

# 硕士学位论文开题报告

于向博

2025 年 11 月 26 日

## 目录

<b>1 课题来源及研究的目的和意义</b>	<b>1</b>
1.1 课题来源 . . . . .	1
1.2 研究目的与意义 . . . . .	1
<b>2 国内外研究现状及分析</b>	<b>3</b>
2.1 柔性结构振动建模与密频特性研究现状 . . . . .	3
2.2 柔性结构振动非线性动力学分析现状 . . . . .	6
2.3 动力学降阶与保结构控制研究现状 . . . . .	8
2.4 当前研究中存在的问题和难题、本研究定位 . . . . .	9
<b>3 主要内容及方案</b>	<b>10</b>
3.1 主要研究内容 . . . . .	10
3.1.1 柔性结构连续介质变分方法建模 . . . . .	10
3.1.2 柔性结构控制方程动力系统特征分析 . . . . .	10
3.1.3 柔性结构的降阶与保辛控制律设计 . . . . .	11
<b>4 已完成的学术研究</b>	<b>11</b>
4.1 柔性梁的有限变形动力学建模 . . . . .	11
4.2 柔性梁方程的线性退化验证 . . . . .	14
4.3 柔性梁的静态动力学与数值仿真 . . . . .	15
4.3.1 仅存在轴向力 $P$ 静态变形分析 . . . . .	17
4.3.2 同时含有横向力 $F$ 向力 $P$ 的静态变形分析 . . . . .	17
4.3.3 仅含有弯矩 $M$ 静态变形分析 . . . . .	18
4.4 柔性梁的线性双模态降阶及其动力系统分析 . . . . .	19

<b>5 研究方案</b>	<b>24</b>
5.1 柔性结构连续介质变分法建模 . . . . .	24
5.2 动力系统分析与非线性模态分析 . . . . .	27
5.3 降阶方法与保结构控制系统 . . . . .	29
5.4 进度安排 . . . . .	30
5.5 预期达到的目标和取得的研究成果 . . . . .	31
<b>6 为完成课题已具备和所需的条件和经费</b>	<b>31</b>
<b>7 预计研究过程中可能遇到的困难和问题，以及解决的措施</b>	<b>32</b>
<b>8 参考文献</b>	<b>33</b>

# 1 课题来源及研究的目的和意义

## 1.1 课题来源

本课题来源于中国航天科技集团公司五院第 502 研究所项目“空间密频挠性结构的主动振动控制研究”。

## 1.2 研究目的与意义

随着现代工程技术的不断发展，传统刚性构件逐渐暴露出质量过大、灵活性不足、适应性差等问题。在航天、机器人以及高端装备制造等领域，系统对结构的轻量化、柔性和可展开性的需求愈加迫切。与传统的高刚度、厚壁式构件相比，柔性结构以其质量轻、可展收、动态性能优良等特性，正在成为现代工程结构设计与应用的重要发展方向。尤其在航天器系统中，柔性结构已经不可替代地成为核心部件之一。

在航空航天领域，柔性结构的典型应用是空间飞行器上的可展开太阳翼。由于航天器发射受到运载能力的限制，太阳翼的翼板通常采用极为轻薄的有机薄板或复合材料，通过折叠、卷曲等方式紧凑收纳于运载火箭的整流罩中。在航天器进入轨道后，这些太阳翼会在复杂的空间环境中展开，并通过姿态调节机构不断修正方向，以获得最佳的日光条件和持续的能源供给。太阳翼的性能直接关系到空间站、卫星乃至深空探测器的任务寿命与稳定运行，是航天器动力系统中最关键的部件之一<sup>[1]</sup>。

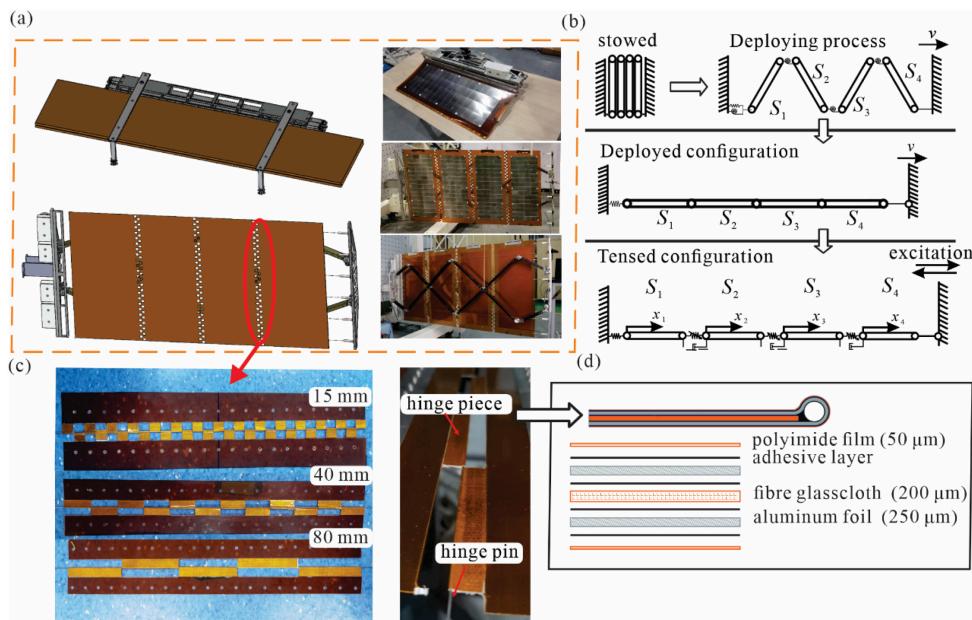


图 1-1 卫星太阳翼实物与模型<sup>[1]</sup>

除了航天器太阳翼，柔性结构在许多其他前沿技术领域同样发挥着重要作用。例如，在生物医学与人机交互领域，柔性可穿戴设备、植入式医疗器械和软体机器人<sup>[2]</sup>利用材料的柔顺性与可弯折性实现了传统刚性设备难以完成的功能；在机器人技术中，柔性机械臂通过轻量化与顺应性设计，有效降低了惯性力矩并增强了环境适应性，能够在空间

操作、救援探测等任务中展现出优异性能；在大型土木工程中，大跨度索桥与超高层建筑也常常借助柔性设计缓解风荷载与地震作用带来的不利影响<sup>[3]</sup>。这些实例表明，柔性结构已不仅是一个工程学趋势，更是跨领域的前沿研究热点。

然而，柔性结构的突出优势往往伴随着新的挑战。与刚性结构不同，柔性构件通常具有大尺寸、薄厚度和低刚度的特点。在空间太阳翼等应用场景中，其变形幅度往往超过了传统线性理论能够适用的范围。姿态调整、环境扰动（例如轨道微小冲击、太阳风压）都可能导致明显的非线性变形行为。因此，单纯依赖线性化的分析方法往往不足以准确描述其动力学特征。

此外，柔性引发的模态密集化现象导致振型控制更加困难。柔性结构由于刚度低、跨度大，其自然频率分布往往极为接近，即所谓“密频模态”特征。这意味着在实际运行过程中，多个模态会同时被激发，模态之间存在复杂的能量交换与耦合效应。这一现象在航天器太阳翼等超轻薄结构上尤为显著。例如，当太阳翼在姿态调整时产生大幅度低阶振动，高阶模态可能被非线性效应牵动而参与运动，导致能量在模态之间非平衡传递，从而引发结构响应超出预期<sup>[4]</sup>。

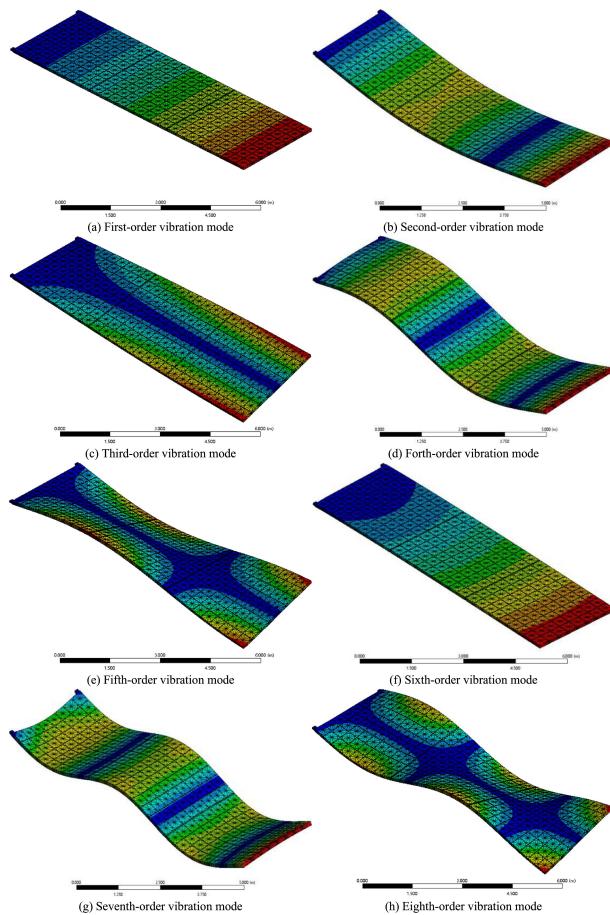


图 1-2 卫星太阳翼模态分析<sup>[4]</sup>

表 1.1 卫星太阳翼模态表<sup>[4]</sup>

模态阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
模态频率/Hz	0.4264	3.9610	5.4658	12.2480	17.0440	18.2930	24.8310	30.4390

