Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia Marrakech
Département de Physique

Master PHEAPC

Module : Traitement du signal

Polycopié Exercices corrigés

Réalisé par Sefyani Fouad

SOMMAIRE

Signaux et systèmes analogiques.

Exercice 1 : Energie ou puissance

1) Calculer la puissance et l'énergie de $x_1(t) = A\sin\frac{2\pi t}{T}$ et $x_2(t) = \Gamma(t)$. $x_3(t) = \Pi_T(t)$

2) Tracer $\Gamma(-t+T)$ et $\Gamma(t-T)$

Exercice 2 : Spectre d'amplitude et de phase

Considérons le signal causal suivant : $x(t) = e^{-at}$ où a est une constante positive.

1) Donner l'expression de la transformée de Fourier X(f) du signal x(t).

2) En utilisant le théorème du retard fréquentiel, calculer le spectre $X_1(f)$ du signal causal suivant : $x_1(t) = 2\pi f_0 e^{-2\pi t f_0} \cos(2\pi f_0 t)$

3) Retrouver ce résultat en utilisant la convolution sur la TF.

4) Calculer le spectre d'amplitude et de phase $X_1(f)$ pour f = 0 et f = f_0.

.

Exercice 3 : Calcul de spectre

Considérons le signal suivant : $x(t) = e^{-a|t|}$

1) Calculer l'énergie du signal x(t). En déduire qu'il est à énergie finie.

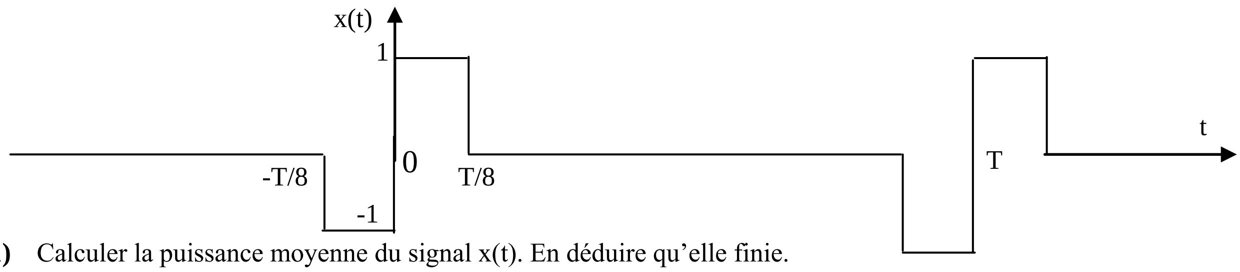
2) Calculer la Transformée de Fourier du signal x(t).

3) On multiplie le signal $x(t)$ par $\cos(2\pi t f_0)$ ce qui donne le signal $y(t)$. En déduire le spectre de y(t) en fonction de f, f_0 et a.

Exercice 4 : spectre et périodisation 1

Considérons x(t) un signal **périodique** de période T défini comme suit : x(t) = sgn(t) pour : -T/8 < t < T/8.

.



1) Calculer la puissance moyenne du signal x(t). En déduire qu'elle finie.

2) Calculer l'intensité de raie X_k de la série de Fourier du signal x(t). En déduire l'expression du signal x(t).

3) Calculer la transformée de Fourier du signal x(t).

4) Expliquer pourquoi le spectre d'amplitude ainsi obtenu est imaginaire pur et impair

5) Calculer la puissance de la composante continue et celle de la fréquence fondamentale de x(t).

6) Calculer la DSP du signal x(t).

Exercice 5 : spectre et périodisation 2

Considérons x(t) un signal sinusoïdal simple alternance de période T.

1) Calculer la puissance moyenne du signal x(t). En déduire qu'elle finie.

2) Calculer l'intensité de raie X_k de la série de Fourier du signal x(t).

3) En déduire l'expression du signal x(t) sous forme de série de Fourier.

4) Calculer la transformée de Fourier du signal x(t). En déduire le spectre d'amplitude.

5) Calculer la puissance fondamentale et la puissance de la première harmonique.

Exercice 6 : Auto corrélation et densité spectrale d'énergie et de puissance

Considérons le signal causal défini par $x_1(t) = e^{-at}$ $a > 0$ et $x_2(t) = A\sin 2\pi f_0 t$

1) Calculer et tracer la fonction d'auto corrélation $R_{xx}(\tau)$ des deux signaux. En déduire leurs énergie et puissance.

