

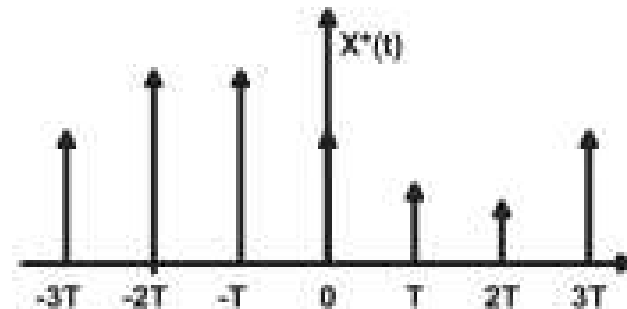
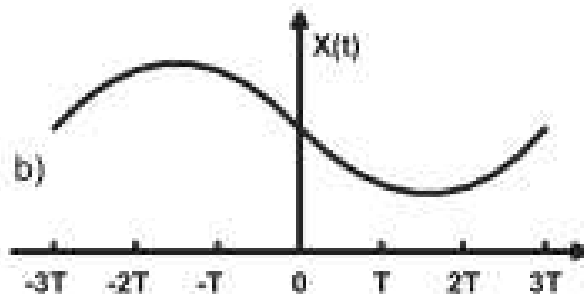
## SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Los sistemas de tiempo discreto, son sistemas dinámicos en los cuales una o más variables pueden variar únicamente en ciertos instantes. Estos instantes, llamados de muestreo y que se indican por  $kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) pueden especificar el momento en el cual se realiza una medición física o el tiempo en el cual se lee la memoria del computador.

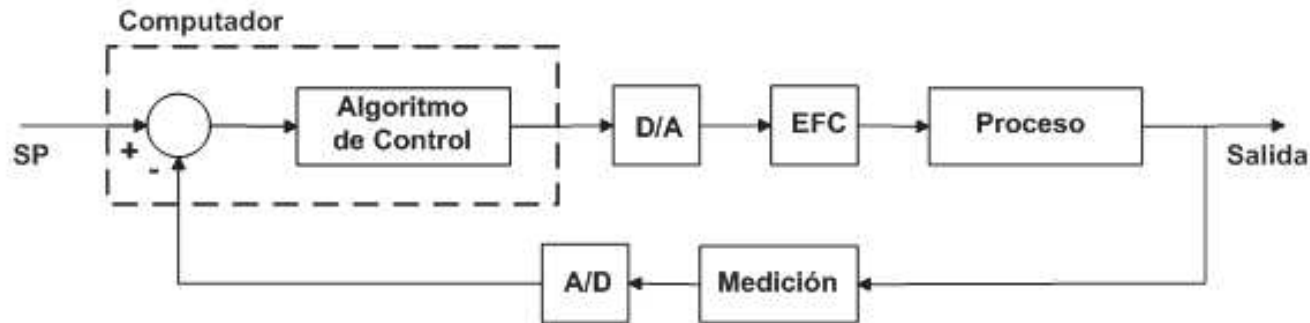
Los sistemas de tiempo continuo, se describen o modelan mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto se describen mediante un conjunto de ecuaciones de diferencias.

# SISTEMAS CONTINUOS VS SISTEMAS DISCRETOS

SISTEMAS CONTINUOS	SISTEMAS DISCRETOS
<ul style="list-style-type: none"><li>• Señales continuas. (Analógicas)</li><li>• Ecuaciones diferenciales</li><li>• Transformada de Laplace</li><li>• Función de transferencia</li><li>• Variables de estado continuas</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Señales discretas. (Digitales)</li><li>• Ecuaciones en diferencias</li><li>• Transformada z</li><li>• Función de transferencia de pulso</li><li>• Variables de estado discretas</li></ul>

