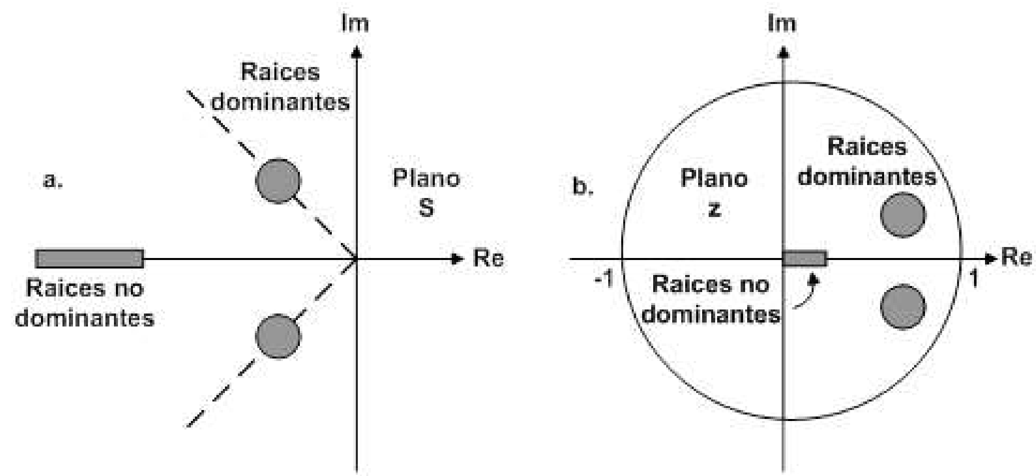
RAICES DOMINANTES Y RAICES NO DOMINANTES

En el plano S, las raíces más cercanas al eje imaginario en el semiplano izquierdo son las raíces dominantes. Las raíces que están más alejadas del eje imaginario corresponden a raíces no dominantes.

En el plano z las raíces dominantes están dentro del círculo unitario y más cercanas a éste. Las raíces cercanas al origen del plano z son raíces no dominantes.

Para el diseño se recomienda seleccionar las raíces dominantes con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.707$ y ubicadas en la región derecha del círculo unitario.

La figura muestra las regiones en las que se recomienda ubicar las raíces.

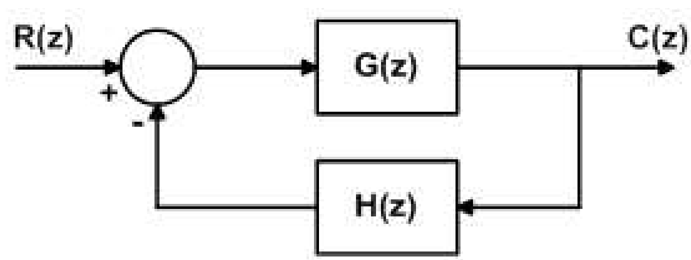


MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAICES

El método del LGM de las raíces permite encontrar los polos de la función de transferencia de lazo cerrado a partir de la función de transferencia de lazo abierto.

Condición de ángulo y condición de módulo: Para un sistema de control discreto como el de la figura, la ecuación característica es:

$$1 + GH(z) = 0 \qquad\qquad GH(z) = -1$$



Como $GH(z)$ es una cantidad compleja, debe cumplir dos condiciones a saber:

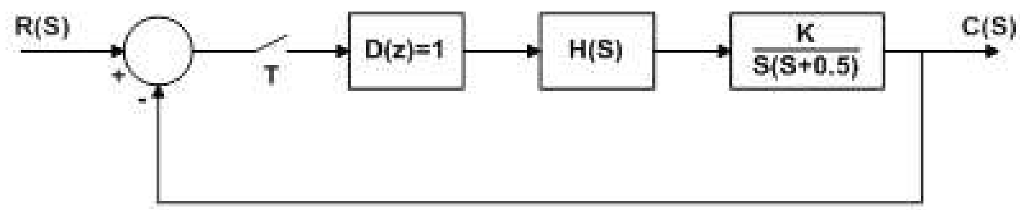
Condición de ángulo: $\measuredangle GH(z) = \theta = \pm 180(2q + 1) \qquad q = 0, 1, 2, \cdots$

Condición de módulo: $|GH(z)| = 1$

Los valores de z que cumplen simultáneamente las dos condiciones, son las raíces de la ecuación característica, es decir, son los polos de lazo cerrado del sistema.