然而，目前大多数工程控制器仍主要基于线性控制理论进行设计。现有的振动控制与模态分析方法往往依赖于线性模态截断法，即在有限元建模中只取少量低阶模态，忽略模态间的非线性耦合。这种方法虽然计算简便，但在密频模态下会显著失真，难以准确刻画系统的真实动力学行为<sup>[5]</sup>。特别是在航天器运行的长期工况中，忽视模态间非线性交互不仅会降低姿态控制的精度，还可能引起振动能量持续积累，从而影响任务寿命甚至引发结构失效。部分研究采用神经网络和模糊控制等方法，通过数据训练提高控制能力，但是没有从本质上解决模态耦合的问题。

因此，本研究的意义在于：

**理论层面：**通过从非线性动力学角度揭示柔性结构在密频模态下的动力学机理，有助于突破传统线性模态分析的局限，建立更为准确的结构建模与分析方法。

**工程层面：**能够为空间太阳翼、柔性机器人臂等典型结构的振动控制与寿命预测提供可靠理论依据，推动柔性结构在复杂环境中的高精度应用。

**学科交叉层面：**该研究不仅服务于航天工程中的关键需求，还为控制科学、非线性力学与结构动力学的发展提供新的研究思路，具有重要的学术价值和应用前景。

综上所述，柔性结构的研究背景体现了当代工程技术由“刚性”向“柔性”演进的必然趋势。面对柔性构件在大变形、密频模态与强非线性耦合效应下的动力学难题，探索新的理论分析框架与建模方法具有重要意义。这不仅是提升航天器等复杂工程系统性能的现实需求，也是推动力学与控制理论深度融合的重要科学问题。

## 2 国内外研究现状及分析

### 2.1 柔性结构振动建模与密频特性研究现状

柔性结构的振动建模并非一个孤立的新兴课题，而是植根于结构力学与应用数学数百年的发展历程。其发展脉络从最早的 Euler-Bernoulli 梁理论出发，经历了连续介质力学的奠基、有限元方法的普及，再到现代非线性动力学与复杂材料建模的兴起，体现出力学建模领域长期而旺盛的生命力<sup>[6]</sup>。

梁型结构 (beam-like structures) 在工程和科学的各个领域中广泛应用，这类结构的数学建模和数值分析方法引起很多研究者的兴趣<sup>[7]</sup>。梁理论是一个方向尺寸远大于另外两个方向尺寸的结构的一维数学模型。根据复杂性，梁理论主要分为以下三类<sup>[8-9]</sup>：(1) Euler-Bernoulli 梁理论或者经典梁理论，该理论只考虑轴向正应变，假设变形前垂直于参考轴的平面横截面在变形后仍然保持平面，并且垂直于变形后的参考轴，忽略横向剪切应变；(2) 剪切变形梁理论 (包括 Timoshenko 梁理论、一阶剪切理论、三阶剪切理论、

高阶剪切理论、层合剪切理论等), 该理论考虑了横向剪切应力所引起的面外翘曲; (3) 三维梁理论, 能够同时考虑面内翘曲和面外翘曲, 如图2-1所示。

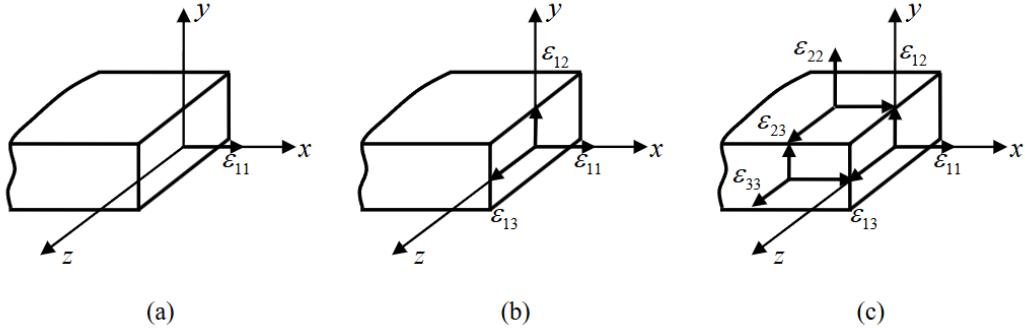


图 2-1 梁理论分类: (a)E-B 梁; (b)Timoshenko 梁; (c) 三维梁

Reissner<sup>[10]</sup> 在 1972 年的工作被认为是几何精确梁数学建模的开创性研究, 直到此时梁理论才能够处理任意的大位移和变形以及中等转动, 其工作促进了几何非线性梁模型的发展。随后, Reissner<sup>[11]</sup> 通过引入参考线的广义应变度量, 给出了一组空间梁结构静态大位移分析的方程, 这是一种直接的梁理论<sup>[12]</sup>。在 1981 年, Reissner<sup>[13]</sup> 提出了一种简化的旋转矩阵, 用于处理空间中非线性的三维旋转, 这是有限应变梁模型的第一个完整的理论。虽然该方法能够导出三维的应变-位形关系, 但是破坏了理论的几何精确性。Reissner 的有限应变理论是最重要的梁理论之一, 被许多学者采用并推广到二维和三维静力学及动力学问题。

在 Simo<sup>[14]</sup> 早期的工作中, 给出了一个 Reissner 梁的动力学公式, 其中使用中性轴的位置向量和在移动标架中表示的横截面旋转来描述梁结构的构形。在有限元法的框架下, Simo 和 Vu-Quoc<sup>[15]</sup> 实现了几何精确梁运动方程在静态和动态情况下的数值积分。在该论文中, 他们首次引入了迄今仍在使用的术语——几何精确梁 (geometrically exact beam), 用以表明 Reissner 梁理论对于任意大位移和转动是有效的。从 Simo 和 Vu-Quoc<sup>[15]</sup> 开始, 有限元法广泛用于研究几何精确梁理论, 并且在近几十年里, 很多学者在这方面做了大量工作<sup>[16-19]</sup>, 其根本区别主要在于旋转自由度的插值方法。

在高柔性梁结构的建模方面, Pai<sup>[20-22]</sup> 发展了几何精确的 Euler-Bernoulli 和 Timoshenko 梁结构的基于位移的有限元公式, 其中利用局部标架的坐标变换精确表示变形前后构形的关系。在公式中, 他们采用了 Jaumann 应变度量, 这是一种客观的、几何的、共旋的工程应变, 其方向沿着变形后坐标系度量, 使得由工程应力和应变度量获得的实验参数能够直接用于本构关系。吴根勇<sup>[23-25]</sup> 等人与 Pai 在几何非线性梁结构的非线性动力学建模与实验研究方面开展了合作, 并将其应用于柔性多体系统。

除了梁结构之外, 薄板 (thin plate) 与壳体 (shell) 结构在柔性航天器、微纳器件等场景中同样具有重要意义。薄板理论的发展大体经历了从 Kirchhoff 板理论到 Mindlin-Reissner 板理论, 再到现代几何精确板壳模型的演变过程, 其核心问题是如何在有限厚度和大变

形下保持几何与力学上的一致性<sup>[26]</sup>。

实际上，板的弯曲理论是根据 Kirchhoff 的细棒理论猜想提出的<sup>[27-28]</sup>，Love 根据三维弹性力学方程提出了壳的线性理论。非线性应变取决于展开式的一阶近似，这个理论源于弹性薄壳的小自由振动<sup>[29]</sup>。1940 年前后，为了解决这一课题，在 Kirchhoff-Love 假设的框架下，Chien<sup>[30-31]</sup> 提出了板壳的内在数学理论。Gol'denveizer<sup>[32]</sup> 讨论了薄壳弹性力学一般理论的适用性。Reissner<sup>[33]</sup> 通过假定位移场，将切应变引起的变形引入了弹性板的弯曲。对于线性理论的讨论，Naghdi 进行了系统性的总结和讨论<sup>[34]</sup>。

三维薄连续变形体可由二维有向的表面来描述。这个连续有向介质面的概念由 Duhamel<sup>[35]</sup> 先提了出来，E. Cosserat 和 F. Cosserat<sup>[36-37]</sup> 拓展了这个概念，提出了壳和细棒理论。这个概念为板壳理论的发展提供了基础。另外，板壳现存的近似非线性理论是由三维方程推导出来的。早期，人们假设应变很小但转动很大或一般大，并且假定它的线性本构方程是正确的。von Karman<sup>[38]</sup> 基于展开式的一阶近似拓展了 Love 的应变，提出了板的近似理论。另外，von Karman 和 Tsien<sup>[39]</sup> 用这个近似理论研究了在外压力作用下，薄壁球壳和圆柱壳的失稳。然而，Galerkin 讨论了板和细棒弹性平衡问题的级数解。Novozhilov 提出了薄壳稳定性的一般理论，并在 Galerkin 想法的引导下系统地提出了弹性力学的非线性理论<sup>[40]</sup>。继 von Karman 理论之后，Reissner 提出了包含剪变形在内的非线性板理论。Herrmann 推导出适用于小伸长、有剪切变形和适度大的转动状态下动态运动的板理论。Wang<sup>[41]</sup> 将横向的各向同性板的三维理论简化为二维理论。Hodges<sup>[42]</sup> 等人通过翘曲位移提出了几何非线性板理论。自从 von Karman 提出大变形情况下薄板的非线性理论以来，人们用这个理论研究了屈曲稳定性以及旋转盘的非线性振动。

