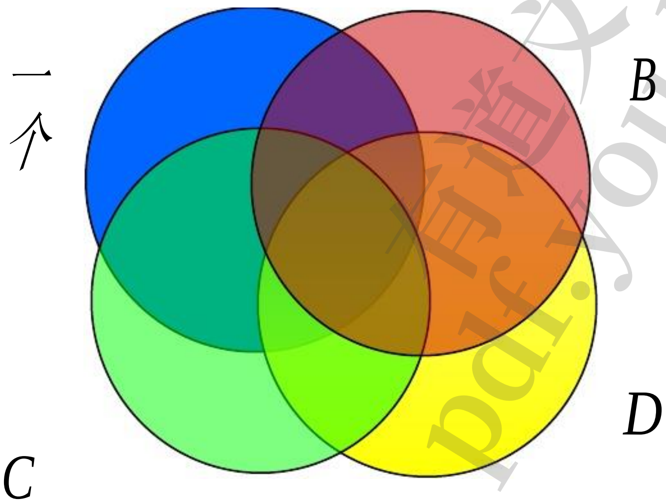
# 组合证明及其原理





的　鸽子洞原理

# 计划

*组合数学是离散数学中一种典型的技术。*这种技术被证明在计数方面非常有用，从进化生物学到计算机科学等都有广泛的应用。

- 二项式系数，组合证明
- 包容-排斥原理
- 鸽子洞原则

# 二项式定理

$$(1 - x) ?^{n} = C \quad + c1m + cx2 + \quad .. + 中央社^{n}$$

我们可以计算系数 $c_i$ 通过计算参数。

如 $(1 + x) 3^{\circ} = (1- x)(1- x)(1- c)$

$= 1.1.1 + 1_{\circ}\ 1. - 1.;1 + 1 - \cdot$

$+ x_{\circ}\ 1.1_{\circ}\ 1- +-_{\circ}\ 1_{\circ}\ _{\circ}$

(从每个因子中取 1 或 x 展开并相乘)

$= 1^{+ 3 x 3 x2_{\circ}} \quad + x$

(将幂相同的项分组并相加)所以在这种情况下，$c_0$

$= 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$。

# 二项式定理

$$(1 - x) ?^{n} = C \quad + c1m + cx2 + \quad .. + 中央社^{n}$$

我们可以计算系数 $c_i$ 通过计算参数。

$$(1+ x) = (1 - x)\underbrace{(1 + x)(1 + x) \quad . \ 0 \cdot \ (1 + x)}_{n \text{ 因素}}$$

每一项对应于从 n 个因子中选择 1 或 x。

所以系数 $c_k$ 对应于从 n 个因子中选择 x 的 k 个位置的方法的数量。

因此，

$$c_k = \binom{n}{k}$$

这些叫做二项式系数。

# 二项式定理

$$(1+x)n^{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2} 2 + 。 \binom{n}{n} 一个$$

$(1+X)^0 =$ $1$

$(1+X)^1 =$ $1 + 1X$

$(1+X)^2 =$ $1 + 2X + 1X^2$

$(1+X)^3 =$ $1 + 3X + 3X^2 + 1X^3$

4 = (1 + X) 1 + 4x + 6x2 + 4x3 + 1x4

我们看到，系数是上层两个系数的和。这被称为帕斯卡公式，我们很快就会证明它。

# 二项式系数

通常我们有以下恒等式:

$$(y + x)” \quad \binom{n}{0} y '' + \binom{n}{1} y \qquad \binom{n}{h} ayn\text{-}k \qquad \binom{n}{n} -\uparrow$$

因为如果我们选择 k 个 x，那么就会有 n-k 个 y。

推论:当 x = 1 时，y = 1，它意味着

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n}$$

也就是说，二项式系数之和等于 2n。

# 二项式系数

通常我们有以下恒等式:

$$(y+x)^n = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} y \quad \binom{n}{h} ayn\text{-}k \quad \binom{n}{n}$$

推论:

当 x = -1, y = 1 时，它意味着

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \dots + (1)^n \binom{n}{n}$$

“奇”二项式系数之和

“偶”二项式系数的和

# 证明身份

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

人们通常可以通过计数论证来证明二项式系数的恒等式。

直接证据: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

组合的证据:

从 n 个项目中选择 k 个项目的方法数

从 n 个项目中选择 n-k 个项目的方法个数

# 找到一个组合证明

组合证明是一种通过计数原理建立代数事实的论证。
许多这样的证明都遵循相同的基本大纲:

1. 定义集合 S。
2. 用一种方法计算 $|S| = n$。
3. 用另一种方法计算 $|S| = m$。
4. 得出 $n = m$。

重复计算

# 证明身份

帕斯卡公式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

直接证据:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{!}{(k-1)!(n-k-1)!}\, k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!K + n!(n-k-1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)\ k!(n-}{k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \left( {/m + 1y \atop k} \right)$$

