TRANSFORMADA Z MODIFICADA

Se utiliza cuando el sistema presenta tiempo muerto o retardo θ'. Sea la FT:

$$G_p S) = G(S)e^{-\theta' S}$$

$G(S)$ no contiene tiempo muerto y θ' es el tiempo muerto. Sea:

$$\theta' = NT + \theta$$

T : es el periodo de muestreo y N la parte entera del cociente: $N = \frac{\theta'}{T}$ entonces:

$$G_p S) = G(S)e^{-(NT+\theta)S}$$

Tomando la transformada z a la ecuación anterior:

$$G_p(z) = \Im\left\{G(S)e^{-(NT+\theta)S}\right\} \qquad G_p(z) = z^{-N}\Im\left\{G(S)e^{-\theta S}\right\}$$

El término $\Im\left\{G(S)e^{-\theta S}\right\}$ se define como la transformada z modificada de $G(S)$ y se denota por: $\Im_m\{G(S)\} = G(z,m)$. Entonces:

$$G_p(z) = z^{-N}\Im_m\{G(S)\} = z^{-N}G(z,m)$$

En donde: $m = 1 - \frac{\theta}{T}$

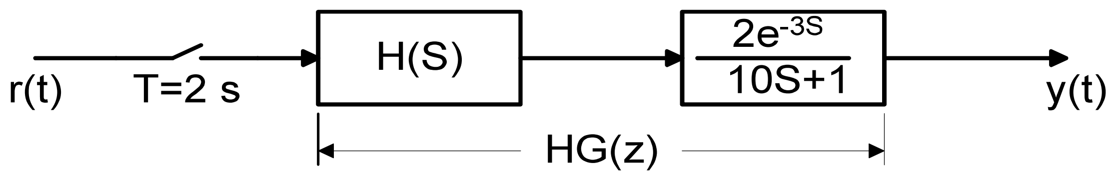
Si el sistema tiene retenedor de orden cero, la transformada z modificada es:

$$G_P(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G(S)}{S}\right\}$$

Luis Edo García Jaimes

EJEMPLO

Para el sistema de la figura hallar: a) La función de transferencia $Y(z)/R(z)$. b) La salida $y(kT)$ si la entrada es $r(t) = 2u(t)$



a) La función de transferencia del sistema es: $HG(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} \qquad \begin{cases} N = \dfrac{\theta'}{T} = \dfrac{3}{2} = 1\ (Parte\ entera) \\ \theta = \theta' - NT = 3 - 1 * 2 \qquad \theta = 1 \\ m = 1 - \dfrac{\theta}{T} = 1 - \dfrac{1}{2} \qquad m = 0.5 \end{cases}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-1}\Im_m\left\{\frac{2}{S(10S+1)}\right\} = \frac{2(z-1)}{z^2}\Im_m\left\{\frac{0.1}{S(S+0.1)}\right\}$$

$$\Im_m\left\{\frac{a}{S(S+a)}\right\} = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{aT}} \qquad \begin{cases} e^{-amT} = 0.9048 \\ e^{-aT} = 0.8187 \end{cases}$$

$$HG(z) = \frac{2(z-1)}{z^2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{0.9048}{z - 0.8187}\right] \qquad HG(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.1904z + 0.1722}{z^2(z - 0.8187)}$$

Luis Edo García Jaimes

CONTINUACIÓN EJEMPLO

b) Si $r(t) = 2u(t)$ entonces $R(z) = \frac{2z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{0.1904z + 0.1722}{z^2(z-0.8187)} * \frac{2z}{(z-1)} = \frac{(0.3808z + 0.3444)}{z(z-1)(z-0.8187)}$$

Se expande $Y(z)$ en fracciones parciales y se obtiene:

$$Y(z) = \frac{0.42066}{z} + \frac{4}{z-1} - \frac{4.42066}{z-0.8187}$$

$$\begin{cases} \Im^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\} = \delta(k-1) \\ \Im^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\} = (a)^{k-1} \end{cases}$$

