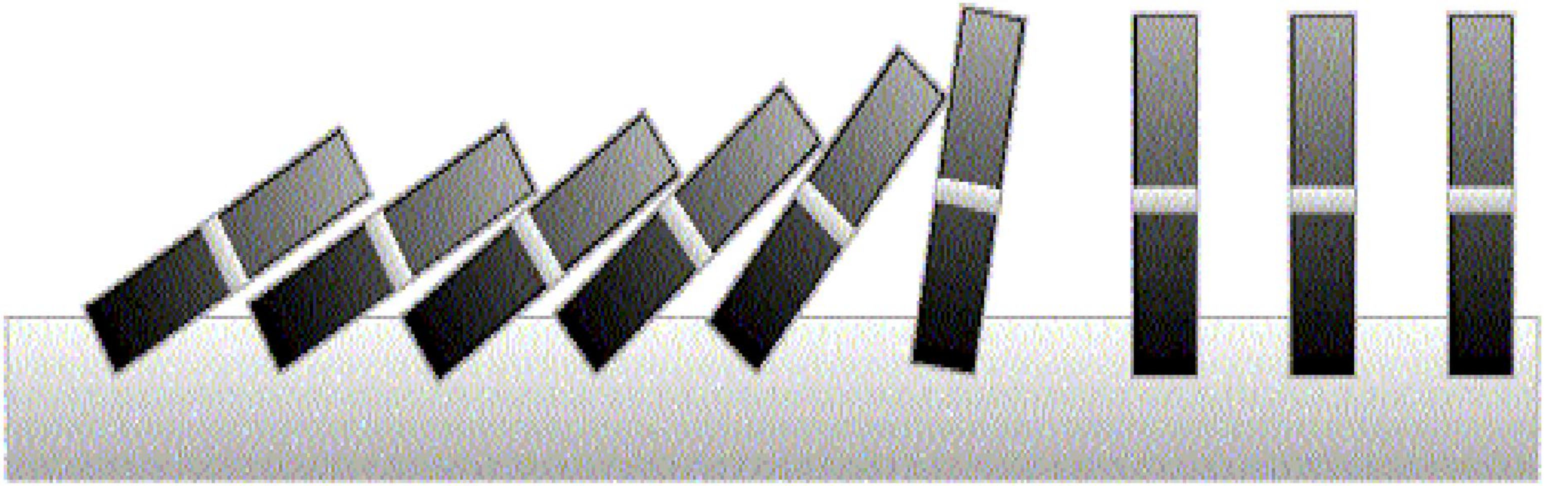
数学归纳法我



本次讲座

上次我们讨论了不同的证明技术。

这次我们将关注可能是最重要的一个

– 数学归纳法。

本次讲座计划：

- 数学归纳的思想
- 基本归纳证明（例如等式、不等式、属性等）
- 感应结构
- “悖论”

证明万能的陈述

目标:证明整数 $\forall n \geq 0 \; P(n)$

证明这种形式的陈述是很常见的。一些例子:

对于奇数 m， mi对于所有非负整数 i都是奇数。

任何整数 n > 1 都可以被素数整除。

(Cauchy-Schwarz 不等式)对于任何a1 ,...,an和任何b1 ,...,bn

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}$$

普遍概括

有效规则

$$\frac{A R \cancel{c} (\ ) \cancel{A}}{x\ R\ x\text{。}\ (\ )}$$

提供c独立于A

证明 for-all 陈述的一种方法是证明 R(c) 对于任何 c 都是正确的,但这通常很难直接证明（例如,考虑上一张幻灯片中的陈述）。

数学归纳法提供了另一种证明 for-all 陈述的方法。

它允许我们一步一步地证明这个陈述。

让我们首先通过两个例子来看看这个想法。

奇怪的力量是奇怪的

事实:如果 m 为奇数,n 为奇数,则 nm 为奇数。

命题:对于一个奇数 m， mi对所有非负整数 i 都是奇数。

$$\forall i \in Z \quad odd(m^i)$$

令 P(i) 为mi是奇数的命题。

$$\forall i \in Z \quad P(i)$$

归纳的想法

·根据定义,P(1) 为真。 · P(2) 根据 P(1) 和事实成立。 · P(3) 根据 P(2) 和事实成立。 · P(i+1) 根据 P(i) 和事实成立。 ·所以P(i) 对所有i 都成立。

感应理念

目标:证明 $$\forall n \geq 0 \;\; P(n)$$

这是为了证明

$$P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \ldots$$

归纳的思想是首先无条件地证明 P(0)，

然后用 P(0) 证明 P(1)

然后用 P(1) 证明 P(2)

并将此重复到无穷大……

归纳法则

0和（从n到n +1），

证明0, 1, 2, 3,…。

很容易证明

以 P(n) 作为假设

更容易证明。

归纳规则

（一个公理）

$$\frac{P(0),\quad n \quad N\ P(n) \rightarrow P(n+1)}{m \quad N\ P(m)}$$

重点是使用小问题的知识来解决大问题（即可以假设 P(n) 来证明 P(n+1)）。

将其与通用泛化规则进行比较。

本次讲座

- 数学归纳的思想
- 基本归纳证明（例如等式、属性、不等式等）
- 感应结构
- “悖论”