# 证明身份

帕斯卡公式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

组合的证据:

LHS 从 n+1 个元素中选择 k 个元素的方法的数量对于 RHS，在 n+1 个元素中固定一个元素 x。

1)如果 k 个元素包含 x，那么我们需要从剩下的 n 个元素中选择 k-1 个元素，那么□□− □□1。2)如果 k 个元素不包含 x，那么我们需要从剩下的 n 个元素中选择 k 个元素，那么□□□□。因此，我们完成了证明。

()

# 组合的证据

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

考虑 2n 个球，一半红，一半蓝。

RHS =从 2n 个球中选择 n 个球的方法数。

另一方面，要选择 n 个球，我们可以-选择 0 个红球和 n 个蓝球，那么-选择 1 个红球和 n-1 个蓝球，那么-…

-选择 I 个红球和 n-i 个蓝球，那么-…

-选 n 个红球，0 个蓝球，那么

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}=\binom{n}{0}^2$$

$$\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}^2$$

$$\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}^2$$

$$\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{n}^2$$

因此，LHS = RHS。

# 另一个组合证明

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

这也可以通过用两种不同的方法计算一个系数来证明。

考虑恒等式 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

1.对于 LHS，我们有

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)$$

所以 xn 的系数是 $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$

2.对于 RHS, xn 的系数为 $\binom{2n}{n}$

# 练习

证明

$$3m = 1 + 2n + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + + 2_{\circ}\binom{n}{k} + + 2_{\circ}\ \text{”}\ \binom{n}{n}$$

给出下列恒等式的一个组合证明。

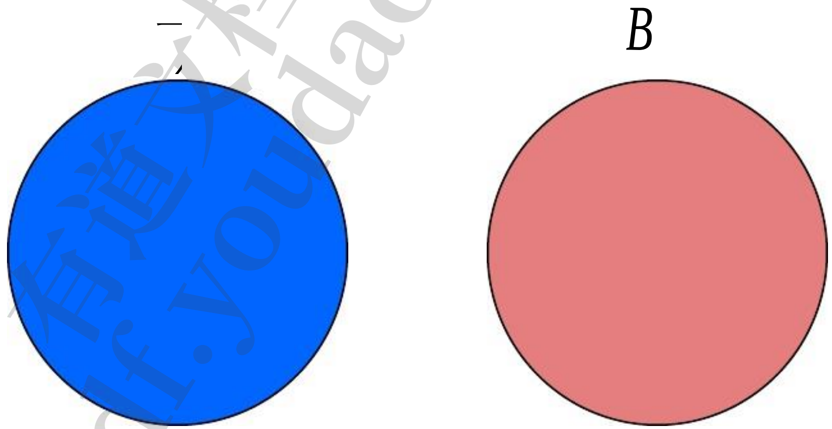
$$\binom{n}{0}\binom{2n}{n} + \binom{n}{1}\binom{2n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{2n}{n-k} +_{\circ} \binom{n}{n}\binom{2n}{0} = \binom{3n}{n}$$

# 计划

- 二项式系数，组合证明
- 包容-排斥原理
- 鸽子洞原则

# 求和规则

如果集合 A 和集合 B 不相交，那么$|A \cup B| = |A| + |B|$

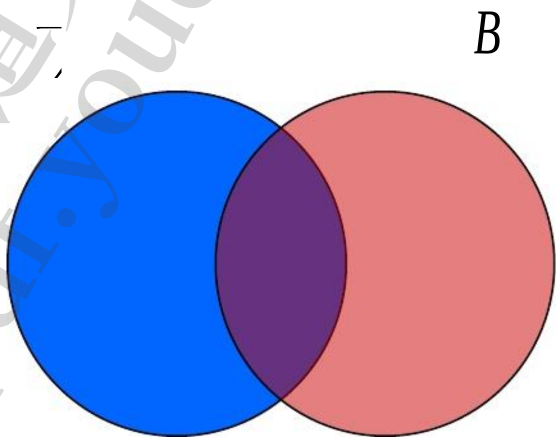



如果 A 和 B 不是不相交的呢?

