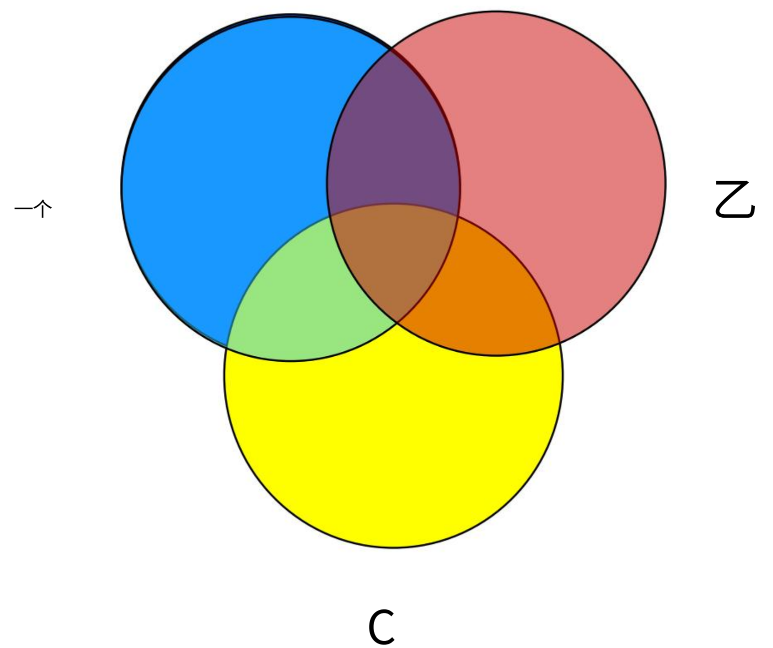
套



本次讲座

我们将在这节课中介绍一些基本的集合论。

- 基本定义
- 对集合的操作
- 设置身份
- 罗素悖论

定义集

定义 :集合是不同对象的无序集合。

集合中的对象称为集合 S 的元素或成员 ,我们说 S包含它的元素。

例如 $S = \{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7, 2\}$

$S = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

$pow(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ （$\{a,b\}$ 的幂集）

以下哪些是集合?

- $S = \{2, 3, 5, 3, 7\}$否
- $S = \{\{a\},a\}$ 是的

古典套装

以下是一些众所周知的集合示例。

Z :所有整数的集合

Z+ :所有正整数的集合

Z- :所有负整数的集合

N :所有非负整数的集合

R :所有实数的集合

Q :所有有理数的集合

C :所有复数的集合

按属性定义集

通过列出所有元素来定义集合是不方便的,有时甚至是不可能的。

Alternatively, we use the notation $\{x \in A \mid P(x)\}$ to define the set as the set of elements, x, in A such that x satisfies property P.

例如 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

$S = \{x \mid x \text{ is a prime and } x < 70{,}000{,}000\}$

定义 :集合 S的大小,用|S| 表示,定义为 S 中包含的元素个数。

会员资格

集合论中最基本的问题是元素是否在集合中。

$x \in A$ x是A的一个元素

x在A中

$x \notin A$ x不是A的元素

x不在A中

Definition:

- $A \subseteq B$ (A is a subset of B) $\Longleftrightarrow$ For any $x \in A$ we have $x \in B$.
- $A = B$ (A is equal to B) $\Longleftrightarrow$ $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$.
- $A \subset B$ (A is a proper subset of B) $\Longleftrightarrow$ $A \subseteq B$ and $A \neq B$.

