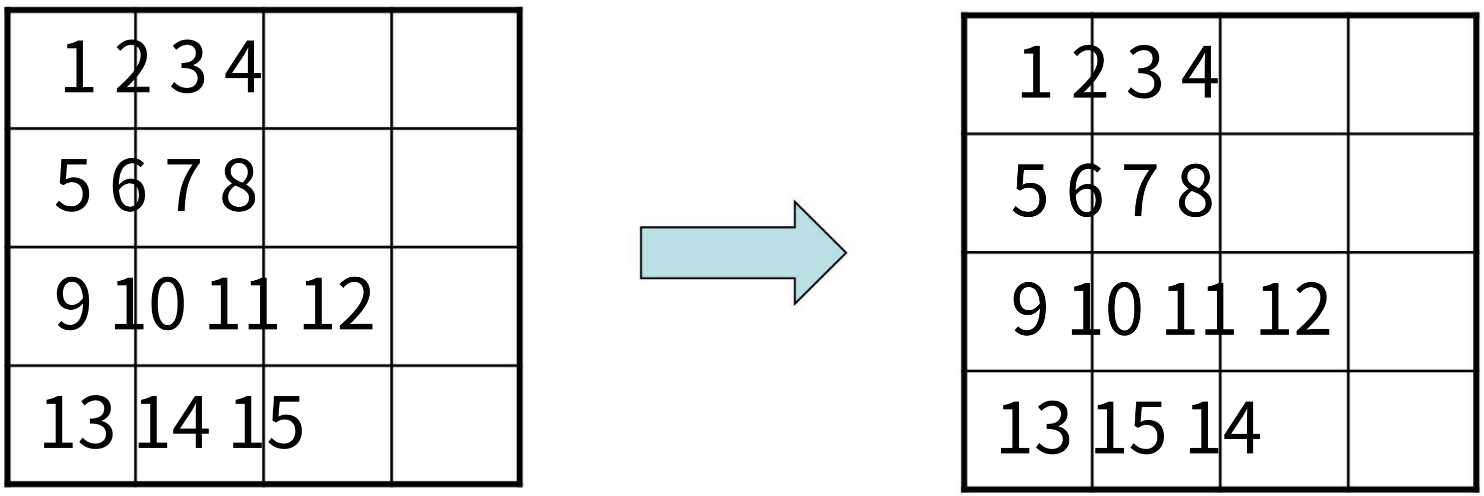
Machine Translated by Google

数学归纳法二



Machine Translated by Google

本次讲座

我们将继续讨论数学归纳法。

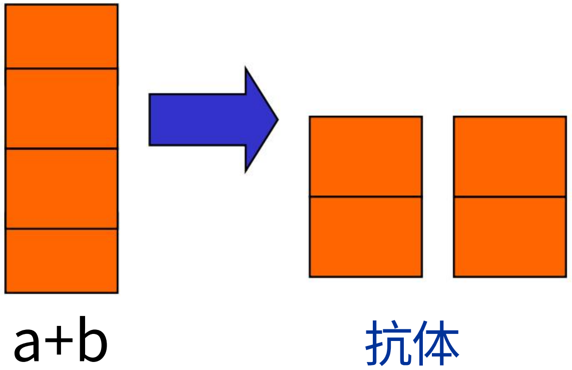
本讲座的新元素是归纳法的一些变体：

- 强感应
- 井序原则
- 不变法

Machine Translated by Google

拆垛游戏

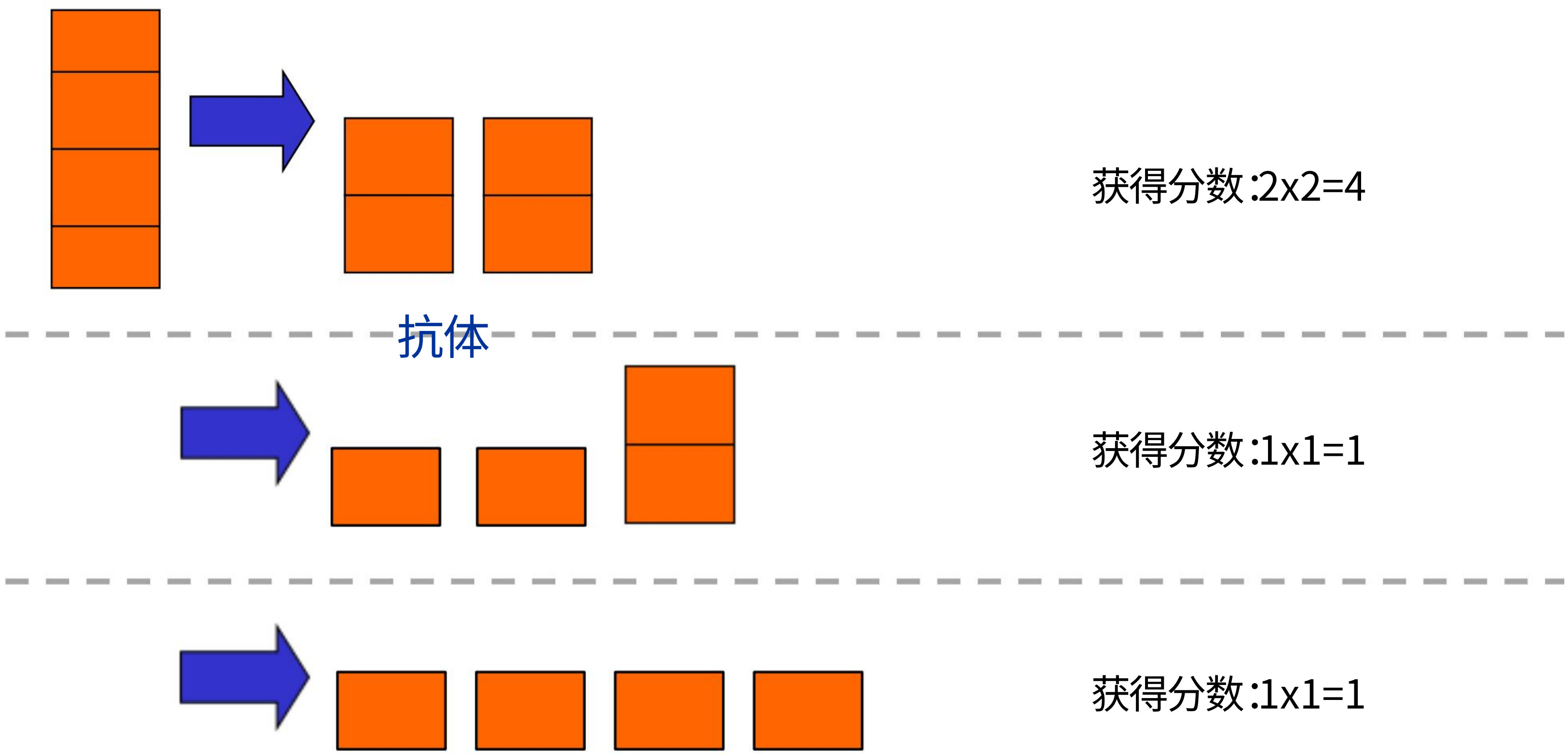
- 开始:一堆盒子
- 移动:将任何堆栈分成大小为 a,b>0 的两个堆栈
- 评分： ab分
- 继续移动:直到卡住
- 总分:移动分数的总和