# 包容-排除(2 组)

对于任意两个集合 A 和 B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

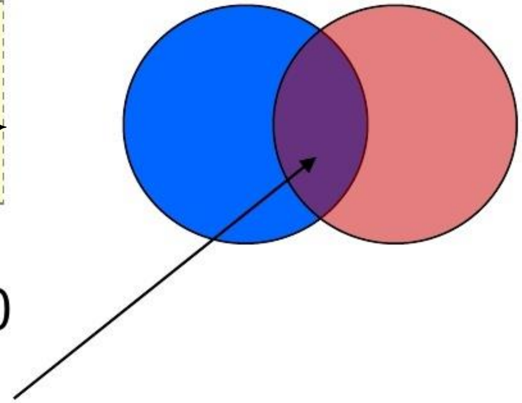


# 包容-排除(2 套)

设 S 是 1 到 1000 的整数集，是 3 的倍数或 5 的倍数。

设 A ={1 到 1000 的整数，是 3}的倍数。设 B ={从 1 到 1000 的整数，是 5}的倍数。

很明显，S 是 A 和 B 的并集，
但请注意，A 和 B 并不是不相交的。一个



$B$

| a | = [1000/3] = 333 | bi = [1000/5] = 200

A n B是15的倍数的整数集，因此|A n B| = [1000/15] = 66

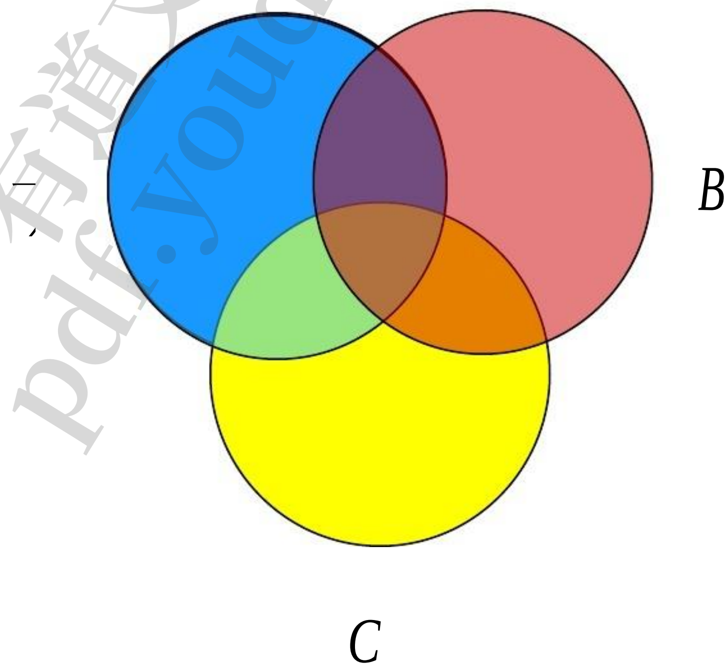
根据包容排除原理，我们得到IS = |AI + IB - JA n B| = 467。

# 包容-排除(3 套)

ol + lgl + IMl = b n 9 n v

bUgl-bUvl - lg U V -

D URUV +



# 包容-排除(3 套)

共 50 名学生:

|的|

B |

好极了

JAO C

BO C

A u bu c

30 懂 Java 18 懂 c++ 26 懂 c#

9 懂 Java 和 c++ 16 懂 Java 和 c#

有多少人知道全部?

