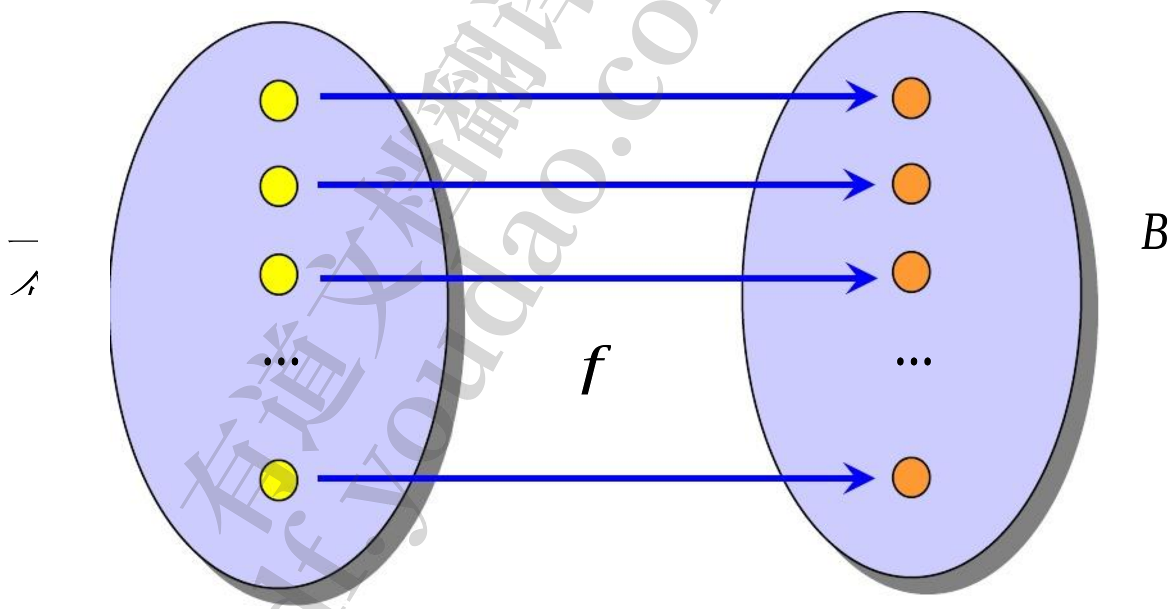
映射计数



计划

我们将学习如何定义映射来计数。将会展示很多例子。

- 功能
- 双射规则
- 分割规则
- 加泰罗尼亚数字

功能

非正式地说，我们有一个“输入集”，
以及一个函数，它为每个可能的输入提供一个输出。

重要的一点是，每个输入只有一个输出。

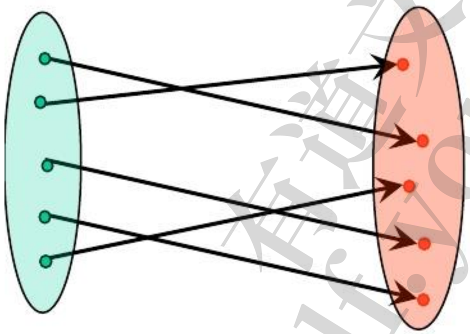
我们说一个函数 f 把输入集 a 的元素“映射”到输出集 B 的元素上。

功能

更正式的是，我们写 $f{:}A \to B$

表示 f 是从集合 a 到集合 B 的函数，即

将每一个□□∈□□与一个元素□□□□∈□□。



一个

B

f的定义域(输入)是A。

5

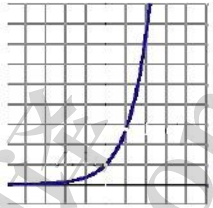
f的范围(输出)是f(A)。은

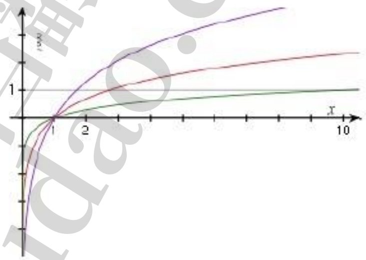
f的上域是B2 f(A)

对于每个输入，恰好有一个输出。

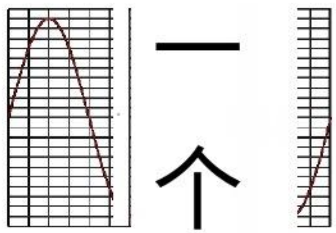
注意:输入集可以与输出集相同，例如两者都是整数。

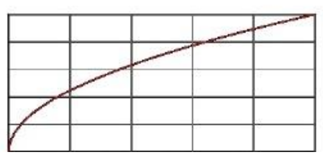
函数示例

$f(x) = e^{x}$  域 =R
量程= R+

f (x) 一 日志(: :) 

域= Rt范围
: , R

f $x)$ 一 sin (x |  域 R
范围 [1]

$f(x) = \sqrt{x}$  域 [xE R | x>=0]
范围 [xE R| x>=0]

函数示例

f(S) = |S|

Domain =所有有限集的集合 range =非负整数

f(字符串)=长度(字符串)

Domain =所有有限字符串的集合范围=非负整数

f(student-name) = student-ID

不是一个函数，

因为同一个名字可能对应不同的学生

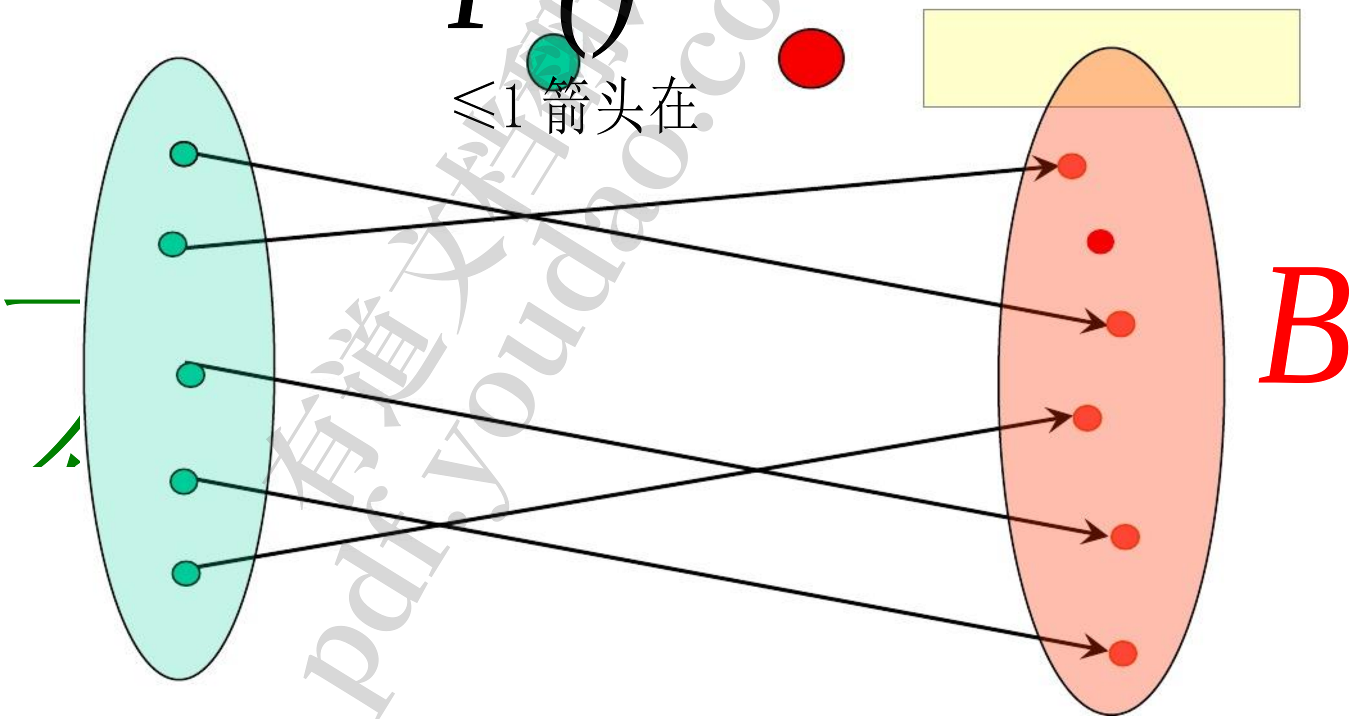
f(x) = Is-Prime(x)

