Functional Analysis Notes

Yosida Kosaku & Simon Yu

2025 年 12 月 9 日

Contents

0 预备知识

本章是预备章节，Yosida 试图以本章的非分析学内容为地基，搭建整个分析学大厦。包括以下四个方面：集合论、拓扑空间、测度空间、线性空间。

本章的逻辑链路大体理解如下：

集合论：给定最基础的研究对象集合和对象之间关系（映射/函数/变换），此外还有最关键的，能够运行分析学的基础条件——集合至少可以赋予偏序（半序）。
拓扑空间:
测度空间:
线性空间:

0.1 集合论

整个集合论的逻辑思路大致如下：

$$集合 set \to 映射 map \to 序关系 order \to 格 lattice \to 全序 totally-ordered$$

我们直接定义研究对象——集合。

Definition 0.1. Element $x \in or \notin X(Set)$，子集 $A \subset X$；集合间关系：交并补差和；集合序列 $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$

接下来定义集合间关系——映射。

Definition 0.2. 将 X 中元素映射到 Y 上 $f : X \to Y$. 逆映射；扩张 & 限制；像

注意！$f : X \to f(X)$ 这个映射一定为满射。

既然有了基本的工具，可以定义序关系（大小关系）

Definition 0.3 (半序/偏序). 集合中**某些元素**存在 or 可以赋予 序关系如下

- 自反性：$a \prec a$
- 对称性：$a \prec b, b \prec a \Leftrightarrow a = b$
- 传递性：$a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$

则这个集合按关系 $\prec$ 是一个偏序集 (半序集)

在 $\boxed{这些元素内}$，对这个序关系进行统一化，使得这些能够比较的元素任意两个可以互相比较，构成格 (lattice).

Definition 0.4 (格). Suppose a partical ordered set P have that:

$$a \prec b, \forall a, b \in P$$

Then called $a := a \wedge b$ **下确界**，$b := a \vee b$ **上确界**. 集合 P 称为**格**.

继续加强这个序关系——在整个集合内完备化，使得每两个元素都可比较——全序的（线性序的）。

接下来给出 Zorn Lemma.

Lemma 0.5 (Zorn 引理). Suppose set P is a nonempty partical ordered set and every total ordered subset have a upper boundary in P ,then P must at least has a Maxium Element.

Remark. Zorn 引理意指：我给定一个集合的序关系，诱导出的这每一个比较链，都不会飘到无穷之外，就算写不出来我们知道有一个最大元在更大的空间里**存在**。

0.2 点集拓扑的结构笔记

点集拓扑学的整体逻辑思路如下：

开集公理 $\rightarrow$ 拓扑空间 $\rightarrow$ 闭集 Def $\rightarrow$ 聚点和边界点 $\rightarrow$ 闭包 $\rightarrow$ 稠密性

接下来按此逻辑进行从公理到各个定义和定理的演绎。

Definition 0.6 (拓扑/拓扑空间/开集公理). 集合 X 上的一个拓扑 (topology) 是 X 上选出的一个子集族 $\mathcal{F}$，满足以下条件

1) $\emptyset$ 和 X 在 $\mathcal{F}$ 中,
2) $\mathcal{F}$ 中子集的任意并在 $\mathcal{F}$ 中,
3) $\mathcal{F}$ 中子集的有限交在 $\mathcal{F}$ 中.

一个指定了拓扑 $\mathcal{F}$ 的集合 X 称为一个**拓扑空间 (topological space)**, 记为 $(X, \mathcal{F})$.

Remark. 其实拓扑就是在集合里选择开集的取法。换言之，拓扑空间就是指定了什么是开集的空间，当然开集不能乱取，拓扑不能随意定义，限制如三条公理所示——**自身和空集、有限交、任意并**。

介绍两种极端情况。

Example 0.1 (平凡拓扑). $\mathcal{F} := \emptyset, X$

Example 0.2 (离散拓扑). $\mathcal{F} := \{A | \forall A \subset X\}.X$ 的任意子集均属于 $\mathcal{F}$

规定了开集,注意是我们规定的不是自然的，接下来按补集定义闭集。

Definition 0.7 (闭集). 拓扑空间有一个开子集 $X \backslash A$，则称子集 A 为一个**闭集**.

由于定义完全是按照开集的补集定义的，根据开集公理以下定理是自明的。

Definition 0.8 (闭集). 以下集合是闭集：

1) $\emptyset$,X 是既开又闭的,
2) 闭集的有限并是闭的,

3) 闭集的任意交也是闭集.

Remark. 注意一个集合不是一定是非开即闭的！显然有以下结论：

1) **平凡拓扑空间**的两个集合都是既开又闭的,
2) **离散拓扑空间**的 $\boxed{\text{任意子集}}$ 均是既开又闭的.

1 半范数

2 Baire-Hausdorff 定理的应用

3 正交投影及 F.Riesz 表示定理

4 Hahn-Banach 定理

5 强收敛和弱收敛

6 Fourier 变换和微分方程

7 对偶算子

8 预解式和谱

9 半群的分析理论

10 紧算子

11 赋范环和谱表示

12 线性空间中其他表示定理

13 遍历理论和扩散理论

14 发展方程中的积分