事实上，板壳力学是在有向向量的 Cosserat 表面的 Lagrange 应变计算的基础上发展而来的。基于有向连续介质的概念，Naghdi 介绍的一般表达式为展开式的一阶近似，以及三维变形体的剪切变形角度。Luo<sup>[43]</sup> 建立了一般的板的近似理论框架。根据 Kirchhoff 假设，板的非线性近似理论被提了出来，它可以很容易的被简化为现有的理论。Luo 和 Mote 用更精确的近似板理论来研究旋转盘的非线性振动，并得到了其解析解。Luo 和 Tan 研究了旋转盘的稳定共振波动。Luo 和 Hamidzadeh<sup>[44]</sup> 用这个近似理论研究了轴向移动板的稳态运动以及屈曲稳定性，Luo<sup>[45]</sup> 研究了轴向运动板的稳定共振波以及混沌。

综上所述，柔性梁、板与壳体的理论发展表明，连续介质力学框架下的建模是揭示柔性结构几何非线性动力学特性的核心手段。从经典梁板理论到几何精确模型，再到有限元与非线性动力学的结合，学界的努力建始终围绕着如何在有限厚度、大位移、强耦合的条件下保持力学与几何的一致性。事实证明，唯有基于连续介质理论推导动力学方程，才能完整刻画柔性结构在大变形、失稳和复杂振动中的动力学行为。因此，本研究将以连续介质建模为基础，系统探讨柔性结构在密频模态条件下的非线性动力学特征。

## 2.2 柔性结构振动非线性动力学分析现状

柔性结构在服役过程中常常处于非线性状态。非线性来源既可能是几何非线性，如大变形与几何耦合，也可能是材料非线性，如复合材料、超弹性材料带来的复杂应力应变关系，还可能来自边界与约束条件的不确定性。航天器的太阳翼在轨道展开和姿态调整过程中，由于其超薄和长展弦比的特征，哪怕是微小的扰动也可能触发显著的几何非线性效应，如弯扭耦合和参数共振，从而对整体动力学稳定性产生深远影响。因此，对柔性结构非线性动力学的深入研究，不仅是确保结构安全可靠的根本要求，也是发展先进振动控制策略的动力学基础。当前，研究正从对单一非线性现象的解释，逐渐过渡到对全局动力学机制的系统性揭示，其中几何力学、非线性偏微分方程（PDE）分析和无穷维非线性动力学技术扮演了核心角色。

随着传统线性模态法的局限性被逐渐认识，非线性模态（Nonlinear Normal Modes, NNM）成为研究热点<sup>[46]</sup>。NNM 可以揭示非线性系统在大范围动力学演化中的本征运动模式，对于理解模态耦合、能量交换与长时间动力学稳定性具有重要意义。目前的研究趋势包括：基于解析摄动方法的近似 NNM 解法、数值延拓与数值流形方法的计算框架，以及非线性模态在能量定向传递（Energy Transfer）和局部振动（Localization）现象中的应用。

柔性结构振动问题的本质，在于对其固有运动模式的识别与分析。长期以来，线性模态分析（modal analysis）一直是结构动力学研究的核心方法，其理论基础是谱分析：对于有限自由度的线性系统，动力学方程可归结为有限维矩阵算子的特征值问题，其谱由一组离散的特征值与特征向量构成，分别对应系统的固有频率与模态形态。这一框架在工程中得到了广泛应用，并成为设计与控制的基础工具<sup>[47]</sup>。

然而，柔性结构由于长展弦比和超薄特征，往往更适合在连续介质力学的框架下建模，其动力学方程不再是有限维矩阵形式，而是偏微分方程（PDE）的算子形式。此时，模态分析的内涵便从有限维矩阵谱推广到无限维算子的谱：系统的固有模态对应于算子的特征函数，固有频率则是算子的谱值。事实上，PDE 的谱结构不仅决定了结构的动力学响应模式，也决定了不同模态之间能量传递与稳定性的潜在机制。

进一步地，当柔性结构处于大变形、耦合变形或受复杂约束条件作用时，几何非线性效应不可忽略。此时，系统的动力学方程演化为非线性算子的形式，其谱分析便超越了传统的线性本征值问题，而成为“非线性算子谱”的研究。这种推广不仅是数学上的形式延伸，更对应了物理层面上的必然性：柔性结构的几何非线性行为，其实可以视作非线性谱结构主导下的动力学演化。因此，从线性模态分析到非线性算子谱分析，构成了柔性结构动力学理论发展的自然延展。

在这一统一的谱分析语言下，非线性模态（Nonlinear Normal Modes, NNM）的提出具有里程碑意义<sup>[48]</sup>。NNM 是非线性系统的本征运动模式，它不再局限于单一频率的正弦响应，而体现为相空间中的周期轨道。换言之，NNM 本质上是非线性算子谱对应的一

类周期解，其存在性与稳定性决定了系统能否维持特定形式的有序运动。近年来，NNM的研究已逐渐形成完整体系：一方面，基于解析摄动方法的近似解法能够在弱非线性条件下给出NNMs的显式表达；另一方面，数值延拓与流形方法为强非线性系统提供了可靠的数值计算框架。同时，NNM在揭示能量定向传递（energy transfer）、局部化振动（localization）等现象中显示出独特优势，使其成为理解柔性结构长时间非线性演化规律的重要工具。图2-2是采用非线性模态分析精密冷轧系统非线性动力学行为，尤其是模态局部分岔行为和稳定性的一个案例<sup>[49]</sup>。

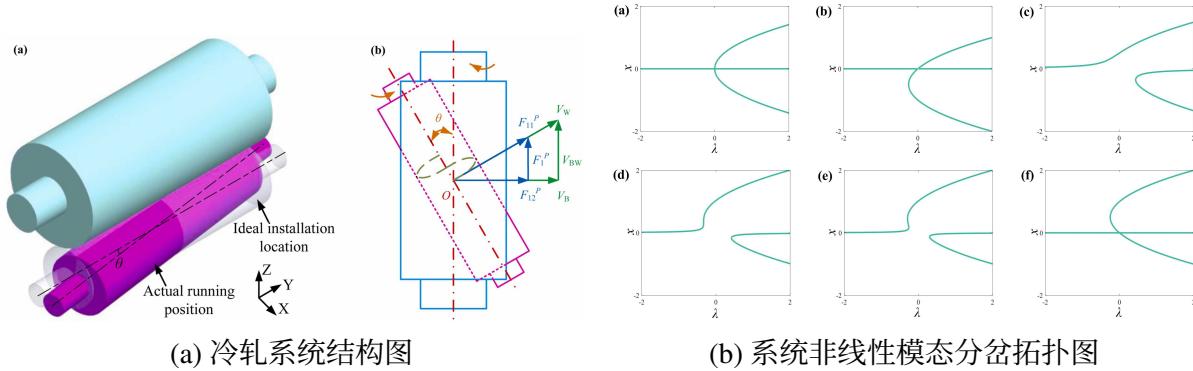


图 2-2 冷轧系统的非线性模态分析<sup>[49]</sup>

在更广泛的动力系统视角下，NNM的周期轨道性质意味着其与分岔与稳定性问题天然关联。周期解的产生、演化与消失，本质上对应于非线性谱结构的变化，而这正是分岔理论所关注的核心问题。柔性结构在服役环境下，往往受到周期激励、热场耦合及边界条件变化的影响，其动力学响应会随参数演化发生分岔现象，如内共振、颤振、弯扭耦合分岔等。这些分岔不仅决定了结构响应的多样性，也关乎工程应用中的稳定裕度与安全风险。因此，现代非线性动力学研究逐渐转向对全局动力学机制的揭示：利用数值延拓、Floquet理论与李雅普诺夫指数方法刻画周期运动的分岔与混沌，形成了从非线性谱结构到稳定性分析的完整链条<sup>[50]</sup>。

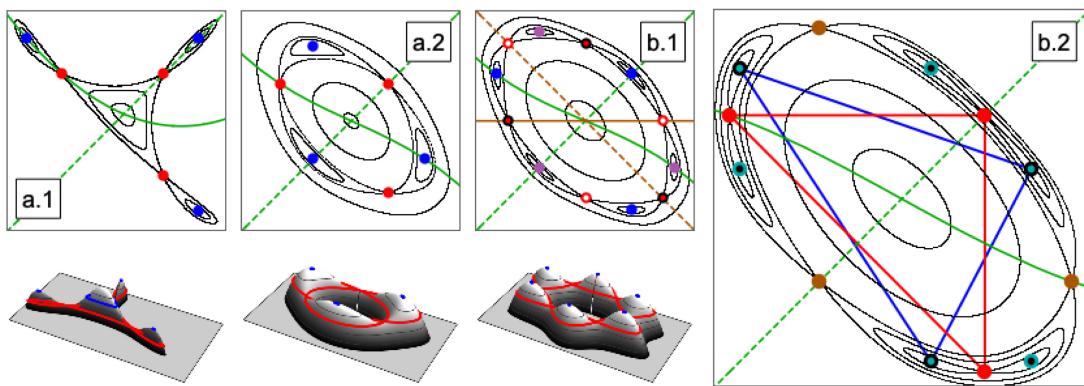


图 2-3 在辛空间内分析周期轨道对称性和分岔<sup>[50]</sup>

综上所述，柔性结构非线性动力学分析的演进脉络，可以视为一条从有限维线性谱，到无限维算子谱，再到非线性算子谱的逻辑路径。其理论内核是谱分析与动力系统的统

一：模态分析对应算子谱的解析，非线性模态对应相空间中的周期轨道，而分岔与稳定性研究则揭示了这些周期轨道的产生、演化与消失。这一框架不仅为理解柔性结构的复杂动力学提供了清晰的数学语言，也为后续基于非线性动力学机制的振动控制方法奠定了不可或缺的理论基础。

