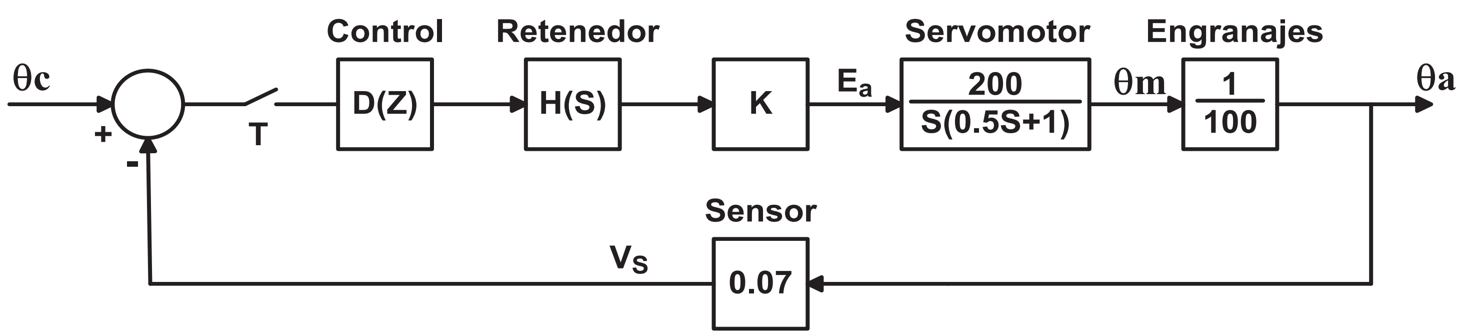
EJEMPLO FTP EN LAZO CERRADO

La figura representa el sistema de control para una de las articulaciones de un robot. a) Si la entrada al sensor es el ángulo θ_a en grados y el movimiento de la articulación está restringido de 0º a 270º, determinar el rango de la salida del sensor. b) Determinar la función de transferencia del sistema en lazo cerrado cuando $K = 2.4\ y\ D(z) = 1$ Asuma que $T = 0.1\ s$. c) Obtener $\theta_a(kT)$ cuando la entrada es $\theta_{c=}5\ V$. Cuál será el valor final de θ_a?



a) Para $\theta_a = 0°$ $\quad V_S = 0.07 * 0 = 0$ $\quad$ Para $\theta_a = 270°$ $\quad V_S = 0.07 * 270 = 18.9\ V$

El rango de la salida del sensor es de $0\ a\ 18.9\ V$

EL PLANO Z Y SU RELACIÓN CON EL PLANO S

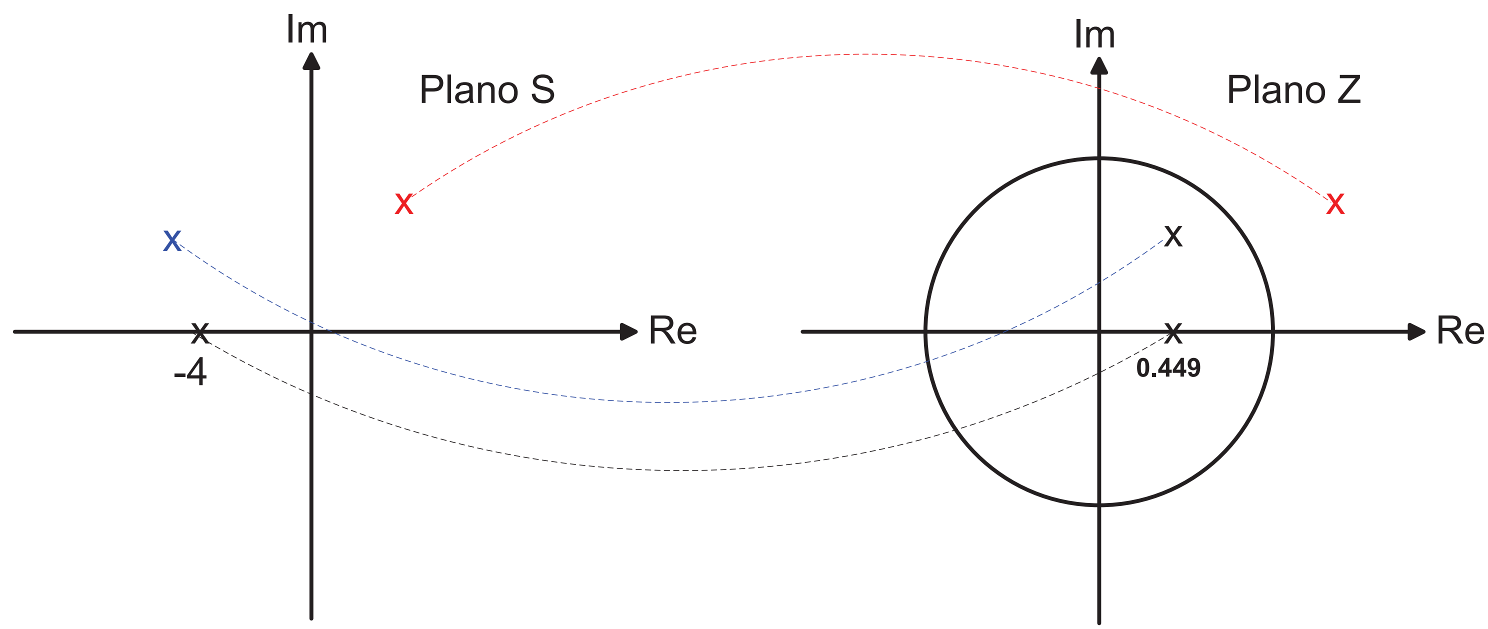
En los sistemas de control en tiempo continuo, la localización de los polos y de los ceros en el plano S permite establecer el comportamiento dinámico del sistema. En los sistemas de control en tiempo discreto, la ubicación de los polos y de los ceros en el plano z posibilita analizar el desempeño del sistema discreto.

