证明方法

本次讲座

现在我们已经学习了逻辑的基础知识。

我们将应用逻辑规则来证明数学定理。

- 直接证明
- 对立
- 反证法
- 案例证明

基本定义

如果存在整数 k 使得 n = 2k,则
整数 n 是偶数。

如果存在整数 k 使得 n =
2k+1,则整数 n 是奇数。

证明一个含义

目标:如果 P,那么 Q。(P 意味着 Q)

方法1:写假设P,然后证明Q在逻辑上遵循。

两个偶数之和为偶数。

证明

$$x = 2m, y = 2n$$

$$x+y = 2m+2n$$

$$= 2(m+n)$$

直接证明

两个奇数的乘积是奇数。

证明 $x = 2m+1, y = 2n+1$

$xy = (2m+1)(2n+1)$

$= 4mn + 2m + 2n + 1$

$= 2(2mn+m+n) + 1$。

如果 m 和 n 是完全平方,则 m+n+2 √ 是一个完美的正方形。

证明m = a2和 n = b2对于一些整数 a 和 b

然后 m + n + 2 = a√2 + b2 + 2ab

= (a + b)2

所以 m + n + 2√ 是一个完美的正方形。

本次讲座

- 直接证明
- 对立
- 反证法
- 案例证明

证明一个含义

目标:如果 P,那么 Q。(P 意味着 Q)

方法1:写假设P,然后证明Q在逻辑上遵循。

宣称:

如果 r 是非理性的,那么它就√是非理性的。

如何开始?

如果我证明“如果 √ 是有理的,那么 r 是有理的”,是等价的吗?

是的,这是等价的,因为它是陈述的对立面,所以证明“如果 P,则 Q”等价于证明“如果不是 Q,则不是 P”。

有理数

如果存在整数 a 和 b 使得实数r是有理数

分子

$$r = \frac{a}{b}$$

分母

b≠0。

0.281 是有理数吗?

是的,281/1000

0是有理数吗?

是的,0/1

如果 m 和 n 是非零整数,(m+n)/mn 是有理数吗?

是的

两个有理数之和是有理数吗

是的,a/b+c/d=(ad+bc)/bd

x=0.12121212⋯⋯是有理数吗?

注意 100x-x=12,所以 x=12/99。

证明对立面

目标:如果 P,那么 Q。(P 意味着 Q)

方法二:证明对立,即证明“非Q蕴涵非P”。

宣称:

如果 r 是非理性的,那么它就是非理性的。√

证明:我们将证明对立式

“如果√ 是有理的,那么 r 是有理的。”

既然是理性的, √ = a/b 对于某些整数 a,b。

所以 r = a2/b2。因为 a,b 是整数,所以a2,b2是整数。

因此,r 是有理数。 是

(QED)“因此它已被证明”,或“很容易做到”。

证明“当且仅当”

目标:证明两个陈述 P 和 Q 是“逻辑等价的”,即当且仅当另一个成立时,一个成立。

示例:对于整数 n,n 是偶数当且仅当n2是偶数。

方法 1a:证明 P 蕴含 Q且Q 蕴涵 P。

方法 1b:证明 P 蕴含 Q ,而非 P 蕴涵非 Q。

方法二:构造 if 且仅 if 语句链。

证明相反的

对于整数 n,n 是偶数当且仅当n2是偶数。

方法 1a:证明 P 蕴含 Q且Q 蕴涵 P。

声明:如果 n 是偶数,则n2是偶数

证明: $n = 2k$

个^2 $= 4k2$

语句:如果n2是偶数,则 n 是偶数

证明: $n^2 = 2k$

$n = 2\sqrt{\quad}$

??