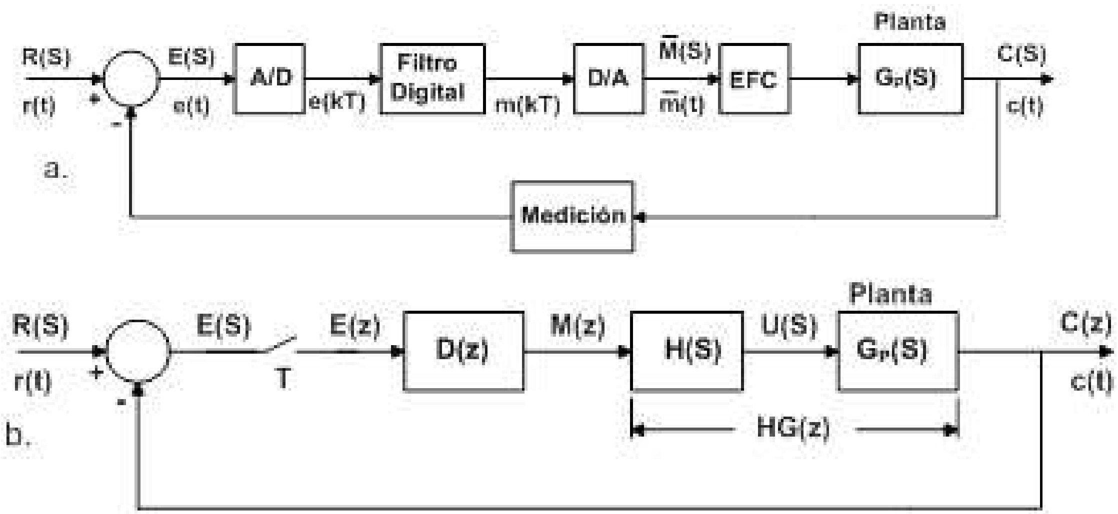
Tomando la transformada z inversa resulta:

$$y(kT) = 0.42066\delta(k-1) + 4(1)^{k-1} - 4.42066(0.8187)^{k-1}$$

$y(0) = 0$	$y(3) = 1.03696$	$y(6) = 2.3740$
$y(1) = 0$	$y(4) = 1.5741$	$\cdots \quad \cdots$
$y(2) = 0.3808$	$y(5) = 2.0139$	$y(\infty) = 4.0000$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE PULSO DE UN SISTEMA EN LAZO CERRADO

La figura muestra el diagrama en bloques de un sistema de control digital en lazo cerrado, en el cual se incluye la dinámica de todos los elementos. A éste sistema se le pueden efectuar algunas simplificaciones. Por ejemplo, si el modelo del sistema es obtenido experimentalmente, la función de transferencia del proceso $G_p(S)$ incluye la dinámica del elemento final de control y la del sistema de medición. En este caso, el diagrama de la figura a se reduce al de la figura b.



$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

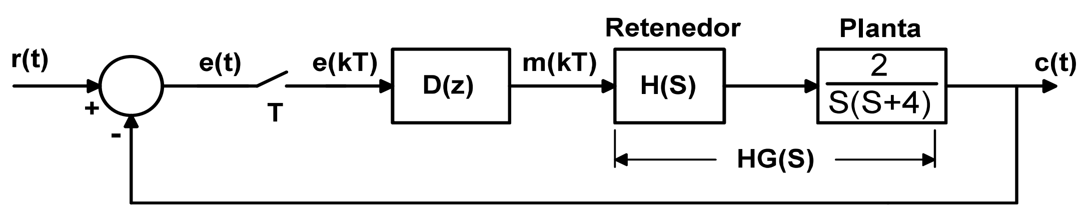
$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\Im_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

EJEMPLO

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura, hallar a) La función de transferencia de pulso en lazo cerrado. b) La respuesta $c(kT)$ si $r(t)$ es un escalón unitario. Asuma que el periodo de muestreo es $T = 1\ s$, que $H(S)$ es un retenedor de orden cero y que $D(z)$ es un controlador digital con función de transferencia:

$$D(z) = \frac{1.5z - 1.2}{z - 1}$$



SOLUCIÓN: a) La función de transferencia de pulso para el sistema planta-retenedor está dada por la ecuación:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{2}{S^2(S+4)}\right\}$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

De tablas se encuentra que:

$$\Im\left\{\frac{a^2}{S^2(S+a)}\right\} = \frac{[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

