

# CONTROL DIGITAL

## Área Automatización y Robótica

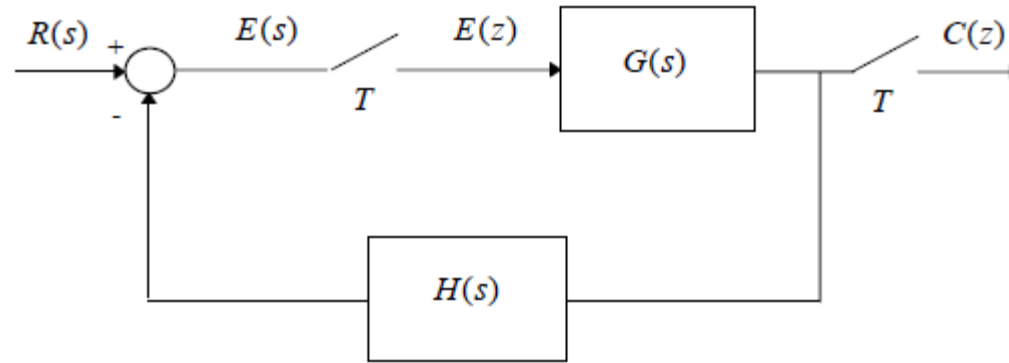
**Profesor: Mario Alejandro Giraldo Vásquez, M. Sc.**

**SEMESTRE 02-2021**

**CLASE 6**

- Mapeo del plano  $s$  al  $Z$
- Discretización de sistemas por métodos de aproximación

# Respuesta de un sistema muestreado



La respuesta ante la señal de entrada es

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + HG(z)} = \frac{k \prod^m (z - z_i)}{\prod^n (z - p_i)} R(z)$$

# Respuesta de un sistema muestreado

Aplicando fracciones parciales:

$$C(z) = \frac{k_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{k_n z}{z - p_n} + C_R(z)$$

Los  $n$  términos **constituyen la respuesta transitoria**, **cada polo aporta**:

$$z^{-1} \left\{ \frac{k_i z}{z - p_i} \right\} = k_i (p_i)^n u[n]$$

$C_R(z)$  representa la respuesta permanente debido a los polos de  $R(z)$ .

# Mapeo del plano $s$ al $Z$

- Las variables  $s$  y  $z$  están relacionadas a través del mapeo  $z = e^{sT}$ .
- Los efectos de la ubicación de los polos en  $s$  determinan los efectos de los polos en  $z$ .
- Como  $s = \sigma + j\omega$  entonces

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{Tj\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

- La ubicación de los polos en  $z$  dependen del valor de  $T$ .

# Mapeo del plano $s$ al $Z$

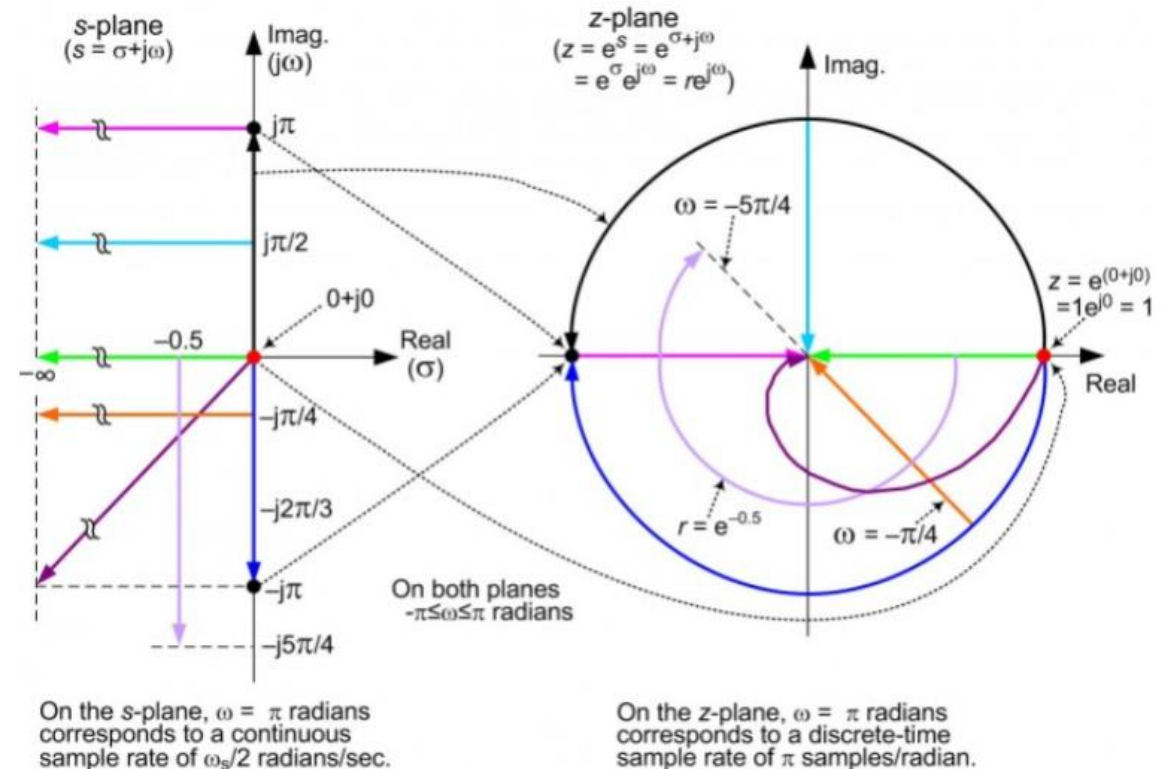
- Las variables  $s$  y  $z$  están relacionadas a través del mapeo  $z = e^{sT}$ .
- Los efectos de la ubicación de los polos en  $s$  determinan los efectos de los polos en  $z$ .
- Como  $s = \sigma + j\omega$  entonces

