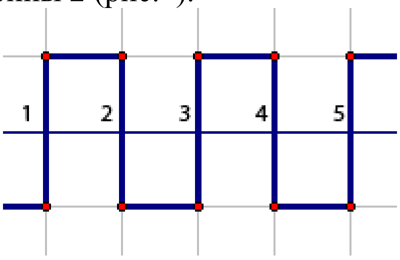
Комбинаторное решение задачи о меандрах для 8 пересечений

С.Н.Поздняков

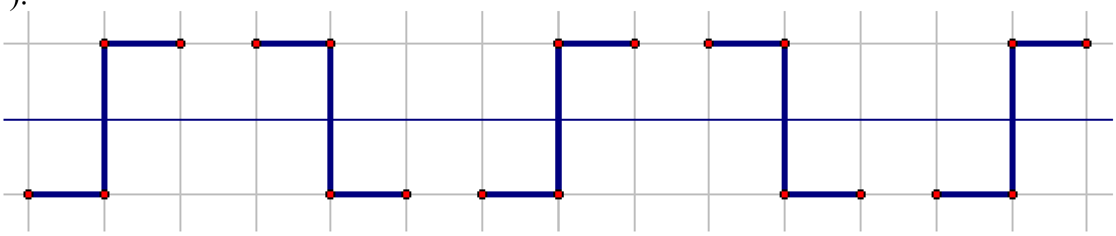
Задача, которую мы будем анализировать, формулируется так:
«Шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада на восток. Занумеруем мосты в порядке их следования вдоль шоссе (с запада на восток). Проплывая под мостами вниз по реке, мы будем встречать их, вообще говоря, в другом порядке. Например, 3,4,5,2,1. Таким образом, эта река определяет перестановку. Другая река могла бы задавать другую перестановку . Но далеко не любая перестановка чисел (мостов) может быть реализована таким образом. Например, не придумать реку, проходящую через мосты в порядке 2,1,3,4,5. Будем называть перестановку меандром, если ее можно задать с помощью подходящей реки. Сколько существует различных меандров в зависимости от *n*?»

Полное решение этой поставленной Арнольдом задачи неизвестно. Однако для небольших значений *n* можно предложить идеи построения всех меандров, которые не только позволяют пересчитать все меандры, но перебрать их и занумеровать

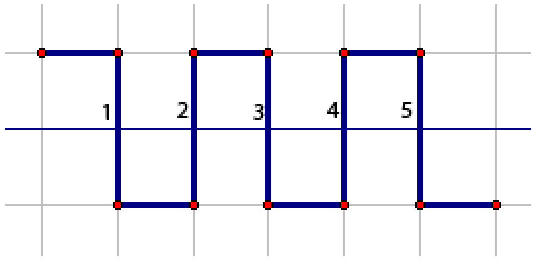
Для дальнейших комбинаторных рассуждений будем рисовать реку на клетчатом листе бумаги, двигаясь вдоль линий. Дорога – горизонтальная прямая, проходящая также по линии сетки.
Для того чтобы упростить задачу, мы сначала ограничим ширину меандра, то есть ширину горизонтальной полосы, в которую укладывается наша река (конечно, из всех возможных изображений реки, мы будем рассматривать наиболее компактное по ширине). Ширина связана с «запутанностью» русла, со степенью «вложенности» петель, которые делает река. Так простой меандр – пересечение дороги без петель – можно расположить на клетчатой бумаге в полосе ширины 2 (рис.).



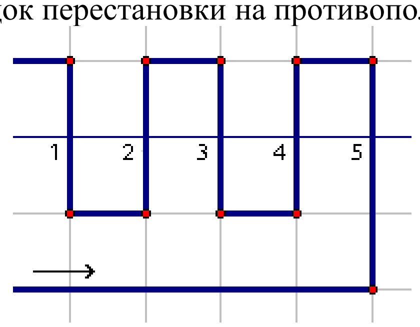
Такой меандр описывается перестановкой (123…*n*). Если теперь поставить вопрос об отыскании всех меандров ширины 2, то ответ на него только что получен. Такой меандр единственен.
Этот меандр можно разбить на простые меандры, соответствующие одному пересечению (рис.).