2) Déterminer la densité spectrale d'énergie et de puissance par deux méthodes différentes.

Exercice 7 : Autocorrélation et densité spectrale d'énergie

Considérons l'impulsion rectangulaire de durée θ définie par : $x(t) = \Pi_\theta(t - \frac{\theta}{2})$

1) Montrer que le signal x(t) est à énergie finie.

2) Déterminer la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du signal x(t).

3) Déterminer, de deux manières, la densité spectrale d'énergie $\Phi_x(f)$ du signal x(t)

Filtrage analogique

Exercice 8 : Filtre passe bas 1

Considérons un filtre passe bas idéal défini par sa réponse fréquentielle H(f) dans la bande passante [-B , +B]. On excite ce filtre par un signal d'entré x(t) périodique de période $T=2T_0$.

$$H(f) = \Pi_{2B}(f)e^{-2\pi j f t_0} \qquad avec \qquad B = \frac{3}{2T} \qquad x(t) = \sum_k \Lambda_{2T_0}(t - kT)$$

1) Montrer que le signal triangulaire peut se mettre sous la forme $\Lambda_{2T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\Pi_{T_0}(t) * \Pi_{T_0}(t)$.

2) Calculer la Transformée de Fourier de $\Lambda_{2T_0}(t)$

3) Calculer la Transformée de Fourier du signal x(t).

4) Etablir l'expression de la transformée de Fourier Y(f) du signal de sortie.

5) En déduire le signal de sortie y(t). Commenter le résultat.

Exercice 9 : Filtre passe bas 2

Considérons un filtre passe bas idéal défini par sa réponse fréquentielle H(f) dans la bande passante [-B , +B]. On excite ce filtre par un signal d'entré x(t) périodique de période T.

$$H(f) = \Pi_{2B}(f)e^{-2\pi j f t_0} \qquad avec \qquad B = \frac{3}{2T} \qquad x(t) = \sum_k A\Pi_{T/2}(t - kT)$$

1) Déterminer la transformée de Fourier X(f) du signal x(t).

2) Etablir l'expression de la transformée de Fourier Y(f) du signal de sortie.

3) En déduire le signal de sortie y(t). Commenter le résultat.

Exercice 10 : Canal de transmission et filtre égaliseur, echos simple

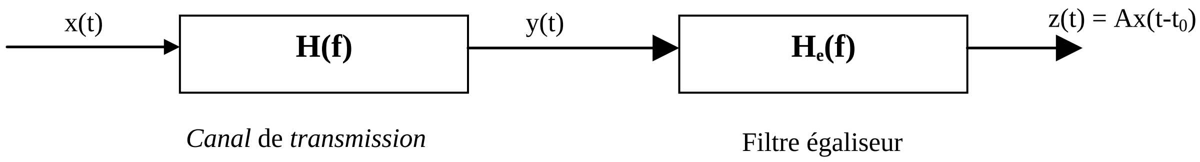
Considérons un canal de transmission défini par un filtre. Un signal x(t) transmis par ce canal subit la transformation suivante :

$$y(t) = Ax(t - t_0) + \alpha x(t - t_0 - \frac{1}{2B}) \quad avec \quad A >> \alpha$$

1) Déterminer la réponse en fréquence H(f) et la réponse impulsionnelle h(t) des deux canaux.

2) Montrer que H(f) induit une distorsion d'amplitude au signal d'entrée.

Nous allons essayer de compenser cette distorsion à l'aide d'un filtre égaliseur de façon à ce que le filtre global (canal +égaliseur) correspond à un filtre idéal.



3) Exprimer l'expression de la réponse en fréquence $H_e(f)$ des deux filtres égaliseurs satisfaisantes (on s'arrête au premier ordre en α).

4) En déduire l'expression du signal de sortie z(t) en fonction de y(t).