EJEMPLO TRAZADO LGR

Para el sistema de control discreto mostrado en la figura, a) Trazar el lugar geométrico de las raíces para tiempo de muestreo $T = 1\ s$. b) Para qué valor de K el sistema tiene un polo de lazo cerrado en $z = 0.6967 \pm j0.549$.



SOLUCIÓN: la función de transferencia de pulso del sistema con $t = 1s$ es:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{K}{S^2(S+0.5)}\right\} \qquad HG(z) = \frac{0.4261K(z+0.8467)}{(z-1)(z-0.6065)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema es:

$$G_w(z) = \frac{D(z).HG(z)}{1 + D(z).HG(z)} = \frac{HG(z)}{1 + HG(z)}$$

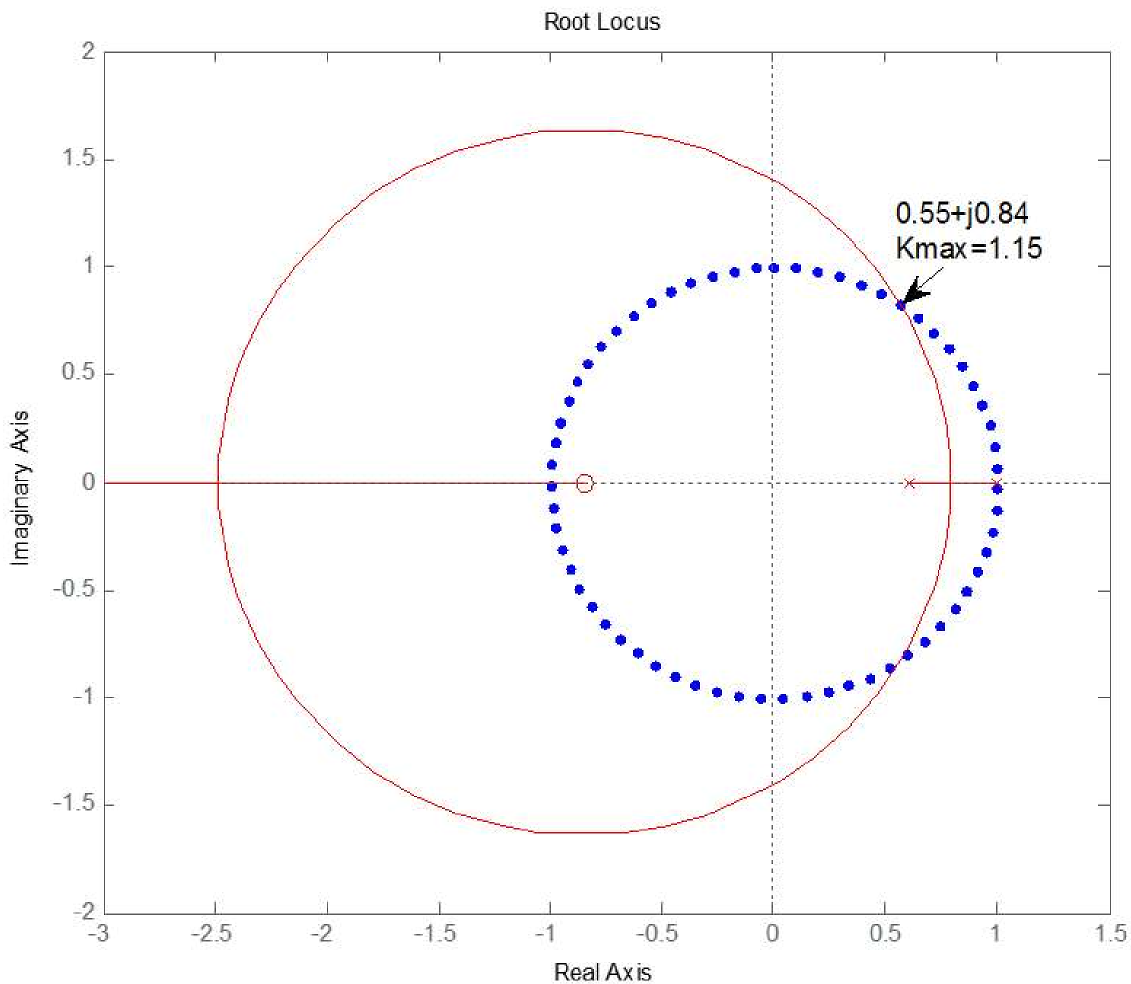
La ecuación característica del sistema es: $1 + HG(z) = 0$ es decir:

$$1 + HG(z) = 1 + \frac{0.4261K(z+0.8467)}{(z-1)(z-0.6065)} = 0$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

```
% Programa para obtener el LGR del ejemplo
clc
n=[1];
d=[1 0.5 0];                    %Planta continua
[nd,dd]=c2dm(n,d,1,'zoh');      %Discretización con T=1 seg
x=0:0.1:2*pi;
figure(1)
plot(sin(x),cos(x),'.')         %Dibuja el circulo unitario
hold
rlocus(nd,dd)                   %Grafica del lugar geométrico de las raíces
axis([-3 1.5 -2 2])             %Escala para los ejes
```

GRÁFICA DEL LGR DEL EJEMPLO



CÁLCULO DE LA GANANCIA PARA UN POLO DETERMINADO

b) Para obtener el valor de la ganancia K de modo que la ecuación característica contenga un polo específico se procede así: polo deseado $z = 0.6967 \pm j0.549$.

$$1 + \frac{0.4261K(z + 0.8467)}{(z - 1)(z - 0.6065)} = 0$$

Reemplazando z por $z = 0.6967 \pm j0.549$ en la ecuación característica resuta:

$$1 + \frac{0.4261K(0.6967 + j0.549 + 0.8467)}{(0.6967 + j0.549 - 1)(0.6967 + 0.549 - 0.6065)} = 0$$