### 2.3 动力学降阶与保结构控制研究现状

柔性结构动力学的研究长期受制于模型的高维性。由偏微分方程直接描述的全阶模型虽能较为完整地反映动力学特征，但在数值计算与控制器设计中往往面临计算量庞大与能量保持困难的问题。因此，降阶建模始终是柔性结构动力学研究的核心环节。在现有文献中，相关方法大致可归为三类：模态基降阶、数据驱动降阶以及结构保持降阶。

首先，模态基降阶是最为传统的思路，即基于系统的模态展开选取主要模态加以截断。最常见的形式是基于线性模态的 Galerkin 截断，其优势在于物理含义清晰、实现简单。然而，由于这种方法本质上依赖于线性模态空间，其处理能力受到显著限制<sup>[51]</sup>。在非线性强耦合甚至密频模态条件下，线性模态不再能有效解耦，因而单纯的线性模态截断或与之同胚的近似方法，例如广义谐波平衡（Generalized Harmonic Balance）<sup>[52]</sup>，利用 Fourier 变换在模态空间里用多个线性模态成分拟合弱非线性模态，这难以准确捕捉系统的本质动态。

与之形成对照的是近年来快速发展的数据驱动降阶方法。典型代表包括 Proper Orthogonal Decomposition (POD) 与 Dynamic Mode Decomposition (DMD)，其基本思想是直接利用数值仿真或实验数据提取主导动态特征<sup>[53]</sup>。这类方法在处理非线性系统时表现出良好的适应性，且对复杂几何与边界条件具有较强的通用性<sup>[54]</sup>。然而，它们缺乏从第一性原理出发的理论保证，所得模型在长期预测与能量一致性方面往往存在不足，因而更适合作为工程近似手段，而非严格意义上的理论建模工具。

第三类方法强调结构保持，近年来受到越来越多的关注。这类方法的核心在于在降阶过程中保持原系统的几何与能量结构，例如基于哈密顿框架的降阶策略、辛几何下的离散化方法，以及以算子半群理论为支撑的抽象降阶框架。其优点在于能够在长期仿真中严格保持能量一致性与稳定性，从而避免传统数值方法可能引入的能量虚假发散或耗散<sup>[55]</sup>。然而，对于柔性结构动力学问题而言，高频模态所携带的能量往往可以忽略不计，因此在所有模态上一视同仁地实施保结构降阶并非总是必要的，这也限制了其在工程中的直接适应性。

由此可见，三类方法各有优势与不足。数据驱动方法强调实用与适应性，但缺少从物理机制出发的统一框架；模态基方法保留了物理可解释性，却难以处理复杂非线性；结构保持方法具备最强的理论完备性，却未必适合全部模态。针对这一缺口，本研究提出一种折衷思路：在模态空间中对低频主导模态实施结构保持的非线性截断，而对高频模态则予以舍弃，从而得到既能反映非线性本质，又在能量保持上具备几何一致性的降阶模型。这一思路在密频模态条件下尤为必要，因为低频模态之间的强耦合正是系统复

杂动力学行为的根源。

在控制研究方面，现有文献中仍以线性化控制为主流，包括全局线性控制器、分段线性控制器以及在状态空间局部切平面线性化后的控制策略。这些方法在工程上具有可操作性，但难以在强非线性和长时间演化条件下保持稳定。近年来也有部分研究尝试将非线性控制方法引入柔性结构，如自适应控制、滑模控制与能量整形等，但总体上仍缺乏与降阶建模充分结合的统一框架。

综上，动力学降阶与控制的研究正在逐步从经验性策略转向以动力学机制为核心的建模与控制。尤其在密频模态条件下，如何构建既能准确反映非线性低频模态耦合，又保持能量与几何一致性的降阶模型，成为未来发展的关键问题。

## 2.4 当前研究中存在的问题和难题、本研究定位

通过对国内外研究现状的梳理，可以看出：

- 1) 建模层面：现有建模方法大多仍以线性理论为基础，难以在密频模态与非线性耦合显著的场景下保持精度。有限元方法虽能提供高保真模型，但计算规模庞大，难以应用于实时控制与长期仿真。
- 2) 非线性分析层面：已有研究在非线性动力学理论上积累了丰富成果，但多数停留在理想化模型或单一模态非线性分析，对密频模态下的多模态耦合行为刻画不足。
- 3) 降阶与控制层面：现有降阶方法多数未能保持系统的哈密顿或辛结构，导致能量守恒特性难以维持，从而在长期动力学预测与控制中出现偏差。基于线性理论的控制器无法有效应对模态间能量传递和非线性效应。

因此，本研究的定位在于：

- 1) 基于连续介质力学与变分原理，建立柔性结构的非线性动力学模型，重点揭示密频模态下的非线性耦合机理；
- 2) 发展保结构的动力系统降阶方法，保持系统的能量与几何结构特性，提升长期仿真的可靠性；
- 3) 在此基础上，设计结构保持型控制器，实现对柔性结构振动的有效抑制与能量调控。

本研究的创新意义在于**打通非线性建模—结构保持降阶—保结构控制的完整链路**，为解决柔性结构在密频模态下的动力学与控制难题提供新方法。这不仅有助于提升航天器柔性部件的性能与可靠性，也为非线性动力学和控制理论的工程应用提供新的研究范式。

### 3 主要内容及方案

#### 3.1 主要研究内容

硕士论文以“力学建模-理论分析-降阶设计”为主线，围绕柔性结构振动的本质的动力学结构、非线性算子及其谱性质、能量通路等核心问题展开研究。提出基于非线性模态的降阶方式，分析其动力学行为。本课题将从**柔性结构的连续介质变分方法建模、控制方程动力系统特征分析、降阶和保辛结构控制律设计**三个方面开展研究，研究内容之间的逻辑关系如图3-1所示。

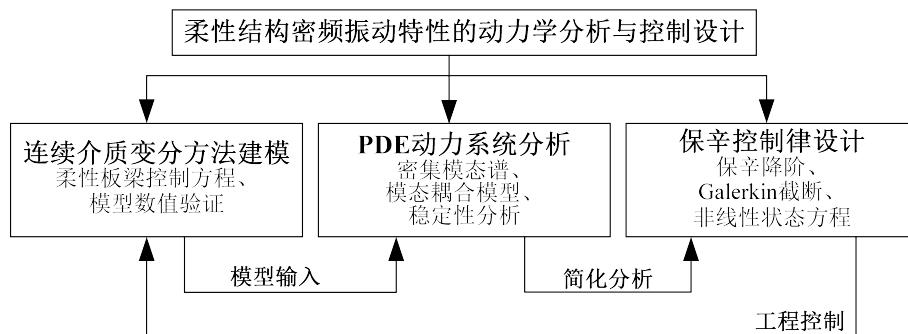


图 3-1 主要研究内容之间关系

##### 3.1.1 柔性结构连续介质变分方法建模

目标是获得能够反映柔性结构几何非线性与动力学特征的控制方程，为后续分析提供结构一致的控制方程。

主要内容为：

- 1) 基于结构几何特征和有限变形特性，选取合适的连续介质理论（如 Euler-Bernoulli 梁、Kirchhoff-Love 板模型），建立应变-位移关系与材料本构模型；
- 2) 以 Hamilton 原理为基础采用变分法推导柔性结构的控制方程及相应边界条件；
- 3) 在模型中明确体现物理模型的特征与非线性来源，确保数学模型与物理系统在动力学结构上保持一致，为后续降阶分析提供物理可信的基础。

##### 3.1.2 柔性结构控制方程动力系统特征分析

目标是揭示柔性结构动力学的本质特征，明确非线性算子作用机制及能量在模态间的传播路径。

主要内容为：

- 1) 将控制方程抽象为泛函空间中的非线性算子方程，分析其谱性质与密频模态生成机制；
- 2) 基于模态展开研究非线性项对不同频率分量的能量耦合路径，建立能量通路模型；
- 3) 分析平衡态与周期解的稳定性，识别系统可能出现的分岔类型，为降阶模型的动态预测提供理论依据；

### 3.1.3 柔性结构的降阶与保辛控制律设计

目标是在保证模态间耦合作用的能量通路结构不变的前提下，提取原控制方程中耦合行为较复杂的模态簇，截断为低维 ODE 系统，转化为一阶非线性状态方程组，实现非线性控制。

主要内容为：

- 1) 构造非线性模态的不变流形，结合谱分析与模态分解，将原 PDE 系统映射到有限维动力学系统；
- 2) 针对柔性结构的 PDE 模型，结合谱分析与模态分解，识别密频模态并建立弱非线性截断降阶模型；
- 3) 构造非线性状态方程组，采用非线性系统的控制方法（例如滑膜控制等），实现非线性系统的控制。