证明平等

$$\forall n \geq 1 \qquad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

令 P(n) 是关于 n 的陈述为真的归纳假设。

基本情况:P(1) 为真

归纳步骤:假设 P(n) 为真,证明 P(n+1) 为真。

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2(n^2/4 + n + 1) \\ &= (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4}) = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2 \end{aligned}$$

通过归纳

证明财产

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 2^{2n} - 1 \text{ is divisible by } 3}$$

基本情况（n = 1）： $2^{2n} - 1 = 2^2 - 1 = 3$

归纳步骤:假设一些i 1的P(i)并证明P(i + 1)：

认为 $2^{2i} - 1$ 能被3整除,证明 $2^{2(i+1)} - 1$ 能被 3 整除。

$$\begin{aligned} 2^{2(i+1)} - 1 &= 2^{2i+2} - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2i} - 1 \\ &= \underbrace{3 \cdot 2^{2i}}_{\text{可被 3 整除}} + \underbrace{2^{2i} - 1}_{\text{通过归纳能被 3 整除}} \end{aligned}$$

证明不等式

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

基本情况（n = 2）:为真

归纳步骤:假设一些i 2的P(i)并证明P(i + 1):

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

通过归纳

$$= \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}}$$

$$> \frac{\sqrt{n}\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \sqrt{n+1}$$

柯西-施瓦茨

(Cauchy-Schwarz 不等式)对于任何a1 ,...,an和任何b1 ,...bn

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}$$

归纳证明（在 n 上）：

基本情况:当 n=1 时,LHS <= RHS。

归纳步骤:假设 <=n 为真,证明 n+1。

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}+a_{n+1}b_{n+1}$$

如何获得这一步的感应?

$$\leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2+b_{n+1}^2}$$

柯西-施瓦茨

(Cauchy-Schwarz 不等式)对于任何a1 ,...,an和任何b1 ,...bn

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}$$

归纳步骤:假设 <=n 为真,证明 n+1。

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}}_{c}\underbrace{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}}_{d}+a_{n+1}b_{n+1}$$

就职

$$\leq \sqrt{c^2+a_{n+1}^2}\sqrt{d^2+b_{n+1}^2}$$

这正是 P(2)!

$$= \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2+b_{n+1}^2}$$

柯西-施瓦茨

(Cauchy-Schwarz 不等式)对于任何a1 ,...,an和任何b1 ,...bn

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2}$$

归纳证明（在 n 上）:当 n=1 时,LHS <= RHS。

当n=2时,要显示 $a_1b_1+a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

考虑 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$$= a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2$$

$$= a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2$$

$$= (a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0$$

归纳步骤:使用 P(2) 和假设 P(n) 来证明 P(n+1)。

一些备注

数学归纳有三个重要步骤:

- 第一步:清楚地写下归纳假设P(n)。
  (这有时非常重要!!!你很快就会看到。)

- 第二步:证明基本情况 P(1)、P(2) 等。
  (有时您可能需要证明多个基本情况。例如,Cauchy-Schwarz 不等式。)

- 归纳步骤:证明归纳情况,即证明 P(n) => P(n+1)

  (您需要确保使用了假设 P(n)。)

本次讲座

- 数学归纳的思想
- 基本归纳证明（例如等式、不等式、性质等）
- 感应结构
- “悖论”

格雷码

你能找到所有 n 位字符串的排序方式,使得两个连续的 n 位字符串仅相差一位吗?

这称为格雷码并有一些应用。

如何构建它们?

归纳思考!

2位	3位
00	000
01	001
11	011
10	010
	110
	111
	101
	100

你能看到图案吗?

如何构造4位格雷码?

格雷码

3位	3位（反向）
000	100
001	101
011	111
010	110
110	010
111	011
101	001
100	000

4位

0 000 0
00011
0 0110 0
0 1101 0
0 1000 1
10111 1
11010 1
1 0011
1 1 000

感应相差 1 位

构造不同,相差 1 位

每个 4 位字符串只出现一次。

感应相差 1 位

格雷码

n位	n 位（反向）
000···0	100···0
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
...	...
100···0	000···0

n+1 位

0 000···0 0
0 ...
...
0 ...
0 ...
0 ...
0 ...
0 100···0
1 100···0 1
...
1 ...
1 ...
1 ...
1 ...
1 ...
1 000···0