Exercice 11 : Canal de transmission et filtre égaliseur : écho multiple

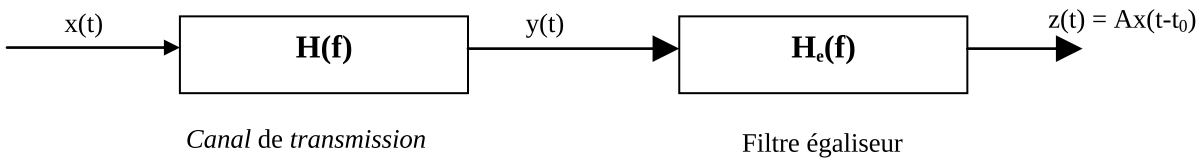
Considérons un canal de transmission défini par un filtre. Un signal x(t) transmis par ce canal subit la transformation suivante :

$$y(t) = Ax(t-t_0) + \alpha y_1(t-t_1) \quad avec \quad A >> \alpha \quad et \quad t_1 > t_0$$

1) Déterminer la réponse en fréquence H(f).

2) Montrer que H(f) induit une distorsion d'amplitude au signal d'entrée.

Nous allons essayer de compenser cette distorsion à l'aide d'un filtre égaliseur de façon à ce que le filtre global (canal +égaliseur) correspond à un filtre idéal.



3) Exprimer l'expression de la réponse en fréquence $H_e(f)$ du filtre égaliseur

4) En déduire l'expression du signal de sortie z(t) en fonction de y(t).

Echantillonnage et quantification

Exercice 12 : Fréquence fantôme

Considérons un enregistrement d'un signal sonore contenant une fréquence harmonique f_0 à 32khz inaudible. Ce signal est échantillonnée à une fréquence f_e = 40khz puis restituer à l'aide d'un filtre passe bas de bande passante comprise entre -20 et 20 KHz.

1) Calculer la transformée de Fourier X(f) du signal x(t).

2) Calculer la transformée de Fourier $X_e(f)$ du signal $x_e(t)$ et le représenter pour k = 0, ±1

3) Quelle sera le signal $Y_e(f)$. En déduire le signal y(t). En déduire la nouvelle fréquence du signal restitué.

Exercice 13 : Quantification d'un signal sinusoïdal et aléatoire uniforme

On veut enregistrer, sous format numérique binaire, un signal sinusoïdal de fréquence f_0 = 1 KHz et d'amplitude 5V, pour cela nous utilisons un convertisseur analogique numérique.

1) Déterminer le nombre de bit n du CAN si on veut que le rapport signal sur bruit de quantification soit supérieur à 45 dB.

2) En déduire le nombre de niveau M de quantification et le pas de quantification q.

Un signal possède une distribution statistique **uniforme** entre –V/4 et V/4, est quantifié uniformément par un dispositif de quantification disposant de 256 niveaux discrets représentant une plage totale de 1V.

1) Calculer le pas de quantification q et le nombre n de bit de ce CAN.

2) Déterminer le rapport signal sur bruit de quantification ainsi obtenu.

On donne : $P_x = \int_{-V_{max}}^{+V_{max}} p(x)x^2 dx$ avec $p(x) = \frac{1}{2V_{max}}$: densité de répartition statistiques du signal

Exercice 14 : Quantification d'un signal aléatoire non uniforme

On veut numériser, sous format numérique binaire, un signal aléatoire dont la densité de probabilité de répartition statistique de ses amplitudes est donnée par : $p(x) = \frac{1}{|x|}$ où l'amplitude maximale est de 1volt. Pour cela nous utilisons un convertisseur analogique numérique (CAN) de plage totale égale à 10 volts étalés sur 128 niveaux.

1) Déterminer le nombre de bit n du CAN et le pas de quantification q.
2) Calculer la puissance du signal.
3) Calculer la puissance du bruit de quantification.
4) En déduire le rapport signal sur bruit de quantification.

On donne : $P_x = \int_{-V_{max}}^{+V_{max}} p(x)x^2 dx$ avec $p(x) = \frac{1}{2V_{max}}$: densité de répartition statistiques du signal

Signaux et systèmes numériques

Exercice 15 : Convolution numérique 1

Considérons deux signaux discrets x(k) et y(k) définis par les expression suivantes :

$$x(k) = \delta(k) + 3\delta(k-1) + 4\delta(k-2) \quad \text{et} \quad y(k) = \delta(k) + 5\delta(k-1)$$

1) Exprimer la convolution de ces deux signaux.
2) Retrouver ce résultat en utilisant la transformée en z.