## 4 已完成的学术研究

### 4.1 柔性梁的有限变形动力学建模

研究一维柔性梁或弦在弹性限度内任意非奇异有限变形的动力学：

做以下假设：

- 1) 梁或弦的截面远小于长度（长细比  $\frac{L}{A} \geq 10$ ），不计梁的剪切变形；
- 2) 梁或弦材料仍在线弹性限度内；
- 3) 梁材料连续均匀无缺陷；

一维柔性梁的模型如图4-1所示

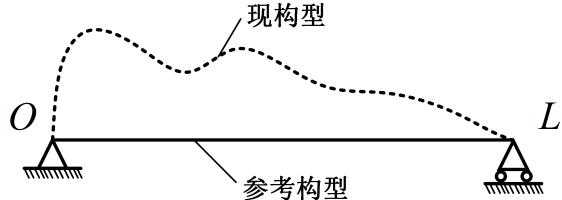


图 4-1 柔性梁模型

定义梁的参考构型  $\mathcal{B}_0$  为在参数  $x \in [0, L]$  上的 1 维流形。定义有限变形映射：

$$\varphi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \varphi(x) = \begin{bmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + u(x) \\ w(x) \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

引入变形梯度矢量

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(x + u(x)) \\ \frac{d}{dx}(w(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u_x \\ w_x \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

注意到  $\varphi_{,x}$  是  $\mathbb{R}^2$  中的矢量，将其与度量张量做张量积得到变形梯度张量  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \varphi_{,x} \otimes \mathbf{G}^1 \quad (4-3)$$

式中  $\varphi_{,x}$  ——  $\mathbb{R}^2$  中变形后的梯度矢量

$\mathbf{G}^1$  —— 参考构型中协变基矢量

显然，参考构型  $\mathcal{B}_0$  中，基本度量张量为

$$G_{11} = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_1 = 1 \quad (4-4)$$

现构型的度量张量（沿长度微元拉伸方向）为

$$g_{11} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = (\varphi_{,x} \cdot \varphi_{,x}) = (1 + u_x)^2 + w_x^2 \quad (4-5)$$

按现构型与参考构型的测度差构造 Lagrange 观点下的 Green 应变

$$E_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} - G_{11}) = \frac{1}{2}[(1 + u_x)^2 + w_x^2 - 1] = u_x + \frac{1}{2}w_x^2 \quad (4-6)$$

这个应变张量是坐标无关的，适用于线弹性下的任意有限变形。对于线弹性下的材料，定义势能线密度

$$U(u_x, w_x, w_{xx}) = \frac{1}{2}EA E_{11}^2 + \frac{1}{2}EI w_{xx}^2 \quad (4-7)$$

式中  $\frac{1}{2}EA E_{11}^2$  —— 梁由于变形导致轴向拉长累积的变形能

$\frac{1}{2}EI w_{xx}^2$  —— 刚度在弯曲变形下的弯曲势能

由各质点速度，定义动能线密度

$$T(u_t, w_t) = \frac{1}{2}\rho A(u_t^2 + w_t^2) \quad (4-8)$$

式中  $\rho$  —— 材料密度

$E$  —— 柔性梁材料的弹性模量

$A$  —— 柔性梁的截面积，变截面时为一已知函数

$I$  —— 柔性梁的截面惯性矩

系统的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L} = T - U \quad (4-9)$$

构造 Hamilton 作用量  $\mathcal{S}[u, w]$

$$\mathcal{S}[u, w] = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \mathcal{L} dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (T - U) dx dt \quad (4-10)$$

按最小作用量原理，对作用量  $\mathcal{S}$  做变分取驻值

$$\delta\mathcal{S}[u, w] = 0 \quad (4-11)$$

对 Green 应变对  $u$  和  $w$  做变分：

$$E_{11} = u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2 \quad (4-12)$$

$$\delta E_{11} = \delta u_x + u_x \delta u_x + w_x \delta w_x \quad (4-13)$$

对变分式做分部积分，组装作用量的变分为

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = & \iint \left[ -\rho A(u_{tt}\delta u + w_{tt}\delta w) + EA(u_{xx} + u_x u_{xx} + w_x w_{xx})\delta u \right. \\ & + EA\left(2u_x u_{xx} + \frac{3}{2}u_x^2 u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xx} w_x^2 + u_x w_x w_{xx}\right)\delta u \\ & + EA\left(u_{xx} w_x + u_x w_{xx} + u_x u_{xx} w_x + \frac{1}{2}u_x^2 w_{xx} + \frac{3}{2}w_x^2 w_{xx}\right)\delta w \\ & \left. - EI w_{xxxx}\delta w\right] dx dt \end{aligned} \quad (4-14)$$

分别提取出关于  $u, w$  的取驻值条件，构造 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E}u_{tt} - (u_{xx} + w_x w_{xx}) &= 0 \\ \frac{I}{A}w_{xxxx} + \frac{\rho}{E}w_{tt} + \left(u_{xx} w_x + u_x w_{xx} + \frac{3}{2}w_x^2 w_{xx}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-15)$$

式 (4-15) 是柔性梁系统的控制偏微分方程，在材料的线弹性限度内，对任意非奇异的有限变形有效。

为求解此控制方程，按简支梁物理模型，给定边界条件和初始条件

边界条件：在  $x = 0$  和  $x = L$  处有位移和转角条件

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0 \\ w(0, t) &= 0, & w(L, t) &= 0 \\ M(0, t) &= EIw_{xx}(0, t) = 0, & M(L, t) &= EIw_{xx}(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (4-16)$$

初值条件：在  $t = 0$  时有初始位移和初速度条件

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= \dot{u}_0(x) \\ w(x, 0) &= w_0(x), & w_t(x, 0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \quad (4-17)$$

至此，基于连续介质力学和变分法，给定柔性梁的任意有限变形的动力学控制微分方程，为后续理论分析和降阶控制、进一步的动力系统分析和推广做好了准备和基础。

## 4.2 柔性梁方程的线性退化验证

在节 4.1 中，由式 (4-15)，得到了柔性梁系统的控制偏微分方程组。逐项分析有限变形柔性梁和小变形柔性梁的区别，分析非线性来源和其几何和物理意义，验证有限变形与线性小变形控制方程的自洽性。

重述有限变形梁的控制 PDEs

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E}u_{tt} - (u_{xx} + w_x w_{xx}) &= 0 \\ \frac{I}{A}w_{xxxx} + \frac{\rho}{E}w_{tt} + \left( u_{xx}w_x + u_x w_{xx} + \frac{3}{2}w_x^2 w_{xx} \right) &= 0 \end{aligned}$$

式中  $u(x, t)$ ——轴向位移

$w(x, t)$ ——横向位移

梁的变形是一个轴向拉伸与弯曲变形的复合作用。接下来逐项分析各项的物理和几何意义。

- 1)  $\frac{\rho}{E}u_{tt}$ ,  $\frac{\rho}{E}w_{tt}$ : **惯性项**。质量引起，与线性与否无关。
- 2)  $u_{xx} + w_x w_{xx}$  (出现在  $u$ -方程中): **轴力项**。刻画轴向应力产生的对轴向运动的动力学影响。
- 3)  $\frac{I}{A}w_{xxxx}$  (出现在  $w$ -方程中): **弯曲刚度项**。来自于式 (4-7) 的弯曲势能，与线性与否无关。
- 4)  $u_{xx}w_x + u_x w_{xx} + \frac{3}{2}w_x^2 w_{xx}$  (出现在  $w$ -方程中): **几何刚度项**。梁由于拉伸或压缩产生的轴力影响了梁的弯曲刚度，体现弯-拉耦合和几何刚度效应。

在此实施线性化，考察方程能否收敛至一维弹性波方程（仅受  $u$  控制的线性 PDE）及 Euler-Bernoulli 梁的线性弯曲振动方程（仅受  $w$  控制的线性 PDE）。

引入一阶无穷小  $\varepsilon \ll 1$ ，以此为尺度，忽略高阶无穷小，有对等关系：

$$u_x \sim O(\varepsilon) \quad w_x \sim O(\varepsilon) \quad (4-18)$$

丢弃全部高阶项  $O(\varepsilon^n)$ , ( $n > 1$ ), 仅保留一阶(线性)无穷小项, 方程形式变为

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E} u_{tt} - (u_{xx} + w_x w_{xx}) &= 0 \\ \frac{I}{A} w_{xxxx} + \frac{\rho}{E} w_{tt} + \left( u_{xx} w_x + u_x w_{xx} + \frac{3}{2} w_x^2 w_{xx} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-19)$$

简化得到方程形式:

$$\frac{\rho}{E} u_{tt} = u_{xx} \quad (4-20)$$

$$\frac{I}{A} w_{xxxx} + \frac{\rho}{E} w_{tt} = 0 \quad (4-21)$$

其中, 式(4-20)为线性波动下的一维轴向弹性波方程; 式(4-21)为线性E-B梁振动方程。

综上, 柔性梁控制偏微分方程组式(4-15)在线性假设下非线性项解耦, 收敛于一维弹性波方程和线性E-B梁振动方程。方程在线性假设下的退化方程符合物理事实, 有限变形方程非线性项与小变形线性方程理论自洽。与经典线性理论兼容, 间接证明了柔性梁控制方程的正确性。