–

Jabo c

8 人同时懂 c++和 c# 47 人至少懂一门语言。

|A U BU C= (A+ |B + IC - JAO B- JAn C- |B O C + JAn BO C

47 = 30 + 18 + 26 - 9 - 16 -8 + jab o c

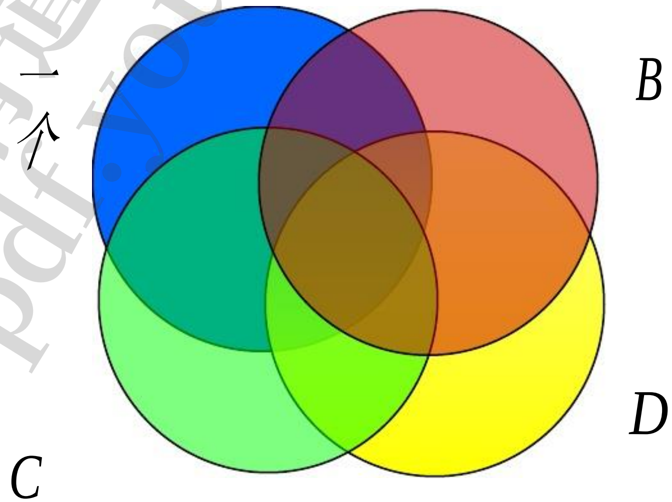
A n BO C= 6

# 包容-排斥(4 组)

| aubuudi = ja] + | b | + 1c + d

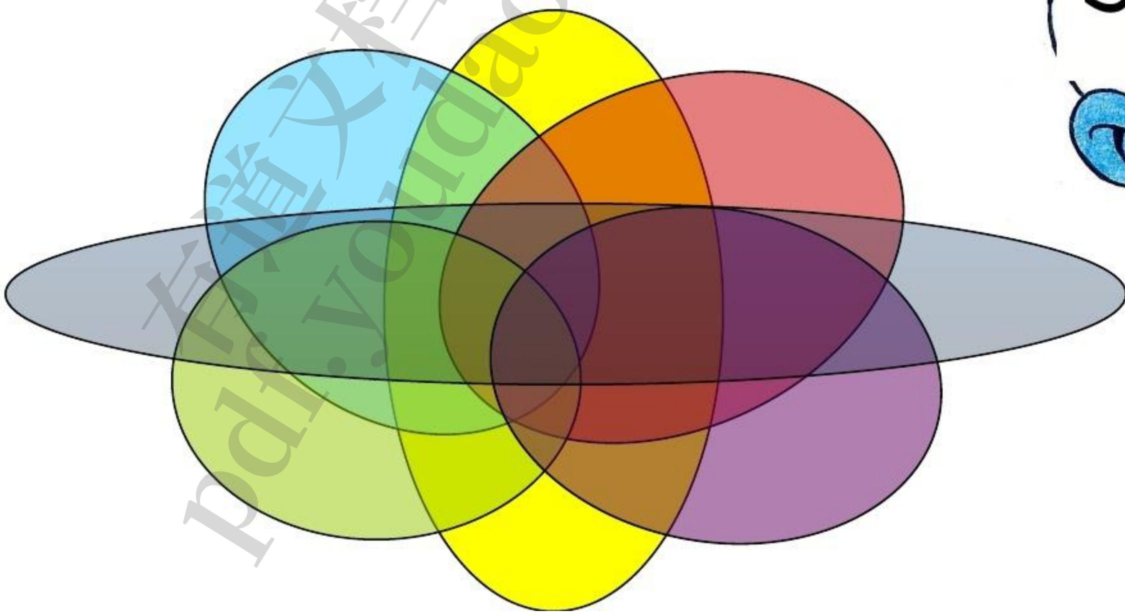
- JAO B - JAn C - JAO DI- |B O Cl - |B O DI- ico DI

+| An BO C+ |A n BO DI+ JAn CO DI+|Bn CnD -A nBnCnD|



# 包容-排除(n集)

n个集合的并集的包含-排除公式是什么?



# 包含-排除(n 集)

I n I n

Ua = ΣIA- Σ A ΠA+ Σ A， ΠA， Π aκ +

i = 1 I i = 1 1 < < j < n 1 < < j k < < n +

… / ˊ )$^{n+1}$|$A_1$ ∩ ¨ ∩ 一个

| a1 u a2u···U退火 2

总和 所有单套的尺寸

所有2组交叉口尺寸+所有3组交叉口尺寸

总和

之和

- 所有4组交集大小之和

...

\+ (-1)n+1 x所有n组交集大小的和

# 包容-排除(n 集)

包含-排除公式的证明:

考虑A1 n A2 n中的元素x⋯n正义与发展党。它在RHS中被计算了多少次?

- 单集:$|A_1|$ |一个 $_2|$, ⋯, | $a_k|$

- 2 台:- | A1∩A2 | | A1∩A3 |, ..., -| Ak-1∩Ak |
- 3 套:$|A_1$ ∩一 $_2$ ∩一 $_3|$, ⋯, | $a_{k-2}$ ∩一 $_{k-1}$ ∩一 $_k|$

- k 集:(-1)k+1|A1:)∩A2∩⋯∩Ak|

从 RHS 中我们看到 x 被计算在内

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \binom{k}{4} (1) + 1 \qquad \binom{k}{k} = \binom{k}{0}$$

# 例子

假设a, b, c是整数，使$O<a<3, 0<b<4, 0<c<6$。

下面这个方程有多少个解?

$$\alpha+b+c=11$$

- 取通用集$U=[(a,b,c)\mid a+b+c=11)$，设$N=|UI$。
- P1=(带a >的解3)P2 =(带b>
- 的解4
- P =[解与c> 6)
- 我们需要计算Pin P2n P3 = N - IP1 UP2UP3l。