Machine Translated by Google

拆垛游戏

示例:假设有 4 个盒子。



获得分数:2x2=4

获得分数:1x1=1

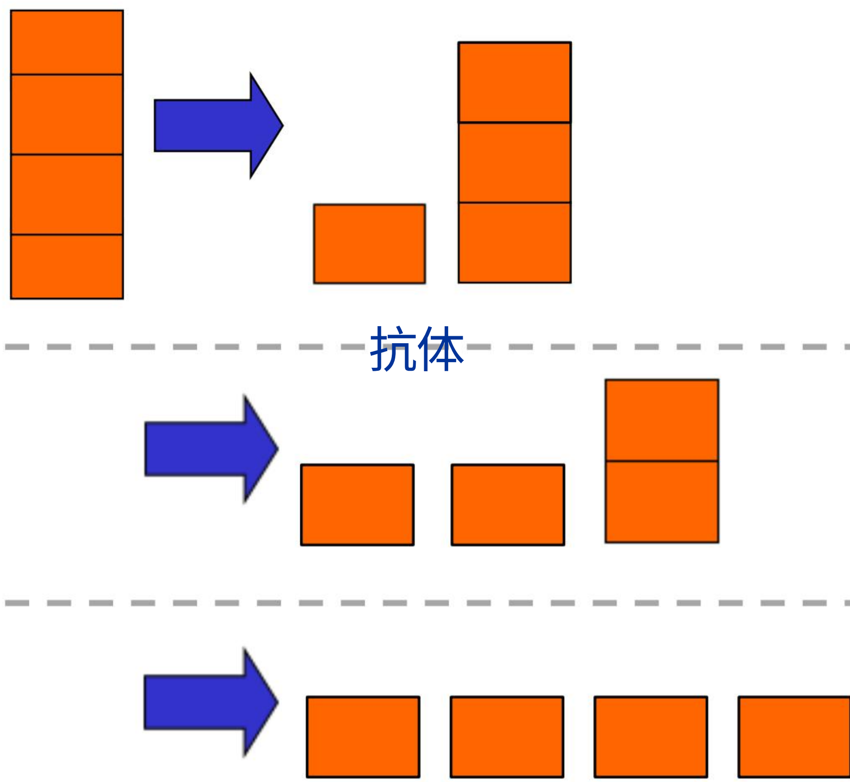
获得分数:1x1=1

所以总分=4+1+1=6。

Machine Translated by Google

拆垛游戏

示例:假设有 4 个盒子。



获得分数:1x3=3

获得分数:1x2=2

获得分数:1x1=1

所以总分=3+2+1=6。

Machine Translated by Google

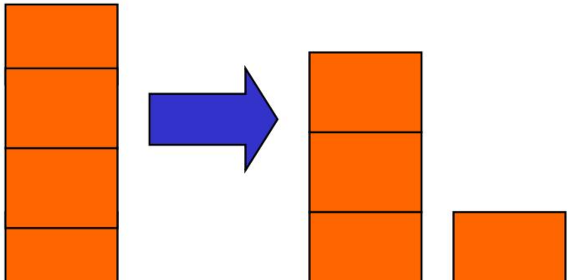
拆垛游戏

玩这个游戏的最佳方式是什么?

假设有 n 个盒子。

如果我们一次只移动一个盒子,总分是多少?

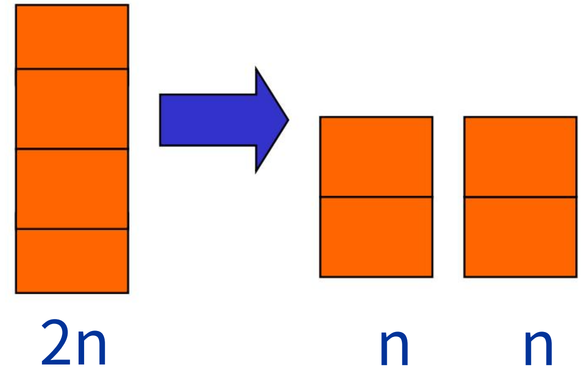
$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$



Machine Translated by Google

拆垛游戏

玩这个游戏的最佳方式是什么?



假设有 n 个盒子。

如果我们每次将堆栈切成两半,得分是多少?

说n=8,那么分数就是1x4x4 + 2x2x2 + 4x1 = 28

第一回合

第二个三分之一

不是更好

比第一个

战略!

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

说n=16,那么分数就是8x8 + 2x28 = 120

Machine Translated by Google

拆垛游戏

声明:每种拆垛方式都给出相同的分数。

声明:从大小为 n的堆栈开始,最高分将是 $\frac{n(n-1)}{2}$

证明:以Claim(n)作为假设的归纳法

基本情况n = 0:

分数 = 0 $= \frac{0(0\;1)}{2}$

索赔（0)没问题。

Machine Translated by Google

拆垛游戏

感应步骤。假设为n 堆栈，

然后证明C(n+1)：

(n+1)-堆栈分数 = $\frac{(n+1)n}{2}$

案例n+1 = 1. 验证1-stack：

分数 = 0 $= \frac{1(1-1)}{2}$

C(1)没问题。

Machine Translated by Google

拆垛游戏

情况n+1 > 1。所以分成一个a 堆栈和一个b 堆栈，

其中a + b = n +1。

$$\boxed{(a + b)\text{-stack score} = ab + a\text{-stack score} + b\text{-stack score}}$$