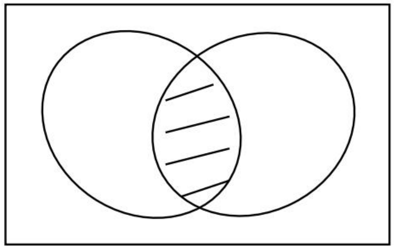
本次讲座

- 基本定义
- 对集合的操作
- 设置身份
- 罗素悖论

集合的基本操作

假设 A、B 是通用集 U 的两个子集（取决于上下文 U 可以是 R、Z 或其他集合）。

路口： $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

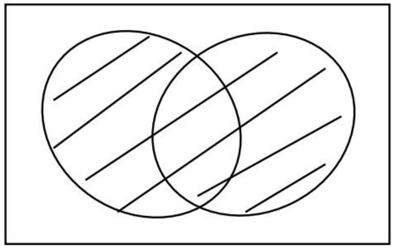


定义：如果两个集合的交集是空集，则称这两个集合是不相交的。

例如，令 A 为奇数集，B 为偶数集。

那么 A 和 B 是不相交的。

联盟： $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$



事实： $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

集合的基本操作

• Definition

Unions and Intersections of an Indexed Collection of Sets

Given sets $A_0, A_1, A_2, \ldots$ that are subsets of a universal set U and given a nonnegative integer n,

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for at least one } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for at least one nonnegative integer } i\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for all } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ for all nonnegative integers } i\}.$$

集合的基本操作

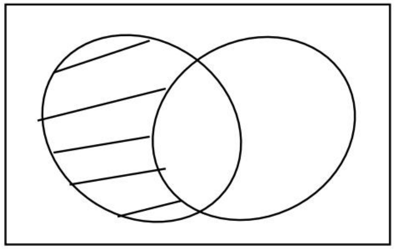
For each positive integer i, let $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

a. Find $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ and $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

b. Find $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ and $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

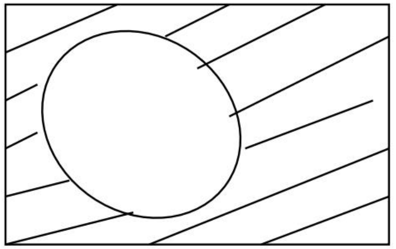
集合的基本操作

区别: $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$



事实: $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

补充: $\overline{A} = A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$



例如,让 U = Z 和 A 是奇数的集合。

然后是偶$\overline{A}$数集。

事实:如果 $A \subseteq B$, 然后 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

例子

$A = \{1, 3, 6, 8, 10\}$ $B = \{2, 4, 6, 7, 10\}$

$A \cap B = \{6, 10\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ $AB = \{1, 3, 8\}$

让 $U = \{ x \in Z \mid 1 \leqslant x \leqslant 100\}$。

$A = \{ x \in U \mid x$ 可被 3} 整除,$B = \{ x \in U \mid x$ 能被 5 整除}

$A \cap B = \{ x \in U \mid x$ 可以被 15 整除}

$A \cup B = \{ x \in U \mid x$ 能被 3 整除或能被 5 整除（或两者兼有）}

$A - B = \{ x \in U \mid x$ 能被 3 整除,但不能被 5 整除 }

练习:计算 $|A|$、$|B|$、$|A \cap B|$、$|A \cup B|$、$|A - B|$。

集的分区

如果两个集合的交集为空,则它们是不相交的。

A collection of nonempty sets $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ is a partition of a set A if and only if

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ are mutually disjoint (or pairwise disjoint).

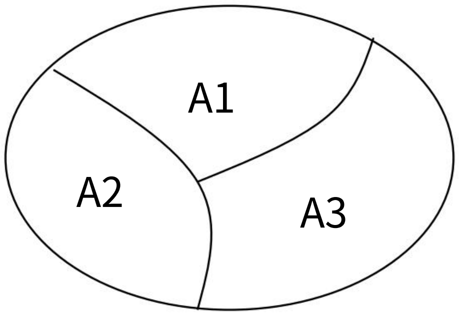
例如,令 A 为整数集。

A1 = {x ∈ A | x = 3k+1 对于某个整数 k}

A2 = {x ∈ A | x = 3k+2 对于某个整数 k}

A3 = {x ∈ A | x = 3k 对于某个整数 k}

那么 {A1 , A2 , A3 } 是 A 的一个分区



集的分区

e.g. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is divisible by } 6\}$.

$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is divisible by } 2\}$.

$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is divisible by } 3\}$.

Then $\{A_1, A_2\}$ is not a partition of A, because

- $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$
- $A \subset A_1 \cup A_2$

e.g. $A = \mathbb{Z}$.

$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

Then $\{A_1, A_2\}$ is not a partition of A, because

$A \supset A_1 \cup A_2$ as 0 is contained in A.