根据包含-排除公式

Pin P2 n P3| = n - |P  |P2l - |P3| + |P1P21 + |P1P3

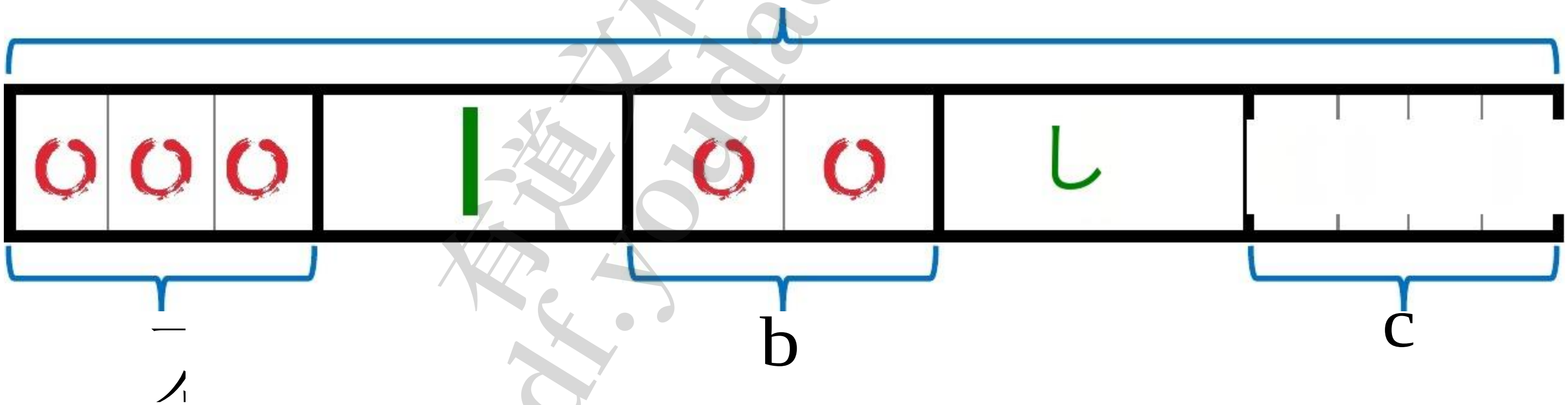
|P2 0 P3l - IP，P2P3

# 例子

通用集 U = {(a,b,c) | a+b+c=11}，设 N = |U|。

N 怎么数?

一共 13 箱



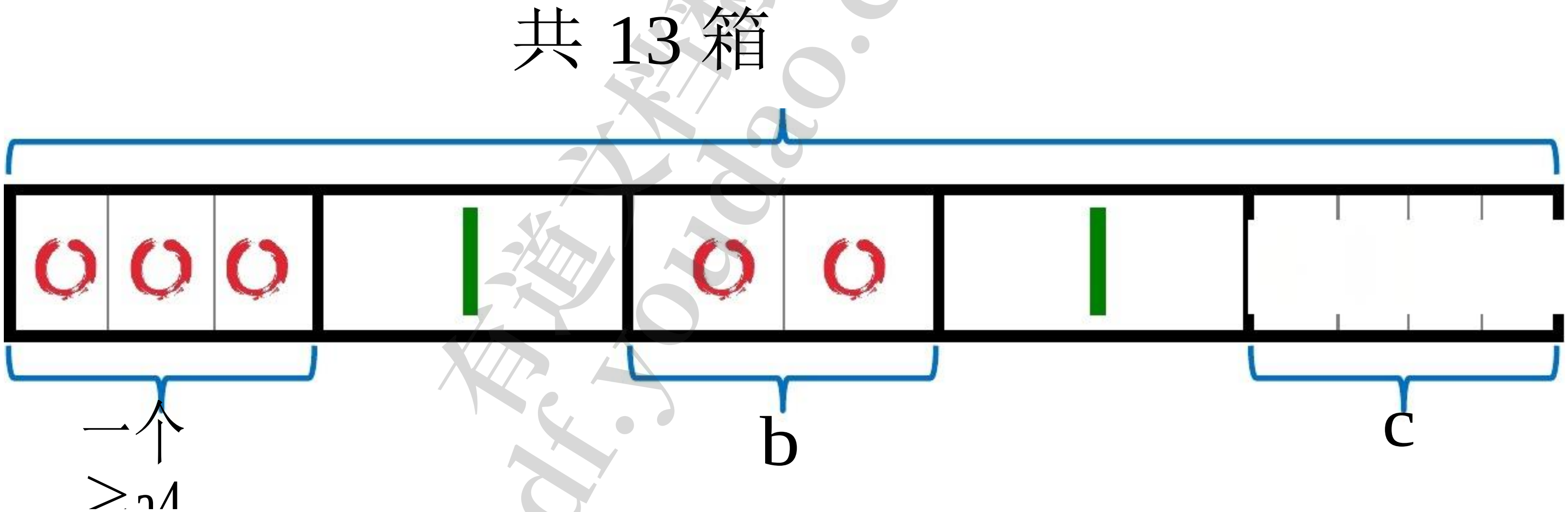

 都放在上面的盒子里，并以。

N= (11+3-1) 78.