Exercice 16 : Convolution numérique 2

Considérons deux signaux discrets x(k) et y(k) définis par les expression suivantes :

$$x(k) = 2\delta(k-1) + 4\delta(k+2) \quad \text{et} \quad y(k) = 5\delta(k) + \delta(k-2)$$

1) Exprimer la convolution de ces deux signaux.
2) Retrouver ce résultat en utilisant la transformée en z.

Exercice 17 : Réponse en fréquence

On défini un système numérique linéaire et invariant dans le temps par l'équation récurrente suivante : $y(k) = x(k) + 4y(k-1) - 3y(k-2)$.

1) Déterminer la fonction de transfert H(z) du système. En déduire la réponse en fréquence H(f).
2) Déterminer la réponse impulsionnelle h(k).

On donne : $a^k \Gamma(k) \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}}$

Exercice 18 : Signal de sortie

Considérons des systèmes numériques définis par les équations récurrentes suivantes :

$$y(k) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(k-m) \quad ; \quad y(k) - 2y(k-1) = x(k)$$

1) Etablir les différentes représentations des ces systèmes.
2) On excite le 2ème système par le signal $x(k)=\Gamma(k)$, calculer le signal de sortie en utilisant la TZ.
3) Retrouver ce résultat en utilisant la convolution.

Exercice 19 : Représentation d'un système numérique

1) Etablir les différentes représentations du système numérique suivant : $h(k)=\begin{cases}-1 & si \quad k=0\\ a^{k-1} & k\geq 1\end{cases} \quad a<1$

2) En déduire la stabilité et la causalité du filtre.

Filtres numériques

Exercice 20 : Etude d'un filtre numérique RII

Soit un système numérique défini par la fonction de transfert : $H(z)=\dfrac{z}{(2z-1)(4z-3)}$

1) D'après l'expression de H(z), s'agit-il d'un système récursif ou non récursif ? pourquoi ?
2) Calculer la position des pôles et des zéros du filtre.
3) Etudier la stabilité et la causalité de ce système.
4) Déterminer la réponse impulsionnelle h(k).
5) Etablir l'expression de l'équation récurrente.

On donne : $a^k\Gamma(k)\xrightarrow{TZ}\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

Exercice 21 : Etude du signal de sortie

On se propose d'étudier un filtre défini par la réponse impulsionnelle causale suivante:

$h(k)=\begin{cases}1 & si \quad k=0\\ a^{k-1} & k\geq 1\end{cases} \quad a<1$

1) Montrer que la fonction de transfert H(z) du système est : $H(z)=1+\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
2) Calculer la position des pôles et des zéros du filtre (a quelconque). En déduire la stabilité et la causalité.
3) Etablir l'équation récurrente du filtre
4) Donner la structure de réalisation du filtre.
5) En utilisant la convolution, montrer que la réponse y(k) à l'excitation du signal échelon unitaire causal Γ(k) est : $y(k)=\dfrac{2-a-a^k}{1-a}\Gamma(k)$.
6) Retrouver ce résultat en utilisant la Transformée en z.
7) En déduire l'expression de y(k) pour k tendant vers l'infini.

On donne : $\sum_{n=0}^{N}x^n=\dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$ *et* : $a^k\Gamma(k)\xrightarrow{TZ}\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

Exercice 22 : Conception de filtre numérique RIF

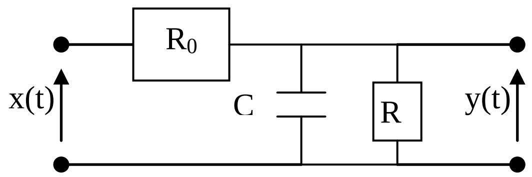
Considérons la réponse en fréquence H(f) suivante : $H(f)=\begin{cases}1 & si \quad \frac{1}{8}\leq|f|\leq\frac{3}{8}\\ 0 & si \quad \frac{3}{8}<|f|<\frac{1}{2}\\ 0 & si \quad 0\leq|f|<\frac{1}{8}\end{cases}$

1) Utiliser la Transformée de Fourier inverse des signaux discrets pour déterminer la réponse impulsionnelle h(k).
2) A partir de h(k), calculer les valeurs de la réponse impulsionnelle $h_1(k)$ de longueur 7 d'un filtre causal dont la réponse en fréquence soit une approximation de H(f).