domain =正整数 range = {T,F}

注射

f:如果没有两个输入有相同的输出，则 A→B 为单射。

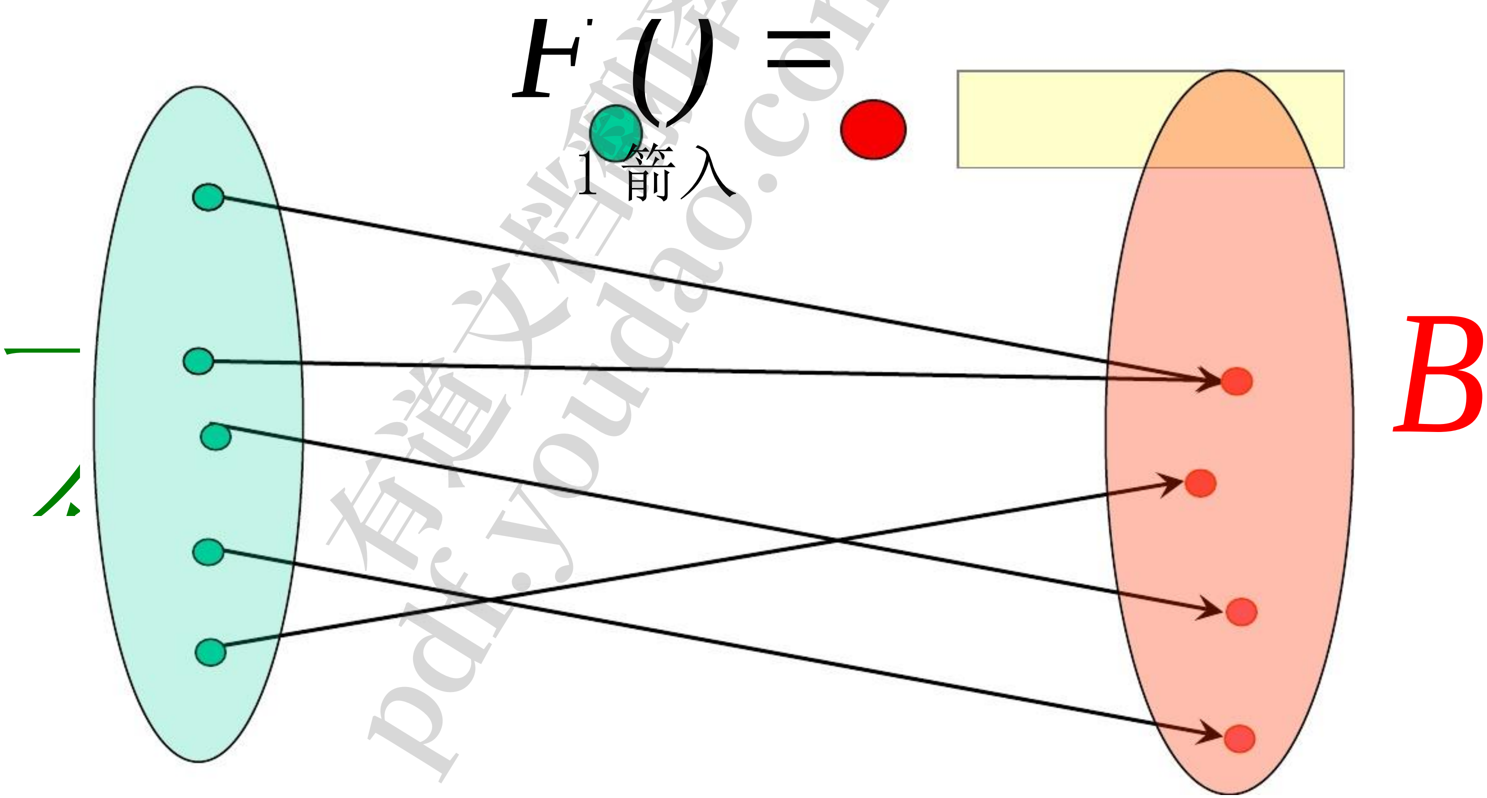
$F^{'}() =$



$|a| \leqslant |b|$

满射

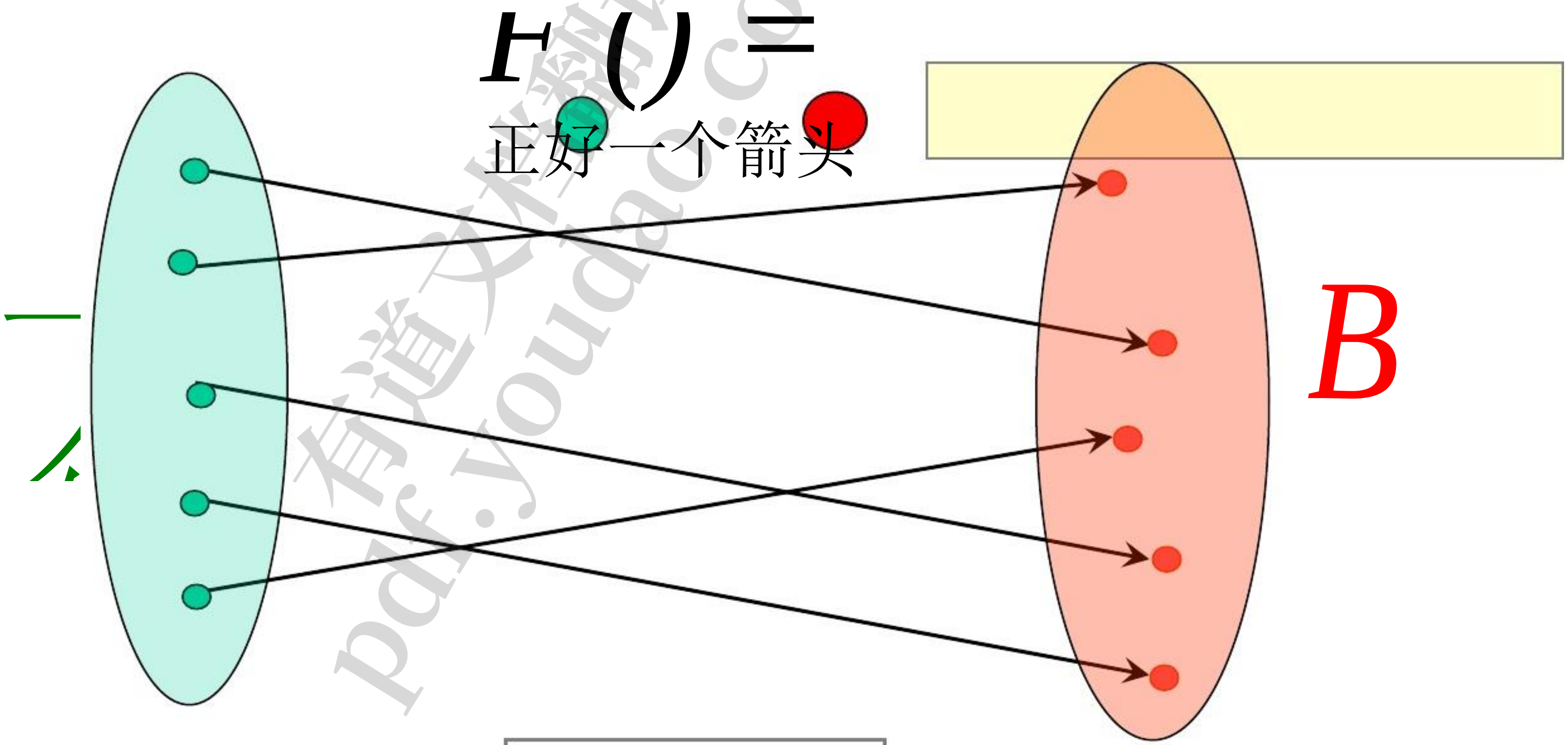
$f: A \to B$　　如果每个输出都是可能的，则为满射



$$|a| \geqslant |b|$$

双射

$f{:}A \to B$　　如果它既是满射又是单射，则为双射。



$|a| = |b$

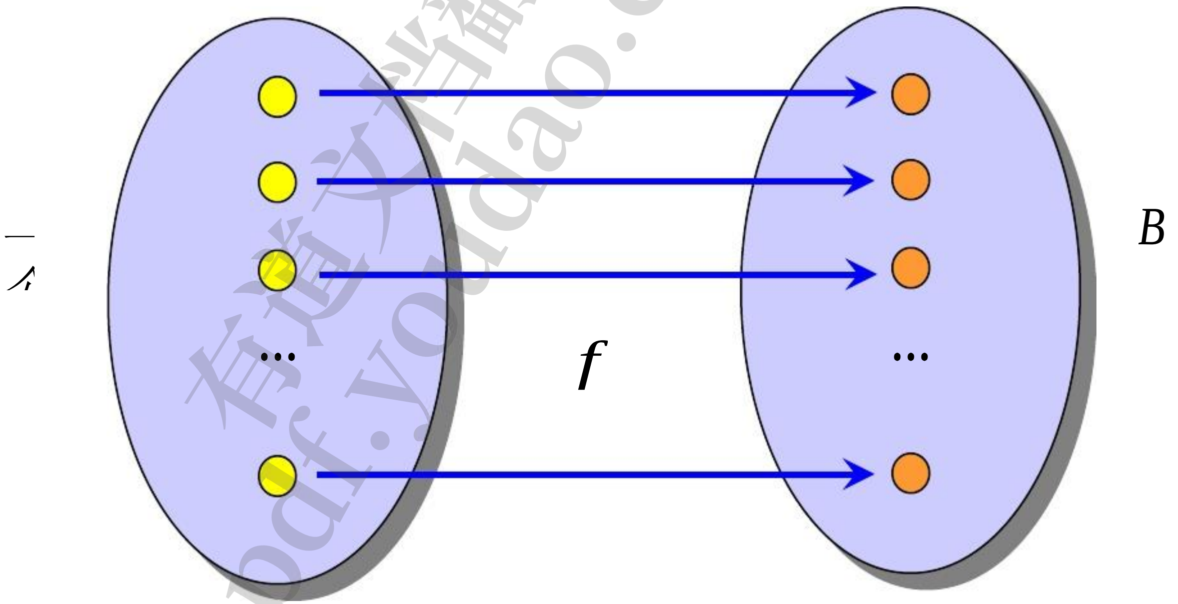
这节课

- 功能
- 双射规则
- 分割规则
- 加泰罗尼亚数字

计数规则:双射

如果 f 是从 a 射到 B 的双射，

那么| a | = |B|。



为了计算|A|，一种策略是定义 A 和 B 之间的双射，其中 B 更容易计数，我们可以计算|B|代替。

幂集

或者,

Pow(S) = S的幂集= S的所有子集的集合

for $S = \{a, b, c\}$,

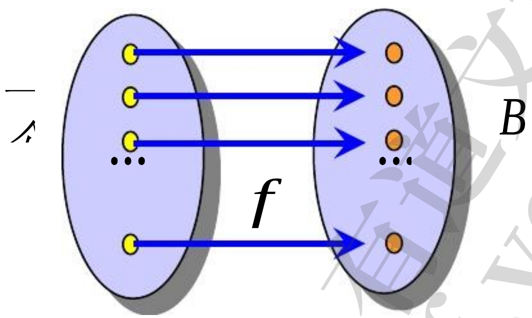
战俘(S) ={∅ ,{},{b}, {c}, {a、b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

设S有n个元素。如何计算|Pow(S)|?

双射:功率集和二进制字符串

S:{*年代* 1,年代 2,年代 3,年代 4,年代 5， …， s$_n$}

我们在子集和二进制字符串之间定义一个双射 f



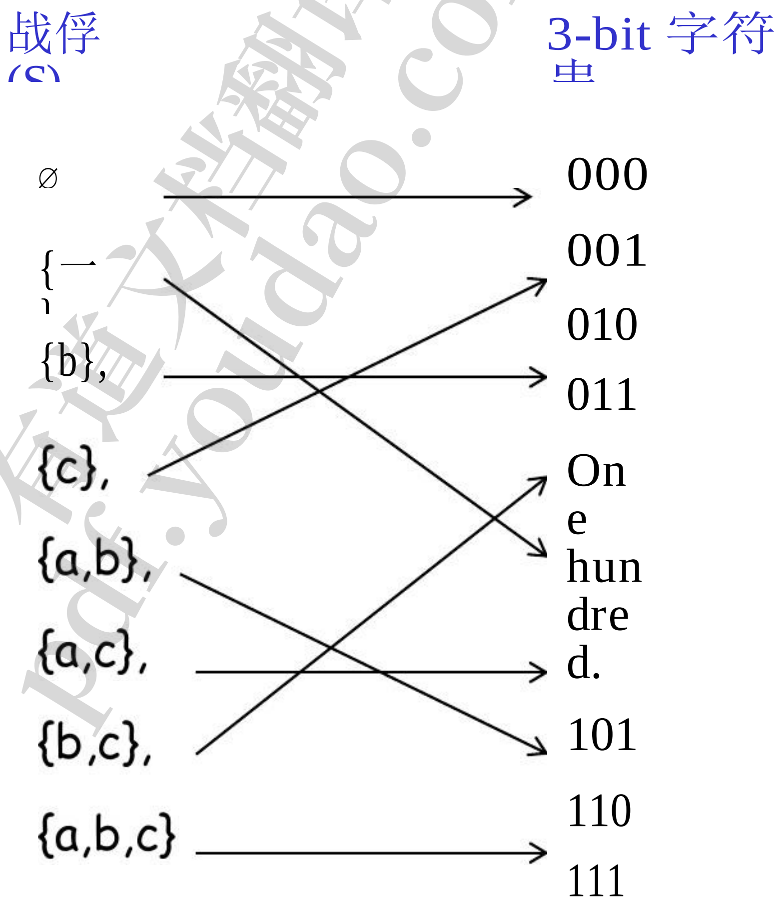
A: S 的所有子集的集合 B:所有 n 位字符串的集合

映射 f: A -> B 定义如下:

给定一个子集TE S，我们将f(T)定义为一个n位字符串，使得第i位等于1当且仅当S;等。