通过归纳：

堆栈分数 = $\dfrac{\text{一个}(-1)}{2}$

b 堆栈分数 = $\dfrac{\text{BB}(12) -}{}$

Machine Translated by Google

拆垛游戏

(a + b)-stack score = ab + a-stack score + b-stack score

一个啊 + 啊啊(- 1) / 2 + (bb - 1) / 2 =

$$\frac{2ab + a^2 - a + b^2 - b}{2} = \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2} =$$

(b)((ab) 1) (a ± 2 nn+)1 / 2

所以C(n+1)没问题。 我们完成了！

Machine Translated by Google

归纳假设

等等:我们假设C(a)和C(b) ,其中 1 ⩽ a， b ⩽ n。

但是通过归纳只能假设C(n)

解决方法:将归纳假设改写为

Q m()n n:。 =

( ) C 米

换句话说,它表示我们假设该声明是正确的

对于直到 n 的所有数字。

使用Q(n)而不是C(n)证明很好。

所以可以假设所有m n的C(m)来证明C(n+1)。

Machine Translated by Google

强感应

强感应

证明P(0)。

然后证明P(n+1)假设所有

P(0), P(1), ..., P(n) （而不仅仅是P(n)）。

结论nP(n)⍰

相等的

普通感应

0 → 1, 1 → 2, 2 → 3, ..., n-1 → n。

所以当我们到达n+1时,已经知道所有

P(0), P(1), ..., P(n)

关键是:假设 P(0),P(1),直到 P(n),通常更容易证明 P(n+1)。

Machine Translated by Google

被素数整除

定理。任何整数 $n > 1$ 都可以被素数整除。

还记得这张幻灯片吗?

现在我们可以证明

通过强感应

非常简单地。实际上

我们可以证明一个偶数

更强的定理

非常简单地。

- 令n 为整数。
- 如果n是一个素数,那么我们就完成了。
- 否则,$n = ab$,两者都小于n。
- 如果a 或b 是素数,那么我们就完成了。
- 否则,$a = cd$,两者都小于a。
- 如果c 或d 是素数,那么我们就完成了。
- 否则,重复这个论点,因为数字越来越小,这最终会停止,我们会找到一个素数n。

