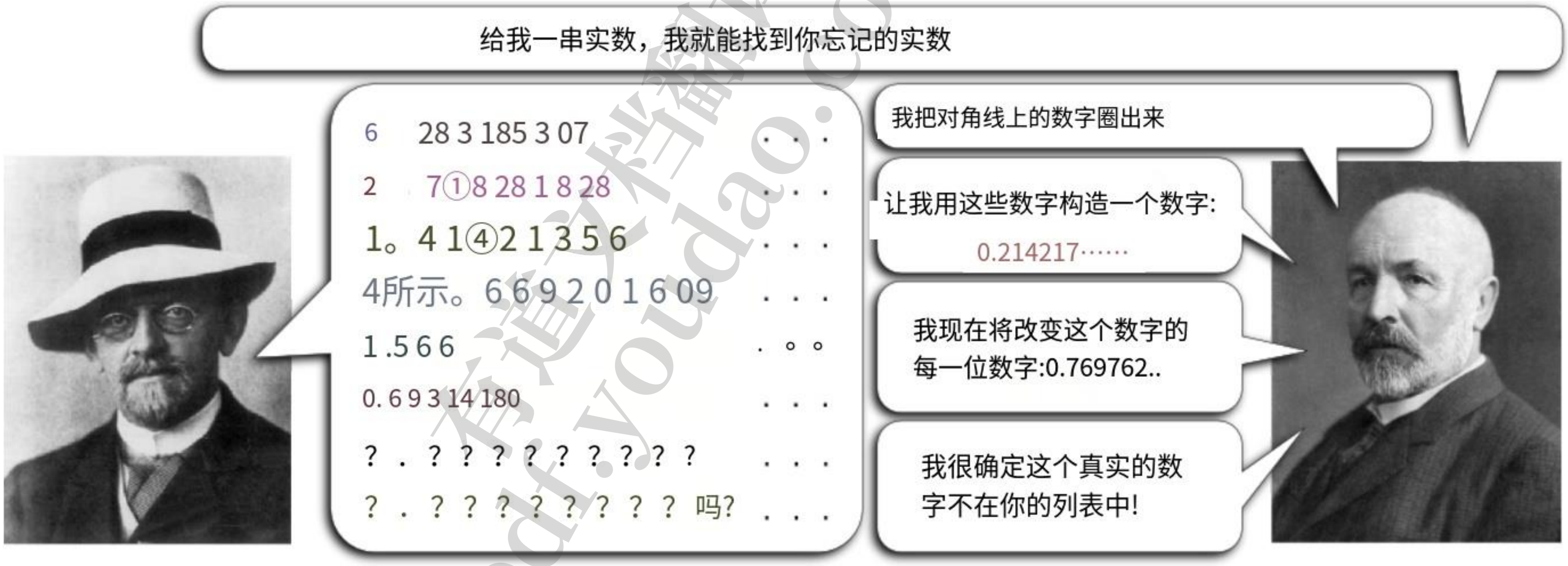
基数(可选)


给我一串实数，我就能找到你忘记的实数
6 28 3 185 3 07 . . .
2 7①8 28 1 8 28 . . .
1。4 1④2 1 3 5 6 . . .
4所示。6 6 9 2 0 1 6 09 . . .
1 .5 6 6 . 。。
0. 6 9 3 14 180 . . .
? . ? ? ? ? ? ? ? ? ? . . .
? . ? ? ? ? ? ? ? ? 吗? . . .
我把对角线上的数字圈出来
让我用这些数字构造一个数字:
0.214217……
我现在将改变这个数字的每一位数字:0.769762..
我很确定这个真实的数字不在你的列表中!

这节课

上一讲我们学习了映射计数的技巧。在这节课中，我们将学习如何计算无穷大，即。即基数(无穷大的大小)。

我们还将讨论基数的一些应用。

基数

问题:

- |正整数集| = |整数集| ?
- |整数集| = |有理数集| ?
- |整数集| = |实数集| ?

如何比较无限集的大小?

集合 a 的基数是一个度量“a 中元素数量”的数字。

例如，{a,b,c}的基数是 3。pow({1，…，n})的基数=2n。

无限集合的基数是什么?

基数

两个无限集具有相同的基数是什么意思?

回想一下,

- f: A→B 是内射的:|A|≤|B|
- f: A→B 是满射格拉玛|A|≥|B|
- f: A→B 是二射玛|A| = |B|

两个集合 A 和 B 有
相同的基数当且仅当
a 之间存在双射
和 B。

如果一个集合的基数与正整数集合的基数相同，则它是可数的(基数否)。

乔治·康托
1845-1918

整数 vs 正整数

整数集是可数的吗?

定义正整数和所有整数之间的双射。

1 2 3 0

1− 1

f (n)

−

4 5 6 7 8⋯2− 2 3− 3

4⋯N /2，如果 N 为偶

数;−（n− 1）/2，如果

n 是奇数。

所以，这个整数集是可数的。

有理数 vs 正整数

问题:有理数的集合是可数的吗?