感应相差 1 位

构造不同,相差 1 位

感应相差 1 位

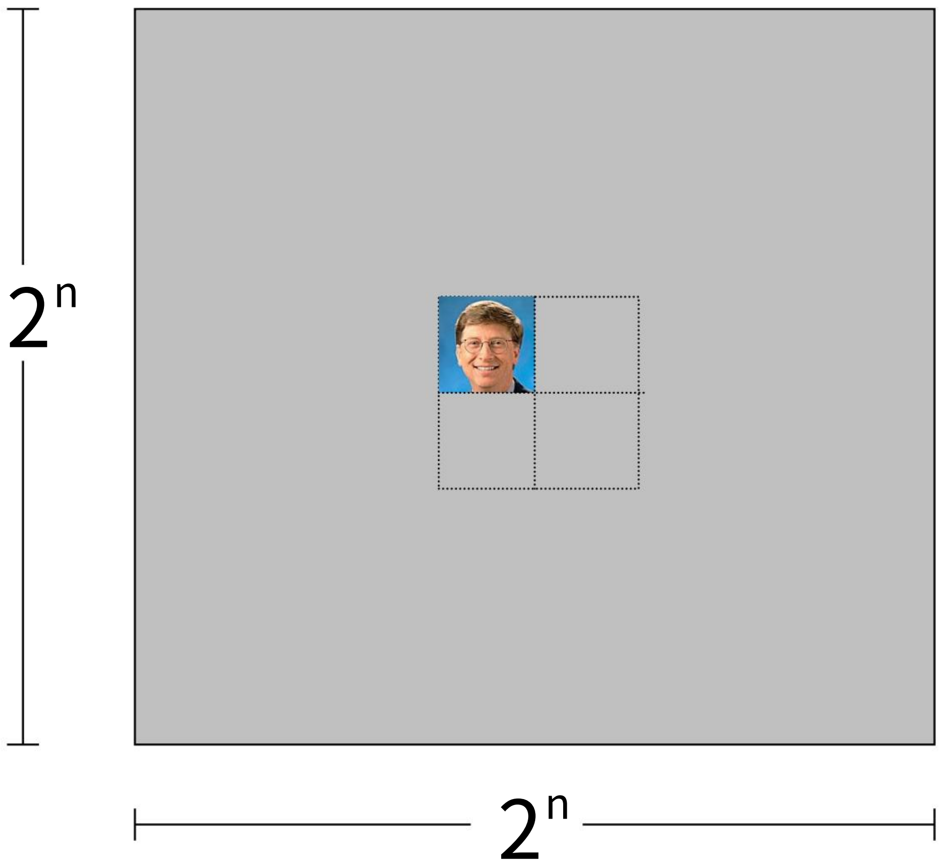
每个 (n+1) 位字符串只出现一次。

因此,通过归纳,任何 n

都存在格雷码。

谜

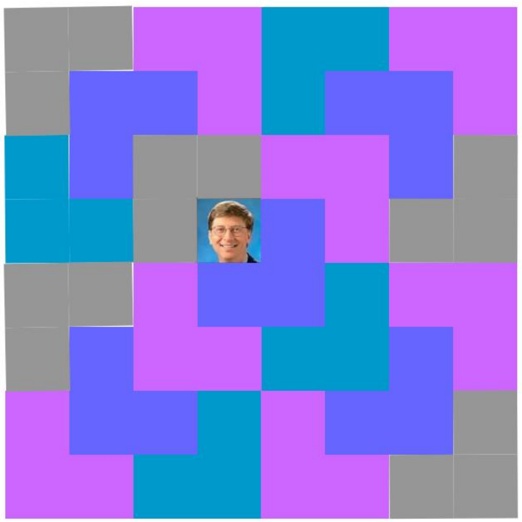
目标:将方块平铺,除了比尔中间的一个。



谜

只有trominos（L形瓷砖)覆盖三个方格：

例如,对于 8 x 8 拼图,我们可以这样为 Bill 平铺：



谜