Con $T = 1\ s$ y $a = 4$ se obtiene, después de simplificar:

$$HG(z) = \frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)}$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)HG(z)}{1+D(z)HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}{1+\frac{0.37728(z+0.30096)}{(z-1)(z-0.01831)} * \frac{(1.5z-1.2)}{z-1}}$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{z^3 - 1.45238z^2 + 0.75421z - 0.15457}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.37728(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{(z-0.67298)(z^2 - 0.77939z + 0.22969)}$$

Si $r(t)$ es un escalón unitario, $R(z) = z/(z-1)$, por lo tanto:

$$C(z) = G_w(z)R(z) = \frac{0.37728z(z+0.30096)(1.5z-1.2)}{(z-1)(z-0.67298)(z^2 - 0.77939z + 0.22969)}$$

Al expandir $C(z)/z$ en fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{2.354z - 0.48948}{z^2 - 0.77939z + 0.22969} + \frac{1.3544}{z - 0.67298}$$

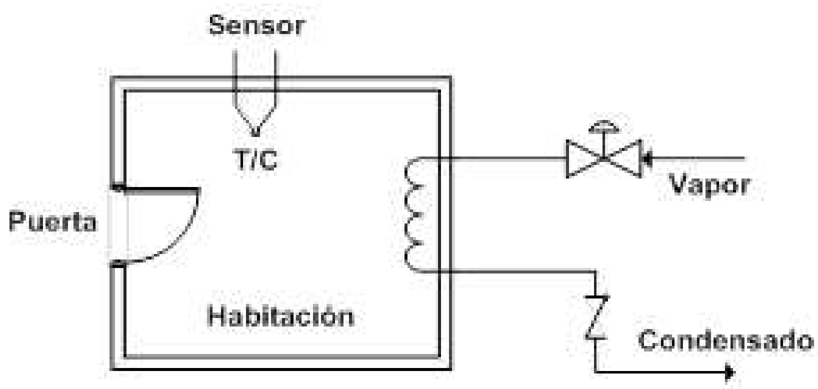
Utilizando tablas se obtiene la transformada inversa z de $C(z)$ así:

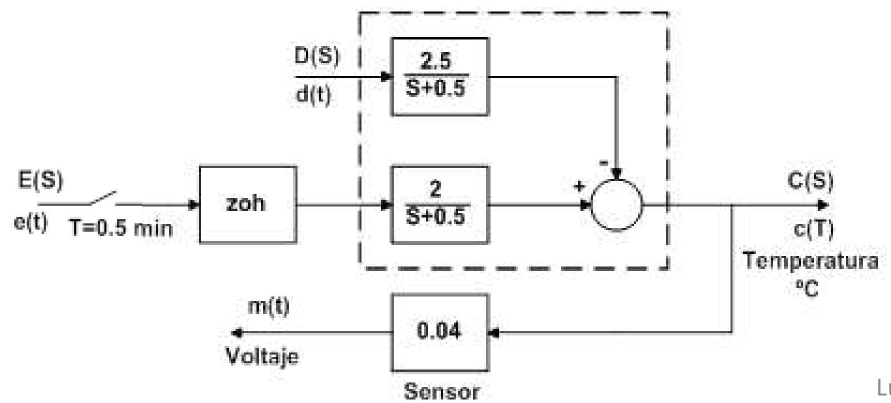
$$c(kT) = 1 + 1.3544(0.67298)^k - [2.3542\cos(0.621k) + 1.5339\sin(0.621k)](0.4792)^k$$

Luis Edo García Jaimes

EJEMPLO

La figura representa el diagrama en bloques de un sistema de calefacción de una habitación. La salida $c(t)$ es la temperatura de la habitación en grados centígrados y la señal de voltaje $m(t)$ es la salida del sensor de temperatura. La perturbación $d(t)$ se presenta cuando se abre la puerta de la habitación. Con la puerta cerrada $d(t)=0$ pero, si la puerta se abre en $t=t_0$ entonces $d(t)=u(t-t_0)$. a) Deduzca la función de transferencia $C(z)/E(z)$. b) Si se aplica un voltaje constante $e(t)=10V$ durante un largo periodo de tiempo, cuál será la temperatura de estado estable en la habitación con la puerta está cerrada? c) Estime el efecto que produce, sobre la temperatura, la apertura permanente de la puerta.





Luis Edo García Jaimes