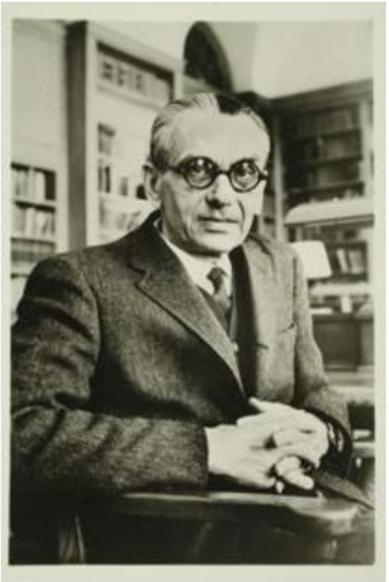
一阶逻辑



本次讲座

上次我们谈到了命题逻辑,即简单陈述的逻辑。

这次我们将讨论一阶逻辑,即量化陈述上的逻辑。

一阶逻辑比命题逻辑更具表现力。

一阶逻辑的主题是:

量词

否定

多个量词

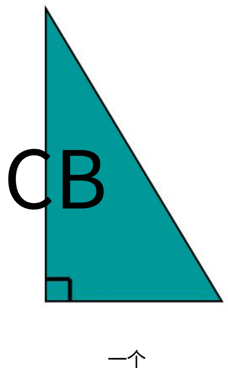
量化陈述的论点

命题逻辑的局限

命题逻辑　简单陈述的逻辑

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

如何使用命题逻辑制定勾股定理?



如何表述存在无限多个素数的陈述?

谓词

谓词是带有变量的命题（即陈述）。

例子：

$P(x,y): x + 2 = y$

$x = 1$ 和$y = 3$：P(1,3) 为真

$x = 1$ 和$y = 4$：P(1,4) 为假

P(1,4) 为真

当有变量时,我们需要指定要放入变量中的内容。

变量的域是所有值的集合

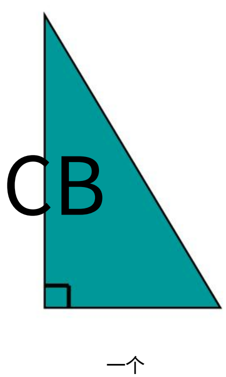
可以代替变量。

通用量词

全称量词 x代表所有x

例子： x ∈Z+ P(x) 表示 P(1) ∧ P(2) ∧ P(3) ∧ ···

例子： x ∈Z y Z,x + y = y + x。



勾股定理

$\forall$ right – angled triangle $a^2 + b^2 = c^2$

例子： $\forall x \quad x^2 \geq x$

如果域是 Z,则此陈述为真,但如果域为 R,则此陈述不正确。

谓词的真值取决于域。

存在量词

y存在一些y _

y∈Z+ P(y) 表示 P(1) ∨ P(2) ∨ P(3) ∨ …

例如 $\exists y, y^2 = y$

谓词的真值取决于域。

xyxy 。

领域	真值
整数 Z	吨
正整数Z+	吨
负整数 Z	F
负实数 R	吨

翻译数学定理

翻译成逻辑
公式？

Fermat (1637) :如果整数 n 大于 2，

那么方程an + bn = cn在正整数 a、b 和 c 中没有解。

三个重要元素：

·条件： $a^n + b^n \neq c^n$

·变量： a、b、c、n

·域：一个Z+ ∈ , b Z+ , c Z+ , n Z, n > 2

最后一步 :添加量词并协调顺序

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+, (n \leq 2) \vee (n \notin \mathbb{Z}) \vee (a^n + b^n \neq c^n)$$

安德鲁 ·怀尔斯 (1994) http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat s_last_theorem