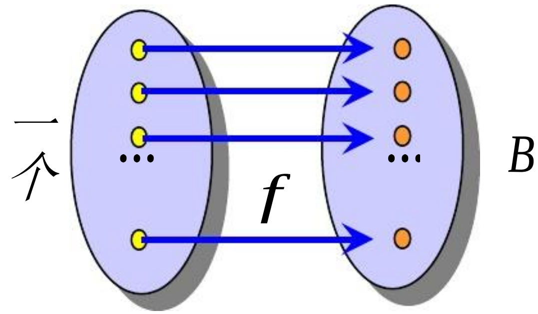
双射:功率集和二进制字符串

史 {a, b, c}



双射:功率集和二进制字符串

映射的定义如下:



子集:{年代 1， S3, s4, …,

字符串:10 0 11 10 0 s_n}…1

这个映射是双射的，因为

两个不同的子集被映射到两个不同的字符串(注入) 每个二进制字符串都被某个子集(满射)映射。

因此，|A| = |B|，其中|B|可以直接计算出来。

所以，|Pow(S)| = |n 位二进制字符串| = 2n

扑克手

一副牌有 52 张。每张牌都有花色和值。

4 适合 13 个值

(兑换率:所有信用卡的兑换率)

五牌抽牌是一种纸牌游戏，在游戏中，每个玩家最初拿到的是一手牌，是 5 张牌的子集。

有多少不同的手牌?

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

双射:满堂彩

满牌是一副牌有三张一值牌和两张另一值牌。

在Full Houses和序列之间有一个双射:

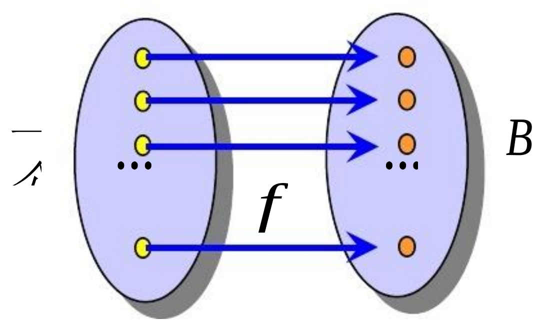
1. 三元组的值，有13种选择方式。
2. 三组的花色，可通过(3)种方式选择。
3. 配对的值，有12种选择方式。
4. 这对情侣的西装，可以在 $\binom{4}{2}$ 的方式。

{ 2♠, 2%。 2,强生公司, J♢ } ↔ (2, [, ,), j, [,])

{ 5♢, 5 ♠, 59. 7♡, 7♣ } ↔ (5, [, ,), 7, [,))

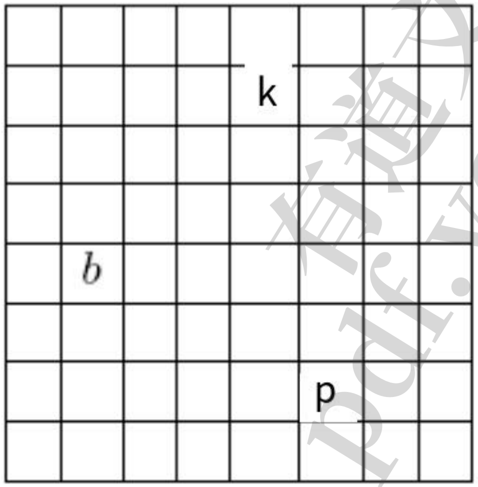
A:一套满牌

B:满足(1)-(4)的序列集合。

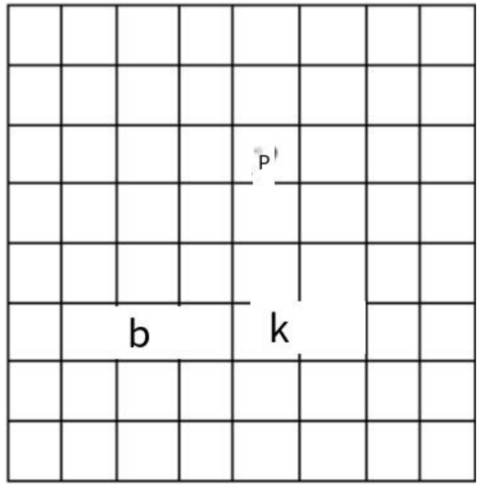


国际象棋问题

我们有多少种不同的方法可以把一个兵(p)，一个骑士(k)和一个主教(b)放在一个棋盘上，使没有两个棋子共用一行或一列?