TRANSFORMADA DE LAPLACE	TRANSFORMADA z
$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(S) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-St}dt$	$\Im\{(t)\} = \Im\{(kT)\} = F(z) = \sum_0^{\infty} f(kT)z^{-k}$
t	kT
e^{-St}	z^{-k}
e^{ST}	z

Cuando en el proceso se involucra un muestreo por impulsos, las variables complejas z y S se relacionan, mediante la ecuación:

$$z = e^{ST}$$

MAPEO DE POLOS Y CEROS EN EL PLANO S Y Z



Para un polo en el plano S ubicado en $S = -4$, y periodo de muestreo $T = 0.2\ s$, la ubicación del polo correspondiente en el plano z es $z = 0.449$

$$z = e^{ST} = e^{-4*0.2} \qquad z = 0.449$$

SISTEMA DE PRIMER ORDEN

La función de transferencia de un sistema de primer orden con retardo es:

$$G_P(S) = \frac{Ke^{-\theta S}}{\tau S + 1}$$

$K =$ Ganancia del sistema

$\tau =$ Constante de tiempo

$\theta =$ Retardo o tiempo muerto

La ecuación característica es:

$$\tau S + 1 = 0 \qquad S = -\frac{1}{\tau} \qquad z = e^{ST}$$

Por lo tanto:

$$z = e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad \tau = -\frac{T}{ln|z|}$$

SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Para un sistema de segundo orden, con función de transferencia dada por:

$$G(S) = \frac{Kw_n^2}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} \qquad \begin{cases} w_n = Frecuencia\ natural \\ \xi = Coeficiente\ de\ amortiguamiento \\ K = Ganacia\ del\ sistema \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación característica: $S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2 = 0$ son:

$$S_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Utilizando la ecuación $z = e^{ST}$ y teniendo en cuenta que $e^{\pm j\alpha} = cos\alpha \pm jsen\alpha$:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_n T \sqrt{1 - \xi^2} = |z| \angle \pm \theta$$

Haciendo $w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$, la ecuación anterior se transforma en:

$$z = e^{-\xi w_n T} \angle \pm w_d T$$

El ángulo $w_d T$ está dado en radianes. Para darlo en grados:

$$|z| = e^{-\xi w_n T}$$

$$\theta = 57.3 w_n T \sqrt{1 - \xi^2}$$

Luis Edo García Jaimes

EJEMPLO

Para los sistemas de control de tiempo discreto, con periodo de muestreo $T = 1.5\ s$

$$a)\ G_1(z) = \frac{2}{z - 0.5} \qquad b)\ G_2(z) = \frac{0.6z}{z^2 - 1.2z + 0.4} \qquad c)\ G_3(z) = \frac{0.2z}{(z - 0.6)(z^2 - 1.4z + 0.6)}$$

Determinar la constante de tiempo y la ganancia DC.

a) Para el sistema: $G_1(z) = \frac{2}{z-0.5}$

Ecuación característica: $z - 0.5 = 0$ Raices de la ecuación característica: $z = 0.5$

Constante de tiempo: $\tau = -\frac{T}{ln|z|}$ $\tau = -\frac{1.5}{ln|0.5|}$ $\tau = 2.16\ s.$

Ganancia DC $K_{DC} = \lim_{z\to 1} G(z)$ $K_{DC} = \lim_{z\to 1} \frac{2}{z-0.5}$ $K_{DC} = 4$

b) Para el sistema: $G_2(z) = \frac{0.6z}{z^2-1.2z+0.4}$

Ecuación Característica: $z^2 - 1.2z + 0.4 = 0$ Raíces: $z = 0.6 \pm j0.2$

$$|z| = \sqrt{Re^2 + Im^2} \qquad |z| = \sqrt{0.6^2 + 0.2^2} \qquad |z| = 0.632$$

Constante de tiempo: $\tau = -\frac{T}{ln|z|}$ $\tau = -\frac{1.5}{ln|0.632|}$ $\tau = 3.26\ s.$