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{Tj\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

- La ubicación de los polos en  $z$  dependen del valor de  $T$ .

# Mapeo del plano $s$ al $Z$

- El semiplano izquierdo de  $s$  se transforma en el interior del círculo unitario en  $z$ , siendo la circunferencia unidad la imagen del eje  $s = j\omega$
- Para que un sistema discreto LTI sea estable, los polos del sistema han de estar situados en el interior del círculo unitario.



# Especificaciones de respuesta transitoria y permanente

- Las especificaciones de respuesta transitoria vienen dadas por los valores de tiempo de subida, sobreoscilación y tiempo de establecimiento, relacionados con  $\xi$  y  $w_n$  (sistema dominante 2ºorden).
- Los valores de  $\xi$  y  $w_n$  determinarán la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano  $z$ . Es posible obtener diferentes lugares geométricos en el plano  $z$  usando  $z = e^{sT}$ .

# Diseño de controladores discretos

Diseño en  
continuo y se  
discretiza

$$G(s) \rightarrow C(s) \rightarrow Z\{C(s)\} \rightarrow C(z)$$

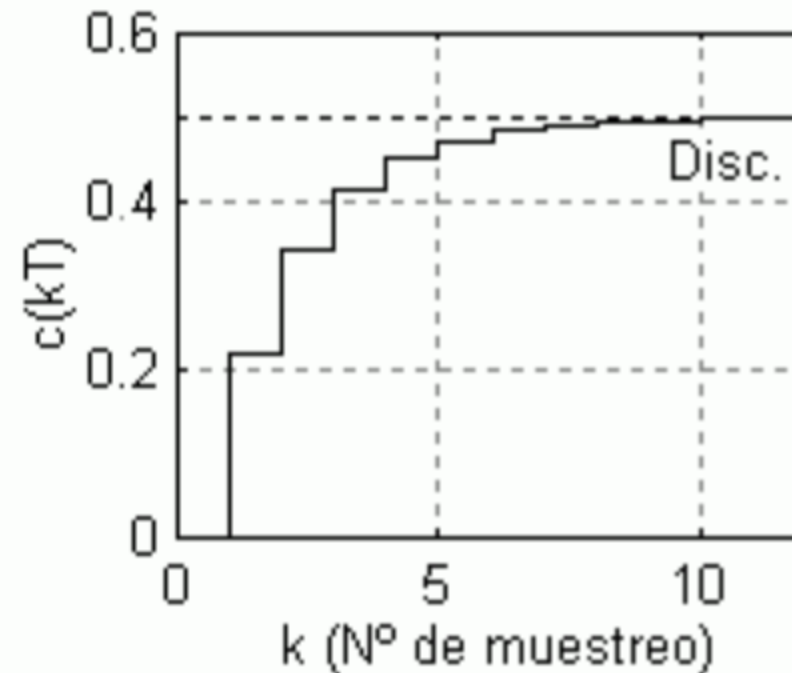
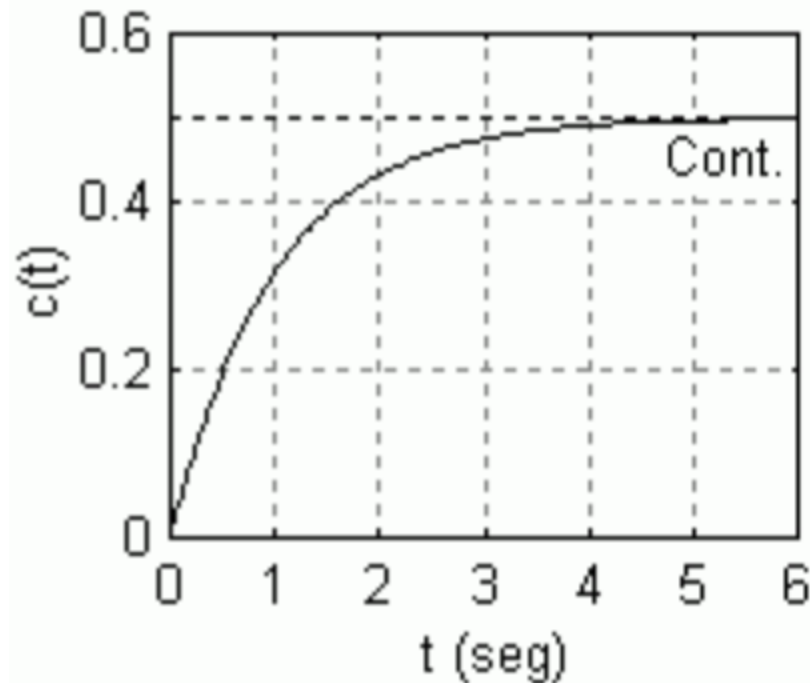
Diseño de  
controlador  
discreto