3) Comparer la différence au niveau temporelle et fréquentielle entre les deux filtres issus de h(k) et $h_1(k)$.

Exercice 23 : Numérisation d'un filtre analogique par un RII

On désire numériser un filtre analogique définit par le circuit suivant : ($R = 10^3\,\Omega, R_0 = 2.10^3\,\Omega, C = 10^{-6}\,F$)



1) Calculer la fonction de transfert du circuit en déduire sa réponse impulsionnelle.
2) Utiliser les 3 types de numérisation (fe=1000 Hz) : Par invariance temporelle, par transformation bilinéaire et par équivalence de la dérivation.
3) Calculer la fonction de transfert H(z) correspondante.
4) En déduire leurs équations récurrentes.

Analyse spectrale

Exercice 24 : Analyse spectrale 1

Supposons qu'un signal de parole ait été échantillonné à f_e = 12KHz. On prélève un ensemble de 500 échantillons pour le traitement. Le calcul de la TFD est réalisé sur 1024 points et contient des pics aux points suivants : [40, 100, 924, 984].

1) Donner les valeurs en Hz des fréquences principales du signal de parole.
2) Calculer le pas d'échantillonnage fréquentiel.
3) Calculer la durée d'enregistrement T du signal de la parole
4) La troncature du signal de parole étant réalisé par une fenêtre porte. Calculer la différence fréquentielle minimale entre deux composantes du signal de parole susceptible d'être identifié par la TFD.

On donne : $B_i\,(\,fonction\ porte) = \dfrac{2 f_e}{N}$

Exercice 25 : Analyse spectrale 2

Considérons un signal numérique dont la largeur de bande de son spectre est étalée sur 5300 Hz. Ce spectre possède 2 pics d'amplitudes unité à 1563 Hz et 1650 Hz. On prélève 400 échantillons de ce signal sur une durée de 50 ms. Le calcul de la TFD est réalisé sur 2000 points.

1) Pourquoi le nombre de point de la TFD ne correspond pas au nombre d'échantillons considéré ? Quel est l'avantage d'une telle procédure ?
2) Calculer la période d'échantillonnage Te du signal. La condition de Shannon est – elle respectée ?
3) Calculer le pas d'échantillonnage fréquentiel Δf.
4) Déterminer les numéros n1 et n2 correspondants à ces deux fréquences dans la TFD.
5) Montrer que les deux pics du signal ne peuvent pas se trouver chacune sur une raie de la TFD. Comment appelle-t-on une telle situation ?
6) Parmi les fenêtres suivantes : Porte, Hamming, Hanning et Blackman, quelle est celle qui permet d'identifier les deux pics avec une bonne précision.

Exercice 26 : Analyse spectrale 3

Considérons un signal numérique, dont la plus haute fréquence se trouve à 1250 Hz, et nous voulons calculer par FFT son spectre avec une résolution spectrale d'au moins 5 Hz.

1) Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale respectant la condition de Shannon.
2) Calculer la durée minimale de ce signal.

3) Quel est le nombre N de point à considérer lors de cette FFT sachant qu'il doit être un multiple de 2 pour des considérations algorithmiques.
4) Déterminer la valeur de la résolution spectrale obtenue.
5) Faut-il compléter ce signal par des valeurs nulles si on dispose d'une observation de durée
T = 150 ms.
T = 300 ms.

Exercice 27 : Fréquence fantôme

Considérons un signal numérique réel qui possède deux fréquences à 1817 Hz et à 3000 Hz. Ce signal est échantillonné à la fréquence $f_e = 4000 Hz$. On prélève 400 échantillons de ce signal sur une durée de 100 ms. Le calcul de la TFD est réalisé sur 4000 points.

1) La fréquence d'échantillonnage respecte – elle le théorème de Shannon ?
2) Exprimez les valeurs des fréquences, en Hz, présentes sur le spectre numérique entre 0 et $\frac{f_e}{2}$.
3) Déterminer les numéros {n} correspondants à ces fréquences dans la TFD.
4) Calculer le pas d'échantillonnage fréquentiel.
5) Calculer la résolution fréquentielle de ce spectre.