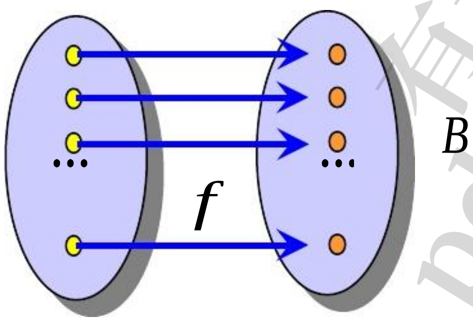
有效的



无效的

一个国际象棋问题

我们在构型到序列(r(p)， c(p)， r(k)， c(k)，r(k)， r(b)， c(b))之间定义一个映射 f，其中 r(p)，r(k)，和 r(b)是不同的行，c(p)， c(k)，和 c(b)是不同的列。

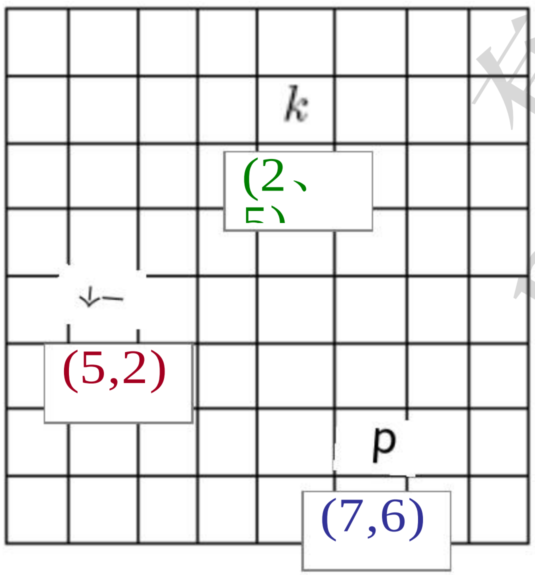


A ={3 块的配置}B ={6 个数字的限制性序列}

如果我们可以定义 a 和 B 之间的双射，并且也可以计算|B|，那么我们就可以确定| a |。

一个国际象棋问题

我们在构型到序列(r(p)， c(p)， r(k)， c(k)，
r(k)， r(b)， c(b))之间定义一个映射 f，其中 r(p)，
r(k)，和 r(b)是不同的行，c(p)， c(k)，和 c(b)是不
同的列。



$\xleftrightarrow{f}$ (7、6、2、5、5、2)

这是双射，因为:

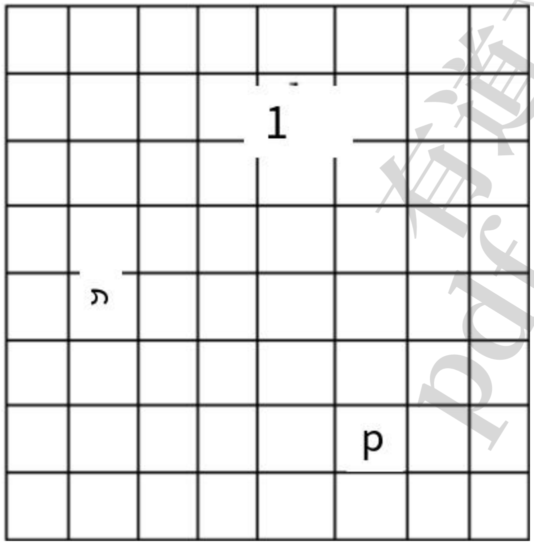
没 有 两 个 配 置 映 射 到 相 同 的 序 列 (注 入)

每一个这样的序列都被映射(surjection)

所 以 ， 要 计 算 象 棋 配 置 的 数 量 ， 我们可以计算限定的 6 个序列。

一个象棋问题

我们在构型到序列(r(p)， c(p)， r(k)， c(k)， r(k)， r(b)， c(b))之间定义一个映射 f，其中 r(p)， r(k)，和 r(b)是不同的行，c(p)， c(k)，和 c(b)是不同的列。



(7、6、2、5、5、2)

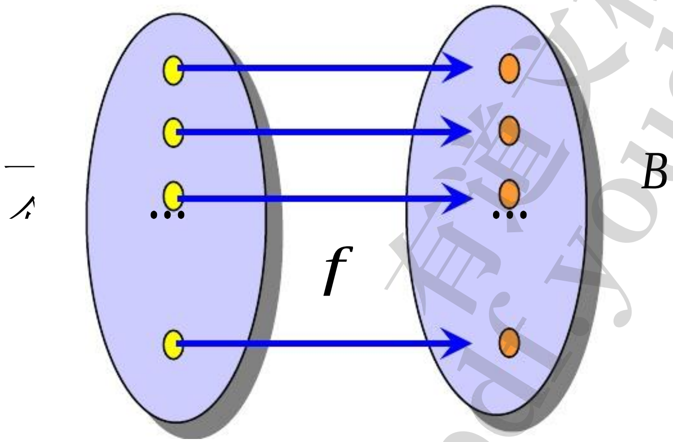
对于受限的 6 个序列集合，r(p)和 c(p)有 8 个选择，r(k)和 c(k)有 7 个选择，r(b)和 c(b)有 6 个选择。

因此，总配置数= (8x7x6)2 = 112896。

计数规则:双射

如果 f 是从 a 射到 B 的双射，

那么|a | = |B|



步骤:

1)想出 B;

2)提出 f。

3)显示 f 是双射。

4)计算|B|。

通常前两步比较困难。现在我们来看一些更有趣的例子。

计算甜甜圈的选择

甜甜圈有五种。

一打甜甜圈有多少种不同的选择方式?00(无)00000000000 巧克力柠檬糖釉面素

A::=一打甜甜圈的所有选择

提示:定义一个双射到一些位串!

计数甜甜圈选择

A::=十二个甜甜圈的所有选择 B::=所有 16 位二进制字符串，恰好有 4 个 1。

定义 a 和 B 之间的双射 f。

0011000000100100

00 1 1 000000 1 00 1 . 00

00 (没有) 000000 00 00

巧克力 柠檬 糖 上釉 平原

用 0 来代表甜甜圈，用 4 个 1 隔开，表示不同类型的甜甜圈。

计算甜甜圈的选择

A::=甜甜圈选择 | *B::=所有16 位字符串，有4 个1。*

12 巧克力 2	0 柠檬	0 糖	0 上釉	0 平原	→	0000000000001111
巧克力	3. 柠檬	0 糖	3. 上釉	4 平原	→	0010001100010000
2 个巧克力	0 柠檬	6 糖	2 上釉	2 平	→	0011000000100100
0 巧克力	0 柠檬	0 糖	0 上釉	12 个平原	→	1111000000000000

数甜甜圈的选择

C 巧克力，l 柠檬，s 糖，g 釉面，p 素映射到

0c10l10s10g10p

A::= 一打甜甜圈的所有选择 B::= 所有 16 位二进制字符串，恰好有 4 个 1。

这是一个双射，因为

• 两个甜甜圈选择映射到两个不同的字符串。(注入)(把甜甜圈选择想象成 5 个数字的序列(c,l,s,g,p)，考虑两个序列中第一个不同的数字)

• B 中的每一个字符串都对应一个有效的甜甜圈选择。(满射)

数甜甜圈的选择

C 巧克力，l 柠檬，s 糖，g 釉面，p 素映射到

0c10l10s10g10p

A::=一打甜甜圈的所有选择 B::=所有 16 位二进制字符串，恰好有 4 个 1。

$$|A| = B = \binom{16}{4}$$

计数循环

For i=1 to n do

对于 j=1 到 I
do

For k=1 to j do printf(" hello
world\n ");

这个程序将打印多少个“hello world”?

A::= all (i,j,k)-三元组

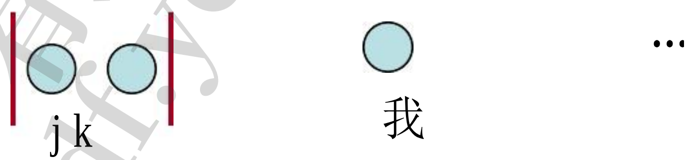
B::=所有包含 n-1 个 1 和 3 个 0 的字符串

计数循环

```
For i=1 to n do
        对于 j=1 到 I
        do
                For k=1 to j do printf(" hello
                        world\n ");
```

---

i,j,k 有 n 个可能的值。1 2 3 4 5…n



假设 n 个值有 n-1 个分隔符。如果 i=4, j=2, k=2，那么 2 中有两个 0,4 中有一个 0。

计数循环

For i=1 to n do

对于 j=1 到 I
do

For k=1 to j do printf(" hello
world\n ");

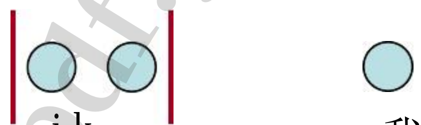
---

i,j,k 有 n 个可能的值。

1 5 ··· n

2 3. 4

···



j k 我

第一个零的位置对应 k 的值，第二个零的位置对应 j 的值，第三个零的位置对应 i 的值。

计数循环

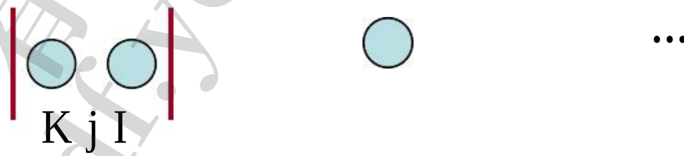
For i=1 to n do

对于 j=1 到 I
do

For k=1 to j do printf(" hello
world\n ");

---

i,j,k 有 n 个可能的值。1 2 3 4 5…n



这是一个(i,j,k)-三元组和 n-1 个 1 和 3 个 0 的字符串集合之间的双射(验证这个!)