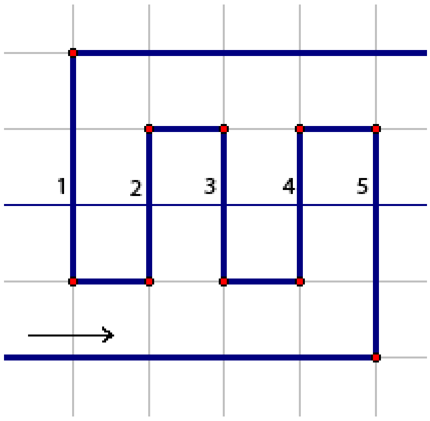
Их можно «пересобрать» по-другому, но новую перестановку – новый тип меандра – это не дает (рис.).



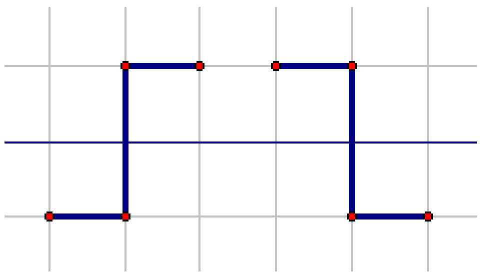
Рассмотрим теперь меандры ширины 3. В таких меандрах возможен «перехлест», позволяющий изменить порядок перестановки на противоположный (рис.)



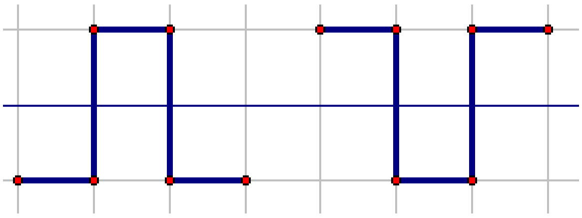
Однако, теперь река у нас течет не с запада на восток, а с запада на запад. Условие изменилось. Для сохранения условия и перестановки нужен еще один «перехлест», что вынуждает увеличить ширину меандра до 4. Заметим, что такой прием «двух перехлестов» не получится с четными меандрами, так как рукава реки должны будут пересечься (нарисуйте картинку, поясняющую это замечание).



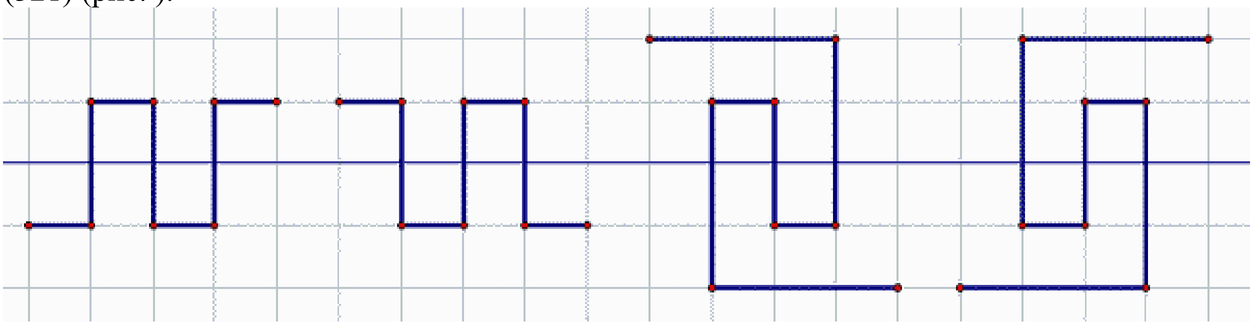
Итак, меандров, удовлетворяющих условию задачи и имеющих ширину 3 нет вовсе.
Интерес представляют меандры ширины 4.
Попробуем теперь классифицировать меандры по числу пересечений.
Одно пересечение имеют два вида реки (рис.), но они порождают единственный меандр (1).