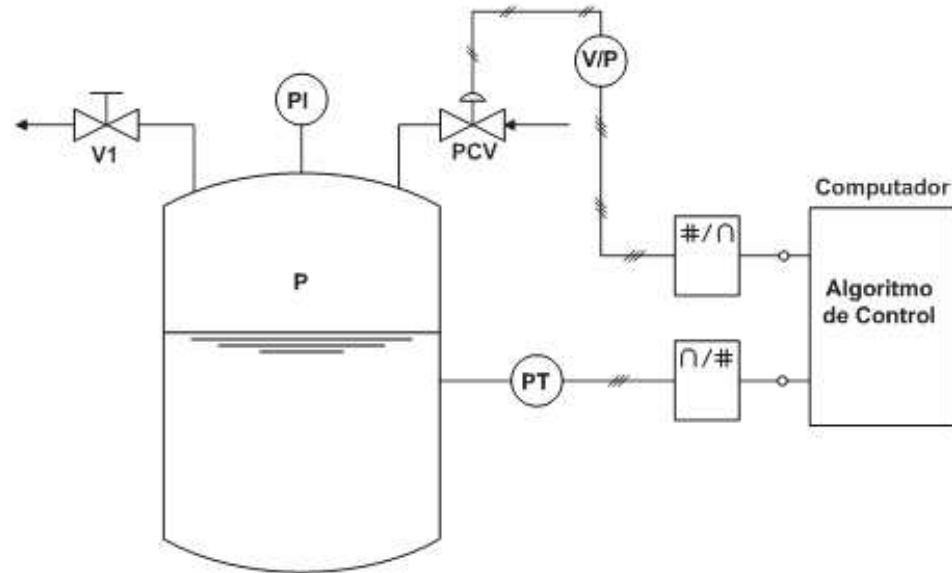


# LAZO DE CONTROL DIGITAL BÁSICO



1. Se mide la variable controlada mediante el sensor adecuado.
2. La salida del sensor se lleva al convertidor de análogo a digital (A/D)
3. La salida del convertidor A/D se compara con el valor del Set-Point (SP).
4. El computador establece la diferencia (error) entre éstos valores y ejecuta un programa en el cual se ha establecido el algoritmo de control deseado.
5. El computador proporciona una señal de salida discreta que es convertida en una señal continua mediante un convertidor de digital a análogo (D/A).
6. La salida del convertidor D/A, previamente acondicionada es aplicada al elemento final de control para corregir el error.

# EJEMPLO: CONTROL DE PRESIÓN



P: Variable controlada  
PI: Indicador de presión  
PT: Transmisor de presión  
PCV: Válvula control de presión

V1: Válvula de descarga manual  
V/P: Convertidor Voltaje a Presión  
∩/#: Convertidor Analógico a Digital  
#/∩: Convertidor de Digital a Analógico

## DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

**Planta:** es cualquier objeto físico que se va a controlar. Ejemplos de plantas: un intercambiador de calor, un reactor químico, una caldera, una torre de destilación.

**Proceso:** es una operación progresiva en la cual se presenta una serie de cambios que se suceden uno a otro de manera relativamente fija y que conducen a un resultado determinado. Los procesos pueden ser químicos, biológicos, económicos

**Elemento sensor primario:** Es el elemento que está en contacto con la variable que se mide y utiliza o absorbe energía de ella para dar al sistema de medición una indicación que depende de la cantidad medida. La salida de este elemento es una variable física que puede ser un desplazamiento, una corriente, un voltaje etc.

## DEFINICIÓN DE TÉRMINOS (2)

**Transmisor:** Es un dispositivo que capta la variable del proceso a través del elemento sensor primario y la transmite en forma de señal estándar. Esta señal puede ser neumática (3 a 15 PSI) o electrónica (4 a 20 mA, 0 a 5 V).

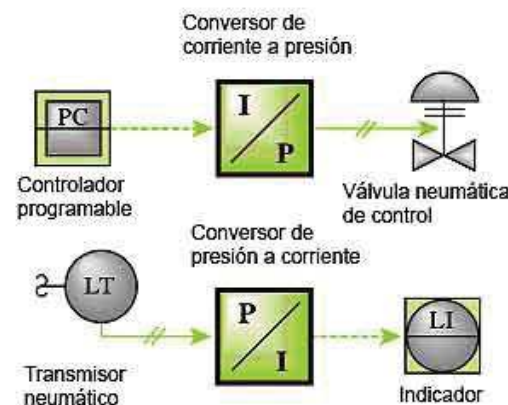
**Transductor:** Convierte una señal de entrada en una señal de salida cuya naturaleza puede ser o no ser diferente de la correspondiente a la señal de entrada. Son transductores: un elemento sensor primario, un transmisor, un convertidor de PP/I (Presión de proceso a corriente).