### 4.3 柔性梁的静态动力学与数值仿真

采用COMSOL软件分析柔性梁的静态几何非线性动力学行为, 对比理论解, 得到静态下的退化解, 验证有限变形控制方程静态大变形非线性项的正确性。

数值求解需要实际的物理模型。给正方形截面梁赋值具体输入参数:

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa} \\ \rho &= 7850 \text{ kg/m}^3 \\ d &= 15 \text{ mm} \\ L &= 25 \text{ m} \\ A &= d^2 = 2.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ I &= \frac{d^4}{12} = 4.2187 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \end{aligned} \quad (4-22)$$

求解静态大变形问题时, 动力学控制方程会失去惯性效应, 惯性项全部退化, 初值条件可全部置零, 方程中全部含时间项置0。由此, 控制方程组退化为仅关于x的耦合常微分方程组。

其形式为:

$$\begin{aligned} u_{xx} + w_x w_{xx} &= 0 \\ \frac{I}{A} w_{xxxx} + u_{xx} + u_x w_{xx} + \frac{3}{2} w_x^2 w_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (4-23)$$

式(4-23)是仅关于 $x$ 的耦合的非线性常微分方程组，是柔性梁在静态有限变形下的平衡微分方程。注意到，静态变形的控制方程不含有参数材料密度 $\rho$ 和材料杨氏模量 $E$ ，此二材料参数将在边界条件里与边界力共同出现。将式(4-23)常规一阶化为状态矩阵方程组。

设

$$y_1 = u \quad y_2 = u_x \quad y_3 = w \quad y_4 = w_x \quad y_5 = w_{xx} \quad y_6 = w_{xxx} \quad (4-24)$$

利用式(4-24)化简式(4-23)，将其改写为一阶常微分方程组，结果为

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -y_4 y_5 \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= y_5 \\ y'_5 &= y_6 \\ y'_6 &= -\frac{A}{I} \left( y_2 y_5 + \frac{1}{2} y_4^2 y_5 \right) \end{aligned} \quad (4-25)$$

式(4-25)是柔性梁静态有限变形下的状态方程组。

不失一般性，约束形式采用悬臂梁，在自由端加轴向力 $P$ 、横向力 $F$ 、弯矩 $M$ 。由连续介质力学原理，悬臂梁自由端加载可视为面力，仅作用于边界条件中。

边值条件：

1) 固定端 $x = 0$ 给定几何约束和转角约束：

$$\begin{aligned} y_1(0) &= u(0) = 0 \\ y_3(0) &= w(0) = 0 \\ y_4(0) &= w_x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

2) 自由端 $x = L$ 给定轴向力 $P$ 、横向力 $F$ 、弯矩 $M$ 时，有端面上的平衡关系。边界条件为：

$$\begin{aligned} y_2(L) &= u_x(L) = \frac{P}{EA} \\ y_5(L) &= w_{xx}(L) = -\frac{F}{EI} \\ y_6(L) &= w_{xxx}(L) = -\frac{M}{EI} \end{aligned} \quad (4-27)$$

在给定物理条件下求解边值问题。不失一般性，考查1. 仅存在轴向力 $P$ 的变形；2. 仅含有横向力 $F$ ；3. 仅含有弯矩 $M$ ；共三种工况下的静态大变形平衡问题。

### 4.3.1 仅存在轴向力 $P$ 静态变形分析

在悬臂梁端面仅含有轴向力  $P$  时, 定义拉力方向为正方向。显然,  $P \geq 0$  时的分析是平凡的, 任意柔性梁都将保持直线并拉长。接下来的分析关注  $P < 0$  的情况。

此为一个典型的压杆稳定问题 (buckling), 显然系统亦具有平凡解:

$$y_1 = \frac{P}{EA}x; \quad y_2 = \frac{P}{EA}; \quad y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0 \quad (4-28)$$

根据材料力学原理, 这个平凡解显然是不稳定的。在小扰动下, 横向变量  $y_3, y_4, y_5, y_6$  可能非零。于是, 压杆稳定问题等同于——在不同的系统: 不同的轴向压力  $P$  作用下参数: 横向变量  $y_3, y_4, y_5, y_6$  在扰动下产生的静态分岔分析。

将式 (4-25) 写成有限维非线性动力学的一般形式:

$$\mathbf{y}' = L\mathbf{y} + Q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + C(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}) \quad (4-29)$$

式中  $L$ —线性算子矩阵

$Q$ —双线性算子

$C$ —三线性算子

各个算子的张量形式为

$$L_i(\mathbf{y}) = L_i^j y_j; \quad Q_i(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = Q_i^{jk} y_j y_k; \quad C_i(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}) = C_i^{jkl} y_j y_k y_l, \quad i, j, k, l = 1 - 6; \quad (4-30)$$

采用对称张量, 其值为

$$\begin{aligned} L_1^2 &= L_3^4 = L_4^5 = L_5^6 = 1 \\ Q_2^{(4,5)} &= -\frac{1}{2}; \quad Q_6^{(2,5)} = -\frac{A}{2I} \\ C_6^{(4,4,5)} &= -\frac{A}{6I} \end{aligned} \quad (4-31)$$

### 4.3.2 同时含有横向力 $F$ 向力 $P$ 的静态变形分析

通过节 4.3.1 进行的压杆静态变形分岔分析得到, 在一阶模式下, 也即轴向压力  $P$  很小时, 分析结果线性化为 Euler 压杆稳定极限:

$$P = EIk^2 = EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (4-32)$$

在给定的物理条件式 (4-22) 下, Euler 极限为

$$P_{max} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = 3.330952007 \text{ N} \quad (4-33)$$

横向载荷不会影响一阶屈曲的产生，仅会影响其平衡方向。采用 COMSOL 软件计算此  $P < P_{max}$  时的工况，与 MATLAB 求解的微分方程解进行对比。计算的工况数据记录在表4.1里。

表 4.1 数值计算工况表

工况序号	轴向载荷 $P/N$	横向载荷 $F/N$
1	2	2
2	0	2
3	-1	1
4	-2	1
5	-2	2

注意到太阳的柔性梁跨度极大，即便是很小的横向载荷都会引起特别大的平衡位置改变。求解结果如图4-2所示。

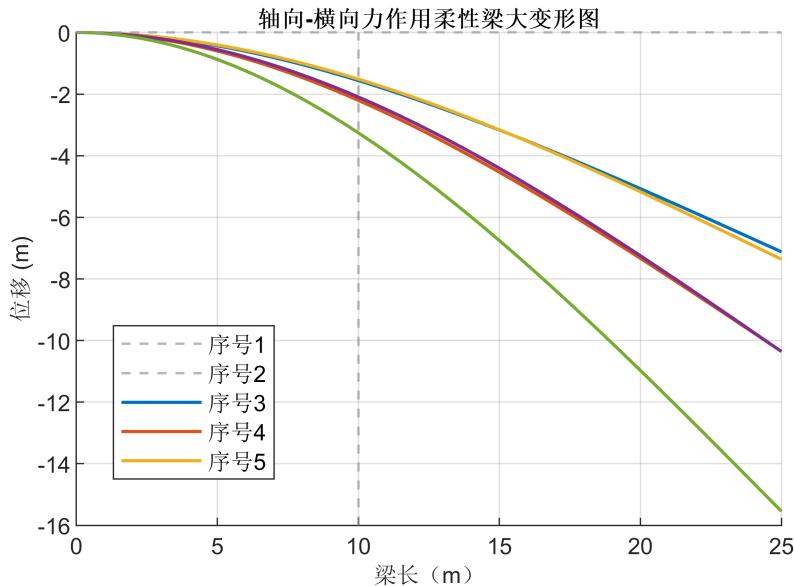


图 4-2 轴向-横向变形

由图4-2可以看出，在轴向载荷、横向载荷共同作用时，采用局部线性化逼近的有限元法和控制微分方程得到相同的结果。证明了控制微分方程的理论正确性。

### 4.3.3 仅含有弯矩 $M$ 静态变形分析

纯弯矩作用下的柔性梁仍然没有复杂的动力学行为，采用 COMSOL 软件计算，与 MATLAB 求解的微分方程解进行对比。计算的工况数据为  $M = 10, 20, 30, 40, 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求解结果如图4-3所示。