归纳的想法

Machine Translated by Google

优质产品

定理。任何整数 $n > 1$ 都可以被素数整除。

定理:每个大于 1 的整数都是素数的乘积。

证明:(通过强归纳法) ·基

本情况很容易。

· 假设所有 $2 <= i < n$ 的声明都为真。

·考虑一个整数n。

· 如果n 是素数,那么我们就完成了。

· 否则,对于整数k, m , $n = k \cdot m$,其中2 =< k,m < n。

· 根据归纳假设,k 和 m 都是素数的乘积

k = p1 p2 p94

m = q1 q2 q214

Machine Translated by Google

优质产品

定理:每个大于 1 的整数都是素数的乘积。

…所以

n = 公里 = p1 p2 p94 q1 q2 q214

是优质产品。

这样就完成了归纳步骤的证明。

Machine Translated by Google

强感应包邮

可用邮票：

5 美分

3¢

你能形成多少数量？

定理:可以形成任意数量 8¢

通过对n的强归纳证明。

P(n) ::= 可以形成n¢。

Machine Translated by Google

强感应包邮

基本情况（n = 8）：

8美分：

归纳步骤：假设m¢ 对于 8 ≤ m < n，然后证明n¢

案例：

n=9：

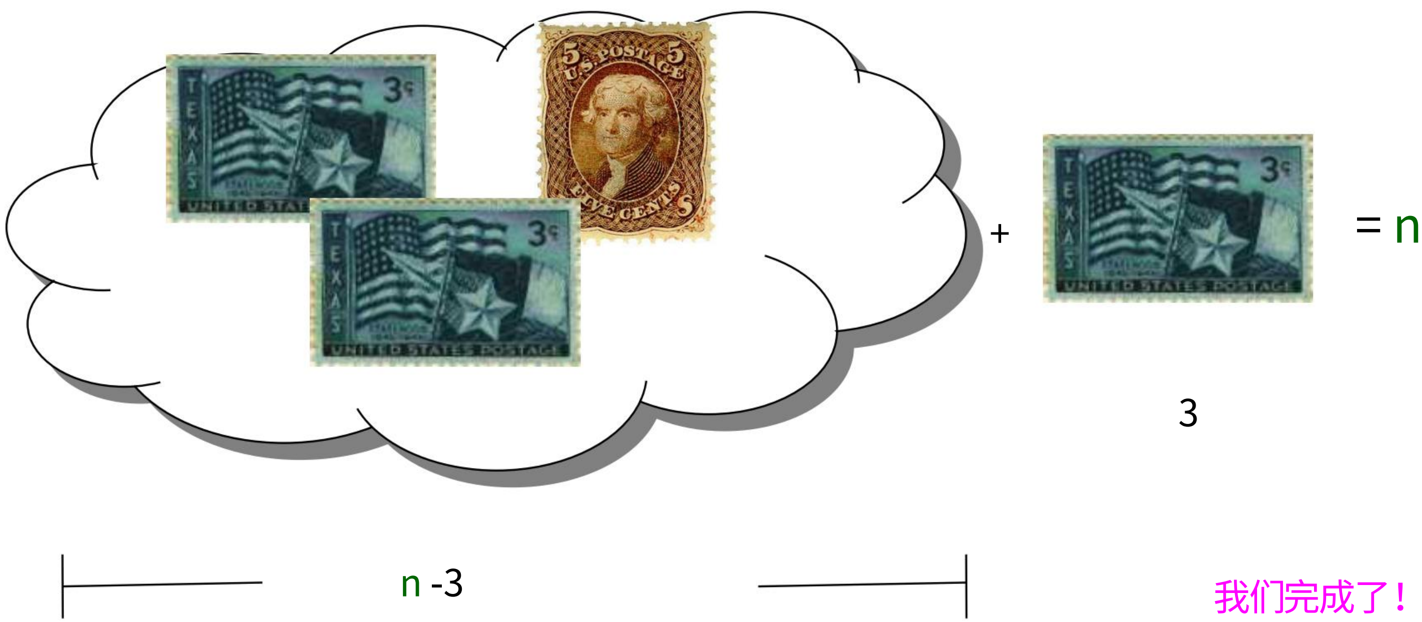
n=10：

Machine Translated by Google

强感应包邮

案例n 11:设m =n - 3。

那么n > m 8,所以通过归纳假设有：



我们完成了！

Machine Translated by Google

强感应包邮

鉴于无限供应 5 美分和 7 美分的邮票，

哪些邮资是可能的？

定理 :对于所有 n >= 24，

5美分和7美分的邮票可以产生n美分的邮资。

Machine Translated by Google

本次讲座

- 强感应
- 井序原则
- 不变法

Machine Translated by Google

有序原则

事实

每个非空自然数集都有一个最小元素

（Least 这里有它通常的意思 :最小）

这个事实是归纳公理的结果。

请注意，一些看起来相似的陈述是不正确的：

每个非空的非负实数集都有一个最小元素。

不！

每个非空的非负整数集合~~都有一个最小~~元素。

不！

Machine Translated by Google

有序原则

事实

每个非空自然数集 有一个最小元素。

以下变体（作为该公理的结果)也称为井序原则。

- 有限多个负整数和自然数的并集具有最小元素。
- Z+的非空子集具有最小元素。

Machine Translated by Google

有序原则

时间： $\sqrt{\ }$是不合理的2

证明:假设2 $\sqrt{\ } = \frac{\text{米}}{n}$

还记得这个证明吗?

…总能找到这样的 m， n没有公因数…

为什么总是?

按WOP,最小|m| st 2 $\sqrt{\ } = \frac{\text{米}}{n}$.