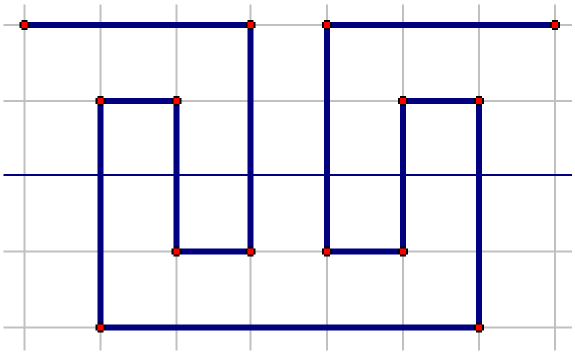
Река с двумя пересечениями, проходящая с запада на восток, также имеет два типа, которые дают одну перестановку (12) (рис.   )



Река с тремя пересечениями имеет 4 типа, определяющие два различных меандра (123) и (321) (рис.).



Заметим, что первый тип меандра распадается в последовательное соединение более простых меандров, второй же меандр не разложим в такую последовательность. Будем называть неразложимые меандры элементарными.
Заметим также, что последовательное соединение двух нечетных меандров дает четный меандр. Например, соединение двух элементарных 3-меандров (меандров для реки с тремя пересечениями) дает интересны 6-меандр (рис.).



Как мы увидим в дальнейшем, существуют и более «запутанные» четные меандры, которые не удается представить как последовательное соединение двух нечетных меандров. Но на время мы забудем о таких меандрах (напомним, что мы пока рассматриваем меандры ширины 4).
Таким образом, перед нами стоят две комбинаторных задачи:

1) найти элементарные меандры, которые нельзя разбить в последовательное соединение двух меандров с меньшим числом пересечений и
2) подсчитать число различных меандров, получающихся последовательным соединением элементарных.

Простой перебор показывает, что все элементарные меандров ширины не более 4 являются нечетными и имеют вид последовательного соединения 1-меандров с «перехлестом» (рис.   ).
Решим теперь исходную задачу о числе 8-меандров для меандров ширины 4.

Задачу можно формализовать так: «сколькими способами можно разложить 8 в сумму нечетных слагаемых с учетом их порядка». Подобная задача обсуждалась в статье «Рекуррентные формулы в математике и информатике» в 1 номере журнала этого года. Решение выглядит так. Каждое разложение начинается либо с тройки, либо с единицы, либо с пятерки, либо с семерки (если нас интересует большее число точек пересечения, то вариантов будет больше). Обозначим $N(n)$ –число разложений числа n в указанную сумму, получим рекуррентное уравнение:

$N(n)=N(n\text{-}7)+N(n\text{-}5)+N(n\text{-}3)+N(n\text{-}1)$

Это позволяет быстро получить ответ:

$N(4)=N(1)+N(3)=3$

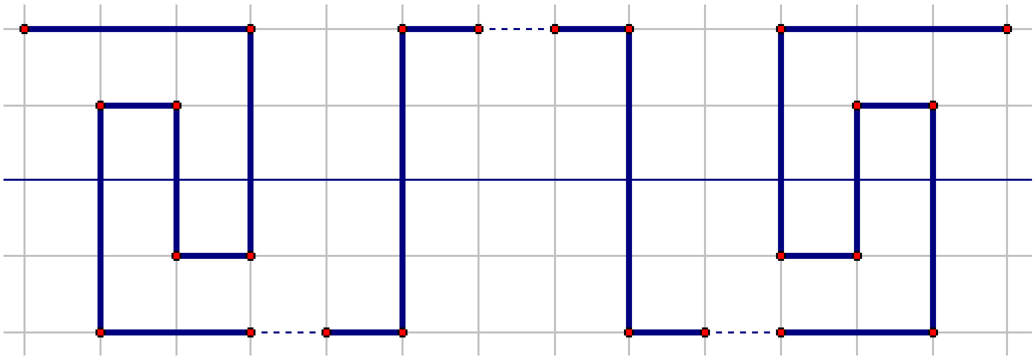
$N(5)=N(2)+N(4)=4$

$N(6)=N(1)+N(3)+N(5)=7$

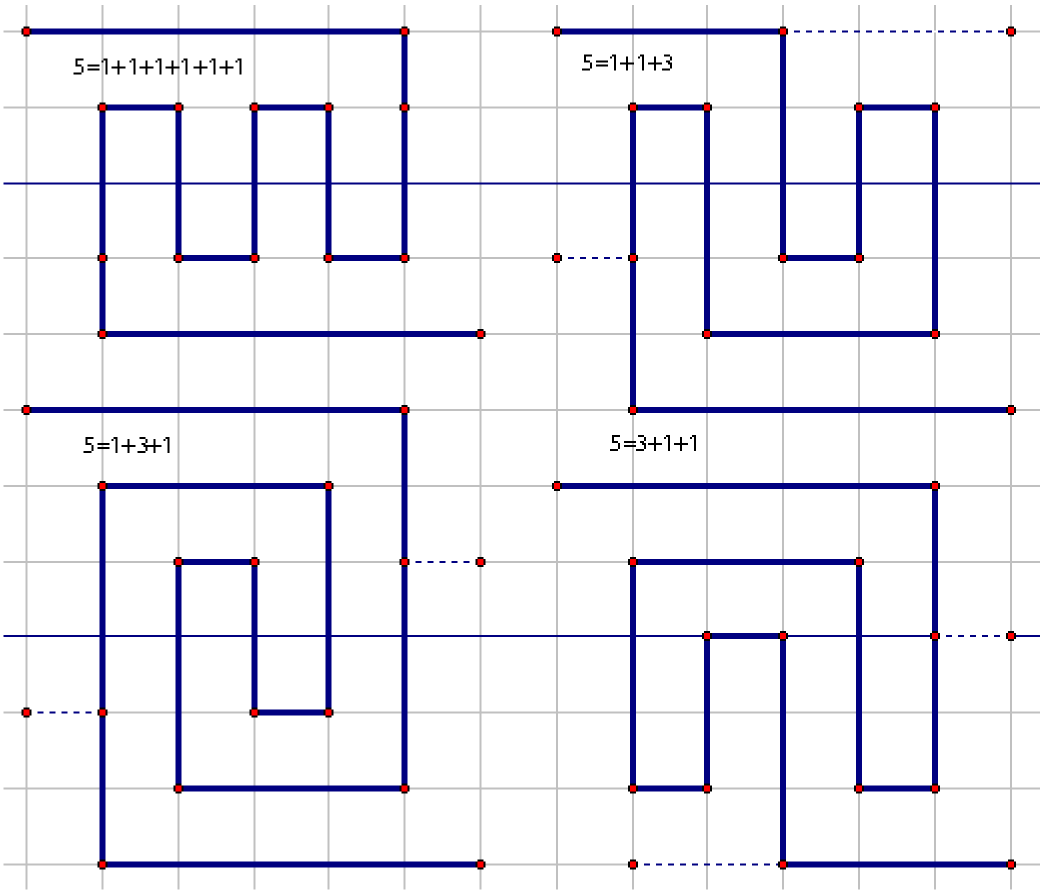
$N(7)=N(2)+N(4)+N(6)=11$

$N(8)=N(1)+N(3)+N(5)+N(7)=18$

Интересно посмотреть, как по разложению числа на слагаемые строятся меандры. Например, рассмотрим разложение 8=3+1+1+3 и построим последовательное соединение 3-меандра, двух 1-меандров и снова 1-меандра (рис.).



Итак, имеется восемнадцать 8-меандров ширины не более 4 (один меандр ширины 2, соответствующий разложению 8 в сумму единиц, и остальные, соответствующие разложениям, содержащим хотя бы одну тройку). Увеличим теперь ширину рассматриваемых меандров. При этом появятся новые элементарные меандры. Попробуем найти метод генерации элементарных меандров. Для этого воспользуемся приемом «перехлеста», которым нам уже удалось получить элементарные меандры, ширины 4. Построим методом последовательных соединений все 4 меандра ширины не более 4 и сделаем над ними данные преобразования. Результат показан на рис.   .



Первый из построенных меандров – шириной 4 – нам уже знаком, остальные новые. Если добавить их к построенным ранее 5-меандрам, получим восемь 5-меандров. Легко проверить перебором, что других 5-меандров нет. Теперь, можно попробовать строить и считать все меандры, ширина которых не превышает 6. Их можно получить последовательным соединением найденных элементарных и добавлением новых элементарных.