Ganancia DC $K_{DC} = \lim_{z\to 1} \frac{0.6z}{z^2-1.2z+0.4}$ $K_{DC} = 3$

Luis Edo García Jaimes

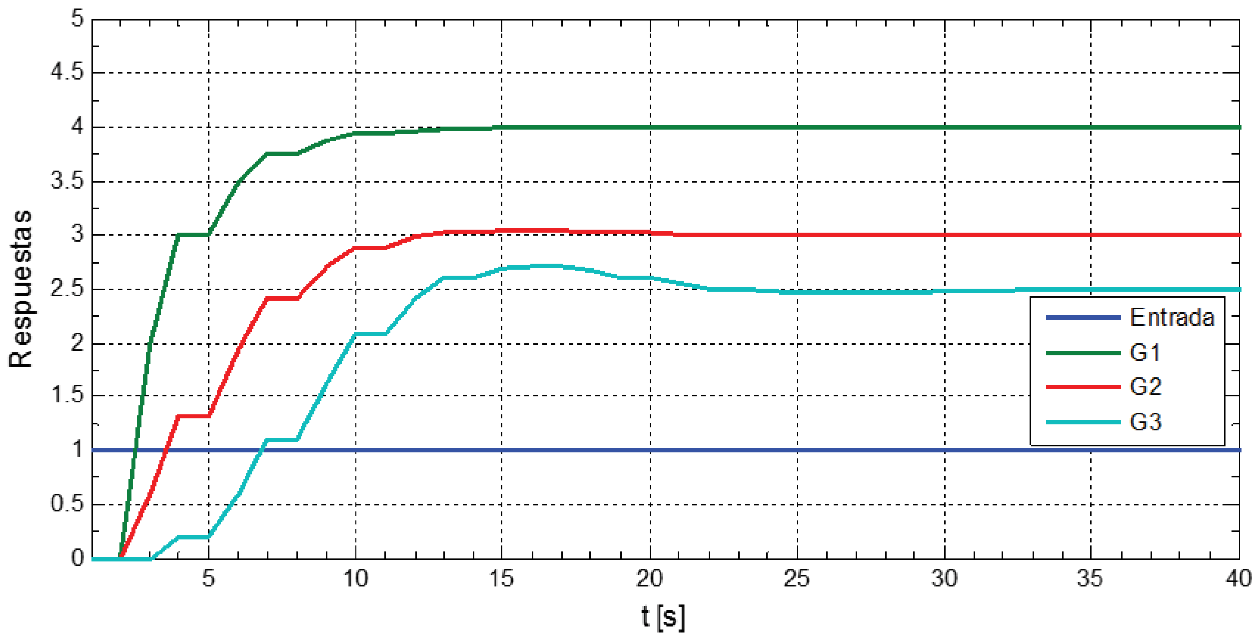
CONTINUACIÓN EJEMPLO

c) Para el sistema: $G_3(z) = \frac{0.2z}{(z-0.6)(z^2-1.4z+0.6)}$

Ecuación característica: $(z-0.6)(z^2-1.4z+0.6)=0$ Raíces: $z=0.6$ $z=0.7\pm 0.5567$

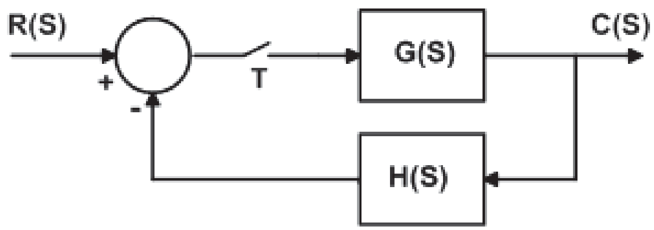
Constante de tiempo: $\tau = -\frac{1.5}{ln|0.6|} - \frac{1.5}{ln|0.8943|}$ $\tau = 16.36\ s$

Ganancia: $K_{DC} = 2.5$



ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

Para el sistema de control en tiempo discreto de la figura, la función de transferencia de pulso en lazo cerrado está dada por:



$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$1 + GH(z) = 0$$

Si z es una raíz de la ecuación característica y teniendo en cuenta que

$$z = e^{ST}$$

Si $S < 0$	Entonces:	$z < 1$	El sistema es estable
Si $S = 0$	Entonces:	$z = 1$	El sistema es críticamente estable
Si $S > 0$	Entonces:	$z > 1$	El sistema es inestable

Luis Edo García Jaimes

CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DISCRETO

- El sistema es estable si todos sus polos de lazo cerrado están ubicados dentro del círculo unitario del plano z. Cualquier polo de lazo cerrado localizado fuera del círculo unitario genera un sistema inestable.
- Un polo simple o un solo par de polos complejos conjugados ubicados sobre el círculo unitario $(|z| = 1)$, hace que el sistema sea críticamente estable. Polos múltiples ubicados sobre el círculo unitario hacen que el sistema sea inestable.
- Los ceros de lazo cerrado no afectan la estabilidad del sistema.