$$G(s) \rightarrow Z\{G(s)\} \rightarrow G(z) \rightarrow C(z)$$

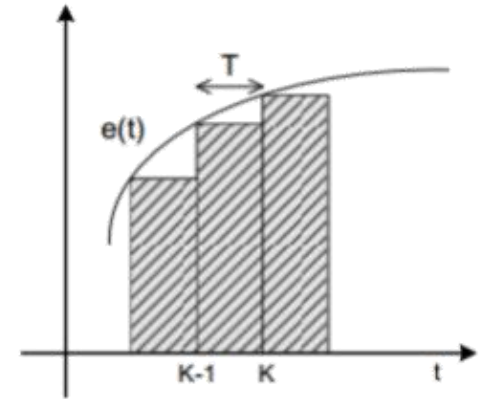
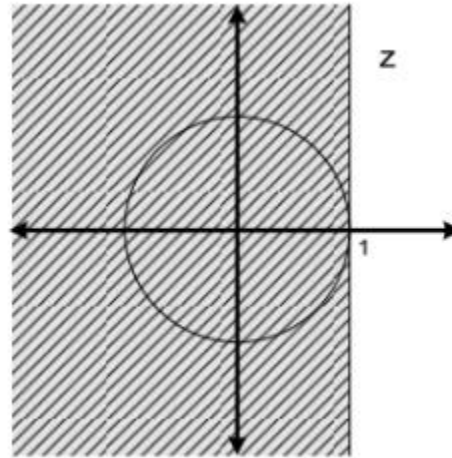
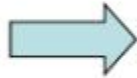
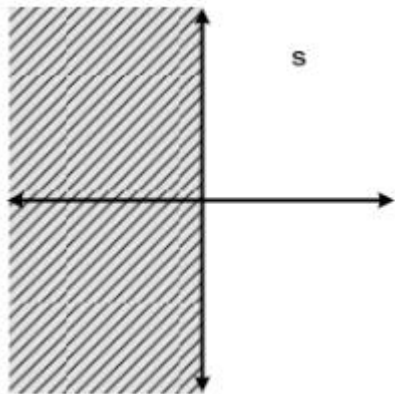


# Diseño de controladores discretos

Para cualquiera de los dos caminos, la respuesta de la planta en tiempo discreto y tiempo continuo sean equivalentes. Dependemos de  $T$ .