Поскольку исходная задача не содержала ограничений на ширину меандра, мы продолжим построение элементарных меандров для большего числа пересечений.

Опять ограничимся нечетными меандрами (рискуя пропустить какой-нибудь новый «хитрый» меандр, не сводящийся к двум нечетным).

Построим элементарные 7-меандры приемом «перехлеста». Для этого к каждому из 7-меандров, полученных последовательным соединением более простых применим метод перехлеста.

N(7)=4N(7-5)+N(7-3)+N(7-1)=4N(2)+N(4)+N(6)=
=4+3+(4N(6-5)+N(6-3)+N(6-1))=7+4N(1)+N(3)+N(5)=7+4+2+8=21

Получим 21 новый элементарный 7-меандр. Доказать, что других элементарных 7-меандров нет, трудно. Поэтому примем это утверждение за рабочую гипотезу.

Тогда для нахождения 8-меандров получим рекуррентную формулу:

$N(n)=21N(n-7)+4N(n-5)+N(n-3)+N(n-1)+$число элементарных n-меандров.

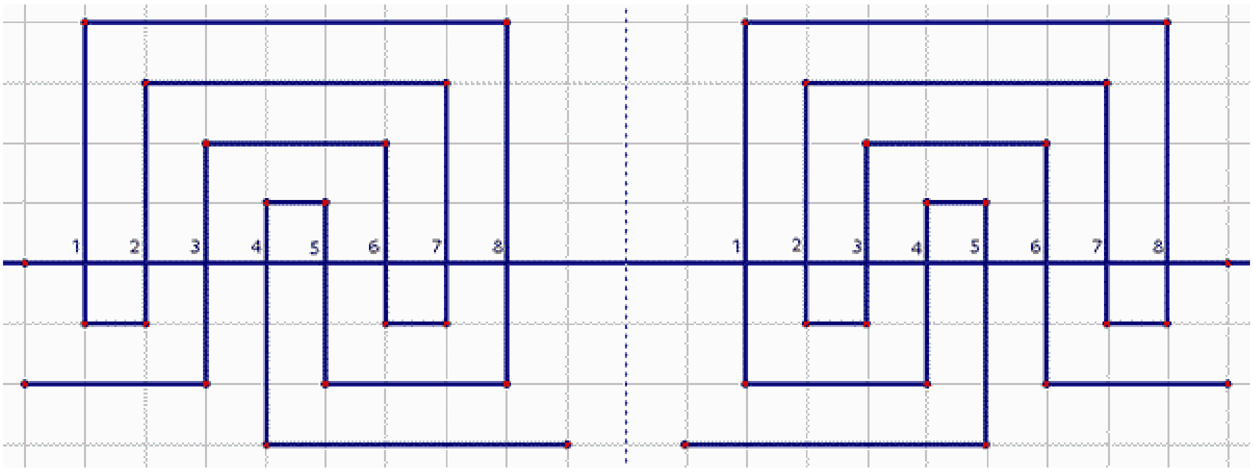
Если предположить, что, кроме перечисленных, других элементарных n-меандров (при $n<8$) нет, то по рекуррентной формуле получаем, что

$N(8)=21N(1)+4N(3)+N(5)+N(7)=21+8+8+21+21=79$.

Теперь проверим теорию практикой. По результатам прошедшего конкурса КИО можно предположить, что количество 8-меандров равно 81 (это лучший из результатов участников).

Что же это за два меандра, потерянных в нашем разборе?

Можно предположить, что это элементарные 8-меандры, не получающиеся методом «перехлеста». Поищем эти меандры. Они показаны на рисунке…..



Первый описывается перестановкой (36721854), второй – ему симметричный, перестановкой (54187236). Это два первых элементарных четных меандра.

Приведенный подсчет показывает не только количество меандров, но и метод их построения. Написанные формулы можно использовать, как оценки снизу для числа меандров в общем случае. Для меандров ограниченной ширины можно попробовать написать точные формулы. Может быть, у кого-нибудь из читателей после чтения статьи возникнут новые идеи по подсчету меандров, а может кому-то повезет решить эту задачу в общем случае. Желаем успехов!