定理:对于任何2n x 2n的拼图,中间都有一个 Bill 的平铺。

（你还记得我们证明了 $2^{2n} - 1$ 能被3整除吗？）

证明：（通过对n的归纳）

P(n) ::= 可以平铺2n x 2n ,Bill 在中间。

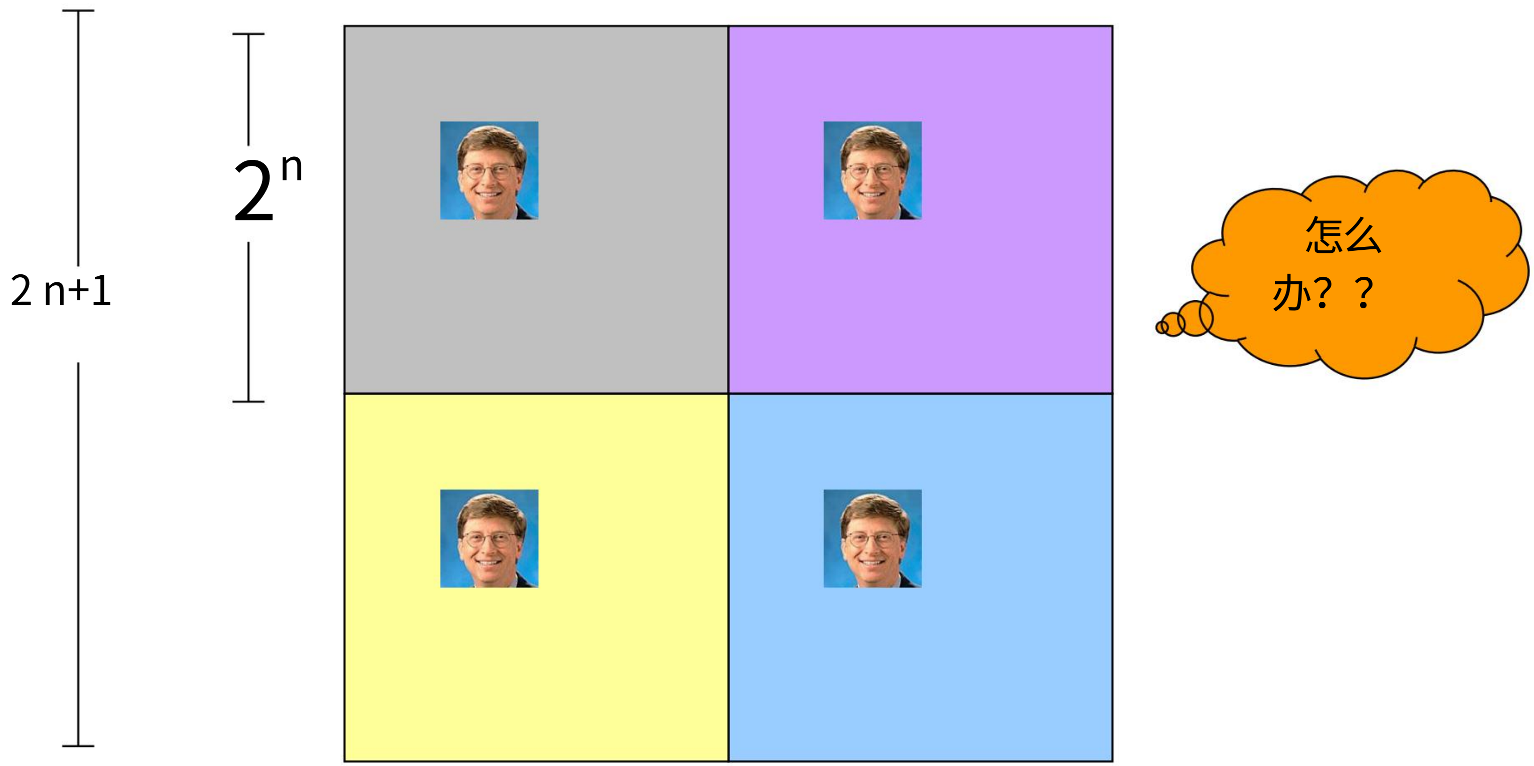
基本情况： （n=0）

（不需要瓷砖）

谜

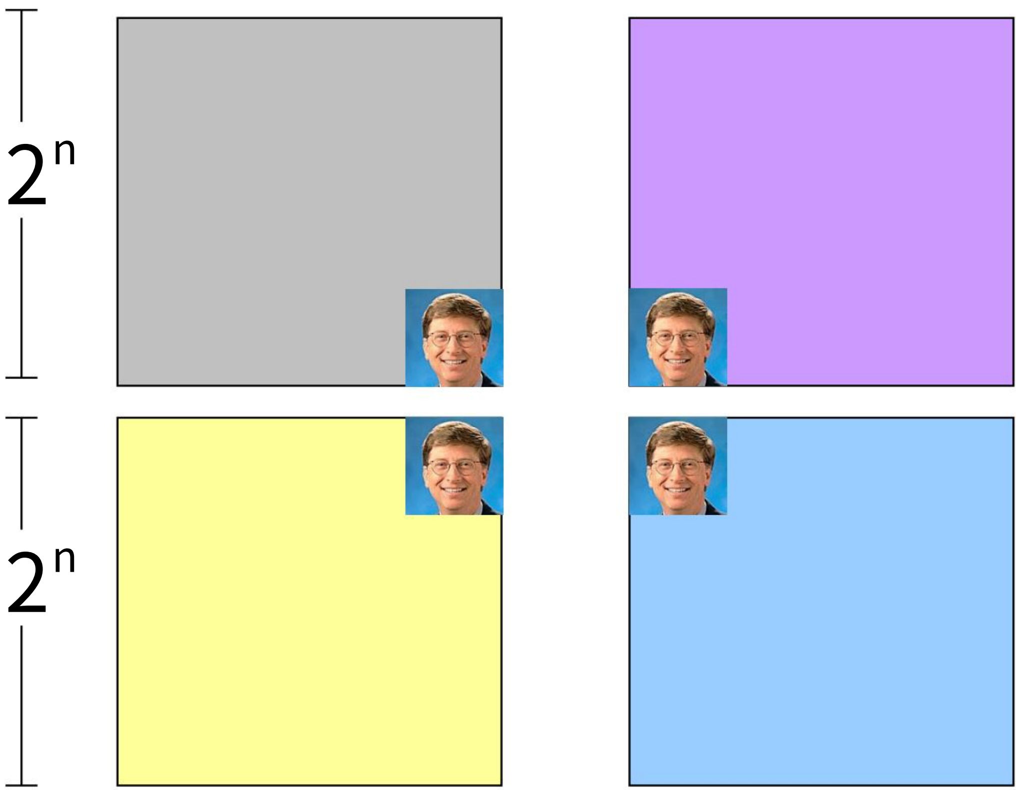
归纳步骤:假设 can tile 2n x 2n证明可以处理 ，

2n+1 x 2n+1 .