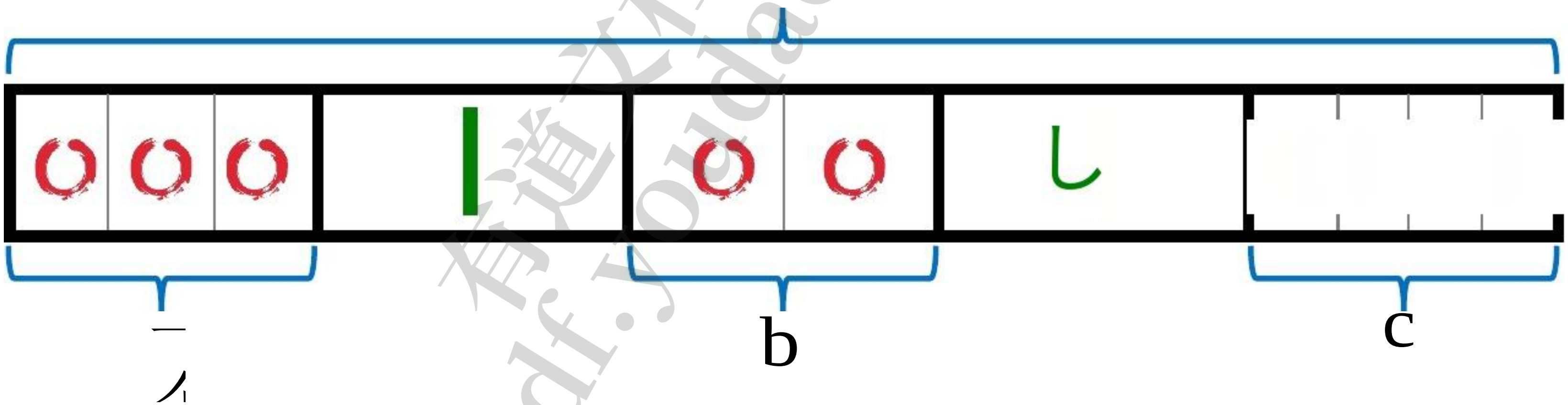
因此，程序准确地输出了“hello world” $\binom{m+2}{\text{我}}$ 次

计数非负整数解

普适集 U = {(a,b,c) | a+b+c=11}，设 N = |U|。

还记得怎么数 N 吗？

一共 13 箱



都放在上面的盒子里，并以。

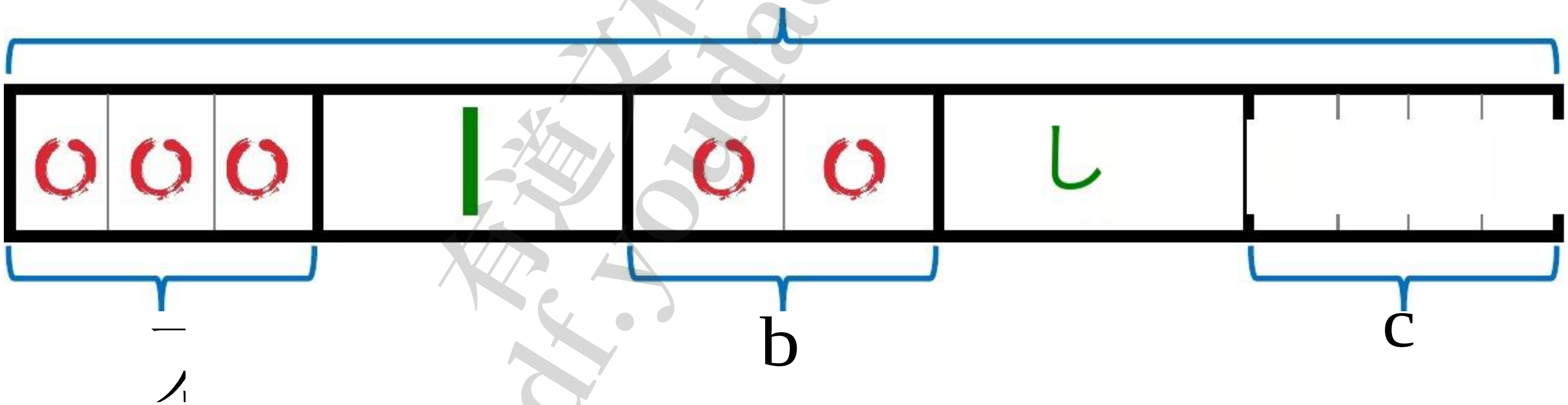
N= (11+3-1) 78.

计数非负整数解

普适集 U = {(a,b,c) | a+b+c=11}，设 N = |U|。

还记得怎么数 N 吗?

一共 13 箱



A::= A +b+c=11 的所有非负整数解 b::=所有 13 位二进制字符串，恰好有 11 个 0。

计数非负整数解

如果 $a,b,c \geqslant 1, a+b+c=11$ 有多少个整数解?

设$a=x+1$ $b=y+1$ $C=z+1$。

考虑方程$x+y+z=8$其中$x,y,z>=0$。

在a, bc的解和x,y,z的解之间存在一个双射(请验证这一点!)

因此，我们可以应用前面的方法来得出结论

答案是 (10)

计数非负整数解

如果 $a,b,c \geqslant 0, a+b+c \leqslant 11$ 有多少个整数解?

考虑方程 $a+b+c+d=11$ 其中 $a,b,c,d >= 0$。

a b c的解和a b c d的解之间存在一个双射。

因此，我们可以应用前面的结果来得出结论

答案是 $(14$

因为我们需要一个14位有11个0的字符串。

选择非邻接书

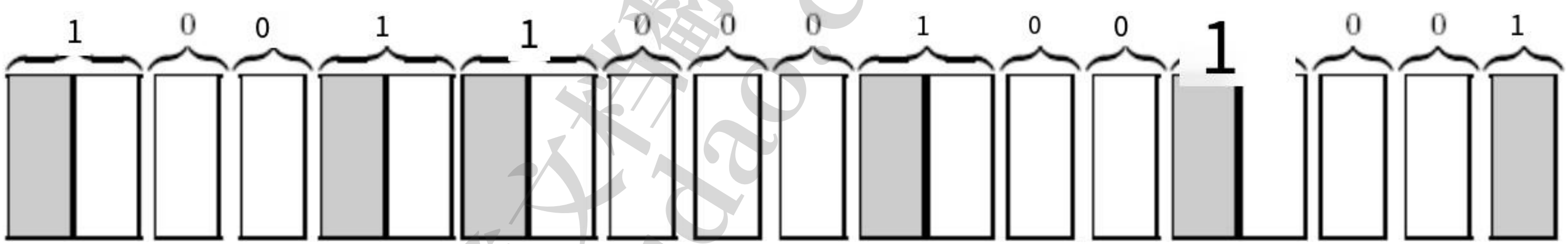
书架上一排有 20 本书。

从这些书中选择 6 本书，使相邻的书都不被选中，有多少种方法?

A::=从 20 本书中选择 6 本不相邻的书 B::=所有恰好有 6 个 1 的 15 位二进制字符串。

选择非邻接书

A::=从 20 本书中选择 6 本不相邻的书 B::=所有恰好有 6 个 1 的 15 位二进制字符串。

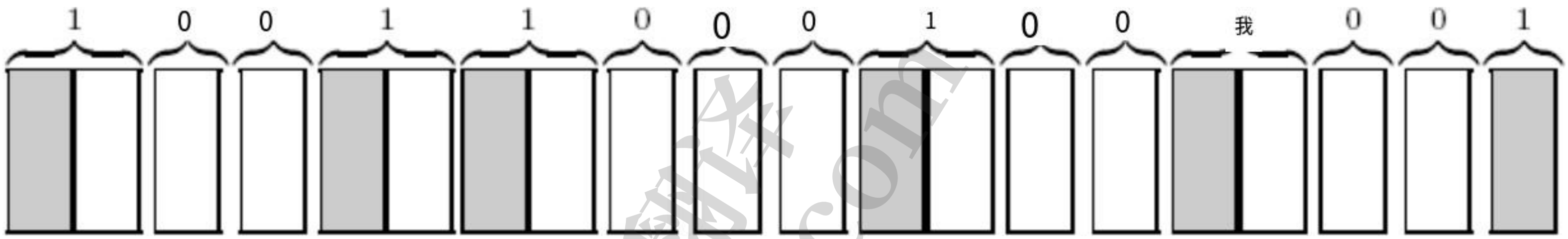


将每个 0 映射到一个非选中的书，前 5 个 1 分别映射到一个选中的书，后面跟着一个非选中的书，最后一个 1 映射到一个选中的书。

这是一个从 B 到 a 的双射，因为:

不同的字符串映射到不同的选择（注入） 每个有效的选择对应于 B 中的字符串（填充）

选择非邻接图书



A::=从 20 本书中选择 6 本不相邻的书 B::=所有恰好有 6 个 1 的 15 位二进制字符串。

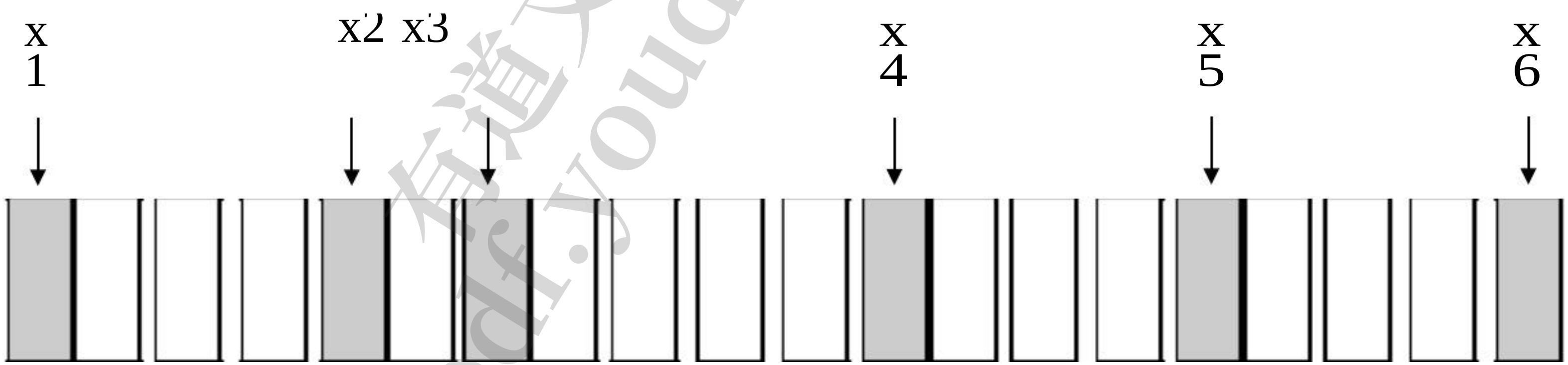
$$|A| = |B| = \binom{15}{6}$$

选择非邻接书

A::= 20 本书中 6 本非邻接书的所有选择 B::= x 的整数解集 $_1$+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ $x_6 \leqslant 20$

$x_1 \geqslant 1$ 和 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 2$。

这里,x_i 表示选择 x_{i}-前面选择的书之后的第一个书。



例如，这个配置对应于 $x_1 x = 1,_2 x = 4,_3 x = 2,_4 x = 5,_5 x = 4,_6 = 4$。不难看出这是双射。

选择非邻接书

A::= 20 本书中 6 本非邻接书的所有选择 B::= x 的整数解集 $_1$+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 ≤20

x_1 ≥1 和 x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 ≥2。

从 34 页我们学到了|B| = |C| for C::= x 的整数解集 $_1$+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6 ≤9 其中 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 ≥0。

从 35 页我们学到了|C| = |D| for D::= x 的整数解集 $_1$+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5+ x_6+ x_7 = 9

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 ≥0。

从 32 页我们得知|D| = $\left(9 + 79 - 1\right)$

练习

x 有多少个非负整数解 ${}_1+\ x_2+\cdots\cdots+\ x_m = n$?

x 有多少个整数解 ${}_1+ x_2+\cdots\cdots+ x_m = n$ 其中 $x_1 \geqslant$ 一 ${}_1$, x_2 $\geqslant$ 一 ${}_2$， …， $x_m \geqslant$ 一 ${}_m$ 吗?

x 有多少个整数解 ${}_1+ x_2+\cdots\cdots+ x_m < n$ where $x_1 \geqslant$ 一 ${}_1$, $x_2 \geqslant$ 一 ${}_2$， …， $x_m \geqslant$ 一 ${}_m$ 吗?

练习

这个程序将打印多少个“hello world”?

对于 i=1 到 n
做

对于 j=1 到 i-1
do

For k=1 to j-1 do printf(" hello world\n ");

x 有多少个非负整数解 $_1$+ x_2 = n 其中 x_1 <一个 $_1$ 和 x_2 <一个 $_2$ 吗?

(提示一:数补语)(提示二:包含-排除。)

这节课

- 功能
- 双射规则
- 分割规则
- 加泰罗尼亚数字

业务规则

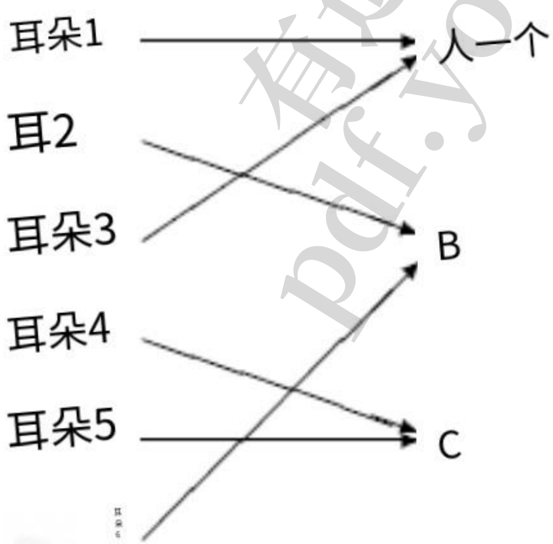
如果从 a 到 B 的函数是 k 比 1，

这意味着 B 中的每个元素都恰好被 A 中的 k 个元素映射

然后 $A = k B$

(这概括了双射规则。)

如



这是一个 2 比 1 的函数。

那么#耳朵= 2 × #人。

例子:握手引理

这是我们在图论中遇到过的东西。

重复计算!

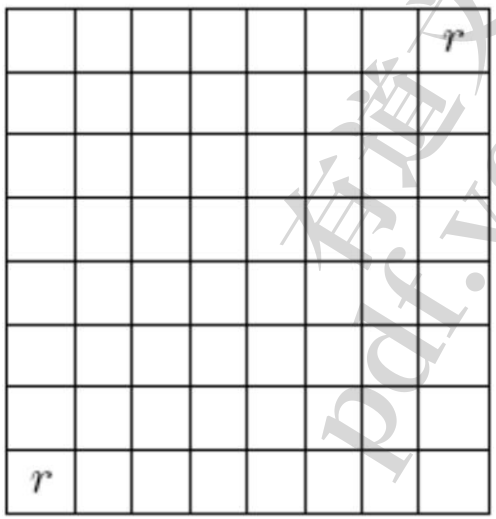
$$2|e| = \sum_{v \in V} \text{度}(v)$$

A:弧的集合。B:边的集合。

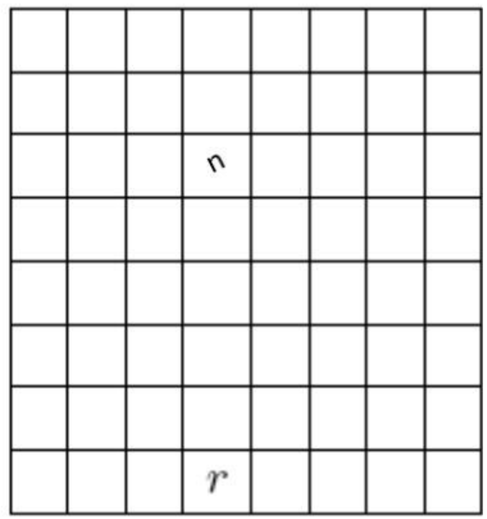
这个想法是为了表明从 A 到 B 的映射是 2 比 1 的，从而得出|A| = 2|B|。然后我们就可以计算出|A| × |B|。

另一个国际象棋问题

你可以用多少种不同的方法把两个完全相同的白嘴鸦放在一个棋盘上，使它们不共享一行或一列?



valid

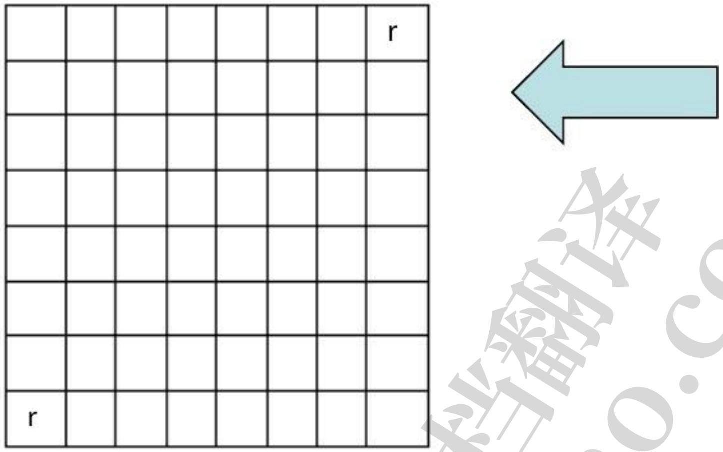


invalid

另一个国际象棋问题

我们定义了构型到序列(r(1)， c(1)， r(2)，c(2))之间的映射，其中 r(1)和 r(2)是不同的行，c(1)和 c(2)是不同的列。

A::=所有序列(r(1)，c(1)，r(2)，c(2))，r(1)≠r(2)和 c(1)≠c(2) B::=所有有效的 rook 配置



(1,8,8,1)和(8,1,1,8)映射到相同的配置。

这种映射是 2 比 1 的。

另一个象棋问题

A::=所有序列(r(1)，c(1)，r(2)，c(2))与 r(1)≠r(2)和 c(1)≠c(2) B::=所有有效的车构型

这个映射是 2 比 1 的。

$$|A| = 2b$$

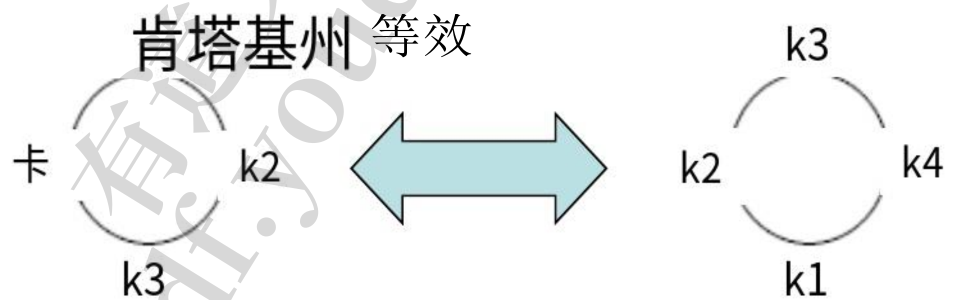
r(1)和 c(1)有 8 种选择，r(2)和 c(2)有 7 种选择，所以|A| = 8x8x7x7 = 3136。

因此，总构型数|B| = |A|/2 = 3136/2 = 1568。

圆桌

有多少种方法可以让 n 个不同的人坐在一张圆桌上?