# 例子

$P_1$ ={带>的解 3}={带 a≥4 的解}

如何计算$|P_1|$ ？




我们需要选择7(= 11 - 4)个圆，
所以IPjl =(7+3-1) = 36。

# 例子

所以我们有

- N = |UI = If (a,b,c) | a+b+c=11]| = (11+3-1) = 78
- IPil = If解>=4)1 = (7+3-1)= 36
- IP2l = If solutions with b >= 5]| = (6+3-1) = 28
- >= 7)1 = (4+3-1) = 15
- IP1n P2l = a >= 4, b>= 5]| = (2+3-1) = 6
- IP1n P3l =当a >= 4时， c>= 7)1 = (0+3-1) = 1
- IP2 n P3l = b>=5, c>= 7)| = 0
- IP1 n P2 n P3l = a >= 4, b >=5, c>= 7)| = 0

解的个数是

| p， p2p3 | = 78 - 36 28 - 15 + 6+ 1+0 - 0 = 6

# 圣诞礼物

在圣诞晚会上，每个人都带着自己的礼物。
有 n 个人，所以总共有 n 份礼物。
假设主人收集并洗牌所有的礼物。
现在每个人随机挑选一份礼物。
没有人自己挑选礼物的概率是多少?

- 通用集U =[人-在场匹配)= N = |U = N !
- P;(人们自己挑选礼物)。
- 我们需要计算|P1n P2 n…n Pnl = n - IP UP2U。你的朋友。

根据包容-排斥公式

PnPn……nP = N -ΣIR+ Σ RP -Σ RPP+

n

i = 1　　1 < < j < n

1 < < j k < < n

…+ (1)” 并通过Pn

# 圣诞礼物

| PnPn······nP = N-ΣIRI+ Σ- Σ RPP+

n

我= 11 < < j < n

< < j k < < n

···+ (1)” 并通过Pnl

- IPil是什么?
  - IPil = (n-1)!因为剩下n-1个。
  - 有 (1)知识产权;
- 什么是IP;n Pjl?
  - 知识产权;n Pjl = (n-2)!因为剩下n-2个。
  - 有 (二)知识产权;n Pjl

...

所 RnBn······n = n +Σ(-1)()(m -)!

# 圣诞礼物

$$RnPn\cdots\cdots nPn型= N + \sum_{i=1}^{n}(1)\ 0\quad (n - i)!$$

$$= n\,!+ n\,!\sum_{i=1}^{n}(1)$$

(Recall N = n!)

$$= n\,!\sum_{我=0}^{n}(1)^{”}$$

因此，没有人自己挑选礼物的概率是

$$p=IPn\ P2\ n\cdots n\ Pl/\ n =\Sigma o\quad \frac{(1)}{我!}$$

# 圣诞礼物

没有人自己挑选礼物的概率是

p =1Pn P2n…n Pnl/ n =Σ (-1)'
李= 0

回忆泰勒系列

$$e^x = \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} x^k$$

所以

P→e-1 = 1/e≈0.3679 (as n→∞)

# 欧拉的 totient 函数

给定一个数 n，从 1 到 n 有多少数相对于 n 是质数?

这个数用 φ(n)表示，而 φ 称为欧拉的 totient 函数。

让 $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_r^{c_r}$

- 通用集U = [1，..n) = n = |U = n
- P;能被pi整除的数。
- 我们需要计算|P1n P2 n·⋯n P = n - |P1 UP2U。U P.l。

利用包含-排除公式，我们可以证明答案是 $n(1-1/p_1)\ (1 - 1 / p_2)\cdots\cdots(1 - 1 / p_r)$

# 计划

- 二项式系数，组合证明
- 包容-排斥原理
- 鸽子洞原则

# 鸽子洞原理

如果更多的鸽
子

比盒子,

# 鸽子洞原理

那么某个洞里至少有两只鸽子!

**鸽子洞原理**

从大集合到小集合的函数不能是内射的。(域中必须至少有两个元素映射到范围内的同一元素。)

# 选择对

问题:让 A = {1,2,3,4,5,6,7,8}

如果从 A 中选择了 5 个不同的整数，那么一对整数的和一定是 9 吗?

考虑对{1,8}，{2,7}，{3,6}，{4,5}。这些都是总和等于 9 的所有对。

这些对只覆盖每个数字一次，所以我们的问题是从这 4 对中选出 5 个数字。

根据鸽子洞原理，至少要选出一对这样的数字。

# 握手

问题: 在 n 个人的聚会中，总是有两个人和同样数量的人握手吗?