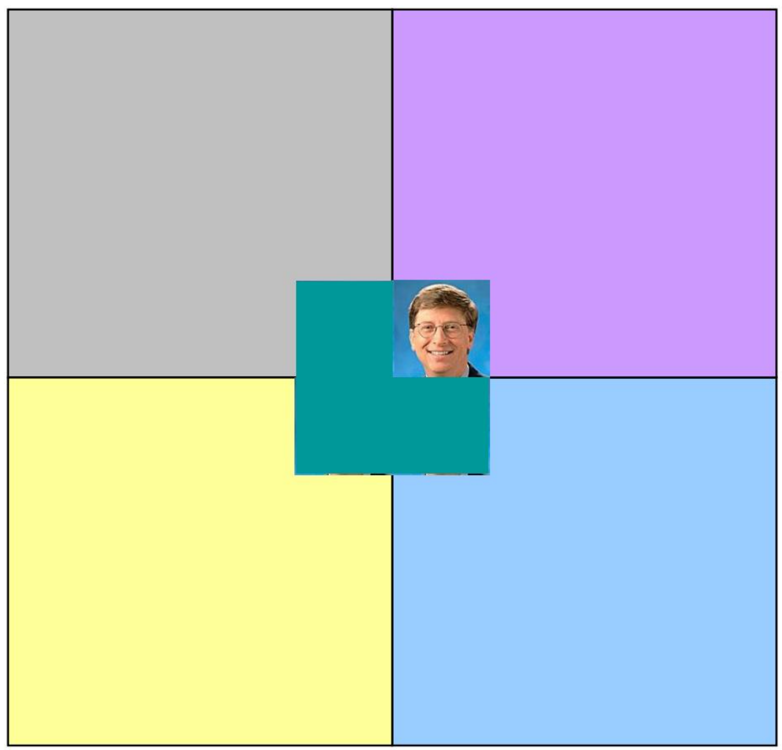
谜

想法:如果我们能控制比尔的位置就好了。



谜

想法 :如果我们能控制空方格的位置就好了。



完毕!

谜

新思路:

更强的属性

证明我们总能在任何地方找到与比尔的平铺。

定理 B:对于任何2n x 2n拼图,在任何地方都存在与比尔的平铺。

很明显,定理 B 暗示了原定理。

定理:对于任何2n x 2n的拼图,中间都有一个 Bill 的平铺。

谜

定理 B:对于任何2n x 2n拼图,在任何地方都存在与比尔的平铺。

证明:(通过对n的归纳)

P(n) ::= 可以在任何地方与 Bill平铺2n x 2n 。

基本情况: (n=0)

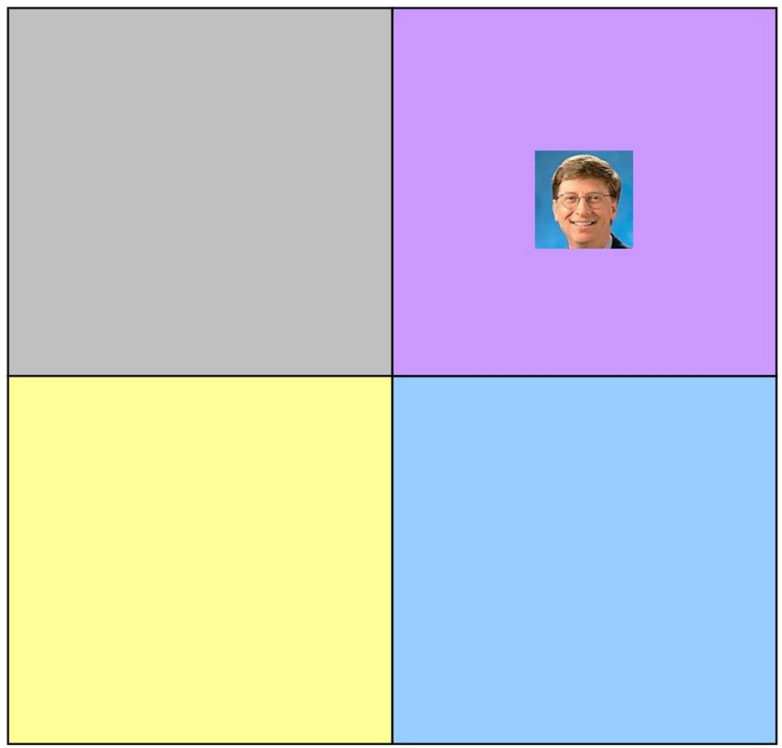
(不需要瓷砖)

