

定理。任何至少 8 的整数都可以由 3 和 5 组合而成。

证明。对于  $n \geq 8$ , 设置

$P(n)$ : 任意整数  $m \in \{8, 9, \dots, n\}$  可以由 3 和 5 的组合形成。

基本情况。如果  $n = 8$ , 则  $m = 8 = 3 + 5$ , 所以  $P(8)$  为真。

感应步骤。假设  $P(t)$  对于某些  $t \geq 8$  为真。对于  $n = t + 1 \geq 9$ , 我们考虑以下内容:

① 如果  $n = 9$ , 则  $m = 8$  或  $9$ 。因此我们只需要考虑  $m = 9$  的情况,  
等于  $3 \times 3$ , 所以  $P(t + 1)$  为真。

② 如果  $n = 10$ , 那么  $m = 8, 9, 10$ 。所以只需要考虑  $m = 10$  时的情况,  
等于  $5 \times 2$ , 所以  $P(t + 1)$  为真。

③ 如果  $n \geq 11$ , 则  $s = n - 3 \in \{8, \dots, t\}$ , 可以由以下组合形成  
3 和 5 根据我们的假设, 比如说

$$s = 3a + 5b \quad \text{对于一些 } a, b \in \mathbb{N}$$

然后

$$n = s + 3 = 3(a + 1) + 5b$$

所以  $P(t + 1)$  为真。

因此, 对于任何  $n \geq 8$ ,  $P(n)$  都为真。 □

或者, 我们可以用普通的  $P(n)$  证明该定理。

证明。对于  $n \geq 8$ , 设置

$P(n)$ : 至少为 8 的任意整数  $n$  可以由 3 和 5 组合而成。

基本情况。如果  $n = 8$ , 则  $n = 3 + 5$ , 因此  $P(8)$  为真。

感应步骤。假设  $P(n)$  对于任何  $n \in \{8, 9, \dots, t\}$  都是真的。对于  $n = t + 1 \geq 9$ , 我们考虑以下内容:

① 如果  $n = 9$ , 则  $n = 3 \times 3$ , 所以  $P(t + 1)$  为真。

② 如果  $n = 10$ , 则  $n = 5 \times 2$ , 所以  $P(t + 1)$  为真。

③ 如果  $n \geq 11$ , 则  $s = n - 3 \in \{8, \dots, t\}$ , 它是 3 和 5 的组合  
假设, 说

$$s = 3a + 5b \quad \text{对于一些 } a, b \in \mathbb{N}$$

然后

$$n = s + 3 = 3(a + 1) + 5b$$

所以  $P(t + 1)$  为真。

因此, 对于任何  $n \geq 8$ ,  $P(n)$  都为真。 □