如果一个座位可以通过轮换得到另一个座位，
那么两个座位就被认为是相等的。



圆桌

A::= n 个人的所有排列

B:=圆桌上所有可能的座位安排

按照排列中的顺序，将集合 A 中的每个排列映射到集合 B 中的圆形座位安排。

圆桌

A::= n 个人的所有排列 B::=圆桌上所有可能的座位安排

这个映射是 n-to-1。

一个=注

1

因此，座位安排总数为|B| = |A|/n = n!/n = (n-1)!

数子集

现在我们可以计算了 $\binom{n}{k}$ 更多的正式。

{1,2，···，13}中有多少个 4 子集?

让::=排列的{1,2,···,13}B:: = 4-

subsets{1,2,···,13}

映射 a1 a2 a3 a4 a5···a12 a13 到{a1,a2,a3, a4}(即从排列中取前 k 个元素)

有多少个排列映射到同一个子集?? ?

数子集

地图	A1 a2 a3 a4 a5…a12 a13 到{A1,a2,a3, a4}

一个 $_2$ 一个 $_4$ 一个 $_3$ 一个 $_1$ 一个 $_5$ …$_{12}$ 一个 $_{13}$ 也映射到{a$_1$,

一个 $_2$,一个 $_3$,一个 $_4$} a2 a4 a3 a1 a13 a12…a5 也是

4!　　9!

前四个元素的任意排序(4!其中的)，以及后九个元素的任意排序(9!Of them)将给出相同的子集。

所以这个映射是 4!　9 !比 1

一个 = 4 9 !B

数子集

让::=排列的{1,2,⋯,13}B:: = 4-subsets{1,2,⋯,13}

= 4 ! 9 !B

$$13 = ! = 4 ! 9 !B$$

13 ..13 ! 所以

4 个子集的数量是 4 4!9!

n 个元素集中 m 个子集的个数为

n m n !

$米!(n-m)!$

$::$

$=$

密西西比州

通过重新排列“MISSISSIPPI”中的字母有多少种不同的拼写?

设 A::={11 个字母的排列}

B::={通过重新排列“MISSISSIPPI”中的字母拼法}

有多少排列映射到相同的拼写?

密西西比州

4 !字母“S”的排列是相同的拼写!“I”的排列是相同的拼写!字母“P”的排列是相同的拼写

映射是 4!4!2!到 1，所以有 11!/4!4!2!不同的单词。

例子:20 英里步行

一个机器人正在计划一次 20 英里的步行，包括 5 次 1 英里的向北步行，5 次 1 英里的向南步行，5 次 1 英里的向东步行，5 次 1 英里的向西步行。

有多少种不同的行走方式是可能的?

这种走法和有 5 个 N, 5 个 E, 5 个 S, 5 个 W 的单词之间有一个双射。

这样的单词的数量等于重排的数量:

$$\frac{20\,!}{5!\,5!\,5!\,5!}$$

练习

(x+y+z)21 中 x7y9z5 的系数是多少?

有 12 个人。把他们分成 3 组，每组 4 人，有多少种方法?

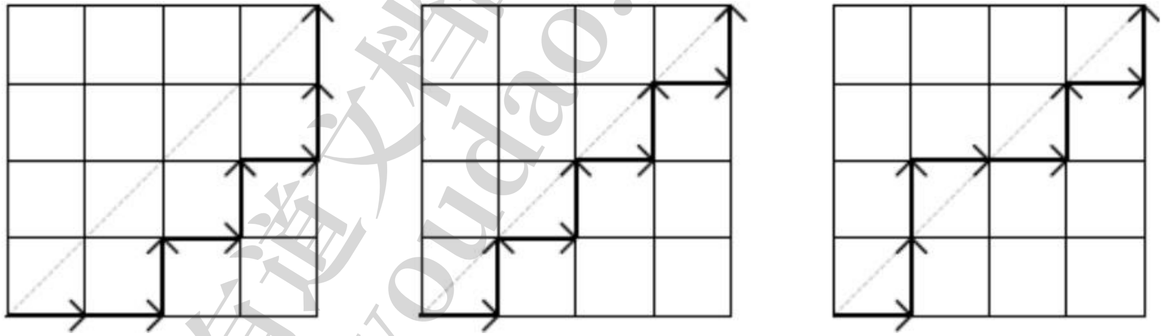
这节课

- 功能
- 双射规则
- 分割规则
- 加泰罗尼亚数字

单调的路径

从(0,0)到(n,n)的单调路径是由

“向右”移动(x 坐标+1)和“向上”移动(y 坐标+1)，从(0,0)开始，到(n,n)结束。



从(0,0)到(n,n)可能的单调路径有多少条?

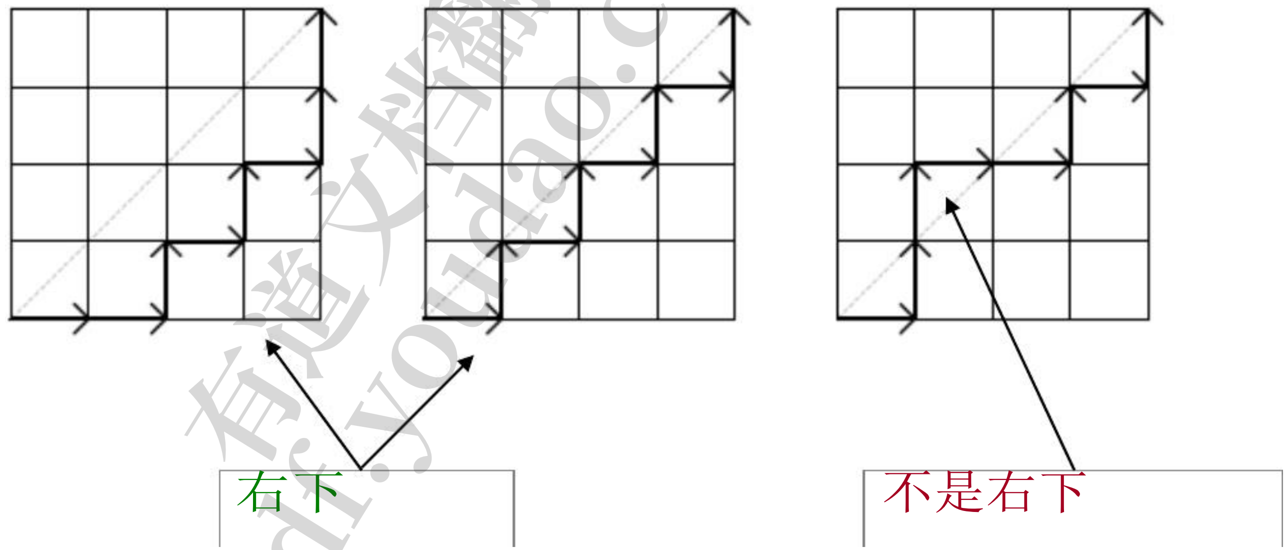
我们可以将“向右”移动映射为“x”，将“向上”移动映射为“y”。

单调路径和包含n个x和n个y的单词之间存在双射。

所以答案是 $\binom{2n}{n}$.

单调的路径

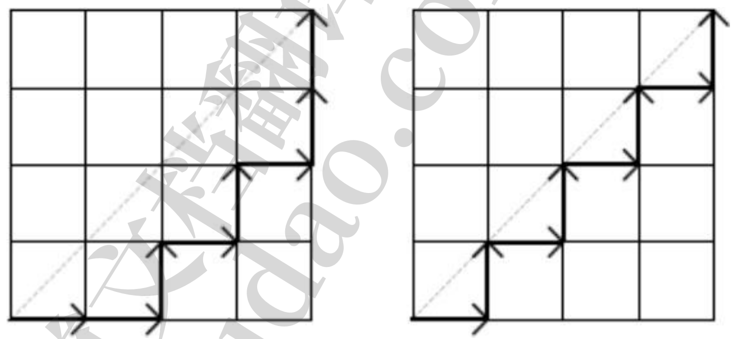
单调路径称为右下路径，如果任何点($x_i y_i$，路径上有 $x_i \geq y_i$。



从(0,0)到(n,n)可能的右下单调路径有多少?