**Convertidor:** Es un dispositivo que recibe una señal de entrada neumática (3-15 PSI) o electrónica (4-20 mA), procedente de un instrumento y, después de modificarla, genera una señal de salida estándar. Ejemplo: un convertidor P/I (Señal de entrada neumática a señal de salida electrónica).

## DEFINICIÓN DE TÉRMINOS (3)

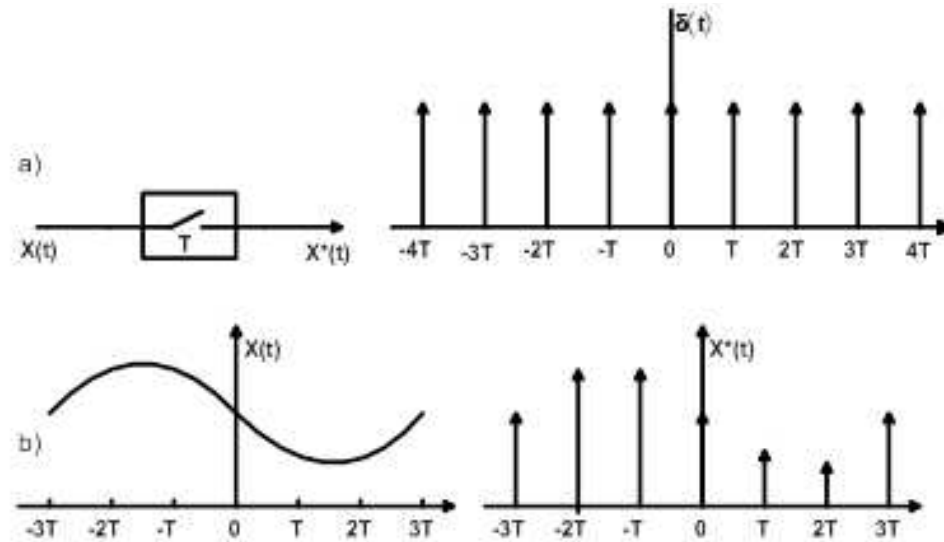
**Controlador:** Es el dispositivo que compara el valor de la variable controlada (presión, temperatura, nivel, velocidad, pH) con el valor deseado (Set-Point) y utiliza la diferencia entre ellos (error) para ejercer, automáticamente, la acción correctiva con el fin de reducir el error a cero o a un valor mínimo aceptable.

**Elemento final de control:** Recibe la señal del controlador y modifica el caudal del agente o fluido de control. En sistemas de control, el elemento final de control puede ser una válvula neumática, un elemento de estado sólido como relés etc.



# MUESTREADORES

El muestreador es el elemento fundamental en un sistema de control de tiempo discreto. Consiste en un interruptor que se cierra cada  $T$  segundos para admitir una señal de entrada. La función del muestreador es convertir una señal continua en el tiempo (análoga) en un tren de pulsos en los instantes de muestreo  $0, T, 2T, \dots$  en donde  $T$  es el periodo de muestreo. Entre dos instantes de muestreo no se transmite información.





## SEÑAL DE SALIDA DEL MUESTREADOR

Si la señal continua es muestreada en forma periódica, la señal de salida del muestreador se puede expresar como:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \dots$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$X^*(S) = x(0) + x(T)e^{-ST} + x(2T)e^{-2ST} + x(3T)e^{-3ST} + \dots$$

Es decir:

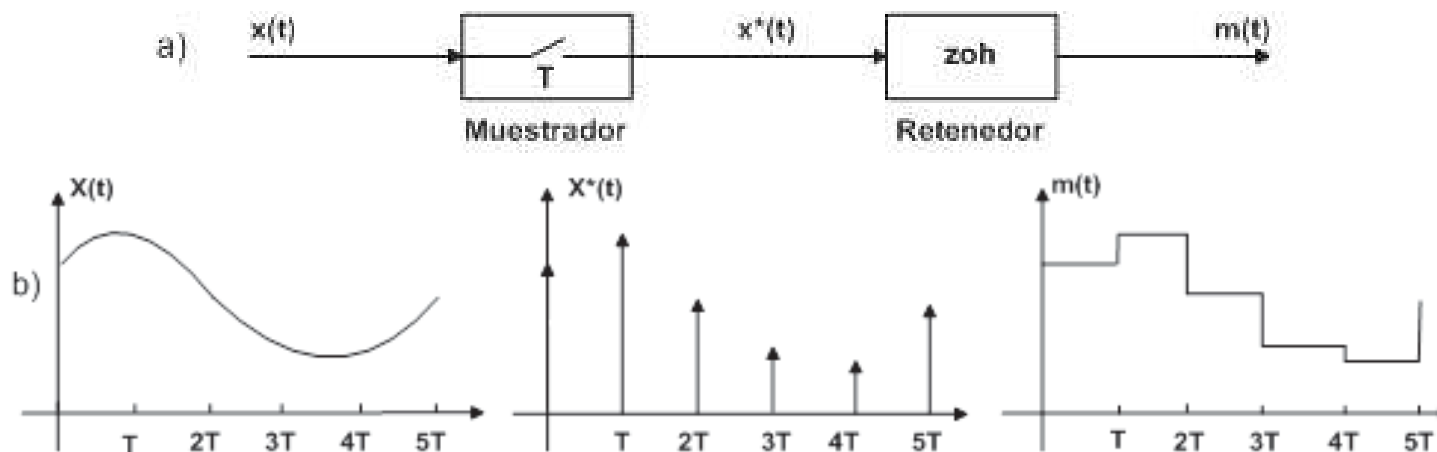
$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}$$

# RETENEDORES

Su finalidad es convertir la señal muestreada en una señal continua de tal forma que sea igual o lo más aproximada posible a la señal aplicada al muestreador.

El retenedor más elemental convierte la señal muestreada en una señal que es constante entre dos instantes de muestreo consecutivos, este tipo de retenedor se conoce como “**retenedor de orden cero**” y es comúnmente el más utilizado.

La exactitud del retenedor de orden cero en la reconstrucción de la señal depende de la magnitud del periodo de muestreo  $T$ .



# FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL RETENEDOR DE ORDEN CERO (ZOH)

La entrada al retenedor es el tren de pulsos:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}$$

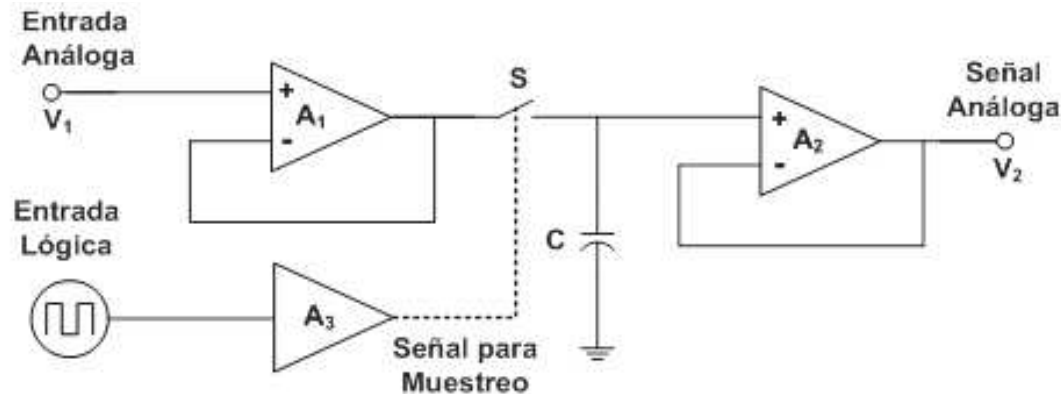
La salida del muestreador se puede expresar como:

$$\bar{m}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)]$$

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$H(S) = \frac{\bar{M}(S)}{X^*(S)} = \frac{1 - e^{-ST}}{S}$$