笛卡尔积

Definition: Given two sets A and B, the **Cartesian product** A x B is the set of all **ordered** pairs (a,b), where a is in A and b is in B. That is,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

有序对表示排序很重要,例如 $(1,2) \neq (2,1)$

例如,令 A 为字母集合,即 {a,b,c,...,x,y,z}。

令 B 为数字集,即 $\{0,1,\cdots,9\}$。

AxA只是包含两个字母的字符串集合。

BxB只是具有两位数的字符串集。

AxB是一组字符串,其中第一个字符是字母,第二个字符是数字。

笛卡尔积

该定义可以推广到任意数量的集合,例如

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A \text{ and } b \in B \text{ and } c \in C\}$$

Using the above examples, AxAxA is the set of strings with three letters.

e.g. the set of the vectors in $\mathbb{R}^3$ is the set $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

事实 :如果 |A| = n 和 |B| = m,那么 |AxB| =纳米。

事实 :如果 |A| = n 和 |B| = m 和 |C| = l,那么 |AxBxC| = nml。

事实： |A1xA2x⋯xAk | = |A1 |x|A2 |x⋯x|Ak |。

Exercises

1. Let A be the set of prime numbers, and let B be the set of even numbers. What is $A \cap B$ and $|A \cap B|$?

2. Is $|A \cup B| > |A| > |A \cap B|$ always true?

3. Let A be the set of all n-bit binary strings, A_i be the set of all n-bit binary strings with i ones. Is $(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ a partition of A?

本次讲座

- 基本定义
- 对集合的操作
- 设置身份
- 罗素悖论

设置身份

设 A、B、C 是全集 U 的子集。

交换律： (a) $A \cup B = B \cup A$ and (b) $A \cap B = B \cap A$

结合律： (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配法： (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

身份法： (a) $A \cup \emptyset = A$ and (b) $A \cap U = A$

补法： (a) $A \cup A^c = U$ and (b) $A \cap A^c = \emptyset$

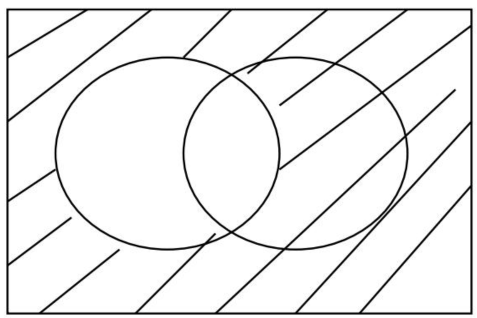
德摩根定律： (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ and (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

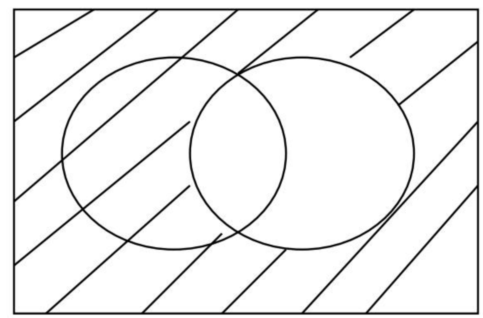
设置差异法律： $A - B = A \cap B^c$

维恩图

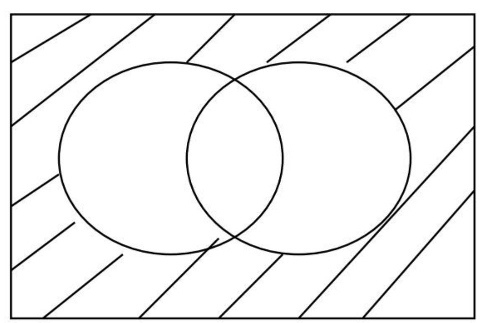
德摩根定律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A}$