每个人都可以和 0 到 n-1 个人握手，而且有 n 个人，所以似乎并不一定是这样，但仔细想想:

情况 1:如果有一个人不跟别人握手，那么任何一个人最多可以和 n-2 个人握手。那么每个人(n 人)和 0 到 n-2 个人(n-1 个数字)握手，根据鸽子洞原理，答案是“可以”。

情况 2:如果每个人都和至少一个人握手，那么每个人(n 人)和 1 到 n-1 人(n-1 个数字)握手，因此根据鸽子洞原则，答案也是“是”。

# 生日问题

在一个 367 人的群体中，一定有两个人生日相同。

---

假设 n≤365，在 n 个人的随机集合中，其中有一对生日相同的概率是多少?

---

我们可以把它想象成从 1 到 365 中随机选取 n 个数字，没有重复。

从 1 到 365 中选取 n 个数字有 365n 种方法。

有 365 • 364 • 363 • ··· • (365-n+1)种方法可以不重复地从 1 到 365 中选取 n 个数字。

所以没有一对生日相同的概率等于

365 • 364 • 363 • ··· • (365-n+1) / 365n

23 人的概率小于 50%，57 人的概率小于 1%。

# 子集之和

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20480135385502964448038 | 3171004832173501394113017 | 5763257331083479647409398 | 8247331000042995311646021 |
| 489445991866915676240992 | 3208234421597368647019265 | 5800949123548989122628663 | 8496243997123475922766310 |
| 1082662032430379651370981 | 3437254656355157864869113 | 6042900801199280218026001 | 8518399140676002660747477 |
| 1178480894769706178994993 | 3574883393058653923711365 | 6116171789137737896701405 | 8543691283470191452333763 |
| 1253127351683239693851327 | 3644909946040480189969149 | 6144868973001582369723512 | 8675309258374137092461352 |
| 1301505129234077811069011 | 3790044132737084094417246 | 6247314593851169234746152 | 8694321112363996867296665 |
| 1311567111143866433882194 | 3870332127437971355322815 | 6814428944266874963488274 | 8772321203608477245851154 |
| 1470029452721203587686214 | 4080505804577801451363100 | 6870852945543886849147881 | 8791422161722582546341091 |
| 1578271047286257499433886 | 4167283461025702348124920 | 6914955508120950093732397 | 9062628024592126283973285 |
| 1638243921852176243192354 | 4235996831123777788211249 | 6949632451365987152423541 | 9137845566925526349897794 |
| 1763580219131985963102365 | 4670939445749439042111220 | 7128211143613619828415650 | 9153762966803189291934419 |
| 1826227795601842231029694 | 4815379351865384279613427 | 7173920083651862307925394 | 9270880194077636406984249 |
| 1843971862675102037201420 | 4837052948212922604442190 | 7215654874211755676220587 | 9324301480722103490379204 |
| 2396951193722134526177237 | 5106389423855018550671530 | 7256932847164391040233050 | 9436090832146695147140581 |
| 2781394568268599801096354 | 5142368192004769218069910 | 7332822657075235431620317 | 9475308159734538249013238 |
| 2796605196713610405408019 | 5181234096130144084041856 | 7426441829541573444964139 | 9492376623917486974923202 |
| 2931016394761975263190347 | 5198267398125617994391348 | 7632198126531809327186321 | 9511972558779880288252979 |
| 2933458058294405155197296 | 5317592940316231219758372 | 7712154432211912882310511 | 9602413424619187112552264 |
| 3075514410490975920315348 | 5384358126771794128356947 | 7858918664240262356610010 | 9631217114906129219461111 |
| 3111474985252793452860017 | 5439211712248901995423441 | 7898156786763212963178679 | 9908189853102753335981319 |
| 3145621587936120118438701 | 5610379826092838192760458 | 8147591017037573337848616 | 9913237476341764299813987 |
| 3148901255628881103198549 | 5632317555465228677676044 | 8149436716871371161932035 | |
| 3157693105325111284321993 | 5692168374637019617423712 | 8176063831682536571306791 | |

的问题。给定上面的 90 个 25 位数的数，我们能找到两个不同的子集给出相同的和吗?

# 子集之和

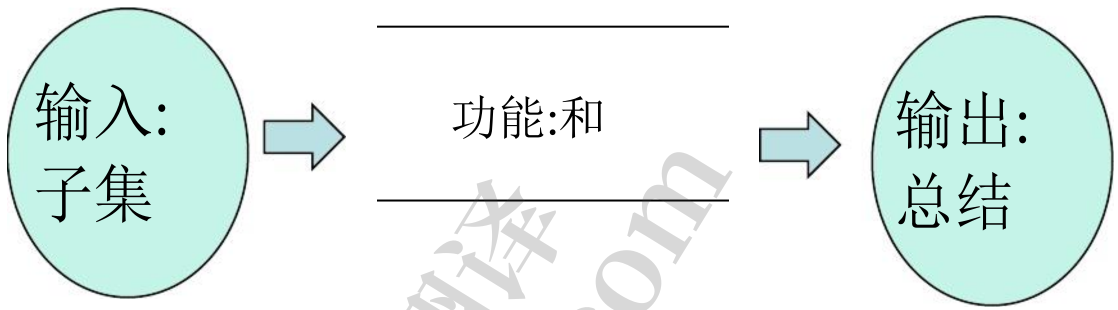
如何解决这个问题?