谜

感应步骤：

假设我们可以在2n x 2n的任何地方得到 Bill ·

证明我们可以在2n+1 x 2n+1的任何地方得到比尔 ·

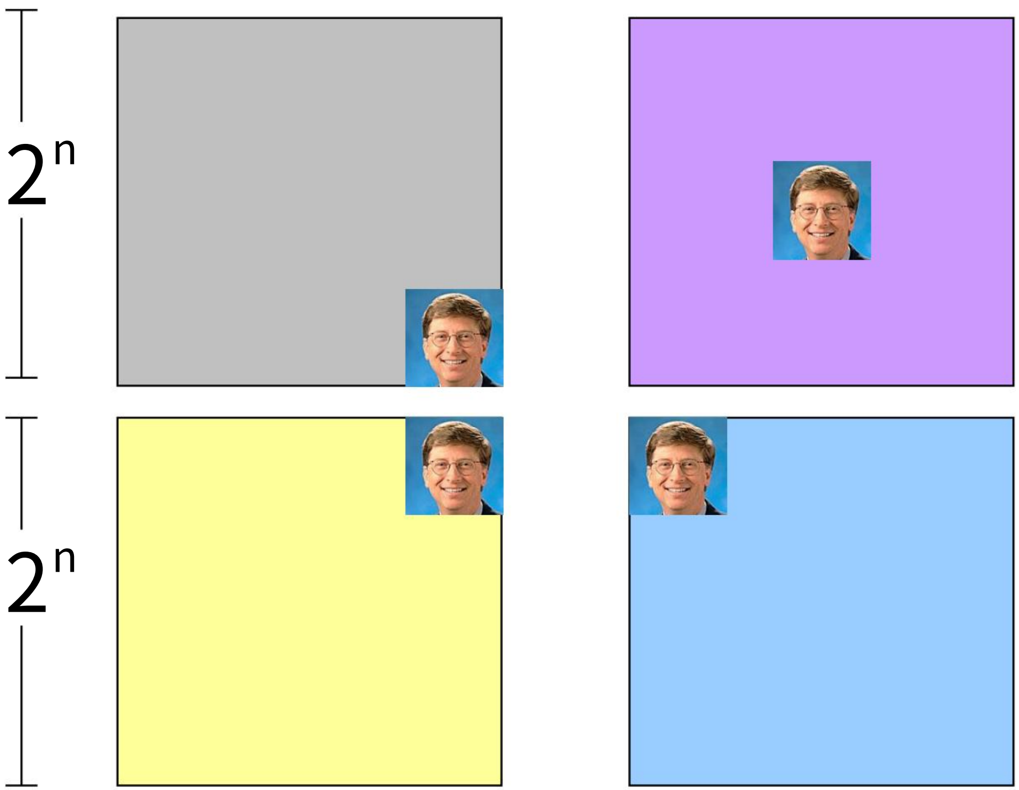


谜

感应步骤：

假设我们可以在2n x 2n的任何地方得到 Bill ·

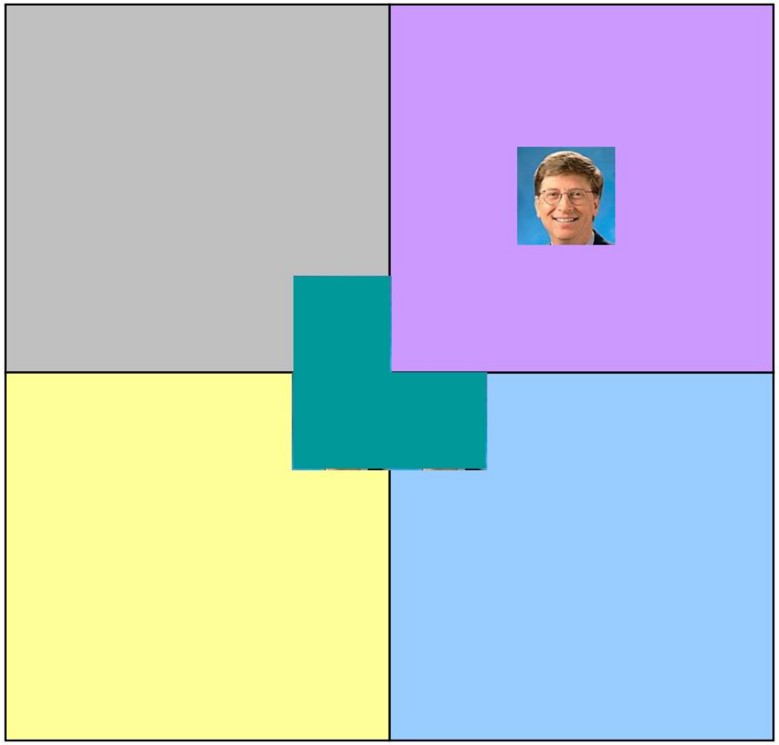
证明我们可以在2n+1 x 2n+1的任何地方得到比尔 ·



谜

方法 :现在将正方形组合在一起，

并用tromino填充中心。



完毕！

一些备注

注1:选择更强的陈述可能会有所帮助（即P(n)）

比预期的结果（例如“在任何地方开账单”）。

我们需要证明一个更强有力的陈述,但在

返回我们可以假设在

诱导步骤。

注2：“Bill Anywhere”的归纳证明隐含地定义了一个递归算法来

寻找这种平铺。

哈达玛矩阵

你能构造一个所有条目 +-1 且所有行相互正交的 nxn 矩阵吗?

