CRITERIO DE ESTABILIDAD DE JURY

Para aplicar esta prueba a la ecuación característica $Q(z) = 0$, se construye una tabla cuyos elementos están determinados por los coeficientes de $Q(z)$.

Para construir la tabla la ecuación característica se debe escribir en la forma:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots a_1 z + a_0 = 0 \qquad a_n > 0$$

El arreglo de Jury se construye como se indica en la tabla

j	$Fila$	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-j}	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
0	1 2	a_0 a_n	a_1 a_{n-1}	a_2 a_{n-2}	$\cdots$	a_{n-j} a_j	$\cdots$	a_{n-2} a_2	a_{n-1} a_1	a_n a_0
1	3 4	b_0 b_{n-1}	b_1 b_{n-2}	b_2 b_{n-3}	$\cdots$	b_{n-j} b_{j-1}	$\cdots$	b_{n-2} b_1	b_{n-1} b_0	
2	5 6	c_0 c_{n-2}	c_1 c_{n-3}	c_2 c_{n-4}	$\cdots$	c_{n-j} c_{j-2}	$\cdots$	c_{n-2} c_0		
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
$n-3$	$2n-5$ $2n-4$	p_0 p_3	p_1 p_2	p_2 p_1	p_3 p_0					
$n-2$	$2n-3$	q_0	q_1	q_2						

Luis Edo García Jaimes

CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE JURY

Los coeficientes del arreglo de Jury se calculan así:

$$b_0 = \begin{bmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{bmatrix} \qquad b_j = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-j} \\ a_n & a_j \end{bmatrix}$$

$$c_0 = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{bmatrix} \qquad c_1 = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{bmatrix} \qquad c_j = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1-j} \\ b_{n-1} & b_j \end{bmatrix}$$

$$p_j = \begin{bmatrix} p_0 & p_{3-j} \\ p_3 & p_j \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea estable, se requiere el cumplimiento de $n+1$ condiciones, en donde n es el orden de la ecuación característica. Dichas condiciones son:

1. $Q(1) > 0$
2. $(-1)^n Q(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$
4. $|b_0| > |b_{n-1}|$
5. $|c_0| > |c_{n-2}|$

. . . . .

$n+1$. $|q_0| > |q_2|$

Luis Edo García Jaimes

PROCEDIMIENTO PARA REALIZAR LA PRUEBA DE JURY

El procedimiento para efectuar la prueba es el siguiente:

Paso1: Determinar si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3. Si no se cumplen, el sistema es inestable, si se cumplen se efectúa el paso 2

Paso 2: Determinar el máximo valor de j, así:

$$j_{max} = n - 2$$

Si $j_{max} = 0$, no se continúa el procedimiento pues la información del paso 1 es suficiente para determinar la estabilidad del sistema.

Paso 3: El máximo número de filas que ha de tener el arreglo está dado por:

$$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3$$

Paso 4: Se completa el arreglo. A cada fila se le aplica la restricción. Si ésta no se cumple, no se continúa y el sistema es inestable

EJEMPLO 1 CRITERIO DE JURY

Determinar la estabilidad del sistema de control discreto cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z^2(z+0.5)}{z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1}$$

SOLUCIÓN: La ecuación característica del sistema es:

$$z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1 = 0$$

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = -0.8 \qquad a_2 = 0.5 \qquad a_1 = 0.2 \qquad a_0 = -0.1$$

Para evaluar la estabilidad el procedimiento se inicia así:

Número de condiciones: $n + 1 = 4 + 1 = 5$

Paso 1: Verificación de las condiciones 1, 2 y 3.

1. $Q(1) > 0$ $\qquad Q(1) = 1 - 0.8 + 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.8 > 0$
2. $(-1)^4 Q(-1) > 0$ $\qquad Q(-1) = 1 + 0.8 + 0.5 - 0.2 - 0.1 = 2 > 0$
3. $|a_0| < a_n$ $\qquad |-0.1| < 1$

Las condiciones 1, 2 y 3 se cumplen.

CONTINUACIÓN EJEMPLO

Paso 2. Máximo valor de j

$$j_{max} = n - 2 = 4 - 2 = 2$$

Paso 3: Máximo número de filas del arreglo:

$$F_{max} = 2j_{max} + 1 = 2n - 3 = 5$$

Paso 4: Se completa el arreglo chequeando las condiciones respectivas.

j	$Fila$	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
0	1 2	-0.1 1	0.2 -0.8	0.5 0.5	-0.8 0.2	1 -0.1
1	3 4	-0.99 -0.12	0.78 -0.55	-0.55 0.78	-0.12 -0.99	
2	5	0.9657	-0.8382	0.6831		

$$b_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} = -0.99 \qquad b_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.8 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} = 0.78$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = -0.55 \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix} = -0.12$$

$|b_0| > |b_3|$ $\quad |-0.99| > |-0.12|$ $\quad$ Cumple

CONTINUACIÓN EJEMPLO

$$c_0 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.12 \\ -0.12 & -0.99 \end{vmatrix} = 0.9657 \qquad c_1 = \begin{vmatrix} -0.99 & -0.55 \\ -0.12 & 0.78 \end{vmatrix} = -0.8382$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -0.99 & 0.78 \\ -0.12 & -0.55 \end{vmatrix} = 0.6381$$

$|c_0| > |c_2|$ $\qquad |0.9657| > |0.6381|$ $\qquad$ Cumple

Dado que se cumplen todas las condiciones el sistema es estable.