翻译数学定理

哥德巴赫猜想:每一个至少 6 的正偶数都是两个素数之和。

假设我们已经有谓词 prime(x)、even(x)、odd(x)。

1.条件： p+q=n 2.变

量： p,q,n 3.域 :素数

(p),素数(q),偶数(n),n≥6,n Z+ 4.添加量词并调和命令 :∈

+ ∀ ∈ , 奇数(∨)(＜6) ∨ (∃ , ∈

, 素数 ∧ 素数 ∧ + =) ( ) ( ) ( )

翻译数学定理

如何写素数（p）？

素数（或素数)是大于 1 的自然数,除了 1 和它本身之外没有正除数。

1.条件： $p \neq a \quad b$

2.变量： p、a、b

3. 领域： $, \quad , \quad > 1, , \quad , \quad \in$

4.添加量词并协调顺序：

$(> 1) \wedge \in (\quad \wedge (\forall , \quad \in {}^{+}, (\neq \quad) \vee (= 1) \vee (=))$

量词

否定

多个量词

量化陈述的论点

量化陈述的否定

每个人都喜欢足球。

这种说法的否定是什么？

不是每个人都喜欢足球=有人不喜欢足球。

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

(广义)德摩根定律

假设域只有三个值。

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg(P(1) \wedge P(2) \wedge P(3))$$

$$\equiv \neg(P(1) \wedge P(2)) \vee \neg P(3)$$

$$\equiv \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \equiv \exists x \neg P(x)$$

相同的想法可用于证明任意数量的变量。

量化陈述的否定

有一种植物会飞。

这种说法的否定是什么？

不存在会飞的植物=所有植物都不会飞。

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

(广义)德摩根定律假设域只有三个值。

$$\begin{aligned}\neg \exists x P(x) &\equiv \neg (P(1) \vee P(2) \vee P(3)) \\ &\equiv \neg (P(1) \vee P(2)) \wedge \neg P(3) \\ &\equiv \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \\ &\equiv \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$

相同的想法可用于证明任意数量的变量。

量词

否定

多个量词

量化陈述的论点

量词的顺序

防病毒程序会杀死所有计算机病毒。

如何解读这句话?

对于每个计算机病毒,都有一个杀毒程序可以杀死它。

$$\forall V \ \ \exists P, \mathsf{kill}(P, V)$$

- 对于每一次攻击,我都有一个防御:
- 针对MYDOOM,使用Defender
- 针对ILOVEYOU,使用诺顿
- 针对BABLAS,使用Zonealarm ···

买这么多好贵!

量词的顺序

有一个杀毒程序可以杀死所有计算机病毒。

如何解读这句话?

有一个单一的防病毒程序可以杀死所有计算机病毒。

$$\exists P\ \forall V, \mathsf{kill}(P, V)$$

我对每一次攻击都有一个很好的防御。

示例： P是CSC3001-antivirus,可防御所有病毒

那好多了!

量词的顺序很重要!

量词的顺序

假设我们有一个大小为 6x6 的数组 A。

$$\forall \text{ row } x \ \exists \text{ column } y \quad A[x,y] = 1$$

1					
	1	1		1	
		1			
		1		1	
			1		
		1			

那么这张表就满足了这个说法。

量词的顺序

假设我们有一个大小为 6x6 的数组 A。

$$\exists \text{ row } x \; \forall \text{ column } y \quad A[x,y] = 1$$

1					
	1	1		1	
		1			
		1		1	
			1		
		1			

但如果量词的顺序发生变化，

那么这个表不再满足新的陈述。

量词的顺序

假设我们有一个大小为 6x6 的数组 A。

$$\exists \text{ row } x \ \forall \text{ column } y \quad A[x, y] = 1$$

1	1	1	1	1	1

为了满足新语句,必须有一行全为 1。

问题

这些陈述是否等效?

$$\forall \text{ row } x \; \forall \text{ column } y \quad A[x,y] = 1$$

$$\forall \text{ column } y \; \forall \text{ row } x \quad A[x,y] = 1$$

这些陈述是否等效?