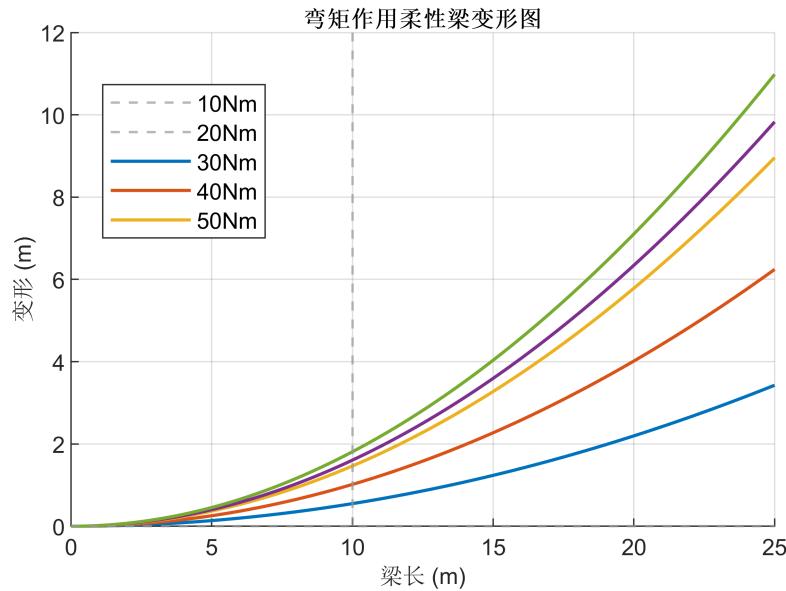


图 4-3 弯矩变形

由图4-3可以看出，在弯矩作用时，采用局部线性化逼近的有限元法和控制微分方程得到相同的结果。证明了控制微分方程的理论正确性。

由前述三类典型工况的推导可知，当柔性梁承受任意形式的轴向力、横向力与弯矩单独作用，或其二者乃至三者的组合作用时，其静力学平衡解在形式上均可由上述情形推广获得，因而静态变形的表达式与前述结果在结构上保持一致。

柔性梁的解析动力学模型与数值结果与有限元结果一致，且在静态大变形下具有更好解析理论结果，连续介质方法建模柔性结构的动力学模型具有合理性和优越性。

#### 4.4 柔性梁的线性双模态降阶及其动力系统分析

在线性化系统中，模态函数构成严格正交基，能够在质量和刚度内积下完全分解系统。然而，在非线性 PDE 中，非线性项通常破坏这种严格的正交性，导致不同模态之间出现耦合能量交换。用线性模态作为展开基时，这种非正交效应会体现在截断后的低阶 ODE 中的交叉非线性项中，虽然能捕捉主要耦合机制，但并非全信息保真。

在节 4.1 中，由式 (4-15)，得到了柔性梁系统的控制偏微分方程组，采用线性正交模态函数进行 Galerkin 截断，仅保留三个模态，分析其降阶动力系统。

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E} u_{tt} - (u_{xx} + w_x w_{xx}) &= 0 \\ \frac{I}{A} w_{xxxx} + \frac{\rho}{E} w_{tt} + \left( u_{xx} w_x + u_x w_{xx} + \frac{3}{2} w_x^2 w_{xx} \right) &= 0 \end{aligned}$$

典型地，选用两端简支的边界条件：

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w(L, t) = 0 \quad \text{无横向位移} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \quad \text{无轴向位移} \\ w_{xx}(0, L) &= w_{xx}(L, t) = 0 \quad \text{转矩为 0} \end{aligned}$$

取简支梁的正交振动基函数：

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4-34)$$

这些振动基函数在  $[0, L]$  上是正交归一化的，也即  $\int_0^L \phi_m \phi_n dx = \delta_{mn}$ ，记  $k = \pi/L$ ，由微分关系

$$\phi'' = -k^2 \phi, \quad \phi''' = k^4 \phi, \quad \int_0^L (\phi')^2 dx = k^2$$

不失一般性，仅截断轴向位移场  $u(x, t)$  的第一阶模态  $U_1$  和横向位移场  $w(x, t)$  的前两阶模态  $W_1$  和  $W_2$ ：

$$u(x, t) = U(t) \phi_1(x), \quad w(x, t) = W_1(t) \phi_1(x) + W_2(t) \phi_2(x) \quad (4-35)$$

其中  $\phi(x) = \phi_1, k = \pi/L$ 。

接下来进行 Galerkin 投影。对第一个（轴向）方程，用测试函数  $\phi(x)$  乘并在 0 到  $L$  上积分；对第二个（横向）方程同理。利用  $\phi'' = -k^2 \phi$  与边界条件消掉若干项。计算基本空间积分张量

$$J_{rm} := \int_0^L \phi_1^2 \phi'_r \phi'_m dx, \quad T_{irmn} := \int_0^L \phi_i \phi'_r \phi'_m \phi_n dx \quad (i, r, m, n \in \{1, 2\}) \quad (4-36)$$

由式 (4-34)，

$$\phi'_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} k \cos(kx), \quad \phi_k^2 (\phi'_k)^2 = \frac{4k^2}{L^2} \sin^2(kx) \cos^2(kx) = \frac{k^2}{L^2} \sin^2(2kx) \quad (4-37)$$

得到（其余下标均为 0）

$$J_{11} = \frac{\pi^2}{2L^3}, \quad J_{22} = \frac{4\pi^2}{L^3}, \quad T_{1111} = \frac{\pi^2}{2L^3}, \quad T_{2222} = \frac{2\pi^2}{L^3}, \quad T_{2211} = \frac{\pi^2}{L^3}, \quad T_{1221} = \frac{4\pi^2}{L^3} \quad (4-38)$$

令

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{L}, \quad \Omega_1^2 = \frac{EI}{\rho A} k_1^4, \quad \Omega_2^2 = \frac{EI}{\rho A} k_2^4, \quad \omega_u^2 = \frac{E}{\rho} k_1^2, \quad \alpha := \frac{E}{\rho} \frac{\pi^4}{L^5} \quad (4-39)$$

综上，最终得到截断的非线性模态方程。完整保留全部几何非线性的三条二阶方程为

$$\begin{aligned} \ddot{U} + \omega_u^2 U + \alpha \left[ \underbrace{\frac{3}{4} U^3 + \frac{3}{4} UW_1^2 + 2UW_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} L^{1/2} \left( \frac{\pi^4}{L^5} \right)^{-1} \frac{\pi^3}{L^{7/2}} W_1 W_2}_{= \frac{\pi}{L^{3/2}}} \right] = 0 \\ \equiv \ddot{U} + \omega_u^2 U + \frac{E}{\rho} \left[ \frac{3\pi^4}{4L^5} U^3 + \frac{3\pi^4}{4L^5} UW_1^2 + \frac{2\pi^4}{L^5} UW_2^2 + \frac{\sqrt{2}\pi^3}{L^{7/2}} W_1 W_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-40)$$

$$\ddot{W}_1 + \Omega_1^2 W_1 + \frac{E}{\rho} \left[ \frac{\pi^4}{4L^5} W_1 (U^2 + 3W_1^2 + 24W_2^2) - \frac{3\sqrt{2}\pi^3}{L^{7/2}} UW_2 \right] = 0 \quad (4-41)$$

$$\ddot{W}_2 + \Omega_2^2 W_2 + \frac{E}{\rho} \left[ -\frac{2\pi^4}{L^5} U^2 W_2 + \frac{6\pi^4}{L^5} W_1^2 W_2 + \frac{12\pi^4}{L^5} W_2^3 \right] = 0 \quad (4-42)$$

把式(4-40)–式(4-42)写成一阶形式即可得到6维自治系统。令

$$x_1 = U, \quad x_2 = \dot{U}, \quad x_3 = W_1, \quad x_4 = \dot{W}_1, \quad x_5 = W_2, \quad x_6 = \dot{W}_2 \quad (4-43)$$

系统可写为

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -\omega_u^2 x_1 - \alpha x_1 (x_1^2 + x_3^2), \\ x'_3 &= x_4, \\ x'_4 &= -\omega_u^2 x_3 - \alpha x_3 (x_1^2 + x_3^2) \end{aligned} \quad (4-44)$$

式(4-44)是柔性梁在初值条件  $u(x, 0) = w(x, 0) = 0$  下利用线性模态 Galerkin 截断得到的一阶轴向振动和两阶弯曲振动的三模态控制方程。接下来分析其动力学系统特征，理解其模态耦合现象的数学本质。

注意，此方程采用线性模态正交基做 Galerkin 截断，保证模态正交基的正交性，在柔性梁现构型相对于参考构型差距不大时，方程动力学解与线性振动解拓扑同胚，此时动力学分析有效性高。

调用式(4-22)的参数设置，计算固有频率得到

$$\begin{aligned} \omega_u &= 634.293 \text{ rad/s } (f_u = 100.951 \text{ Hz}) \\ \Omega_1 &= 0.345142 \text{ rad/s } (f_1 = 0.054931 \text{ Hz}) \\ \Omega_2 &= 1.380568 \text{ rad/s } (f_2 = 0.219724 \text{ Hz}) \end{aligned} \quad (4-45)$$

频率比为

$$\frac{f_u}{f_1} \approx 1.84 \times 10^3, \quad \frac{f_u}{f_2} \approx 4.59 \times 10^2, \quad \frac{f_2}{f_1} = 4 \quad (4-46)$$

可见轴向一阶远快于弯曲一、二阶（相差三至四个数量级），不存在 1:1, 1:2, 1:3 等低阶内共振。定义小参数

$$\varepsilon := \frac{\Omega_1}{\omega_u} \approx 5.44 \times 10^{-4} \ll 1$$

系统天然呈现快-慢结构： $U$  为快变量（高频、低参与度）， $W_1, W_2$  为慢变量（低频、主导响应）。

考虑方程的物理含义与模态耦合的影响。几何非线性（例如  $w_x^2 w_{xx}$ 、 $u_x w_x u_{xx}$  等）确实在方程层面产生模态耦合；然而能否观察到明显的能量交换或分岔、内共振，关键取决于频率匹配与时间尺度。当一个自由度的固有频率极高时（本例为轴向模态），它在慢时间尺度上对系统的作用往往仅表现为快速地适配（slaving）于慢变量的准静态平衡，而不会与慢变量发生显著的相位锁定或能量泵浦——除非有外激励精确地激起高频通道，或频率接近形成低阶内共振。就本参数而言， $\varepsilon \ll 1$  意味着：在弯曲模态的一个周期内，轴向模态完成  $\mathcal{O}(10^3)$  次快速振动；对慢时间平均而言，它等效于沿着“瞬时平衡流形”快速弛豫，从而可用绝热消去（adiabatic elimination）或奇异摄动方法把  $U$  从属地消去，得到只含弯曲变量的有效慢系统。该处理在非外激励、自振小幅（以致高次项相对  $\omega_u^2 U$  足够小）的情形下误差为  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ，且不改变能量守恒到该阶的主导结构。

