教程 4:归纳、递归

由 Rybin Dmitry主持
dmitrybin@link.cuhk.edu.cn

香港中文大学（深圳）

2022 年 9 月 28 日

无聊学生的难题

令an为可以从集合 { 0,1,01}中的n 个字符串的任意连接中获得的所有不同二进制字符串的数量。找一个。
例如，

$$a1 = 3$$

$$0, 1, 01$$

$$a2 = 9$$

$$00, 01, 10, 11, 001, 101, 011, 010, 0101$$

$$a3 = 26$$

用花哨的话来说，考虑字母 0, 1 上的自由幺半群M 0, 1 。令S = {0, 1, 01} ⊂ M 0, 1 。计算|S n |。

回顾:感应

回想一下,归纳证明总是包含两个步骤:

- 证明基本情况
- 证明步骤

在步骤证明期间,我们可以假设我们已经知道所有先前获得的陈述。

练习 1

证明每个自然数$n > 19$ 可以写成 11 的和

和 3 例如

$$21 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$22 = 11 + 11$$

$$25 = 3 + 11 + 11$$

练习 1 的解法

让我们通过对k的归纳来证明数字 $20 + 3k$、 $21 + 3k$、 $22 + 3k$可以写为 11 和 3 的总和。

基本情况： $k = 0$

$$20 = 3 + 3 + 3 + 11$$

$$21 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$22 = 11 + 11$$

步骤 :知道表示为k 的总和 ,我们得到表示

$k + 1$ 因为

$$A + 3(k + 1) = (A + 3k) + 3。$$

回顾:递归和递归

算法和某些数学对象通常以某种递归方式逐步构建。

有时,通过重复相同的操作$X_n = f(X_{n-1})$生成对象序列X_1、 X_2、 X_3、 ...。归纳法是证明以这种方式构造的对象的属性的有用工具。

例如,如何构造所有长度为n 的二进制字符串?使用所有长度为n - 1 的二进制字符串,并在末尾附加 0 或 1。因此长度为n的二进制字符串的数量x_n满足递归

$$x_n = 2x_{n-1}。$$

这是一个非常简单的递归,归纳表明$x_n = x_0 2^n = 2^n$。

练习 2

有多少种方法可以将一个数$n \in \mathbb{N}$ 写为正数之和
自然数（不同的术语顺序算作不同的方式）？

例如,$3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$。

练习 2 的解法

令F(n)表示将n写为自然数之和的方式数
数字。让我们计算前几个值。

$$0 = 0, F(0) = 1,$$

$$1 = 1, F(1) = 1,$$

$$2 = 2 = 1 + 1, F(2) = 2,$$

$$3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1, \quad F(3) = 4,$$

$$4 = 4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 =$$

$$= 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1, \quad F(4) = 8。$$

练习 2 的解法

所以我们的猜想是当n > 0时F(n) = 2n－1 。

将数字n划分为 sum的递归定义。取任何 $0 < k \leqslant n$并写成$n = k + (\dots)$。我们可以放置n - k的任何分区而不是(...)。因此存在递归

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2) + \dots + F(0)。$$

通过这个递归的归纳,我们得到F(n) = 2n－1 - 完成。
这是没有递归构造的替代解决方案。这种方法被称为“球和棒”。考虑以下由n 个1 和n - 1 个 0组成的字符串。

$$1|1|1|1|\dots|1。$$

可以删除n - 1 个柱的任何子集,得到 n 的分区。例如

$$1\ 1\ 1|1\ 1 \leftrightarrow 3 + 2$$

因此有 2^{n-1} 分区。

合并排序

我们得到一个数组[a1, ..., an] ,我们必须对这个数组进行排序。我们将通过合并排序来做到这一点。它运行如下： 如果n = 1,则对数组进行排序。

-
- 否则将长度为n的数组分成 2 个子数组（大小为大约n/2),通过Merge Sort对它们进行递归排序,并对两个排序后的数组进行合并（已知最后一步耗时≈cn）

令T(n)表示算法的运行时间。然后通过设计我们有

$$T(n) = 2T(n/2) + cn。$$

第一项代表过程的递归调用,第二项代表合并。

练习 3

证明某个A的$T(n) \leqslant An \log(n)$。

练习 3 的解法

让我们做出一个合理的假设，即$T(n) \leqslant T(n+1)$。让我们通过归纳证明$T(2^k) \leqslant c2$
基数： $T(1) = 0, T(2) = 2c \leqslant c$ ^{k}。$2 \cdot 1$。

步：

$$T(2^{k+1}) = 2T(2^k) + c2^{k+1} = (ck + c)2^{k+1} \leqslant c(k+1)2^{k+1}\text{。}$$

现在，对于任意$n = 2^k + r$，我们可以得出以下界限：

$$T(n) = T(2^k + r) \leqslant T(2^{k+1}) \leqslant c \cdot 2^{k+1} \cdot (k+1) \leqslant 4cn \cdot \log(n)\text{。}$$

练习 4

在t = 0年,我们的初始资本为 3000 美元。我们找到了 2 笔投资产品。每年通过递归更改其估值

$$x_{t+1} = 2x_t - 1000 \text{ 美元。}$$

根据递归的另一个变化

年初+1 = 1.5 年初+1 + 2000 美元。

如果我们的规划期限是 10 年,我们应该选择哪一个?

练习 4 的解法

我们应该比较x10和y10,假设x0 = y0 = $3000。通过归纳
我们可以证明

$$xn = 1000 \cdot (2 \cdot 2^{n} + 1),$$

$$yn = 1000 \cdot (7 \cdot 1.5^{n} - 4),$$

因此

$$x10 = 1000 \cdot 2049 > 1000 \cdot (2.255 - 4) = y10。$$

额外问题 :如果每年都可以使用资本,最佳策略是什么
形成两种产品的任何非负组合（不允许债务）？

谢谢你

感谢您的关注！