Exercice 28 : Résolution fréquentielle et dynamique

On dispose d'un signal contenant plusieurs fréquences et dont le rapport d'amplitude ne dépasse pas la valeur 50 dB. Ce signal est échantillonné à la fréquence 100Hz et chacune des fréquences est séparée d'au moins 4Hz. On désire obtenir une précision de 0.5Hz sur l'estimation spectrale de ces fréquences. Pour cela on utilise la technique des zéros padding.

1) Quel type de fenêtre doit on utiliser ?
2) Quelle durée N du signal doit on utiliser pour satisfaire la contrainte sur la résolution fréquentielle ? En déduire la durée d'observation T du signal ?
3) Pour réaliser la précision sur l'estimation spectrale de 0.5 Hz, quel doit être le nombre de zéros que nous devons ajouter aux échantillons du signal ?

SOLUTION

Exercice 1 : Energie ou puissance

1) $E_1 = \infty \; ; P_1 = \dfrac{A^2}{2}$; $E_2 = \infty \; ; P_2 = \infty$; $E_2 = T \; ; P_2 = 0$

Exercice 2 : Spectre d'apmlitude et de phase

1) $X(f) = \dfrac{1}{2\pi jf}$

2) $X_1(f) = \dfrac{1/2}{1 + j\dfrac{(f - f_0)}{f_0}} + \dfrac{1/2}{1 + j\dfrac{(f + f_0)}{f_0}}$

3) $|X_1(0)| = \dfrac{1}{2}$ $\quad Arg[X_1(0)] = 0; \quad X_1(f_0) = \dfrac{1+j}{1+2j}; \quad |X_1(f_0)| = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \quad Arg[X_1(f_0)] = -18°$

Exercice 3 : Calcul de spectre

1) $E_x = \dfrac{1}{a}$

2) $X(f) = \dfrac{1}{a + 2\pi jf} + \dfrac{1}{a - 2\pi jf}$

3) $X(f) = \dfrac{a}{a^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2} + \dfrac{a}{a^2 + 4\pi^2 (f + f_0)^2}$

Exercice 4 : Spectre et périodisation 1

1) $P_x = \dfrac{1}{4}$

2) $X_k = \dfrac{2\sin^2(\pi k/8)}{j\pi k}$; $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k e^{2\pi j\frac{kt}{T}}$

3) $X(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \delta(f - \frac{k}{T})$

4) x(t) réelle et impaire

5) $P_0 = \dfrac{1}{16}$; $P_1 \cong 0.0174$

6) $\Phi(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |X_k|^2 (f - \frac{k}{T})$

Exercice 5 : Spectre et périodisation 2

1) $P_x = \dfrac{1}{4}$

2) $X_k = \dfrac{1}{2\pi}[\dfrac{\sin(\pi(1-k)/2)}{1-k} + \dfrac{\sin(\pi(1+k)/2)}{1+k}]$

3) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k e^{2\pi j\frac{kt}{T}}$

4) $X(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \delta(f - \frac{k}{T})$

5) $P_0 = \dfrac{1}{\pi^2}$; $P_1 = \dfrac{1}{8\pi^2}$

Exercice 6 : Auto corrélation et densité spectrale d'énergie et de puissance

1) $R_{x_1}(\tau) = \dfrac{1}{2a} e^{a|\tau|}$; $R_{x_2}(\tau) = \dfrac{A^2}{2}\cos(2\pi\tau f_0)$; $E_{x_1} = \dfrac{1}{2a}$; $P_{x_2} = \dfrac{A^2}{2}$

2) $\Phi_{x_1} = \dfrac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$; $\Phi_{x_2}(f) = \dfrac{A^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

Exercice 7 : Auto corrélation et densité spectrale d'énergie

1) $E_x = \theta$

2) $R_x(\tau) = \begin{cases} \theta - \tau \; si \; \tau > 0 \\ \theta + \tau \; si \; \tau < 0 \end{cases}$

3) $\Phi_x = \dfrac{\sin^2(\pi\theta f)}{\pi^2 f^2}$

Exercice 8 : Filtre passe bas 1

1) $\Lambda_{2T_0}(t) = \dfrac{1}{T_0}\Pi_{T_0}(t) * \Pi_{T_0}(t)$

2) $X(f) = \dfrac{\sin^2(\pi T_0 f)}{T_0 \pi^2 f^2}$

3) $X(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \delta(f - \dfrac{k}{T}) \quad avec \quad X_k = 2\dfrac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi^2 k^2}$