证明相反的

对于整数 n,n 是偶数当且仅当n2是偶数。

方法 1b:证明 P 蕴含 Q ,而非 P 蕴涵非 Q。

语句 :如果n2是偶数,则 n 是偶数

反证 :如果 n 是奇数,则n2是奇数。

证明（反证）：

由于 n 是奇数,对于某个整数 k,n = 2k+1。

所以n2 = (2k+1)2

= (2k)2 + 2(2k) + 1 = 2(2k2 + 2k) + 1

所以n2是奇数。

本次讲座

- 直接证明
- 对立
- 反证法
- 案例证明

矛盾证明

$$\frac{\overline{P}F \rightarrow \_}{\text{磷}}$$

要证明 P,你要证明非 P 会导致荒谬的结果,因此 P 必须为真。

矛盾证明

定理： $\sqrt{2}$是无理数。

证明（反证法）：

· 假设 · 选 $\sqrt{2}$ 是理性的。

择m, n 个没有公质因数的整数（总是可能的）

这样

$$\sqrt{2} = \frac{米}{n}$$

· 证明m和n都是偶数,因此有一个公因子 2，

矛盾！

矛盾证明

定理： $\sqrt{2}$是无理数。

证明（反证法）：

想证明 m 和 n 都是偶数。

$$\sqrt{2} = \frac{\text{米}}{n}$$

$$\sqrt{2}n = \text{米}$$

$$2n^2 = \text{米}\quad{}^2$$

所以m是偶数。

所以我们有m = 2l

$$\text{毫升}^2 = 4\quad{}^2$$

$$2\ 4^2 nl = \quad{}^2$$

$$n^2 = 2l\quad{}^2$$

所以n是偶数。

回想一下,当且仅当m2是偶数时,m 是偶数。

素数的无限

定理。素数有无穷多个。

证明（反证法）：

假设只有有限多个素数。

令p1 , p2 , ..., pk为所有素数。

(1) 我们将构造一个数 N 使得 N 不能被任何pi整除。

根据我们的假设,这意味着 N 不能被任何素数整除。

(2) 另一方面,我们证明任何数都可以被某个素数整除。

这将导致矛盾,因此假设必须是错误的。

所以必须有无穷多个素数。

被素数整除

定理。任何整数 $n > 1$ 都可以被素数整除。

- 令n 为整数。
- 如果n 是一个素数,那么我们就完成了。
- 否则,$n = ab$,a,b 都小于 n。
- 如果a 或b 是素数,那么我们就完成了。
- 否则,$a = cd$,c,d 都小于 a。
- 如果c 或d 是素数,那么我们就完成了。
- 否则,重复这个论点,因为数字越来越小,这最终会停止,我们将找到 n 的质因数。

稍后我们将通过数学归纳法看到更好的证明。

素数的无限

定理。素数有无穷多个。

证明（反证法）：

令p1 , p2 , ..., pk为所有素数。

考虑p1p2⋯pk + 1。

声明:如果 p 整除 a,则 p 不整除 a+1。

证明（反证法）：

a = cp 对于某个整数 c a+1

= dp 对于某个整数 d => 1 =

(dc)p,矛盾,因为 p>=2。

因此,根据声明， p1 、 p2 、...、 pk都不能除以p1p2...pk + 1,这是一个矛盾。

本次讲座

- 直接证明
- 对立
- 反证法
- 案例证明

案例证明

$$p \vee q$$
$$p \rightarrow r$$
$$q \rightarrow r$$
$$\therefore r$$

例如,想证明一个非零数的平方总是正的。

x 为正或 x 为负

如果 x 为正,则x2 > 0。

如果 x 为负,则x2 > 0。

$\therefore$ 2× > 0。

奇数平方

$$\boxed{\forall \text{ odd } n, \exists m, n^2 = 8m + 1?}$$

思路0:找反例。

32 = 9 = 8+1, 52 = 25 = 3x8+1 …… 1312 = 17161 = 2145x8 + 1, …………

思路 1:证明n2-1可以被 8 整除。

个^2 – 1 = (n-1)(n+1) = ??⋯

想法 2:考虑 (2k+1)2

(2k+1)2 = 4k2+4k+1 = 4(k2+k)+1

如果 k 是偶数,那么k2和 k 都是偶数,这样我们就完成了。

如果 k 是奇数,那么k2和 k 都是奇数,因此k2+k 是偶数,也完成了。

理性与非理性

问题:如果a和b是无理数， ab可以是有理数吗?

我们（只)知道 $\sqrt{2}$ 是非理性的,那么 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 呢?

案例1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是理性的

然后我们就完成了,a= $\sqrt{2}$, b= $\sqrt{2}$。

案例2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是不合理的

然后 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$,有理数

所以a = $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, b= $\sqrt{2}$就可以了。

所以在任何一种情况下,都有 a,b 非理性和ab是理性的。

我们不（不需要)知道哪种情况是真的!

概括

我们已经学习了不同的技术来证明数学陈述。

- 直接证明
- 对立
- 反证法
- 案例证明

下一次我们将专注于一项非常重要的技术,即归纳证明。