所以 $\sqrt{2} = \frac{\text{米}_0}{n_0}$ 其中|m0 |是最小值。

Machine Translated by Google

有序原则

但如果m0，n0有一个公因数c > 1,那么

$$\sqrt{2} = \frac{\text{麦克}/0}{\text{数控}/0}$$

和 $\left| mc/m\ 0/\ 0 \right| \quad \left| \right|$ 与|m0 |的最小性相矛盾。

在此示例中,使用井排序原则如下。 ·我们首先构造一个集合S （我们希望它是有序的）。

·假设假设不正确,因此S是良序的。

·从 S 中取出一个“最小”元素,证明 S 中还有一个“更小”的元素。

·达到矛盾,因此假设成立。

Machine Translated by Google

非费马定理

很难证明没有正整数解

$$a^3 + b^3 = c^3$$

费马定理

但是很容易证明没有正整数解

$$4a^3 + 2b^3 = c^3$$

非费马定理

提示:使用良序原理通过反证法证明……

Machine Translated by Google

非费马定理

定理。没有正整数解

$$4a^3 + 2b^3 = c^3$$

- 使用前面的策略,我们构造了集合

S ::={a ∈ +| ∃ , ∈ +, 4a3+2b3=c3 }

- 假设定理不正确。那么S不为空。

- 所以S是一个良序集,并且存在

(a,b,c) ∈ S其中a是所有"a"中最小的

如果我们可以找到(a ,b ,c) ∈ S其中a < a,那么我们可以得出一个矛盾。

Machine Translated by Google

非费马定理

定理。没有正整数解

$$4a^3 + 2b^3 = c^3$$

我们将证明a, b, c必须是偶数,因此(a/2, b/2, c/2) ∈ S。

这与 a 的“小”相矛盾,因此证明了定理。

首先,因为c3是偶数,所以 c 必须是偶数。 (因为奇数是奇数)。

令 c = 2c ,则

$$4a^3 + 2b^3 = (2c')^3$$

$$4a^3 + 2b^3 = 8c'^3$$

$$\boxed{b^3 = 4c'^3 - 2a^3}$$

Machine Translated by Google

非费马定理

$$b^3 = 4c'^3 - 2a^3$$

因为b3是偶数,所以 b 一定是偶数。 （因为奇数是奇数）。

令 b = 2b ,则

$$(2b')^3 = 4c'^3 - 2a^3$$

$$8b'^3 = 4c'^3 - 2a^3$$

$$a^3 = 2c'^3 - 4b'^3$$

因为a3是偶数,所以 a 一定是偶数。 （因为奇数是奇数）。

因此， a,b,c都是偶数,所以我们完成了。

Machine Translated by Google

证明中的良序原则

使用 WOP证明``∀n∈N P(n) ：

1. 构造集合

$$S ::= \{n \in N \mid \neg P(n)\}$$

2.假设 ¬P(n) 存在,所以 S 是一个良序集。

3.通过 WOP,有一个 "最小"元素n0 ∈ S。 （在某些情况下,我们可能对 "最小"有不同的含义。）

4.达到矛盾（使用任何你想要的方法,包括数学归纳法）

– 通常通过找到S的元素< n0 。

5.得出 P(n) 为真的结论。量子点

注意 :这是一般策略,但在实践中可能会有所不同。

Machine Translated by Google

本次讲座

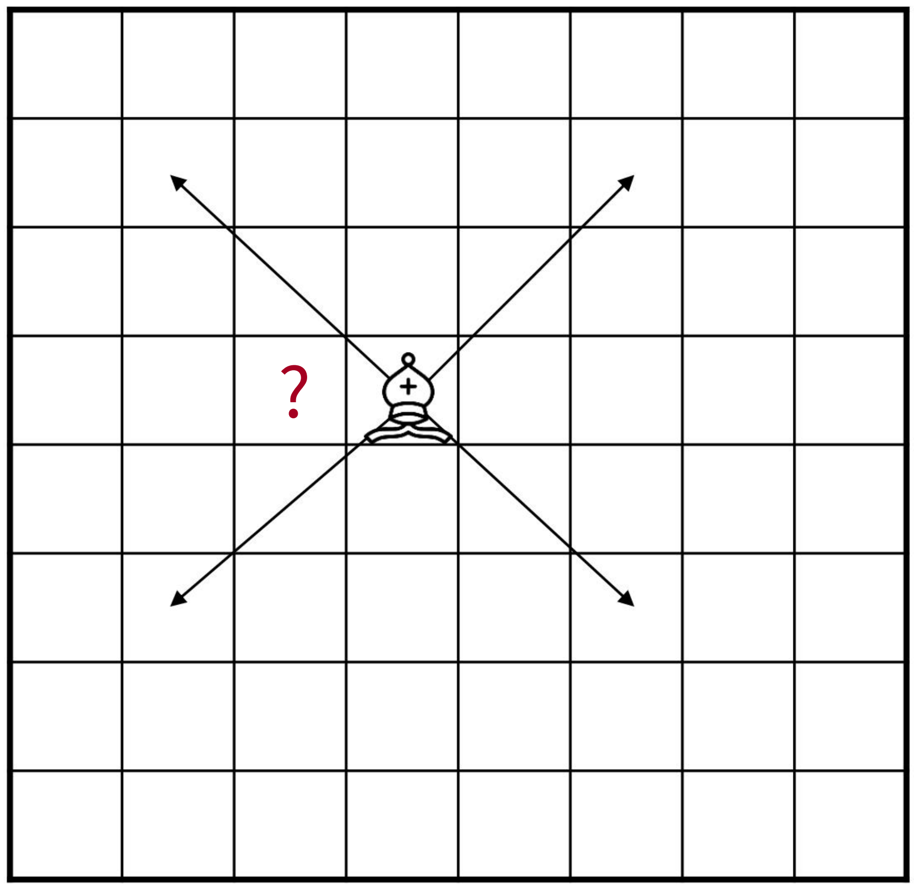
- 强感应
- 井序原则
- 不变法

Machine Translated by Google

棋盘问题

主教  只能沿对角线移动

主教可以从当前位置移动到问号吗?

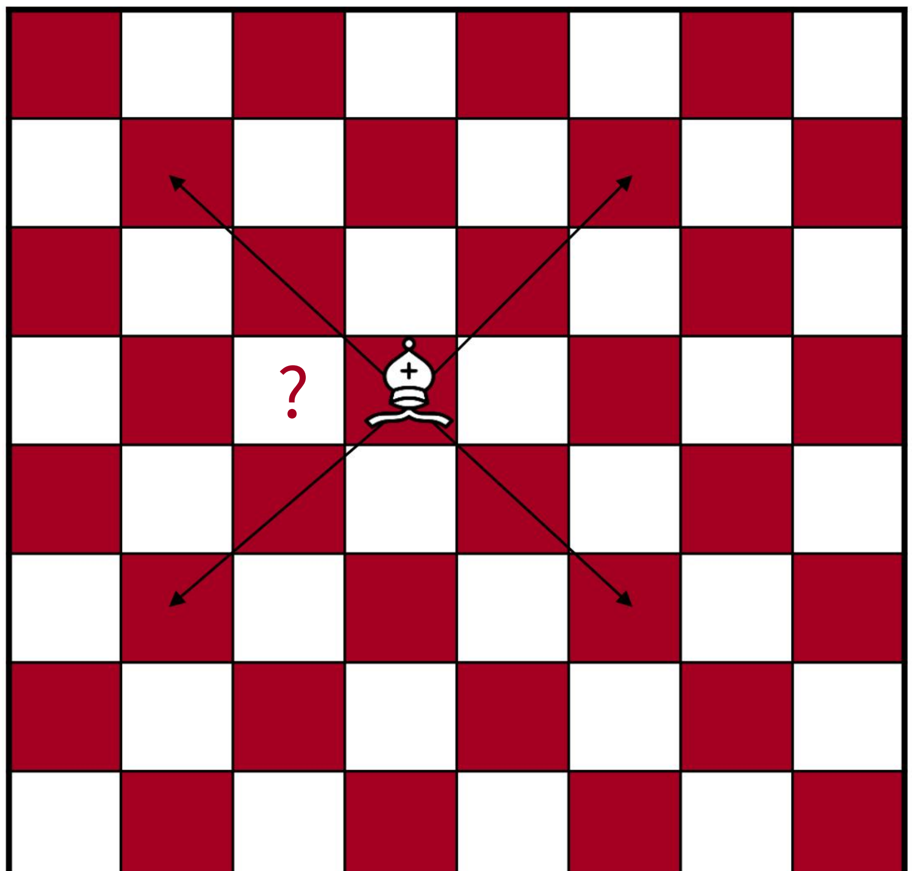


Machine Translated by Google

棋盘问题

主教  只能沿对角线移动

主教可以从当前位置移动到问号吗?



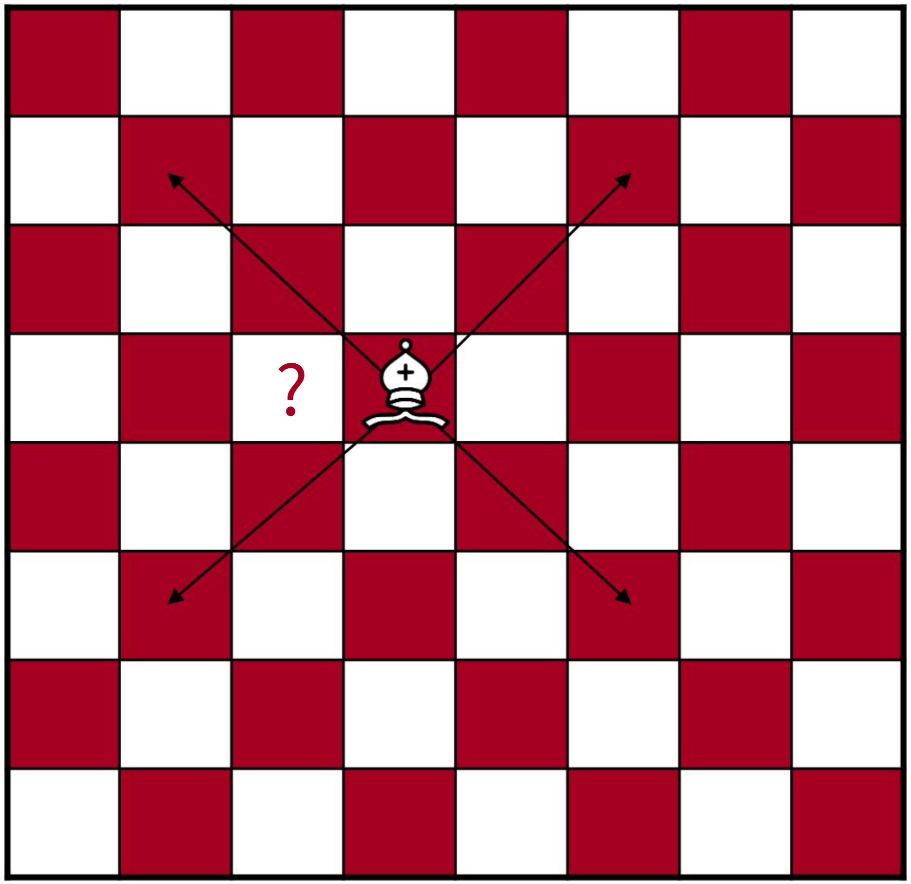
不可能的!