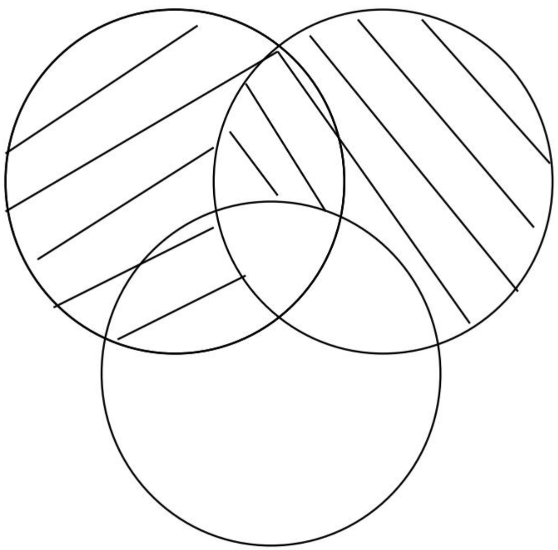
$\overline{B}$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

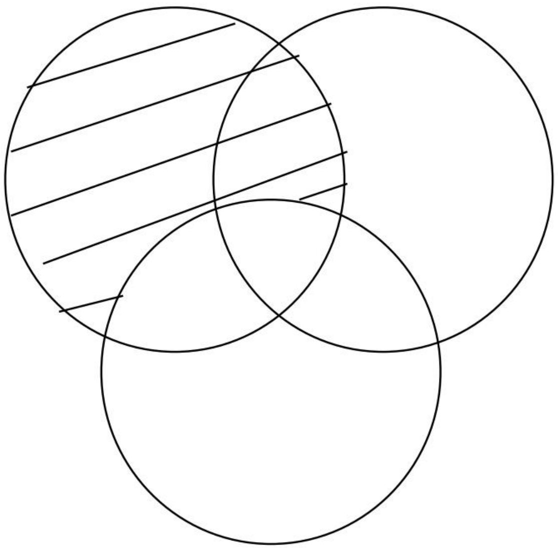
反证

$$(A - B) \cup (B - C) = A - C?$$

一个

乙

C

LHS

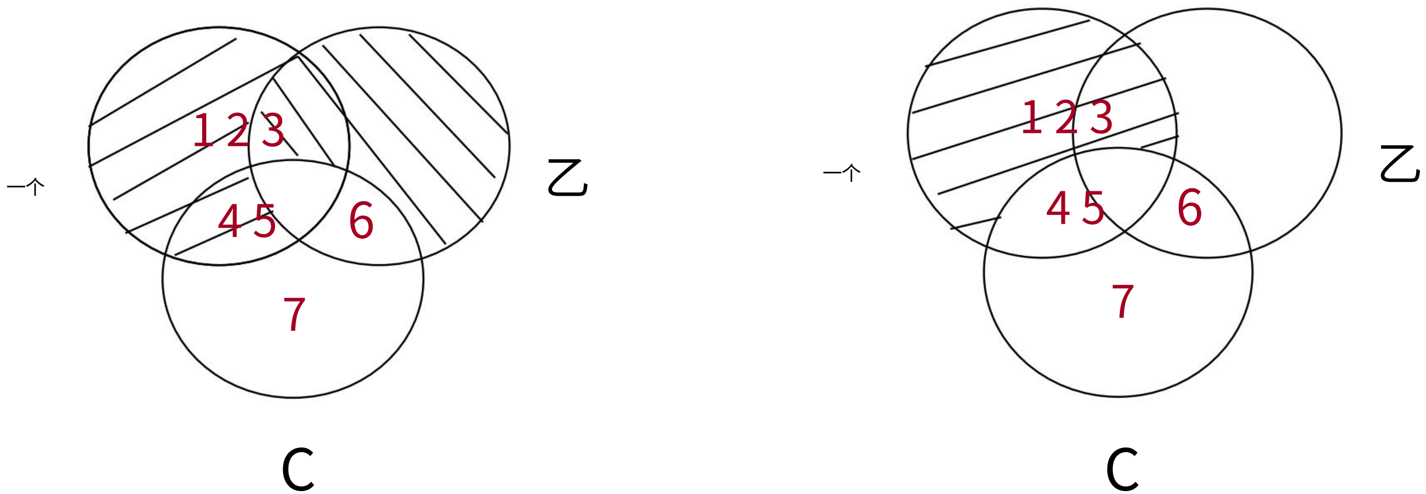
一个

乙

C

RHS

反证

$$(A - B) \cup (B - C) = A - C?$$



通过在图中的每个区域中放置一个数字,我们可以很容易地构造一个等式的反例。

令 A = {1,2,4,5},B = {2,3,5,6},C = {4,5,6,7}。

然后我们看到 LHS = {1,2,3,4} 和 RHS = {1,2}。

代数证明

$$\overline{((A \cup C) \cap (B \cup C))} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}?$$

$$\overline{((A \cup C) \cap (B \cup C))}$$

$$= \overline{(A \cup C)} \cup \overline{(B \cup C)}$$ 根据德摩根定律

$$= (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup \overline{(B \cup C)}$$ 根据德摩根定律

$$= (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$$ 根据德摩根定律

$$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$$ 根据分配法

定义证明

How to prove $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$?