$$1 + \frac{0.4261K(1.5464 + j0.549)}{(-0.3033 + j0.549)(0.0902 + j0.549)} = 0$$

$$1 + \frac{0.65892K + j0.23392}{-0.32875 - j0.11699} = 0 \qquad K = 0.5$$

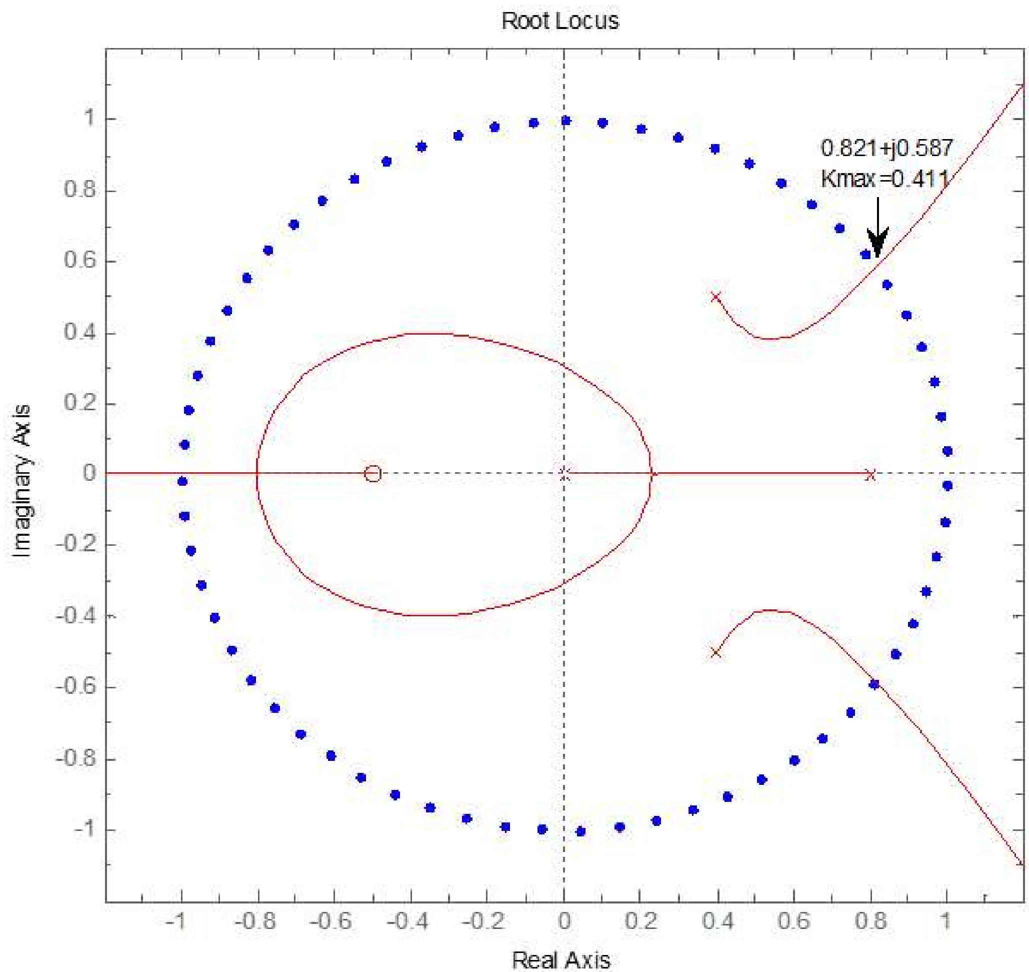
LGR (EJEMPLO 2)

Obtener el LGR al variar K desde 0 hasta ∞ y hallar la ganancia crítica para el sistema de control discreto cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$HG(z) = \frac{0.5K(z+0.5)}{z(z-0.8)(z^2-0.8z+0.41)}$$

```
% Programa para obtener el LGR del ejemplo
clc
nd=[0.5 0.25];
dd=[1 -1.6 1.05 -0.328 0];   %Planta discreta
x=0:0.1:2*pi;
figure(1)
plot(sin(x),cos(x),'.')       %Dibuja el circulo unitario
hold
rlocus(nd,dd)                 %Grafica del lugar geométrico de las raíces
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])     %Escala para los ejes
```

GRÁFICA DEL LGR (EJEMPLO 2)



CÁLCULO DE LA GANACIA CRÍTICA (MÁXIMA)

El valor de la ganancia crítica se obtiene haciendo $|KHG(z)| = 1$. En el punto en donde se interceptan el LGR y el círculo unitario o sea $z = 0.821 + j0.587$:

$$\left|\frac{0.5K(z+0.5)}{z(z-0.8)(z^2-0.8z+0.41)}\right|_{z=0.821+j0.587} = 1$$

$$\left|\frac{0.5K(0.821+j0.587+0.5)}{(0.821+j0.587)(0.821+j0.587-0.8)[(0.821+j0.587)^2-0.8(0.821+j0.587)+0.41]}\right| = 1$$

$$\left|\frac{0.5K(1.321+j0.587)}{(0.821+j0.587)(0.021+j0.587)[0.0827+j0.4942]}\right| = 1$$

$$\frac{0.5*1.4455*K}{1*0.5873*0.501} = 1 \qquad K = 0.41$$