为什么?

Machine Translated by Google

棋盘问题

不变！



1. 主教处于红色位置。

2.红色位置只能通过对角线移动到红色位置

移动。

3.问号是白色的

位置。

4. 所以主教不可能去那里。

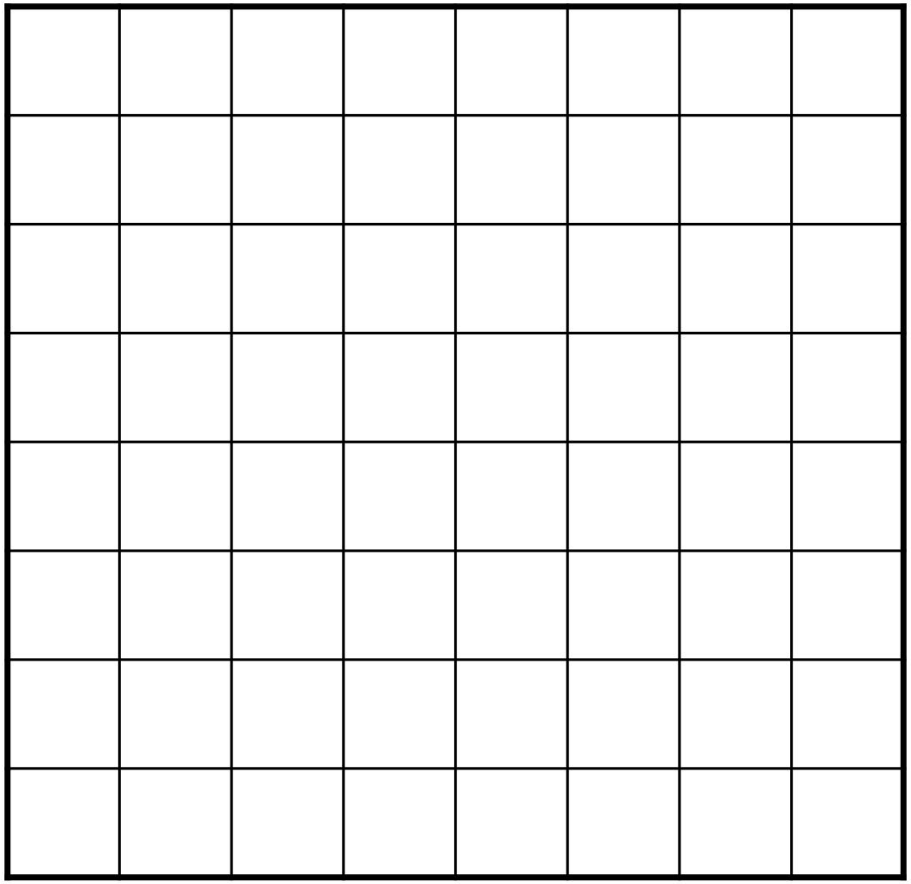
这是不变方法的一个简单示例。

Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

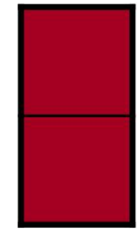
一个 8x8 棋盘,32 块多米诺骨牌

我们可以填满棋盘吗?

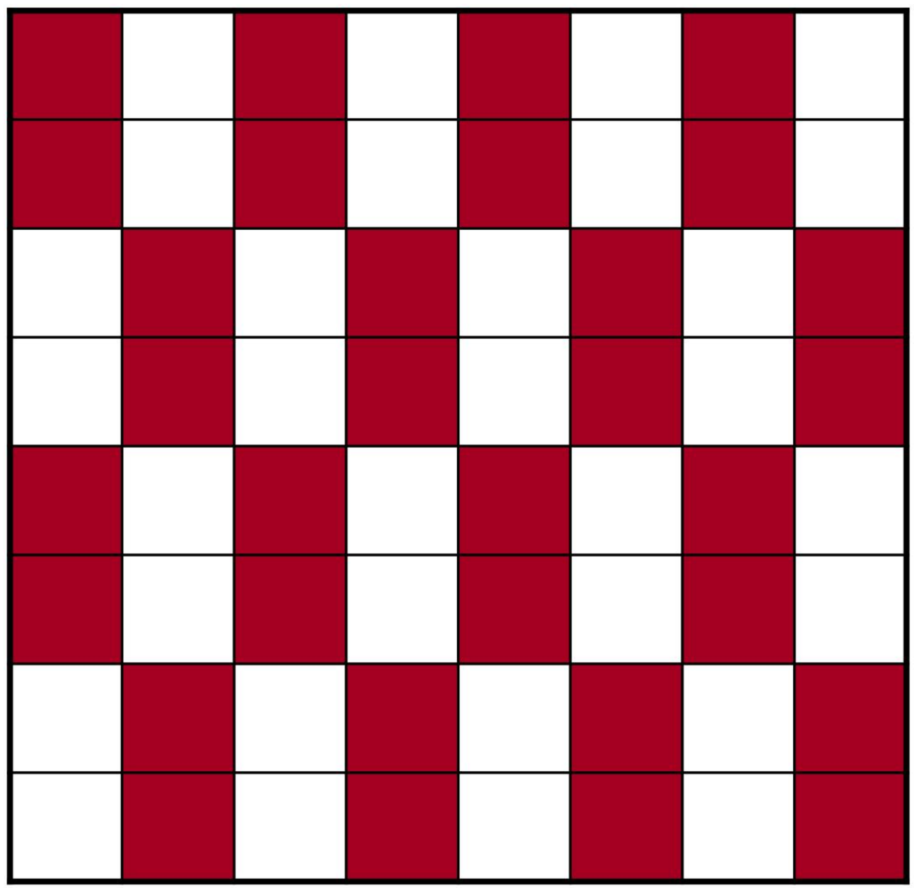


Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图



一个 8x8 棋盘,32 块多米诺骨牌

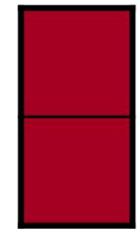


简单的!