“整数对”(a,b)的集合不小于有理数集合。

我们想要证明“整数对”的集合是可数的，通过定义一个从正整数到这个集合的满射。

这就意味着有理数集是可数的。

有理数 vs 正整数

(0,0) 、 (0,1),(0,− 1)(0,2),(0,− 2)(0,3),(0,− 3) 。 (1,0),(1, 1),(1− 1),(1 、 2),(1− 2),(1,3),(1,− 3) 。 (− 1,0) 、 (− 1,1),(− 1− 1),(− 1,2)、 (− − 1 日 2),(− 1,3)(− − 1 日 3)。 (2,0),(2, 1),(2− 1),(2,2),(2− 2),(2、 3),(2− 3)。 (− 2,0)、 (− 2,1)、 (− 2− 1),(− 2 2)(− − 2 日 2),(− 2、 3),(− 2− 3)。

如果你先将这组正整数映射到第一行，那么你将无法到达第二行。

诀窍在于逐对角线访问有理数。

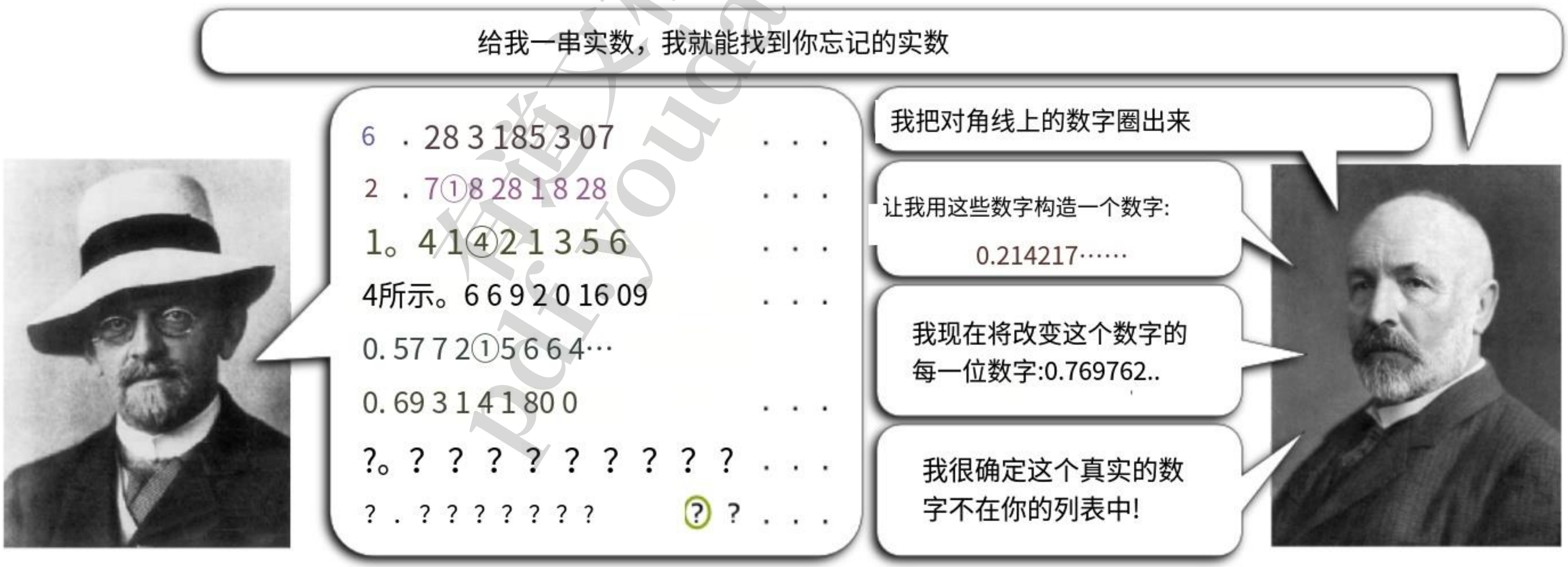
每条对角线都是有限的，所以每对都将以有限的步数访问。

因此，我们找到了一个从正整数集合到“整数对”集合的满射，所以有理数集合是可数的。

实数 vs 正整数

问题:这组实数是可数的吗?

定理。没有将正整数映射为实数的满射。



所以实数是不可数的。

斜参数

我们刚才看到的论证叫做康托的对角论证，它有很多应用(例如罗素的悖论)。

具体来说，可数和不可数是不同的基数。更令人惊讶的是，有无限多个基数(大小为无穷大)。

定理。对于任意集合 S， |S|≠| pow(S) |。

证明(反证法)。

假设 f: S -> Pow(S)是双射的。设 T = {x∈S | * f(x)}。那么对于某个 y∈S, T = f(y)。

••yY∈f(y) T= f(y)⇒⇒y 处理

一个矛盾!一个矛盾!

基数性和可计算性

用一种给定的计算机语言编写的所有计算机程序的集合是可数的。

所有函数的集合是不可数的。

一定存在一个不可计算的函数!

快速的总结

基数是无限集合的“大小”的另一种说法。

通过构造双射，我们可以检查两个给定的无限集是否具有相等的基数。

对角线参数是检查一个集合是否可数的一种有用方法。