

# Topology Notes

James R. Munkres & Simon Yu

2025 年 12 月 9 日

## Contents

<b>1 Set Theory and Logic</b>	<b>2</b>
1.1 集合论 . . . . .	2
<b>2 Topological Spaces and Continuous Functions</b>	<b>2</b>
2.1 点集拓扑的结构笔记 . . . . .	2
<b>3 Connectedness and Compactness</b>	<b>4</b>
<b>4 Countability and Separation Axioms</b>	<b>4</b>
<b>5 The Tychonoff Theorem</b>	<b>4</b>
<b>6 Metrization Theorems and Paracompactness</b>	<b>4</b>
<b>7 Complete Metric Spaces and Function Spaces</b>	<b>4</b>
<b>8 Baire Spaces and Dimension Theory</b>	<b>4</b>
<b>9 The Fundamental Group</b>	<b>4</b>
<b>10 Separation Theorems in the Plane</b>	<b>4</b>
<b>11 The Seifert-van Kampen Theorem</b>	<b>4</b>
<b>12 Classification of Surfaces</b>	<b>4</b>
<b>13 Classification of Covering Spaces</b>	<b>4</b>
<b>14 Applications to Group Theory</b>	<b>4</b>

# 1 Set Theory and Logic

## 1.1 集合论

整个集合论的逻辑思路大致如下：

集合  $set \rightarrow$  映射  $map \rightarrow$  序关系  $order \rightarrow$  格  $lattice \rightarrow$  全序  $totally-ordered$

我们直接定义研究对象——集合。

**Definition 1.1.** Element  $x \in or \notin X(Set)$ , 子集  $A \subset X$ ; 集合间关系：交并补差和；集合序列  $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$

接下来定义集合间关系——映射。

**Definition 1.2.** 将  $X$  中元素映射到  $Y$  上  $f : X \rightarrow Y$ . 逆映射；扩张 & 限制；像

注意！ $f : X \rightarrow f(X)$  这个映射一定为满射。

既然有了基本的工具，可以定义序关系（大小关系）

**Definition 1.3 (半序/偏序).** 集合中某些元素存在 or 可以赋予序关系如下

- 自反性： $a \prec a$
- 对称性： $a \prec b, b \prec a \Leftrightarrow a = b$
- 传递性： $a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$

则这个集合按关系  $\prec$  是一个偏序集(半序集)

在这些元素内，对这个序关系进行统一化，使得这些能够比较的元素之间，任意两个可以互相比较，构成格(lattice)。

**Definition 1.4 (格).** Suppose a partial ordered set  $P$  have that:

$$a \prec b, \forall a, b \in P$$

Then called  $a := a \wedge b$  下确界,  $b := a \vee b$  上确界. 集合  $P$  称为格.

继续加强这个序关系——在整个集合内完备化，使得每两个元素都可比较——全序的（线性序的）。

接下来给出 Zorn Lemma.

**Lemma 1.5 (Zorn 引理).** Suppose set  $P$  is a nonempty partial ordered set and every total ordered subset have a upper boundary in  $P$ , then  $P$  must at least has a Maximum Element.

*Remark.* Zorn 引理意指：我给定一个集合的序关系，诱导出的这每一个比较链，都不会飘到无穷之外，就算写不出来我们知道有一个最大元在更大的空间里存在。

# 2 Topological Spaces and Continuous Functions

## 2.1 点集拓扑的结构笔记

点集拓扑学的整体逻辑思路如下：

开集公理  $\rightarrow$  拓扑空间  $\rightarrow$  闭集 Def  $\rightarrow$  聚点和边界点  $\rightarrow$  闭包  $\rightarrow$  紧密性

接下来按此逻辑进行从公理到各个定义和定理的演绎。

**Definition 2.1 (拓扑/拓扑空间/开集公理).** 集合  $X$  上的一个拓扑 (topology) 是  $X$  上选出的一个子集族  $\mathcal{F}$ , 满足以下条件

- 1)  $\emptyset$  和  $X$  在  $\mathcal{F}$  中,
- 2)  $\mathcal{F}$  中子集的任意并在  $\mathcal{F}$  中,
- 3)  $\mathcal{F}$  中子集的有限交在  $\mathcal{F}$  中.

一个指定了拓扑  $\mathcal{F}$  的集合  $X$  称为一个拓扑空间 (topological space), 记为  $(X, \mathcal{F})$ .

*Remark.* 其实拓扑就是在集合里选择开集的取法。换言之，拓扑空间就是指定了什么是开集的空间，当然开集不能乱取，拓扑不能随意定义，限制如三条公理所示——**自身和空集、有限交、任意并**。

介绍两种极端情况。

**Example 2.1 (平凡拓扑).**  $\mathcal{F} := \emptyset, X$

**Example 2.2 (离散拓扑).**  $\mathcal{F} := \{A | \forall A \subset X. A$  的任意子集均属于  $\mathcal{F}$

规定了开集, [注意是我们规定的不是自然的], 接下来按补集定义闭集。

**Definition 2.2 (闭集).** 拓扑空间有一个开子集  $X \setminus A$ , 则称子集  $A$  为一个闭集.

由于定义完全是按照开集的补集定义的，根据开集公理以下定理是自明的。

**Definition 2.3 (闭集).** 以下集合是闭集:

- 1)  $\emptyset, X$  是既开又闭的,
- 2) 闭集的有限并是闭的,
- 3) 闭集的任意交也是闭集.

*Remark.* 注意一个集合不是一定是非开即闭的！显然有以下结论：

- 1) 平凡拓扑空间的两个集合都是既开又闭的,
- 2) 离散拓扑空间的[任意子集]均是既开又闭的.

- 3 Connectedness and Compactness**
- 4 Countability and Separation Axioms**
- 5 The Tychonoff Theorem**
- 6 Metrization Theorems and Paracompactness**
- 7 Complete Metric Spaces and Function Spaces**
- 8 Baire Spaces and Dimension Theory**
- 9 The Fundamental Group**
- 10 Separation Theorems in the Plane**
- 11 The Seifert-van Kampen Theorem**
- 12 Classification of Surfaces**
- 13 Classification of Covering Spaces**
- 14 Applications to Group Theory**