$$\exists \text{ row } x \; \exists \text{ column } y \quad A[x,y] = 1$$

$$\exists \text{ column } y \; \exists \text{ row } x \quad A[x,y] = 1$$

是的,一般来说,你可以改变两个 “forall”的顺序,也可以改变两个 “exist”的顺序。

更多否定

有一个杀毒程序可以杀死所有计算机病毒。

$$\exists P\ \forall V, \mathsf{kill}(P, V)$$

上述句子的否定句是什么?

$$\neg(\exists P\ \forall V, \mathsf{kill}(P, V))$$

$$\equiv \forall P\ \neg(\forall V, \mathsf{kill}(P, V))$$

$$\equiv \forall P \exists V \neg \mathsf{kill}(P, V)$$

对于每个程序,都有一些它无法杀死的病毒。

练习

1.有一个最小的正整数。

$$\exists s \in Z^{+}\ \forall x \in Z^{+}\ s \leq x$$

2.没有最小的正实数。

$$\forall r \in R^{+}\ \exists x \in R^{+}\ x < r$$

换句话说,总是有一个较小的正实数。

练习

3.有无穷多个素数。

这句话包含两层意思：

存在一个素数。 + 没有最大的素数。

(∃ ∈ , ()) ∧ (∀ ∈ $^+$, ¬ () ∨ (∃ ∈ , () ∧ (>)))

使用一阶逻辑形成句子在逻辑编程和数据库查询中很有用。

量词

否定

多个量词

量化陈述的论点

谓词演算有效性

命题逻辑	一阶逻辑
无论A和B的真值是什么，重言式都是真的。	重言式无论如何都是真的 x,y,z的域是,或P,Q是。
例如， (A -> B) V (B -> A)	例如， $z, [Q(z) \wedge P(z)] \rightarrow [\ x, Q(x) \wedge\ y, P(y)]$

概括命题逻辑，

只要假设为真,如果结论为真,则量化论证（即带有变量、量词的论证)是有效的。

带有量化陈述的论点

通用实例化：

$$\begin{array}{l} \forall x, P(x) \\ \therefore P(a) \end{array}$$

通用前言：

$$\begin{array}{l} \forall x, P(x) \rightarrow Q(x) \\ P(a) \\ \therefore Q(a) \end{array}$$

通用模式：

$$\begin{array}{l} \forall x, P(x) \rightarrow Q(x) \\ \neg Q(a) \\ \therefore \neg P(a) \end{array}$$

普遍概括

有效规则

AR→c 。( )

A x(R) x→

提供c独立于A

非正式地,如果我们可以证明 R(c) 对于任意 c 是正确的（在某种意义上,c 是一个“变量”）,那么我们可以证明所有值的陈述。

例如对于任何数字 c,如果 1=1,则 2c 是偶数

=> 如果 1=1,那么对于所有 x,2x 都是偶数。

备注:普遍概括往往难以证明,我们将引入数学归纳法来证明所有值的有效性。

有效规则?

$$z\,[Q(z) \vee P(z)] \rightarrow [\quad x\,Q(x) \vee \quad y\,P(y)]$$

证明:我们希望给出一个反例,其中 $z\,[Q(z) \vee P(z)]$ 为真,但 $x\,Q(x) \vee \quad y\,P(y)$为假。

找到一个域和一个谓词。

为了提供这个例子,让 domain 是整数,

如果 z 是偶数, Q(z)为真,即 Q(z)=even(z)

如果 z 是奇数,则P(z)为真,即 P(z)=odd(z)

那么 $z\,[Q(z) \vee P(z)]$ 为真,因为每个数都是偶数或奇数。

但是 $x\,Q(x)$不是真的,因为不是每个数都是偶数。

类似地, $y\,P(y)$不为真,因此 $x\,Q(x) \vee \quad y\,P(y)$不为真。

有效规则?

