Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2019/2010
Pr. M. Chabab

Série TD 1- Théorie Quantique des Champs
Master PHEAPC - S2

Exercice I : Champs Scalaires

Soit une théorie des champs scalaire réel définie par la densité lagrangienne :

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

1. Déterminer l'expression de l'Hamiltonien H en fonction de $\phi(x)$ et $\pi(x)$. $\pi(x)$ est le moment conjugué du champ $\phi(x)$.

2. a) Trouver l'expression de l'opérateur $a(k)$ en fonction de $\phi(x)$ et $\pi(x)$.
   b) Montrer alors que $a(k)$ est indépendant du temps : $\frac{\partial a(k)}{\partial t} = 0$.

3. Connaissant les relations de commutation canoniques suivantes (à temps égaux : $x^o = y^0$) :

   $[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^3(x-y), \qquad [\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$

   Montrer les relations de commutation suivantes :

   a) $[a(k), a^+(q)] = \delta^3(k-q)$
   b) $[a(k), a(q)] = 0.$

4. Exprimer H en fonction des opérateurs $a(k)$ et $a^+(k)$.

5. Montrer que la valeur moyenne dans le vide de H est divergente : $< 0 \mid H \mid 0 >= 2\delta^3(0) I$, où I est une intégrale à préciser.

Exercice II :

According to the Noether theorem, a translationally invariant system of classical fields ϕ_a has a conserved stress-energy tensor

$$T^{\mu\nu}_{\text{Noether}} = \sum_a \mathcal{L}(\partial_\mu \phi_a)\, \partial^\nu \phi^a \; - \; g^{\mu\nu}\, \mathcal{L}.$$

Actually, to assure the symmetry of the stress-energy tensor, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ (which is necessary for the angular momentum conservation), one sometimes has to add a total divergence,

$$T^{\mu\nu} \; = \; T^{\mu\nu}_{\text{Noether}} \; + \; \partial_\lambda \mathcal{K}^{[\lambda\mu]\nu}, \tag{1}$$

where $\mathcal{K}^{[\lambda\mu]\nu}$ is some 3–index Lorentz tensor antisymmetric in its first two indices.

1. Show that regardless of the specific form of $\mathcal{K}^{[\lambda\mu]\nu}(\phi, \partial\phi)$,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{Noether}} \; = \; 0 \tag{2}$$

$$P^\mu_{\text{net}} = \int d^3\mathbf{x}\, \mathbf{T^{0\mu}} \; = \int \mathbf{d^3x}\, \mathbf{T}^{\mathbf{0}\mu}_{\text{Noether}}\, . \tag{3}$$

2. For the scalar fields, real or complex, $T^{\mu\nu}_{\text{Noether}}$ is properly symmetric and one simply has $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{Noether}}$. Unfortunately, the situation is more complicated for the vector, tensor or spinor fields. To illustrate the problem, consider the free electromagnetic fields described by the Lagrangian

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) \; = \; -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

where A_μ is a real vector field and $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

a) Write down $T^{\mu\nu}_{\text{Noether}}$ for the free electromagnetic fields and show that it is neither symmetric nor gauge invariant.

b) The properly symmetric — and also gauge invariant — stress-energy tensor for the free electromagnetism is :

$$T^{\mu\nu}_{\text{EM}} \;=\; -F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\;\;\lambda} \;+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\,F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}.$$

Show that this expression indeed has the form of Eq. 1 for some $\mathcal{K}^{[\lambda\mu]\nu}$ to be determined.

Exercice III : Champs Fermioniques

Considérons une théorie de champs définie par la densité lagrangienne suivante :

$$L = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x) - gx^2\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

où $\psi(x)$ psi est un champ de Dirac.

1. Trouver les équations de mouvement ($Euler - Lagrange$) des champs de cette théorie.
2. Montrer que L est invariant de forme sous les transformations de jauge globales :

$$\psi^{'}(x) = exp(iq\theta)\psi(x)$$

3. Déterminer l'expression du tenseur Energie-Impulsion $T^{\mu\nu}$.

4. Calculer la divergence $\partial^\mu T^{\mu\nu}$. Commenter.