单调的路径

从(0,0)到(n,n)可能的右下单调路径有多少?



我们仍然可以将一个“右”的移动映射为一个“x”，一个“上”的移动映射为一个“y”。在右下单调路径(a)和带有 n 个 x 和 n 个 y 的单词(B)之间存在双射，附加的约束是

字符串的初始段没有 y 多于 x 的。集合 B 被称为戴克词集合。

这是一个双射，但两个集合看起来都很难计数。

括号

n 对括号相加有多少种有效的方法?

例如:有 5 种有效的方法可以添加 3 对括号。

((()))   (()())   (())()   ()(())   ()()()

让 r_n 是 n 对括号相加的方法的个数。

如果左括号的个数从不小于右括号的个数，则配对是有效的。

还记得这个臭名昭著的加泰罗尼亚数 r_n 吗?

山脉

在一条水平线上，n 个向上笔画和 n 个向下笔画可以形成多少个“山脉”？

```
                                                          /
                                                          \
                              /\/\ /\/\ /\,    /           
   / \ / \          /\/                          \,    / \ \
    / \                                                
                 \/   \ ,
```

我们还不知道如何解决这四个问题，(A)右下单调路径，(B)戴克字，(C)有效括号，(D)山脉。

但我们可以证明这四个问题都有相同的答案，通过证明这些集合之间存在双射。

圆括号和单调路径

如果左括号的个数从不小于左括号的个数，则配对是有效的。

(() ()
())

⇕

xxyxyxyy

() () ()
()

1

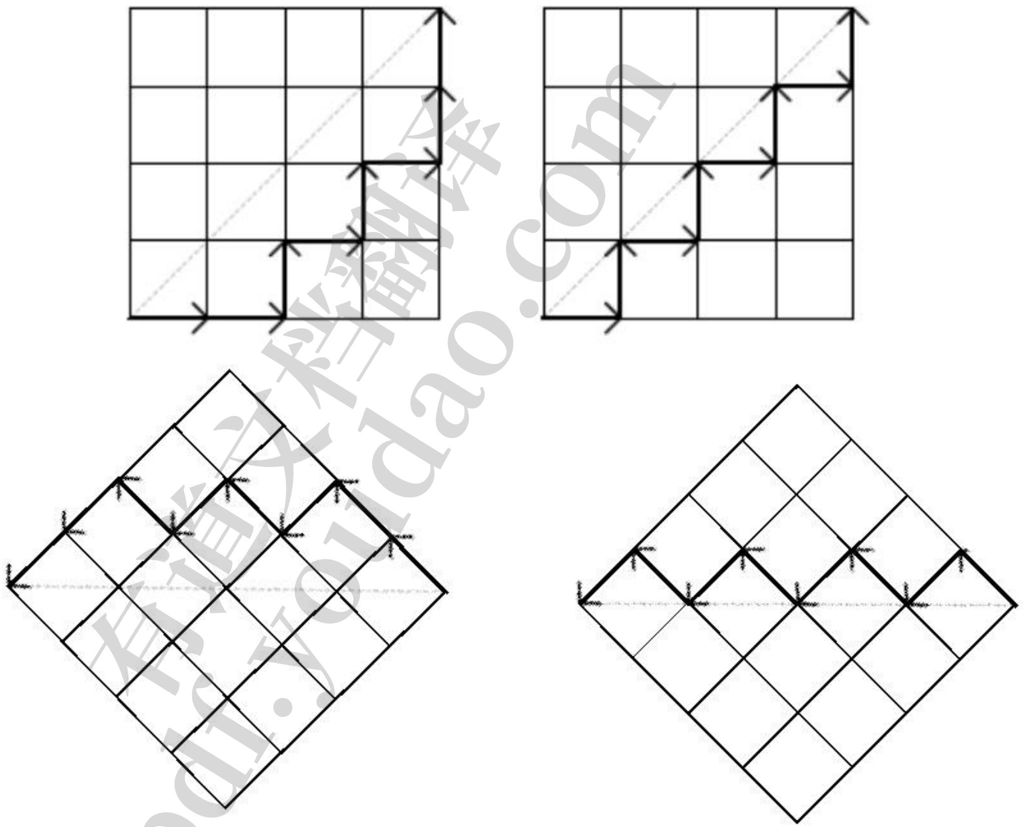
xyxyxyxy

我们可以映射一个“(”到一个“x”和一个“)”移动到一个“y”

这是(C)有效配对和(B)戴克词之间的双射。

在幻灯片 61 中，我们已经看到(a)右下单调路径和(B)戴克词之间存在双射。所以我们可以找到(a)和(C)之间的双射。

Monotone Paths and Mountain Ranges



通过“旋转”图像，我们看到一条不跨越对角线的路径
就像一座山没有越过水平线一样。

所以在(a)和(D)之间有一个双射。

加泰罗尼亚的数量

现在我们知道这四个集合的大小相等，

那是我们可爱的加泰罗尼亚数字

$$r_n \equiv \frac{1}{n/n+1}, / 2 n),$$

我们能找到这个公式的巧妙证明吗?

其中一个证明是通过双射规则。

验证计划

从(0,0)到(n,n)的右下单调路径数为 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

我们的计划是计算补数。

在 59 页幻灯片中，我们知道单调路径的数量是 $\binom{2n}{n}$

我们将证明非右下单调路径的数量为 $\binom{2n}{n-1}$ 这意味着右下单调路径的数量为

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

证明

非右下单调路径的个数为 $\binom{2n}{n+1}$

这个想法是定义一个双射之间

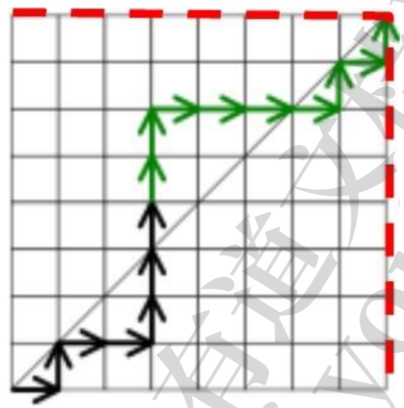
(A)从(0,0)到(n,n)的非右下单调路径集(B)从(0,0)到(n-1,n+1)的单调路径集

显然，|B| =□□2( ) 因为它等于有 2n 个字符的字符串集，

其中 n-1 个是 R(“右”)，n+1 个是 U(“上”)。所以，仍然需要定义(a)和(B)之间的双射。

注射

(A)中的每条路径都必须“穿过”对角线至少一次。我们先看第一个“交叉”，然后再“翻转路径”。



(图片来自维基)

在原来的路径中，在翻转点之前，我们有 So，在原来的路径中，在翻转点之后，我们有

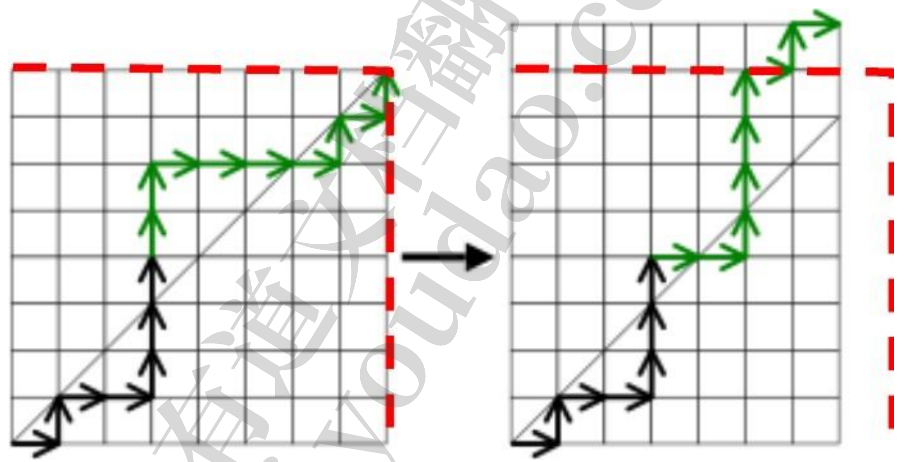
u = # r + 1。# r = # u + 1。

在新的路径中，由于我们翻转了后面的部分，我们有#U = #R + 2，

因此它是一条从(0,0)到(n-1,n+1)的路径。而且，这个映射是内射的。(为什么?)

满射

(A)中的每条路径都必须“穿过”对角线至少一次。我们先看第一个“交叉”，然后再“翻转路径”。



(图片来自维基)

为了检查地图是否满射，我们可以检查地图是否可逆。

给定一条从(0,0)到(n-1,n+1)的单调路径，它必须穿过对角线。(为什么?)看第一个这样的点，把它翻转一下，我们就得到了一条非右下的单调路径，从(0,0)到(n,n)，这就是映射的原像。

快速的总结

映射计数是一种非常有用的技术。

它对解决许多复杂的问题也很有效。

基本的例子通常将一个集合映射到一个正确定义的二进制字符串上。然后我们看看如何通过考虑 k-to-1 函数来推广这种方法。最后我们看到更复杂集合之间的映射。

总之，定义两个问题之间的映射(约简)的思想

大概是计算机科学中最重要的思想了。所以，一定要熟悉它。