1. LHS $\subseteq$ RHS.

Since $(A \cap B) \times C \subseteq A \times C$, $(A \cap B) \times C \subseteq B \times C$

2. RHS $\subseteq$ LHS.

$(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times C$ and $(x,y) \in B \times C$

So $x \in A$ and $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

Hence $(x,y) \in (A \cap B) \times C$.

因此,我们完成了证明。

Exercises

$$A - (A \cap B) = A - B?$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)?$$

$$\overline{(A \cup B \cup C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}?$$

本次讲座

- 基本定义
- 对集合的操作
- 设置身份
- 罗素悖论

罗素悖论

让： WS = 套装 | 党卫军

换句话说，W 是包含所有不包含自身的集合的集合。

W在W中吗？

如果 W 在 W 中，则 W 包含它自己。

但是 W 属性意味着 W 不在 W 中。

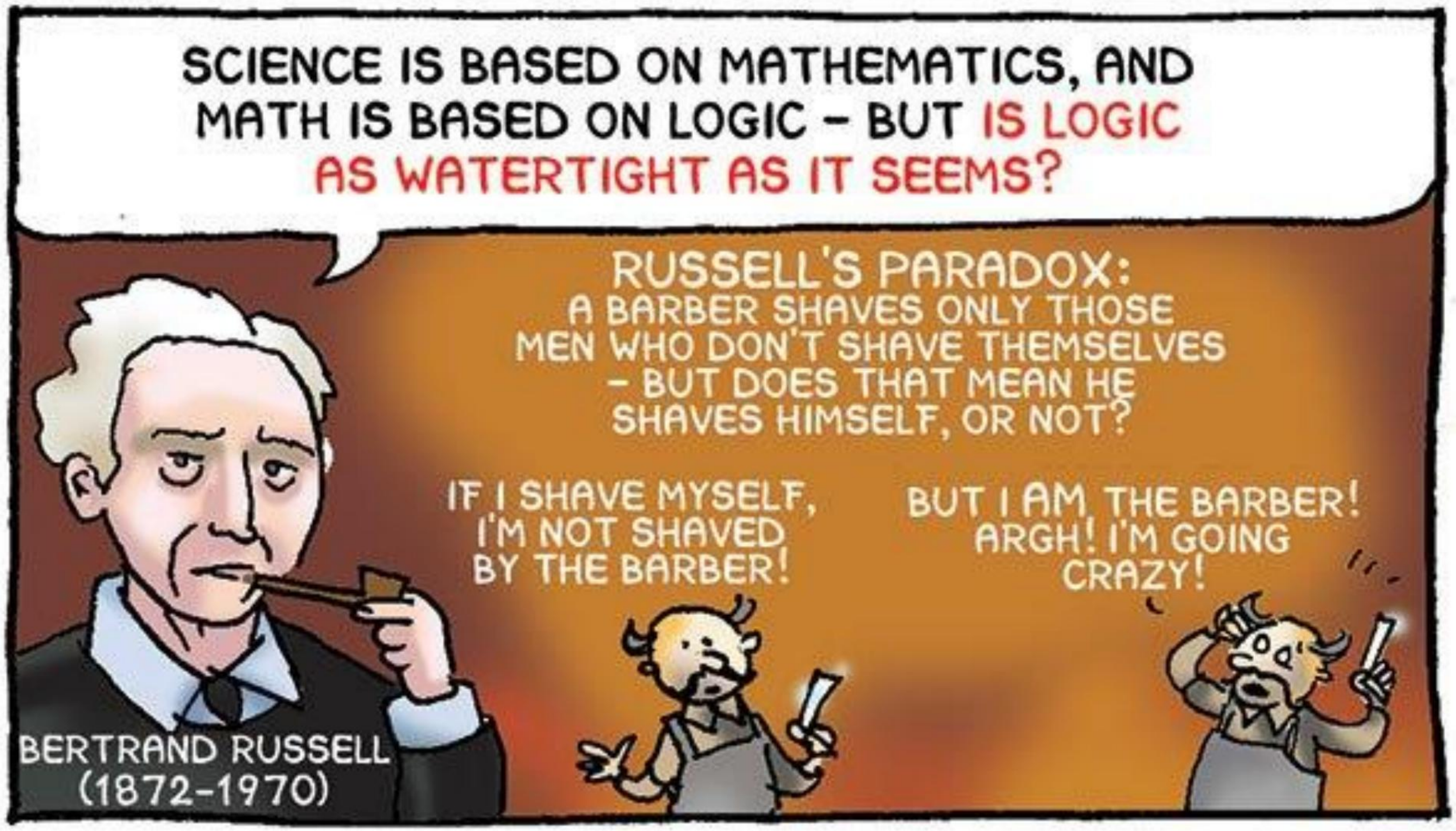
所以 W 不在 W 中。

如果 W 不在 W 中，则它满足 W 属性。

所以 W 在 W 中。

怎么了？？？

理发师悖论


SCIENCE IS BASED ON MATHEMATICS, AND MATH IS BASED ON LOGIC – BUT IS LOGIC AS WATERTIGHT AS IT SEEMS?
RUSSELL'S PARADOX:
A BARBER SHAVES ONLY THOSE MEN WHO DON'T SHAVE THEMSELVES – BUT DOES THAT MEAN HE SHAVES HIMSELF, OR NOT?