反过来呢?能不能所有的和都不一样?

我们可以数下面的集合。

{90 个数集的所有可能的不同子集}{Y ={这些子集可能产生的所有可能的不同和}

如果|X| > |Y|，那么根据鸽子洞原理，输入比输出多，因此不可能所有子集都有不同的和。


输入:
子集
功能:和
输出:
总结

# 子集之和

设 A 是 90 个数字的集合，每个数字最多有 25 位。那么这 90 个数的总和最多为 90x1025。

设 X 是这 90 个数的所有子集的集合。

**(鸽子)(开头)**

设 Y 是 0 到 90x1025 的整数集合。

设 f:X->Y 是一个将 a 的每个子集映射到它的和的函数。

如果我们能证明|X| > |Y|，那么根据鸽子洞原理，函数 f 必须将 X 中的两个元素映射到 Y 中的一个元素。这意味着有两个子集具有相同的和。

# 子集之和

设 A 是 90 个数字的集合，每个数字最多有 25 位。那么这 90 个数的总和最多为 90x1025。

设 X 是这 90 个数的所有子集的集合。 **(鸽子)**

设 Y 为 0 到 90x1025 的整数集。 **(开头)**

$$|X| = |pow(A)| = 290 \geqslant 1.237 \times 1027$$

$$|Y| \leqslant 90 \times 1025 \leqslant 0.901 \times 1027$$

所以，$|X| > |Y|$。

根据鸽子洞原理，有两个不同的子集具有相同的和。

# 广义鸽子洞原理

## 广义鸽子洞原理

如果 n 只鸽子和 h 个洞，那么某个洞至少有 $\left\lceil \frac{n}{h} \right\rceil$ 鸽子。

# 每个洞不能有< 3 张
卡

# 俱乐部 vs 陌生人

让我们同意，给定任何两个人，他们要么见过，要么没见过。如果一个群体中的每个人都见过面，那么我们就称这个群体为俱乐部。如果一个群里的每个人都没有见过面，那我们就叫一群陌生人。

**定理。**每 6 人的集合，都包含一个 3 人的俱乐部，或者 3 个陌生人的团体。

设 x 是这六个人中的一个。

根据(一般化的)鸽子洞原理，我们有以下论断。

**索赔。**对于剩下的 5 个人，要么 3 个人见过 x，要么 3 个人没见过 x。

# 俱乐部 vs 陌生人

**定理。**每 6 人的集合，都包含一个 3 人的俱乐部，或者 3 个陌生人的团体。

**索赔。**对于剩下的 5 个人，要么 3 个人见过 x，要么 3 个人没见过 x。

**情况 1: “3 个人见过 x”**

案例 1.1:这 3 个人中没有一对见过对方。那么就有了 3 个陌生人。

案例 1.2:这 3 个人中的某一对已经遇见了对方。然后这一对，加上 x，组成一个 3 人的俱乐部。

# 俱乐部 vs 陌生人

**定理。**每 6 人的集合，都包含一个 3 人的俱乐部，或者 3 个陌生人的团体。

**索赔。**对于剩下的 5 个人，要么 3 个人见过 x，要么 3 个人没见过 x。

**情况 2: “3 个人没有见过 x”**

情形 2.1:这 3 个人中的每一对都见过对方。然后有一个 3 人的俱乐部。

案例 2.2:这 3 个人中有一对还没有见过面。然后这一对，加上 x，组成一个 3 个陌生人的群体。

# 俱乐部 vs 陌生人

**定理。**每 6 人的集合，都包含一个 3 人的俱乐部，或者 3 个陌生人的团体。

**定理。**对于每 k，如果有足够多的人，那么要么存在一个由 k 人组成的俱乐部，要么存在一个由 k 个陌生人组成的群体。

一个足够大的结构不可能完全无序。这是拉姆齐理论的一个基本结果。

更多关于鸽子洞的问题..

# 快速的总结

我们证明二项式定理并研究恒等式的组合证明。

我们还学习了包容-排斥原理，并看到了一些应用。你们应该能够运用包容-排斥公式来解决一些简单的问题。

最后我们学习了鸽子洞原理和它的一些应用。正如拉姆齐理论所指出的，“一个足够大的结构不可能完全无序。”这一思想在许多复杂的问题中是非常有力的。