4) $Y(f) = X(f).H(f) = [X_0\delta(f) + X_1\delta(f - \dfrac{1}{T}) + X_{-1}\delta(f + \dfrac{1}{T})]e^{-2\pi j f t_0}$

5) $y(t) = X_0 + 2X_1 \cos(2\pi \dfrac{t - t_0}{T})$

Exercice 9 : Filtre passe bas 2

1) $X(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \delta(f - \dfrac{k}{T}) \quad avec \quad X_k = A\dfrac{\sin(\pi k/2)}{\pi k}$

2) $Y(f) = X(f).H(f) = [X_0\delta(f) + X_1\delta(f - \dfrac{1}{T}) + X_{-1}\delta(f + \dfrac{1}{T})]e^{-2\pi j f t_0}$

3) $y(t) = X_0 + 2X_1 \cos(2\pi \dfrac{t - t_0}{T})$

Exercice 10 : Canal de transmission et filtre égaliseur : écho simple

1) $H(f) = Ae^{-2\pi j f t_0} + \alpha e^{-2\pi j f (t_1 + \frac{1}{2B})}$; $h(t) = A\delta(t - t_0) + \alpha\delta(t - t_1 - \dfrac{1}{2B})$

2) $|H(f)| \neq Cte$; $Arg[H(f)] \neq Cte \; f$

3) $H_e(f) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{A}{\alpha}e^{-\pi j f/B}} \approx 1 - \dfrac{A}{\alpha}e^{-\pi j f/B}$; $z(t) = y(t) - \dfrac{A}{\alpha}y(t - \dfrac{1}{2B})$

Exercice 11 : Canal de transmission et filtre égaliseur : échos multiple

1) $H(f) = \dfrac{Ae^{-2\pi jft_0}}{1-\alpha e^{-2\pi jft_1}}$
2) $|H(f)| \neq Cte$; $Arg[H(f)] \neq Cte\ f$
3) $H_e(f) = 1-\alpha e^{-2\pi jft_1}$
4) $z(t) = y(t) - \alpha y(t-t_1)$

Exercice 12 : Fréquence fantôme

1) $X(f) = \dfrac{1}{2}\delta(f-f_0) + \dfrac{1}{2}\delta(f+f_0)$
2) $X_e(f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0-kf_e) + \delta(f+f_0-kf_e)]$
3) $X_e(f) = \dfrac{1}{2}[\delta(f-f_0+f_e) + \delta(f+f_0-f_e)]$; $y_e(t) = \cos(2\pi t(f_e - f_0))$

Exercice 13 : Quantification 1

1) $n = 8 bits$
2) $M = 256$
3) $q = \dfrac{1}{256} volt$; $n = 8 bits$
4) $\xi = 6(n-1)dB$

Exercice 14 : Quantification 2

1) $n = 6 bits$
2) $P_x = 1 Volt^2$
3) $P_e = \dfrac{q^2}{12}$
4) $\xi = [6n + 10\log(\dfrac{3}{25})]dB$

Exercice 15 : Convolution numérique 1

1) $x(k) * y(k) = 14\delta(k-1) + 2\delta(k-3) + 20\delta(k+1)$
2) $x(k) * y(k) = TZ^{-1}[14z^{-1} + 2z^{-3} + 20z]$

Exercice 16 : Convolution numérique 2

1) $x(k) * y(k) = \delta(k) + 8\delta(k-1) + 19\delta(k-2) + 20\delta(k-3)$
2) $x(k) * y(k) = TZ^{-1}[1 + 8z^{-1} + 19z^{-2} + 20z^{-3}]$

Exercice 17 : Réponse en fréquence

1) $H(z) = \dfrac{1}{1-4z^{-1}+3z^{-2}}$; $H(f) = \dfrac{1}{1-4e^{-é\pi jf} + 3z^{-4\pi jf}}$

2) $h(k) = -\frac{1}{2}\Gamma(k) + \frac{3}{2}3^k\,\Gamma(k)$

Exercice 18 : Signal de sortie

1) $H_1(z) = \frac{1}{M}\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$; $H_2(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$; $h_1(k) = \frac{1}{M}[\Gamma(k) - \Gamma(k-M)]$; $h_2(k) = 2^k\,\Gamma(k)$