IF I SHAVE MYSELF, I'M NOT SHAVED BY THE BARBER!
BUT I AM THE BARBER! ARGH! I'M GOING CRAZY!
BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

解决罗素悖论

一个男人要么给自己刮胡子,要么不给自己刮胡子。

理发师要么给自己刮胡子,要么不给自己刮胡子。

也许这样的理发师不存在?

实际上,这是摆脱悖论的出路。

回到罗素悖论,我们得出结论 W 不可能是集

合,

因为每个集合要么包含它自己,要么不包含它,但对于

W 来说,这两种情况都不会发生。

这个悖论告诉我们,并非我们定义的所有东西都是一个集合。

后来数学家更仔细地定义集合,例如使用我们已经知道的集合。

停机问题（可选）

现在我们提到计算机科学中最著名的问题之一。

停止问题:我们可以编写一个检测无限循环的程序吗?

我们想要一个给定任何程序 P 和输入 I 的程序 H:如果 P 将终止给定输入 I,则H(P,I) 返回 “halt” ;如果 P 不会终止给定的输入 I ,则H(P,I) 返回 “永远循环” 。
而 H 本身必须在有限时间内终止。

停止问题:这样的程序 H 存在吗?

不!

用于解决停止问题的推理与罗素悖论的推理非常相似。

停机问题（可选）

我们想要一个给定任何程序 P 和输入 I 的程序 H： ·如果 P 将终止给定输入 I,则H(P,I) 返回“停止”； · H(P,I)如果 P 不会终止给定的输入 I ,则返回“永远循环”。
· H 本身必须在有限时间内终止。

程序 P 由字符组成,因此它是一个输入。

构造一个程序Test(P) 使得 ·如果H(P,P) 停止，Test(P)将永远循环； ·如果H(P,P) 永远循环，则Test(P)停止。

·如果Test(Test) 永远循环,那么H(Test,Test) 也是如此,因此测试（测试)停止。矛盾！ ·如果Test(Test)停止,那么H(Test,Test) 也会停止,因此Test(Test) 将永远循环。矛盾！

停止问题:这样的程序 H 存在吗？

不！

概括

回想一下我们到目前为止所介绍的内容。

- 基本定义（定义集合、成员、子集、大小）
- 集合运算（交集、并集、差集、补集、分区、幂集、笛卡尔积）

- 设置身份（分配定律、德摩根定律、
  检查集合身份 - 证明和反证，代数）