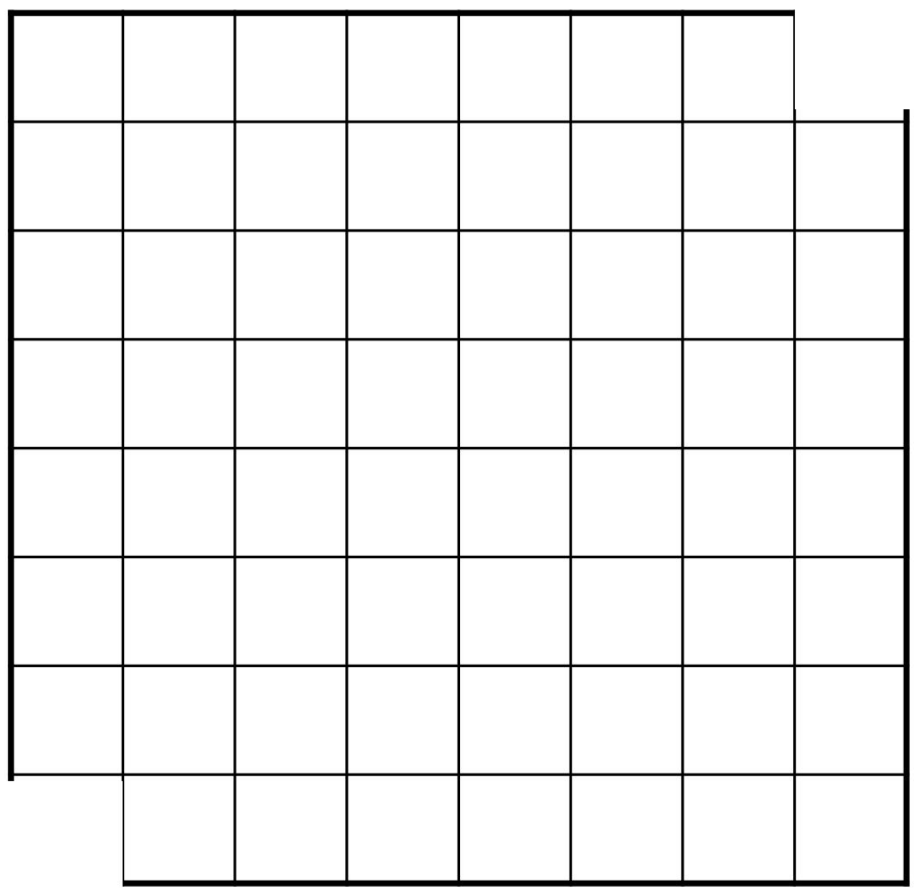
Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

一个有两个孔的 8x8 棋盘， 31块多米诺骨牌



我们可以填满棋盘吗?



简单的？？

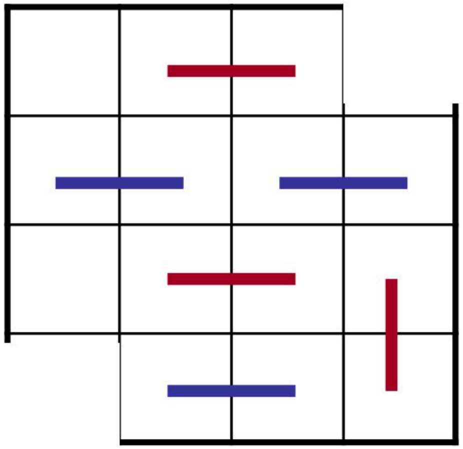
Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

一个带两个孔的 4x4 棋盘， 7块多米诺骨牌

我们可以填满棋盘吗?

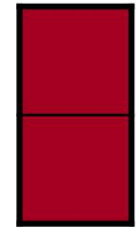
不可能的!



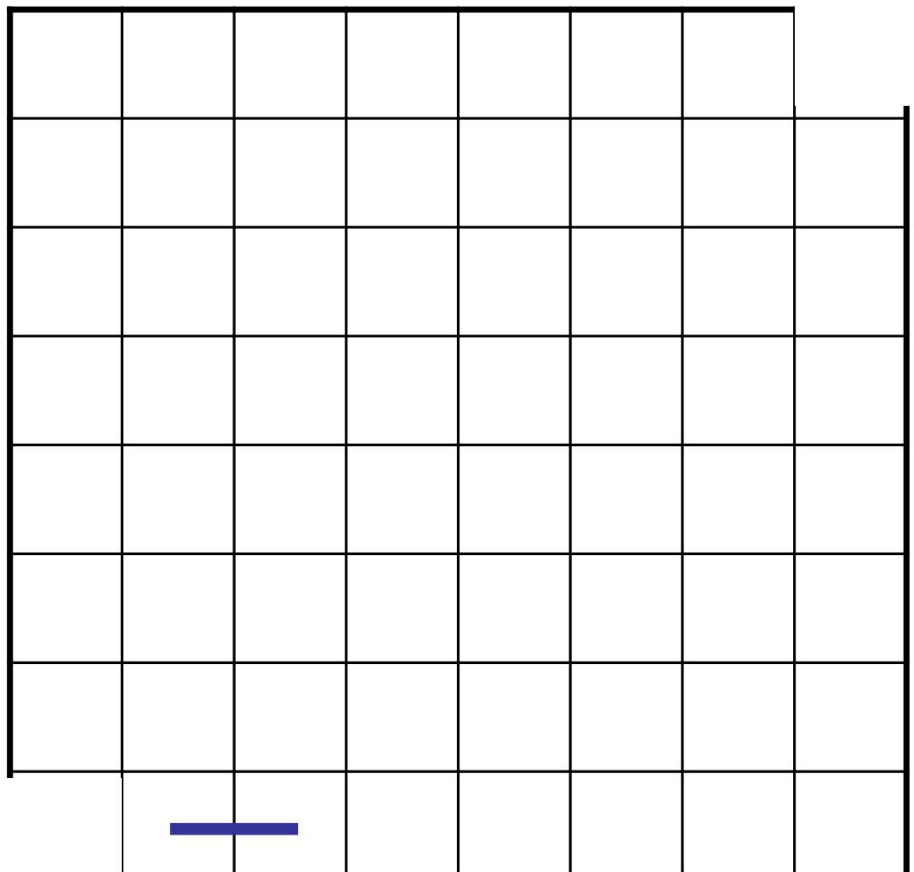
Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

一个有两个孔的 8x8 棋盘， 31块多米诺骨牌



我们可以填满棋盘吗?