## CIRCUITO BÁSICO PARA MUESTREO Y RETENCIÓN



Cuando el interruptor de estado sólido (S) se cierra, C se carga al voltaje de entrada  $V_1$ . Cuando el interruptor de estado sólido se abre el condensador sigue cargado al voltaje existente en el momento de la apertura puesto que la impedancia de entrada al amplificador operacional  $A_2$  es muy elevada. Como el amplificador  $A_2$  está configurado como un seguidor de voltaje, su tensión de salida también sigue fija en el valor que tenía el voltaje del condensador en el momento que reprodujo el muestreo.

## EJEMPLO

La función  $x(t) = e^{-2t} + 3$  se muestrea cada 0.5 seg. Calcular: a) La función muestreada  $x^*(t)$ . b) La transformada de Laplace  $X^*(S)$  de  $x^*(t)$ . c) Si  $x^*(t)$  se hace pasar por un retenedor de orden cero, obtenga una expresión para la señal de salida del retenedor  $\bar{m}(t)$ .

### SOLUCIÓN:

a) Utilizando la ecuación:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

Pero:

$$x(kT) = e^{-2kT} + 3 = e^{-k} + 3$$

Por lo tanto:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-k} + 3]\delta(t - kT)$$

$$x^*(t) = 4\delta(t) + 3.3678\delta(t - T) + 3.1353\delta(t - 2T) + 3.0497\delta(t - 3T) + 3.0183\delta(t - 4T) + \dots$$

## CONTINUACIÓN EJEMPLO

b) Tomando la transformada de Laplace a cada término de la ecuación anterior:

$$X^*(S) = 4 + 3.3678e^{-ST} + 3.1353e^{-2ST} + 3.0497e^{-3ST} + 3.0183e^{-4ST} + \dots$$

c) Utilizando la ecuación:

$$\bar{m}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)]$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{m}(t) = & [e^0 + 3][u(t) - u(t - T)] + [e^{-1} + 3][u(t - T) - u(t - 2T)] \\ & + [e^{-2} + 3][u(t - 2T) - u(t - 3T)] + \dots\end{aligned}$$

Simplificando resulta:

$$\bar{m}(t) = 4u(t) - 0.632u(t - T) - 0.2325u(t - 2T) - 0.0855u(t - 3T) - 0.0314u(t - 4T) \dots$$

## SELECCIÓN DEL PERIODO DE MUESTREO

El periodo de muestreo  $T$  es un parámetro de diseño muy importante que debe seleccionarse en función de un compromiso entre varios factores:

- **El tiempo de cálculo del procesador:** Cuanto menor sea el periodo más potente debe ser el procesador, y por lo tanto más caro.
- **Precisión numérica en la implementación:** Cuanto menor sea el periodo más problemas de precisión y redondeo aparecen en la implementación, especialmente si se utiliza un procesador de coma fija.
- **Pérdida de información en el muestreo:** Si el periodo es demasiado elevado comparado con la dinámica del proceso, se pierde mucha información de la señal muestreada.
- **Respuesta a perturbaciones:** Entre una medición de la salida y la siguiente el proceso funciona en lazo abierto. Si actúa una perturbación su efecto no se podrá compensar hasta que se vuelva a medir la salida.

## CRITERIOS PARA SELECCIONAR EL PERIODO DE MUESTREO

Para estimar el periodo de muestreo se puede aplicar uno de los siguientes criterios:

- Si  $w_c$  es el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, la frecuencia de muestreo se puede estimar dentro del intervalo:

$$8w_c \leq w_s \leq 12w_c \qquad T = \frac{2\pi}{w_s}$$

- El periodo de muestreo se puede evaluar a partir de la constante de tiempo equivalente del sistema en lazo cerrado ( $\tau_{eq}$ ) tomando como base el criterio:

$$0.2(\tau_{eq} + \theta') \leq T \leq 0.6(\tau_{eq} + \theta')$$

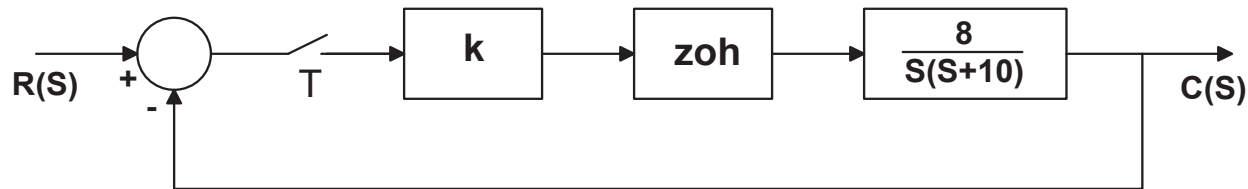
- Si  $t_s$  es el tiempo de establecimiento del sistema en lazo cerrado el periodo de muestreo puede seleccionarse dentro del intervalo:

$$0.05t_s \leq T \leq 0.15t_s$$



## EJEMPLO

Para el sistema de control de la figura con  $K = 1$ , determine a) El ancho de banda del sistema en lazo cerrado b) El rango dentro del cual se puede seleccionar el periodo de muestreo utilizando dos métodos diferentes. Los tiempos en s.



a) La función de transferencia del sistema continuo en lazo cerrado es:

$$G_w(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} \qquad G_w(S) = \frac{8}{S^2 + 10S + 8}$$

Haciendo  $S = jw$  se obtiene, después de simplificar:

$$G_w(jw) = \frac{8}{(8 - w^2) + j10w} \qquad |G_w(jw)| = \frac{8}{\sqrt{(8 - w^2)^2 + 100w^2}}$$

Para  $w = 0$  se obtiene:  $|G_w(jw)| = 1$

El ancho de banda  $w_c$  se calcula haciendo  $|G_w(jw_c)| = 0.707|G_w(0)|$

## CONTINUACIÓN EJEMPLO

$$\frac{8}{\sqrt{(8 - w_c^2)^2 + 100w_c^2}} = 0.707$$

$$w_c^4 + 84w_c^2 - 64 = 0 \quad w_c = 0.869 \text{ rad/s}$$

b) La frecuencia de muestreo  $w_c$  debe estar en el intervalo:

$$8w_c \leq w_s \leq 12 \quad 6.95 \leq w_s \leq 10.42 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_s} \quad 0.602 \leq T \leq 0.903 \text{ s.}$$

Utilizando el criterio de la constante de tiempo equivalente en lazo cerrado:

$$0.2(\tau_{eq} + \theta') \leq T \leq 0.6(\tau_{eq} + \theta')$$

La función de transferencia del sistema en lazo es de segundo orden para el cual:

$$w_n^2 = 8 \quad w_n = 2.82 \text{ rad/s}$$

$$2\xi w_n = 10 \quad \xi = 1.77 \quad \tau_{eq} = \frac{2\xi}{w_n} = 1.25 \text{ s.}$$

El rango para el periodo de muestreo es, entonces:  $0.25 \leq T \leq 0.75 \text{ s.}$

## PROGRAMA EN MATLAB PARA CALCULAR ANCHO DE BANDA

```
n=input('ENTRE EL NUMERADOR DEL SISTEMA=');  
d=input('ENTRE EL DENOMINADOR DEL SISTEMA=');  
[nw,dw]=cloop(n,d,-1); %Calcula FT en lazo cerrado  
[mag,fase,w]=bode(nw,dw); %Calcula Magnitud, y fase  
mag1=mag(1,1); % Magnitud a baja frecuencia  
mag2=0.707*mag1; %Calcula el valor de la magnitud para wc  
wc=interp1(mag,w,mag2,'spline'); %Interpolacion para cálculo exacto  
wmin=8*wc;  
wmax=12*wc;  
Tmin=2*pi/wmax;  
Tmax=2*pi/wmin;  
fprintf(' RANGO PARA EL PERIODO : Tmin=%3.2f Tmax=%3.2f',Tmin, Tmax)
```