

1 Poisson 方程边值问题

题目：在圆域 $\rho < \rho_0$ 内求解 Poisson 方程边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 4ay, & (\rho < \rho_0) \\ u|_{\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\rho_0} = b. \end{cases} \quad (1.1)$$

参考答案：

解：令 $u = v + \frac{a}{2}(x^2 + y^2)y = v + \frac{a}{2}\rho^3 \sin \varphi$ ，则待求边值问题变为

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (\rho < \rho_0) \\ v|_{\rho=\rho_0} = b - \frac{a}{2}\rho^3 \sin \varphi \end{cases} \quad (1.2)$$

极坐标中的 Laplace 方程的一般解为：

$$\begin{aligned} v(\rho, \varphi) = & C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

在圆内， v 应处处有限，上式中 $\ln \rho$ 、 $\frac{1}{\rho^m}$ 项应去除，有

$$v(\rho, \varphi) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \quad (1.4)$$

代入边界条件有

$$C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) = b - \frac{a}{2}\rho_0^3 \sin \varphi \quad (1.5)$$

比较两边系数得：

$$\begin{cases} C_0 = b, \\ B_1 = -\frac{a\rho_0^2}{2}, \\ \text{其他 } B_m = 0, \\ \text{所有 } A_m = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

所以有

$$v(\rho, \varphi) = b - \frac{a\rho_0^2}{2}\rho \sin \varphi \quad (1.7)$$

整理得：

$$u(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi) + \frac{a}{2}\rho^3 \sin \varphi = b + \frac{a}{2}(\rho^2 - \rho_0^2)\rho \sin \varphi \quad (1.8)$$

2 柱函数大题

题目：求解如下柱外定解问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = A \cos \frac{2\pi z}{L}, & u|_{\rho=\infty} = \text{有限值} \\ u|_{z=0} = 0, & u|_{z=L} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

参考答案：

解：令 $u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 并分离变数得：

$$\begin{aligned} \Phi'' + m^2\Phi &= 0 \\ Z'' - \mu Z &= 0 \\ R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

由于问题与 φ 无关，所以有 $m = 0, \Phi = \text{const.}$ 上下底面具有齐次边界条件， $\mu > 0$ 的情况可以排除，因为 $\mu > 0$ 时

$$Z(z) = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

不满足上下底面齐次边界条件的非零解。

当 $\mu = -\nu^2 < 0$ 时，

$$Z(z) = \begin{bmatrix} \cos \nu z \\ \sin \nu z \end{bmatrix}, \quad R(\rho) = \begin{bmatrix} I_0(\nu\rho) \\ K_0(\nu\rho) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

由于上下底面的第二类齐次边界条件可知

$$Z(z) = \cos \nu z \quad (2.5)$$

本征值为

$$\nu = \frac{n\pi}{L}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

由自然边界条件 $u|_{\rho \rightarrow \infty}$ 有限，可知 $R(\rho)$ 中应排除 $I_0(\nu\rho)$ ，即

$$R(\rho) = K_0(\nu\rho) \quad (2.7)$$

由此可见

$$u_n = A_n K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right) \cos \frac{n\pi z}{L} \quad (2.8)$$

当 $\mu = 0$ 时，

$$Z(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}, \quad R(\rho) = \begin{bmatrix} 1 \\ \ln \rho \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

代入边界条件，可知 $Z(z) = \text{const.}, R(\rho) = \text{const.}$ ，即

$$u = A_0 \quad (2.10)$$

把上述解叠加起来：

$$u(\rho, z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0 \left(\frac{n\pi\rho}{L} \right) \cos \frac{n\pi z}{L} \quad (2.11)$$

代入柱侧边界条件，有

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0 \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \cos \frac{n\pi z}{L} = A \cos \frac{2\pi z}{L} \quad (2.12)$$

比较两边系数得

$$\begin{cases} A_2 = \frac{A}{K_0 \left(\frac{2\pi a}{L} \right)} \\ \text{其他 } A_n = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

由此可得

$$u(\rho, z) = \frac{A}{K_0 \left(\frac{2\pi a}{L} \right)} K_0 \left(\frac{2\pi\rho}{L} \right) \cos \frac{2\pi z}{L} \quad (2.14)$$

3 球函数大题

题目：半径 R 球外部，求解定解问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = -E \sin^2 \theta \left(\sin \varphi + \frac{1}{\tan \theta} \right) \cos \varphi, \\ u \Big|_{r \rightarrow \infty} = \text{有限值} \end{cases} \quad (3.1)$$

参考答案：

解：球坐标系中，Laplace 方程的一般解为：

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^l (A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{r^{l+1}} (C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

由自然边界条件 $u \Big|_{r \rightarrow \infty} = \text{有限值}$ ，可知含 r^l 的项必须舍去，即 $A_l^m = 0$ ， $B_l^m = 0$
于是有

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{r^{l+1}} (C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \quad (3.3)$$

由边界条件有

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{l+1}{R^{l+2}} (C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \\ & = -E \sin^2 \theta \left(\sin \varphi + \frac{1}{\tan \theta} \right) \cos \varphi = -\frac{E}{2} \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \frac{E}{2} \sin 2\theta \cos \varphi \\ & = -\frac{E}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi - \frac{E}{3} P_2^1(\cos \theta) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

比较系数有

$$\begin{cases} \frac{3C_2^1}{R^4} = \frac{E}{3} \\ \frac{3D_2^2}{R^4} = \frac{E}{6} \\ \text{其他} \frac{(l+1)C_l^m}{R^{l+2}} = 0 \\ \text{其他} \frac{(l+1)D_l^m}{R^{l+2}} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

从而得

$$\begin{cases} C_2^1 = \frac{ER^4}{9} \\ D_2^2 = \frac{ER^4}{18} \\ \text{其他} C_l^m = 0 \\ \text{其他} D_l^m = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

该定解问题的解为

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{ER^4}{9r^3} P_2^1(\cos \theta) \cos \varphi + \frac{ER^4}{18r^3} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi \quad (3.7)$$