Utilizando el Matlab se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$z^4 - 0.8z^3 + 0.5z^2 + 0.2z - 0.1 = 0$$

Así

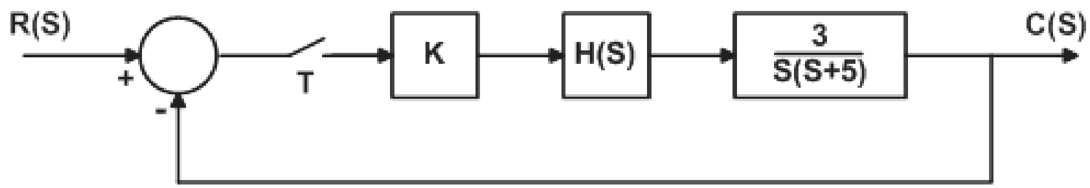
$$z = 0.4521 \pm j0.7257 \qquad |z| = 0.855$$

$$z = -0.4256 \qquad z = 0.3213$$

Se observa entonces que todas las raíces de la ecuación característica están ubicadas dentro del círculo unitario, con lo cual se cumple la condición de estabilidad.

EJEMPLO 2

Para el sistema de control discreto de la figura, determinar el valor o valores de la ganancia K para los cuales el sistema es estable. Asumir como periodo de muestreo $T = 1\ s$ y que $H(S)$ es un retenedor de orden cero.



SOLUCIÓN: La función de transferencia de pulso para el sistema está dada por :

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{G(S)}{S}\right\} = (1 - z^{-1})\Im\left\{\frac{3}{S^2(S+5)}\right\}$$

Con un periodo de muestreo $T = 1\ s$ se obtiene:

$$HG(z) = \frac{0.4808(z + 0.2394)}{(z - 1)(z - 0.00673)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K.HG(z)}{1 + K.HG(z)}$$

$$G_w(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.4808K(z + 0.2394)}{(z - 1)(z - 0.00673) + 0.4808K(z + 0.2394)}$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

La ecuación característica del sistema es:

$$(z-1)(z-0.00673)+0.4808K(z+0.2394)=0$$

Reorganizando términos:

$$z^2-(1.00673-0.4808K)z+0.00673+0.1151K=0$$

Número de condiciones: $n+1=3$

1. $Q(1)=1-(1.00673-0.4808K)+0.00673+0.1151K>0$

   $0.5959K>0 \qquad\qquad K>0$

2. $(-1)^2Q(-1)=1-(1.00673-0.4808K)(-1)+0.00673+0.1151K>0$

   $2.01346-0.3657K>0 \qquad\qquad K<5.5$

3. $|a_0|<|a_n| \qquad\qquad |0.00673+0.1151K|<1$

   $-8.7446<K<8.6296$

Los resultados obtenidos indican que el sistema es estable si: $0<K<5.5$

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH PARA SISTEMAS DISCRETOS

Un método muy utilizado en el análisis de estabilidad de sistemas discretos es el uso de la transformación bilineal junto con el criterio de Routh. La transformación bilineal permite transformar el plano z en otro plano w y está definida por:

$$z = \frac{1 + \frac{Tw}{2}}{1 - \frac{Tw}{2}} \qquad\qquad w = \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

Lo cual posibilita transformar la ecuación característica:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots a_1 z + a_0 = 0 \qquad\qquad a_n > 0$$

En otra ecuación característica de la forma:

$$Q(w) = \alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + \cdots \alpha_1 w + \alpha_0$$

Así, el arreglo de Routh toma la forma:

$$\begin{array}{c|cccc}
w^n & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \cdots \\
w^{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \cdots \\
w^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
w^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
w^2 & p_1 & p_2 & & \\
w^1 & q_1 & & & \\
w^0 & r_1 & & &
\end{array}$$

COEFICIENTES DEL ARREGLO DE ROUTH

En donde:

$$b_1 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-2}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-3})}{\alpha_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{(b_1)(\alpha_{n-3}) - (b_2)(\alpha_{n-1})}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-4}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-5})}{\alpha_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{(b_1)(\alpha_{n-5}) - (b_3)(\alpha_{n-1})}{b_1}$$

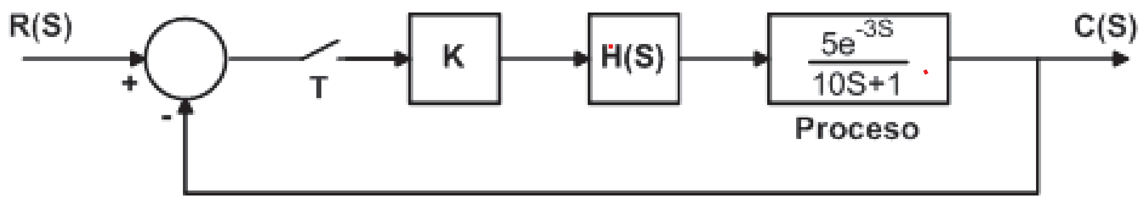
$$b_3 = \frac{(\alpha_{n-1})(\alpha_{n-6}) - (\alpha_n)(\alpha_{n-7})}{\alpha_{n-1}} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

El criterio de Routh-Hurwist establece que: **el sistema es estable sí y solo sí todos los coeficientes de la primera columna del arreglo son positivos**.

