

CSC3001 离散数学:教程 5

由 Rybin Dmitry主持
dmitrybin@link.cuhk.edu.cn

香港中文大学 (深圳)

2022 年 10 月 14 日

无聊学生的棘手问题

1. 考虑 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集,使得没有元素是邻居。

将权重 $wt(S) = \prod_{a \in S} q^a$ 附加到这些子集。考虑 $pn(q) = \sum_{S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} wt(S)$ 。这是来自理论物理学的统计和或配分函数。

- 查找 $pn(q)$ 的递归
- 证明 $p(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} pn(q)$ 存在并计算第一项。

• 证明 $p(q) = P^\infty$

$$n=0 \quad \frac{q^{\uparrow^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = Q^\infty \quad n=0 \quad \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

2. 有一堵长方形墙,里面有 $n \times m$ 个单元格。一个女孩在墙的左下角堆叠立方体 (因此,如果某个单元格被占用,则下方和左侧的任何单元格都被占用)。她有多少种方法可以堆叠立方体?如果她堆在 $m \times n \times k$ 房间的角落里怎么办? 4D角呢?

练习 1

解决复发

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}.$$

练习 1 的解法

我们有

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1},$$

因此 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 是一个常数序列。因此

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

并且 $a_n = b_n + c$ 。

练习 2

求练习 1 中 $a_0 = 1, a_2 = 2$ 的序列的生成函数。

练习 2 的解法

让

$$f(x) = X^{\infty} \quad \text{我爱克斯} \cdot$$

我=0

然后

$$f(x) - 2xf(x) + x^2 f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x = 1,$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{2 - 2x + x^2}$$

练习 3

令 f_n 为第 n 个斐波那契数, $f_0 = 0, f_1 = 1$ 。求 $f_1 + \dots + f_n$ 。

练习 3 的解法

通过归纳我们证明

$$f_1 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

的确,

$$f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+1} + f_{n+2} - 1 = f_{n+3} - 1.$$

替代解决方案: 让 $g(x)$ 成为斐波那契数的生成函数。从讲座中我们知道

$$g(x) = \frac{x}{2 - x - x^2}.$$

但

$$g(x) \frac{x}{1-x} = \frac{1}{2 - x - x^2} - \frac{1}{1-x}.$$

练习 4

计算

$$\gcd(230 - 1, 2^{54} - 1)。$$

练习 4 的解法

$$2^{54} - 1 = (230 - 1) \cdot 2^{24} + 224 - 1,$$

因此

$$\gcd(230 - 1, 2^{54} - 1) = \gcd(230 - 1, 2^{24} - 1).$$

我们注意到这是指数上的欧几里得算法,因此答案是

$$2 \gcd(30, 54) - 1 = 26 - 1.$$

谢谢你

感谢您的关注！