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{aligned}$$

Og her har jeg markeret alle fortegn ændring med rødt, så det er lidt nemmere at se, og hvis vi kigger på $\mathbf{R}_\theta$ kan vi se, at det er netop disse sin værdier som også ændre fortegn på den oprindelig formel.

Opgave c

Vi skal lade $\theta = 30$ og så skal vi antage, at rumskibet er i sin startposition, som er centrum og spids i hhv, $C = (0, 0)$ og $S = (0, 1)$. Vi skal bestemme positionen af rumskibets centrum og spids efter følgende tastkombination (der læses fra venstre mod højre). Der står vi godt må bruge opgaverne fra

$$\boxed{\leftarrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\uparrow}$$

Projekt A programmeringsdelen, derfor antager jeg, at matricemultiplikation i Maple er okay. Jeg definerer følgende tre funktioner på billeder herunder:

$$Forward := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Left := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - degcos(30) & degsin(30) & degcos(30) & -degsin(30) \\ -degsin(30) & 1 - degcos(30) & degsin(30) & degcos(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$Right := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - degcos(30) & -degsin(30) & degcos(30) & degsin(30) \\ degsin(30) & 1 - degcos(30) & -degsin(30) & degcos(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Figur 1: Først definerer de lineære transformationer Forward, Left og Right

Dernæst bruger jeg matricemultiplikationer til at gange dem sammen, og her er rækkefølgen selvfølgelig vigtigt, så vi ved, at startpositionen er $C = (0, 0)$ og start spids er $S = (0, 1)$ som tilsvarende svarer til vektoreren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ og derfor er det vigtigt at vi ganger den vektor ind på venstre først, og dernæst forward, forward, right, osv. Så vi ender med at få den rigtige rækkefølge som er bedt om i opgavebeskrivelsen, og når det er gjort får vi følgende nedenstående på billedet:

$$\mathit{evalf}\left(\mathit{Forward}.\mathit{Right}.\mathit{Forward}.\mathit{Right}.\mathit{Right}.\mathit{Forward}.\mathit{Forward}.\mathit{Left}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0.366025404\\3.098076213\\1.232050809\\3.598076212\end{bmatrix}$$

Og så kan vi aflæse ud fra ovenstående billede fra maple:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F} \times \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\theta \times \mathbf{F} \times \mathbf{F} \times \mathbf{L}_\theta \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 3.09 \\ 1.23 \\ 3.59 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Det svarer til centrum i $C = (0.36, 3.09)$ og spids i $S = (1.23, 3.59)$.

Opgave d

Hvis vi lader $\theta = 30$ grader. Vi skal forklare hvorfor der gælder $(\mathbf{R}_\theta)^{12} = I_4$ hvor I_4 er en 4×4 enhedsmatricen. Hvis R_θ svarer til at rotere 30 grader, så vil $(R_\theta)^{12}$ svarer til at rotere 30 grader til højre 12 gange, dvs. $30 \cdot 12 = 360$ grader. Med mindre ord betyder dette at skibet drejer sig dermed en hel omgang rundt og kommer frem til sin oprindelige position. Derfor er det identitetsmatricen da den ikke ændrer position, og der hører til, at $(R_\theta)^{12} \cdot v = v$.

Opgave 4

ElementaryRowReplacement

```
static member ElementaryRowReplacement (A: Matrix) (i: int) (m: float) (j: int) : Matrix =
    //The elementary row operation: mj + i -> i
    let retval: Matrix = Matrix A

    for column in 0 .. retval.N_Cols - 1 do
        retval.[i, column] <- (retval.Row(j) * m).[column] + retval.Row(i).[column]

    retval
```

ElementaryRowReplacement

```
static member ElementaryRowInterchange (A: Matrix) (i: int) (j: int) : Matrix =
    let retval: Matrix = Matrix A

    let tempIRow: Vector = retval.Row(i)

    for column: int32 in 0 .. retval.N_Cols - 1 do
        retval.[i, column] <- retval.Row(j).[column]
        retval.[j, column] <- tempIRow.[column]

    retval
```

ElementaryRowScaling

```
static member ElementaryRowScaling (A: Matrix) (i: int) (c: float) : Matrix =
    let retval: Matrix = A

    for column: int32 in 0 .. retval.N_Cols - 1 do
        retval[i, column] <- retval.Row(i).[column] * c

    retval
```

ForwardReduction

```
static member ForwardReduction(A: Matrix) : Matrix =
    let mutable retval = new Matrix(A)

    let tolerance = 0.00000001

    let M = A.M_Rows
    let N = A.N_Cols
```

```
    let mutable i = 0
    let mutable j = 0

    while i < M && j < N do
        if abs (retval.[i, j]) < tolerance then
            let mutable k = i + 1

            while k < M && abs (retval.[k, j]) < tolerance do
                k <- k + 1

            if k < M then
                retval <- GaussOps.ElementaryRowInterchange retval i k

        if abs (retval.[i, j]) > tolerance then
            let mutable k = i + 1

            while k < M do
                retval <- GaussOps.ElementaryRowReplacement retval
                                k (-retval.[k, j] / retval.[i, j]) i
                k <- k + 1

            i <- i + 1

        j <- j + 1

    retval
```

BackwardReduction

```
static member BackwardReduction(A: Matrix) : Matrix =
    let tolerance = 0.00000001

    let mutable U = new Matrix(A)

    let M = A.M_Rows
    let N = A.N_Cols

    let mutable i = M - 1
    let mutable j = N - 1

    while i >= 0 && j >= 0 do
        let mutable k = M - 1

        while k >= 0 do
```

```
            if abs (U.[k, j]) > tolerance then
                U <- GaussOps.ElementaryRowScaling U k (1.0 / U.[k, j])

                let mutable l = k - 1

                while l >= 0 do
                    U <- GaussOps.ElementaryRowReplacement U l (-U.[l, j]) k
                    l <- l - 1

            i <- i + 1
            k <- k - 1

        j <- j - 1
        i <- i - 1

    U
```

GaussElimination

```
static member GaussElimination (A: Matrix) (b: Vector) : Vector =
    let ExtractX (matrix: Matrix) : Vector =
        let mutable retval = new Vector(matrix.M_Rows)

        for row in 0 .. matrix.M_Rows - 1 do
            retval.[row] <- matrix.[row, matrix.N_Cols - 1]

        retval

    b
    |> GaussOps.AugmentRight A
    |> GaussOps.ForwardReduction
    |> GaussOps.BackwardReduction
    |> ExtractX
```