“El número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al número de cambios de signo que se presentan en los coeficientes de la primera columna del arreglo”.

EJEMPLO ESTABILIDAD SEGÚN CRITERIO DE ROUTH

Determinar el valor de K para el cual el sistema de control discreto de la figura es estable. $H(S)$ es un retenedor de orden cero. Periodo de muestreo $T = 2\ s$.



SOLUCIÓN: Como la función de transferencia del proceso presenta retardo, es necesario trabajar con la transformada z modificada. Por lo tanto:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-N}\mathfrak{J}_m\left\{\frac{G_p(S)}{S}\right\} \qquad G_p(S) = \frac{5e^{-3S}}{10S+1}\begin{cases} N = \dfrac{\theta'}{T} = \dfrac{3}{2} = 1\ (Parte\ entera) \\ \theta = \theta' - NT = 3 - 2 \qquad \theta = 1 \\ m = 1 - \dfrac{\theta}{T} = 1 - \dfrac{1}{2} \qquad m = 0.5 \end{cases}$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-1}\mathfrak{J}_m\left\{\frac{5}{S(10S+1)}\right\} = \frac{5(z-1)}{z^2}\mathfrak{J}_m\left\{\frac{0.1}{S(S+0.1)}\right\}$$

Luis Edo García Jaimes

CONTINUACIÓN EJEMPLO

$$\mathfrak{I}_m\left\{\frac{a}{S(S+a)}\right\}=\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} \qquad HG(z)=\frac{5(z-1)}{z^2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{0.9048}{z-0.8187}\right]$$

$$HG(z)=\frac{0.476(z+0.9044)}{z^2(z-0.8187)}$$

Utilizando la transformación bilineal con $T=2\ s$, se obtiene:

$$HG(w)=\frac{0.476\left[\frac{1+w}{1-w}+0.9044\right]}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2\left[\frac{1+w}{1-w}-0.8187\right]}$$

$$HG(w)=\frac{0.025(1-w)^2(w+19.9205)}{(1+w)^2(w+0.09968)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado para el sistema es:

$$G_w(w)=\frac{K.HG(w)}{1+K.HG(w)}$$

La ecuación característica es: $1+K.HG(w)=0$

$$1+\frac{0.025(1-w)^2(w+19.9205)}{(1+w)^2(w+0.09968)}=0$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

$$(1+0.025K)w^3+(2.0996+0.448K)w^2+(1.1993-0.971K)w+0.0996+0.498K=0$$

El arreglo de Routh para la ecuación anterior es:

$$\begin{array}{c|cc}
w^3 & 1+0.025K & 1.1993-0.971K \\
w^2 & 2.0996+0.448K & 0.0996+0.498K \\
w^1 & \dfrac{2.4184-2.006K-0.446K^2}{2.0996+0.448K} & 0 \\
w^0 & 0.0996+0.498K &
\end{array}$$

Para que el sistema sea estable, se debe cumplir:

$$1+0.025K>0 \qquad K>-40$$

$$2.0996+0.448K>0 \qquad K>-4.686$$

$$\frac{2.4184-2.006K-0.446K^2}{2.0996+0.448K}>0 \qquad K<0.998$$

$$0.0996+0.498K>0 \qquad K>-0.2$$

Considerando los resultados anteriores, se deduce que el sistema es estable si:

$$-0.2<K<0.988$$

CONTINUACIÓN EJEMPLO

La frecuencia de oscilación para $K = 0.988$ se puede determinar a partir de la fila de w^2 en el arreglo. En esta fila, se reemplaza K y se resuelve la ecuación resultante para w_w, cuyo valor corresponde a la parte imaginaria de w.

Para el caso del ejemplo que se analiza, la ecuación para evaluar a w_w es:

$$[2.0996 + 0.448(0.988)]w_w^2 + 0.0996 + 0.498(0.988) = 0$$

$$2.542w_w^2 + 0.591 = 0 \qquad\qquad w_w = \pm j0.482$$

Si se desea hallar la frecuencia real w en el plano S se debe utilizar la ecuación:

$$w_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{wT}{2}\right)$$

$$w = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{w_w T}{2}\right) \qquad w = \frac{2}{2}\tan^{-1}\left(\frac{0.482 * 2}{2}\right) \qquad w = 0.449\, rad/s$$