$y_1(k) - y_1(k-1) = \frac{1}{M}x(k) - \frac{1}{M}x(k-M)$; $y_2(k) - 2y_2(k-1) = x(k)$

2) $y_2(k) = (2^{k+1} - 1)\Gamma(k)$

Exercice 19 : Représentation d'un système numérique

1) $H(z) = -1 + \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$; $y(k) - ay(k-1) = -x(k) + (1-a)x(k-1)$; $H(f) = -1 + \frac{e^{-2\pi jf}}{1-ae^{-2\pi jf}}$

$h(k) = -\delta(k) + a^{k-1}\Gamma(k-1)$

2) Stable et causal

Exercice 20 : Etude d'un système numérique RII

1) Système numérique récursif.
2) $p = \frac{1}{2};\frac{3}{4}$ $\quad z = 0$
3) Stable et causal
4) $h(k) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k\,\Gamma(k) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^k\,\Gamma(k)$
5) $y(k) - \frac{10}{8}y(k-1) + \frac{3}{8}y(k-2) = \frac{1}{8}x(k-1)$

Exercice 21 : Etude du signal de sortie

1) $H(z) = 1 + \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
2) $p = a$; $z = a-1$. Stable et causal
3) $y(k) - ay(k-1) = x(k) + (1-a)x(k-1)$
4) $y(k) = \frac{2-a-a^k}{1-a}\Gamma(k)$
5) $y(\infty) = \frac{2-a}{1-a}\Gamma(k)$

Exercice 22 : Conception de filtre numérique RIF

1) $h(k) = \frac{\sin(\pi k3/4)}{\pi k} - \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k}$
2) $h_1(0) = 0$; $h_1(1) = -\frac{1}{\pi}$; $h_1(2) = 0$; $h(3) = \frac{1}{2}$; $h(4) = 0$; $h(5) = -\frac{1}{\pi}$; $h_1(6) = 0$
3) Troncature temporelle et ondulation fréquentielle : phénomène de Gibbs

Exercice 23 : Numérisation d'un filtre analogique par un RII

1) $H(p) = \dfrac{R}{RR_0 PC + R + R_0}$

2) Par invariance temporelle : $H(z) = \dfrac{1/2}{1 - e^{-\frac{3}{2}} z^{-1}}$

Par équivalence de la dérivée : $H(z) = \dfrac{1}{5 - 2z^{-1}}$

Par équivalence de l'intégrale : $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1}}{7 - z^{-1}}$

3) $y(k) - e^{-\frac{3}{2}} y(k-1) = \dfrac{1}{2} x(k)$; $y(k) - \dfrac{2}{5} y(k-1) = \dfrac{1}{5} x(k)$; $y(k) - \dfrac{1}{7} y(k-1) = \dfrac{1}{5} x(k) + \dfrac{1}{5} x(k-1)$

Exercice 24 : Analyse spectrale 1

1) $f = [469, 1172, 10828, 11531]\,\mathrm{Hz}$
2) $\Delta f = 11.72 Hz$
3) $T = 0.0853 s$
4) $23 Hz$

Exercice 25 : Analyse spectrale 2

1) Zéros padding. Amélioration de la résolution spectrale et fréquentielle.
2) $f_e = 8000 Hz$ La condition de Shannon est respectée.
3) $f = 4 Hz$
4) $n_1 = 390.75$; $n_2 = 412.5\,\mathrm{Hz}$
5) n_1 *et* $n_2 \notin \aleph$ dispersion spectrale
6) Porte, Hamming et Hanning.

Exercice 26 : Analyse spectrale 3

1) $f_e = 2500 Hz$
2) $T = 0.2 s\,\mathrm{Hz}$
3) $n_1 = 512$
4) $\Delta f = 4.88 Hz$
5) Pour $T = 150 ms$ il faut compléter par des zéros. Pour $T = 300 ms$ Non.

Exercice 27 : Fréquence fantôme

1) *Oui*
2) $f_1 = 1817 Hz$; $f_2 = 1000 Hz$
3) $n_1 = 1817$; $n_2 = 1000$
4) $\Delta f = 1 Hz$
5) $Résolution\ fréquentiele = 20 Hz$

Exercice 28 : Résolution fréquentielle et dynamique

1) *Fenêtre Blackman*
2) $N = 150$; $T = 1{,}5 s$
3) $N_z = 50$