$$z Ð [Q(z) \land P(z)] \rightarrow [\quad x\ D\ Q(x) \notin \land \quad y\ D\ P(y)] \quad \in$$

证明:假设 z [Q(z) ∧ P(z)]为真。

所以Q(z) ∧ P(z)对域 D 中的所有z都成立。

现在让c是域 D 中的某个元素。

所以Q(c) ∧ P(c)为真（通过实例化）,因此Q(c)为真。

但是c可以是域 D 中的任何元素。

所以我们得出结论 x Q(x)为真。（通过概括）

我们得出结论 y P(y)类似地为真（通过泛化）。所以，

x Q(x) ∧ y P(y)为真。 QED。

概括

这样就完成了对逻辑的介绍。我们将使用逻辑来做数学证明。

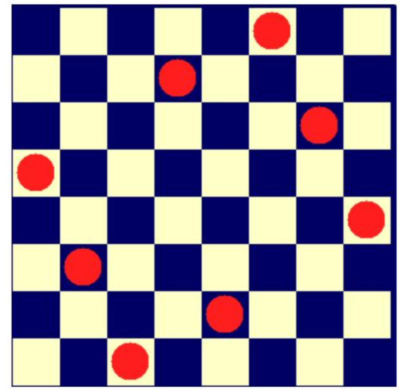
此时，您应该能够：

- 使用逻辑公式表达（量化)陈述
- 使用简单的逻辑规则（例如 De Morgan、对立等）
- 精通论证和逻辑等价

逻辑的应用

逻辑编程

用逻辑解决问题

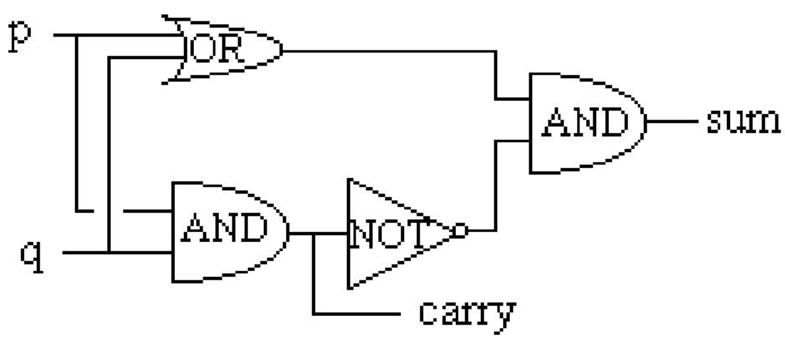


	1		6		7			4
	4	2						
8	7		3			6		
	8			7			2	
			8	9	3			
	3			6			1	
		8			6		4	5
						1	7	
4			9		8		6	

数据库

查询、数据挖掘

数字电路

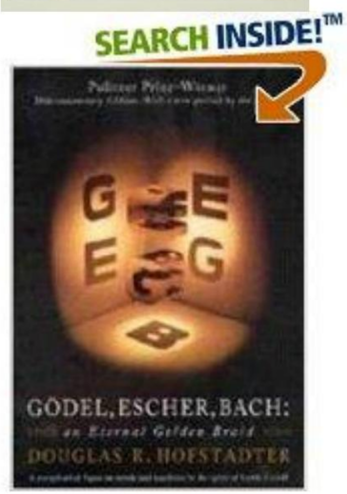


p	q	sum	carry
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

更多关于逻辑（可选）

理想情况下,我们可以想出一个“完美”的逻辑系统,它是一致的（没有矛盾）并且是强大的（可以推导出所有真实的）。

但是哥德尔证明了没有完美的逻辑系统。
这被称为哥德尔不完备定理。
这是数学中一个重要而令人惊讶的结果。



他证明中的思想在计算机科学中也有影响,证明某些问题是不可计算的,例如不可能编写程序来检查是否

另一个程序将在特定输入上永远循环（参见注 2.1 中的停止问题）。