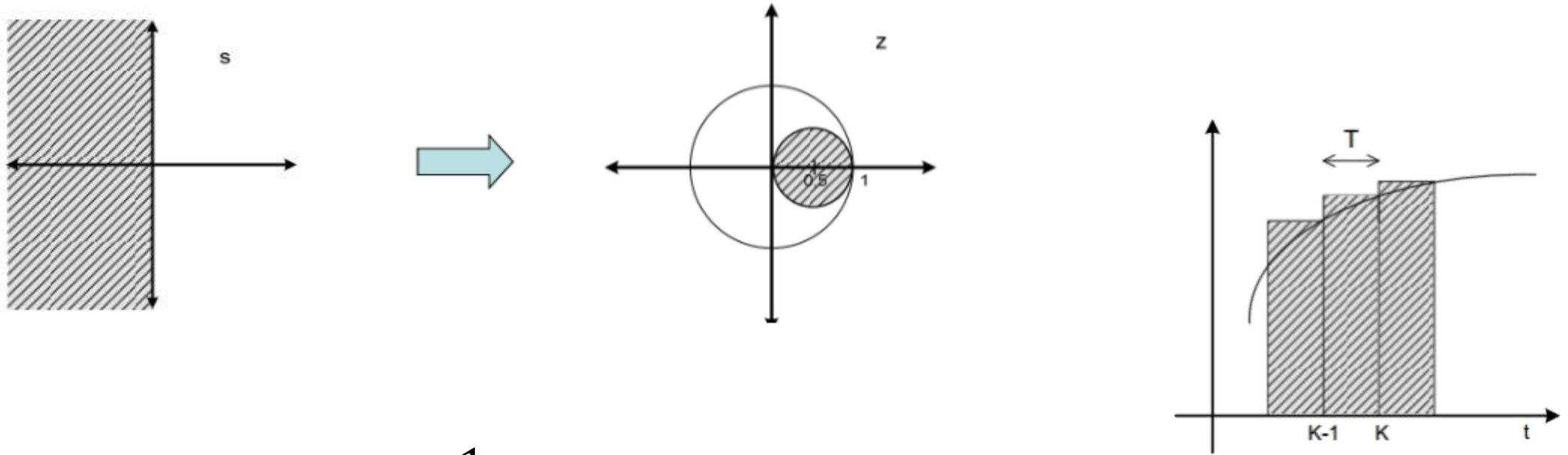


# Aproximación rectangular hacia adelante – Euler I



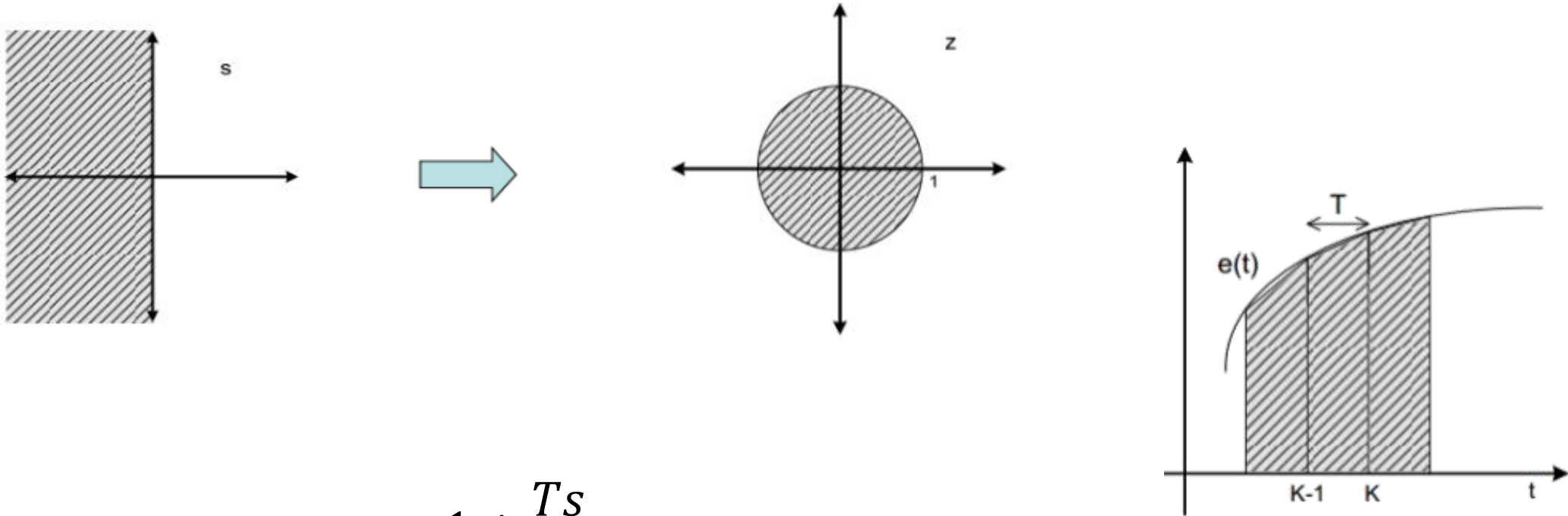
$$z = Ts + 1$$

# Aproximación rectangular hacia atrás – Euler II



$$z = \frac{1}{1 - Ts}$$

# Aproximación trapezoidal o bilineal o tustin



$$z = \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}}$$

# Ejemplo de estabilidad

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4}$$