如果两行的内积为零,则它们是正交的。

即令a = (a1 , ..., an) 和 b = (b1 , ..., bn),它们

的内积 ab = a1b1 + a2b2 + ··· +安本

这个矩阵很有名,在编码理论中有应用。

为了进行归纳思考,首先我们想出一些小例子。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

哈达玛矩阵

然后我们使用一个 nxn Hadamard 矩阵Hn来构造一个 2nx2n 矩阵,如下所示。

H2n =
焓焓	
Hn	-Hn

R1、 R2
R1、 R2
R1、 R2

我们可以检查H2n是一个 Hadamard 矩阵:

从H2n 中取行R1=(a,b), R2=(c,d) 。

·如果R1 、 R2来自前 n 行,则R1 R2 = a c+b d = 0+0 = 0

·类似地,如果R1 、 R2来自最后n 行,那么它们是正交的。

·如果R1来自前n 行, R2来自最后n 行。

1.如果a≠c,b≠-d,那么 R1 R2 = a c+b d = 0+0 = 0

2.如果a=b=c=-d,那么 R1 R2 = a c+b d = a a+a (-a) = 0

哈达玛矩阵

因此,通过归纳,任何 k 都有一个2k x 2k Hardmard 矩阵。

奇数 n 是否存在 nxn Hardmard 矩阵?不!

是否存在偶数 n 的 nxn Hardmard 矩阵?没有把握···

这产生了长期的“哈达玛猜想”。

归纳构造

这种技术非常有用。

我们可以用它来构造：

- 代码

- 图表

- 矩阵

- 电路

- 算法 - 设计 -

证明 - 建筑物

- ...

本次讲座

- 数学归纳的思想
- 基本归纳证明（例如等式、不等式、性质等）
- 感应结构
- “悖论”