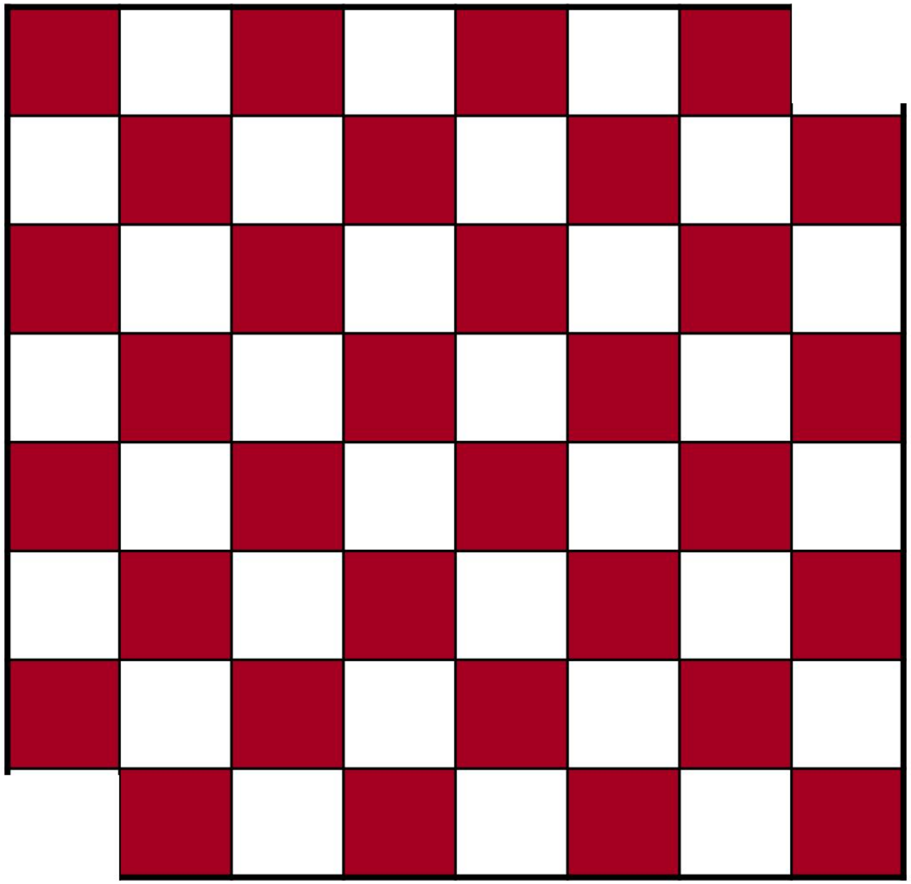
然后呢？？

Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

一个有两个孔的 8x8 棋盘， 31块多米诺骨牌

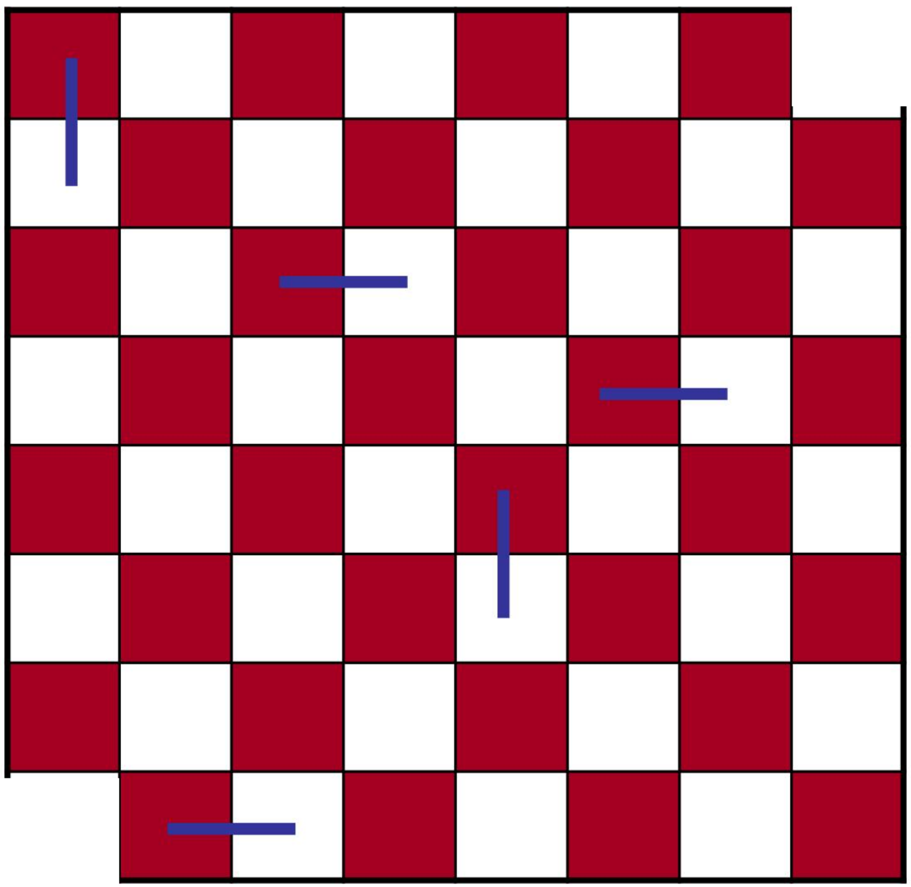
我们可以填满棋盘吗?



Machine Translated by Google

多米诺骨牌拼图

不变！



1. 每张多米诺骨牌将占据一个白色方块和一个红色方块正方形。

2.红色方块有32个,白色方块只有30个。

3. 所以不可能填31
30个白色方块的多米诺骨牌！

这是不变方法的另一个例子。

Machine Translated by Google

不变法

1.观察属性（不变量）

在整个过程中（通过归纳)感到满意。

2.表明目标不满足性质。

3.得出目标无法实现的结论。

在主教的例子中,不变量是主教位置的颜色。

在多米诺骨牌示例中,不变式是多米诺骨牌的任何位置都将占据相同数量的红色位置和白色位置。

在算法分析中非常有用。

Machine Translated by Google

挑战

我们可以从左边的状态移动到右边的状态吗?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

通常,不变的方法并不容易。

我们稍后会回到这个问题。

Machine Translated by Google

快速总结

归纳法可能是计算机科学中最重要的证明技术。

例如,在证明算法的正确性方面非常重要

（通过不变方法)并分析算法的运行时间。

没有您应该记住的特定示例。

这里的重点是理解数学归纳法的原理

（将大问题“化约”为小问题的方式），

并将其应用于您将来会遇到的新问题。

可能学习这一点的唯一方法是做更多的练习。