一个“悖论”（只是一个错误的证明）

定理:所有的马都有相同的颜色。

证明：（通过对n的归纳）

归纳假设：

P(n) ::= 任意n匹马的集合颜色相同

基本情况（n=0）：

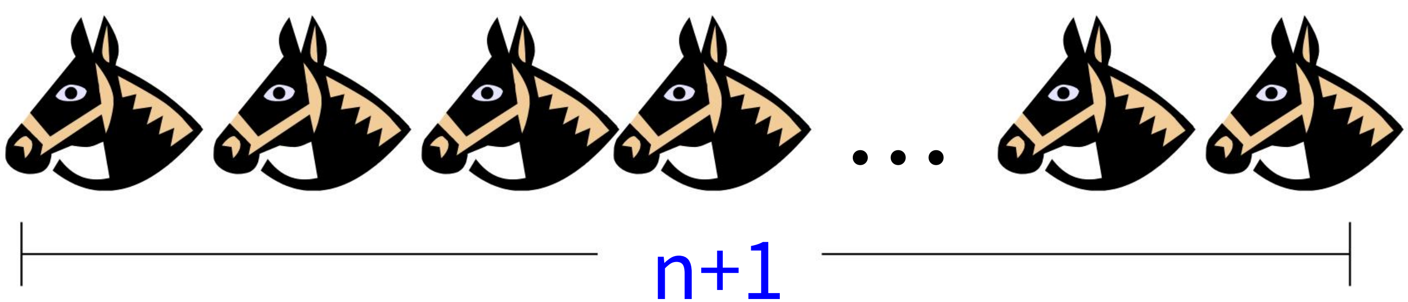
没有马,显然是真的！

一个“悖论”（只是一个错误的证明）

（感应案例）

假设任何n匹马具有相同的颜色。

证明任何n+1匹马具有相同的颜色。

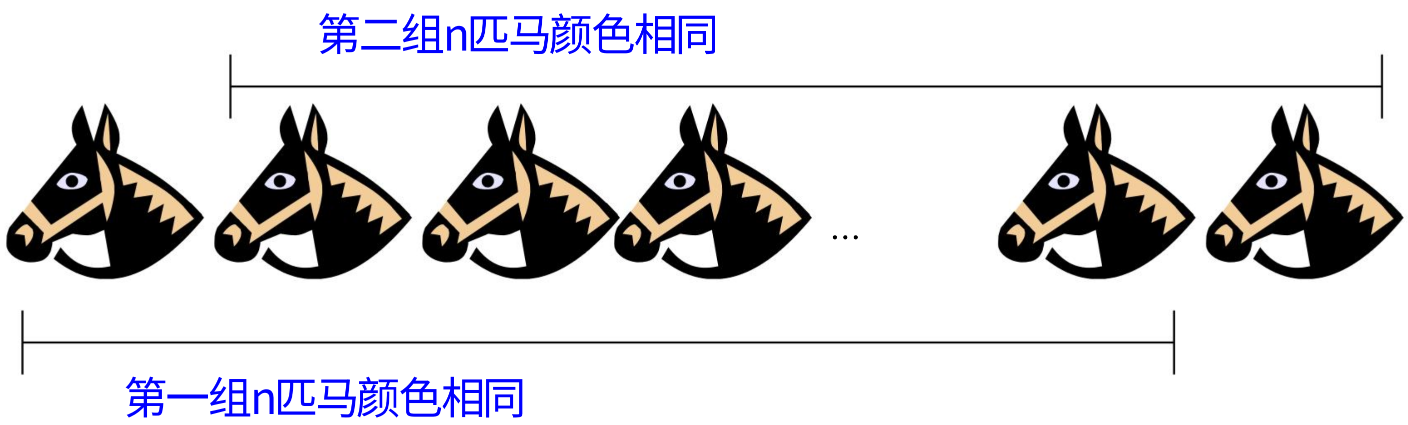


一个“悖论”（只是一个错误的证明）

（感应案例）

假设任何n匹马具有相同的颜色。

证明任何n+1匹马具有相同的颜色。

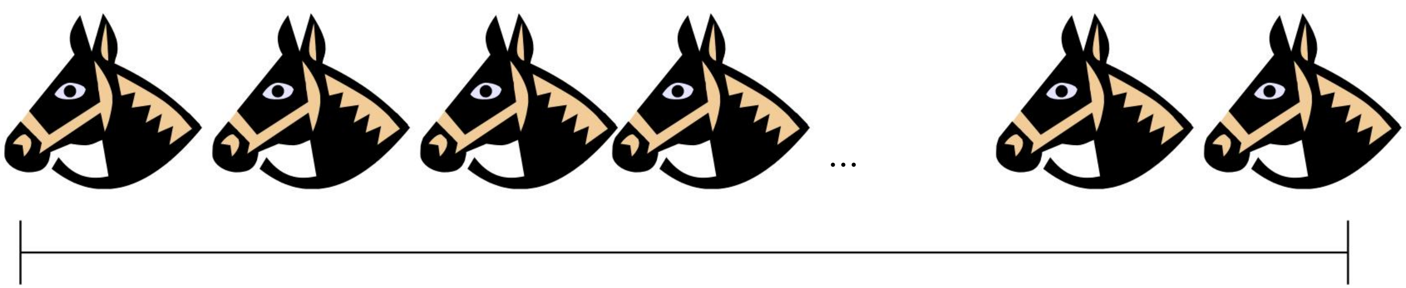


一个“悖论”（只是一个错误的证明）

（感应案例）

假设任何n匹马具有相同的颜色。

证明任何n+1匹马具有相同的颜色。



因此n+1 的集合具有相同的颜色！

一个“悖论”（只是一个错误的证明）

怎么了？

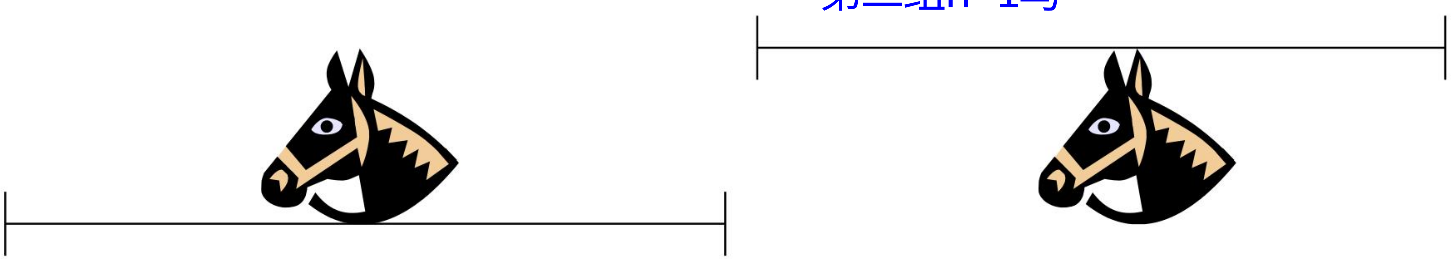
n =1

当n = 1 时P(n) → P(n+1)

的证明为假，因为这两个

马群不重叠。

第二组n=1马



第一组n=1马

（但证明适用于所有n ≠ 1）

快速总结

你应该很好地理解数学归纳法的原理，

做基本的归纳证明,比如

- 证明平等
- 证明不平等
- 证明财产

数学归纳法在计算机科学中有广泛的应用。

在下一讲中,我们将看到更多的应用和更多的技术。