从式(4-40)出发，在慢时间尺度上忽略  $U$  的惯性项  $\ddot{U}$ ，并在小幅下忽略与  $U$  成三次或  $UW^2$  的高阶相对修正，得到主导代数平衡

$$\omega_u^2 U + \frac{E \sqrt{2}\pi^3}{\rho L^{7/2}} W_1 W_2 \approx 0 \implies U \approx -\frac{\sqrt{2}\pi}{L^{3/2}} W_1 W_2 \quad (4-47)$$

上式仅含几何量  $L$ （与材料参数无关），体现了  $U$  对弯曲模态的准静态从属。将其代回式(4-41)–式(4-42)并保留到三次非线性，得到仅含  $W_1, W_2$  的二阶系统：

$$\ddot{W}_1 + \Omega_1^2 W_1 + \alpha \left( \frac{3}{4} W_1^3 + 12 W_1 W_2^2 \right) = 0 \quad (4-48)$$

$$\ddot{W}_2 + \Omega_2^2 W_2 + \alpha \left( 6 W_1^2 W_2 + 12 W_2^3 \right) = 0 \quad (4-49)$$

这两条二阶方程等价于 4 维自治一阶系统（慢流形上的动力学）。五次及更高阶修正项规模为  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ （或  $W^5$ ），在当前参数与小幅下可忽略；如需更高精度，可通过迭代法保留  $U$  的非线性修正，得到  $W_1^3 W_2^2$ 、 $W_1^2 W_2^3$  等五次项的显式系数。

$$\alpha = \frac{E \pi^4}{\rho L^5} = 254.1323 \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-3}$$

于是式(4-48)–式(4-49)可写为(单位统一为SI)

$$\ddot{W}_1 + (0.345142)^2 W_1 + 190.599 W_1^3 + 3049.587 W_1 W_2^2 = 0$$

$$\ddot{W}_2 + (1.380568)^2 W_2 + 1524.794 W_1^2 W_2 + 3049.587 W_2^3 = 0$$

综上,由于显著的时间尺度分离( $\varepsilon \sim 10^{-4}$ )与不存在低阶内共振,轴向自由度对慢弯曲动力学可视为从属,从而合理、系统地将6维自治一阶系统缩约为4维自治一阶系统而不牺牲主导非线性效应。

至此,实现了高阶模态的分离截断和降阶ODE构造,为后续采用非线性模态开展非线性降阶做好了降阶理论准备。

在柔性梁模型中,考虑了轴向 $U$ 一阶和弯曲 $W$ 前两阶模态的全阶非线性耦合,形成6维自治一阶系统。通过数值分析发现,对于原始物理参数(长梁、薄截面),轴向一阶模态频率远高于弯曲模态,导致模态间耦合非常微弱,系统几乎没有分岔或内共振行为。为了在保持梁物理假设的前提下观察非线性模态耦合及分岔现象,我们适度调整梁的几何参数(截面积 $A$ 、截面惯性矩 $I$ 、梁长度 $L$ ),形成第*i*阶轴向与一阶弯曲模态的1:1内共振条件。

由式(4-39)给定的线性模态频率公式,构造横向1:1内共振条件。

$$\Omega_i \approx \omega_u \Rightarrow \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \approx \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow L \approx i^2 \frac{\pi d}{\sqrt{12}} \quad i = 1, 2, \dots \quad (4-50)$$

同时为保证方程有效性,需要保持Euler-Bernoulli梁条件,

$$\frac{L}{d} = \frac{\pi i^2}{\sqrt{12}} \geq 10 \quad (4-51)$$

取*i*=4,s.t. $\frac{L}{d}=14.510$ ,获得调整后的四阶横向弯曲振动和一阶轴向伸缩1:1内共振的参数。

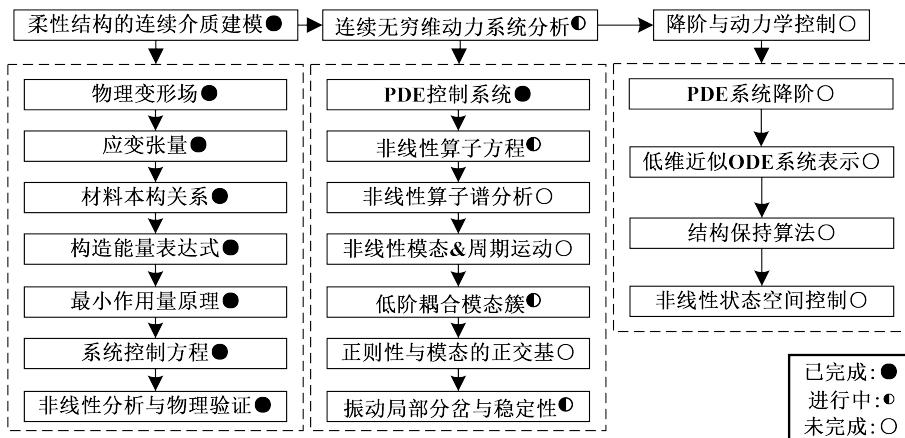


图4-4 已完成的工作流程

综合以上全部完成内容，已完成的工作在全部工作的占比与位置大致如图4-4所示，整体工作流程如图5-1所示。采用连续介质理论建模柔性结构能够详尽的表征其结构高阶的复杂的动力学特征；非线性动力学分析方法是柔性结构的振动特性天然的解决办法，分析柔性结构的模态耦合行为具有应用前景和可行性。

## 5 研究方案

本研究将在理论建模与数值实现相结合的框架下开展，针对柔性结构振动的几何非线性、密频模态特征与保辛控制设计等问题，提出系统的技术方案。

总体技术路线如图5-1所示。

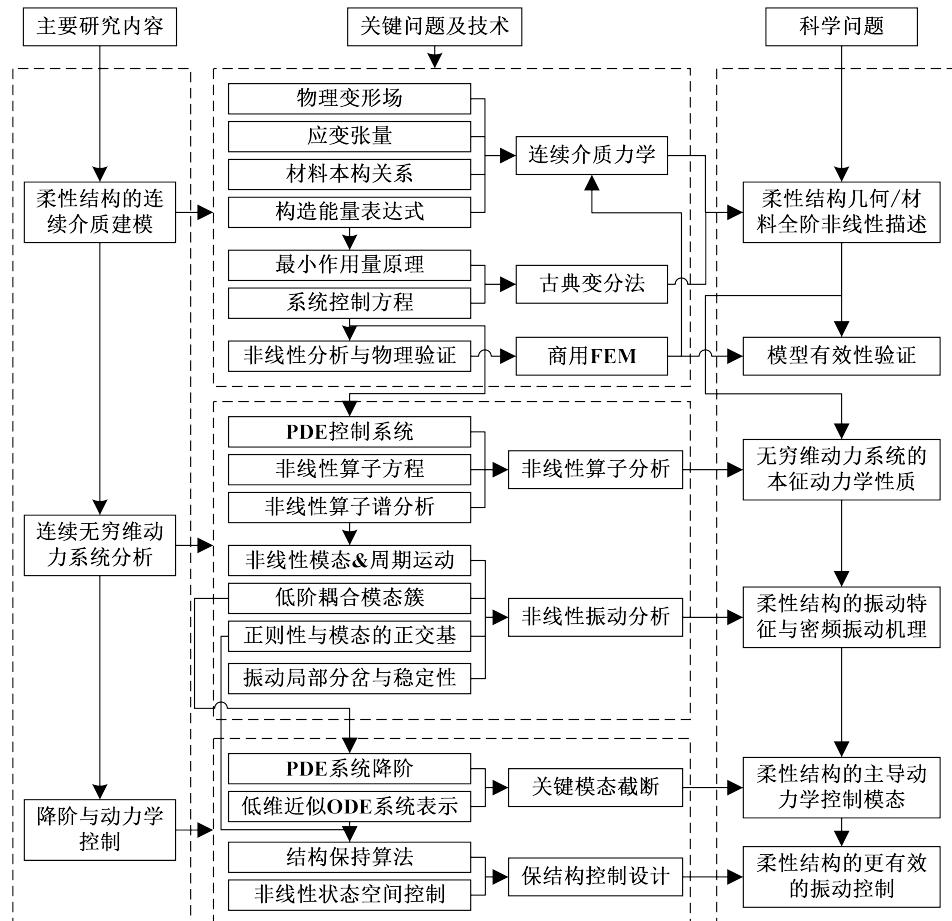


图 5-1 总体技术路线

### 5.1 柔性结构连续介质变分法建模

柔性结构振动问题的建模过程，本质上是一个从物理几何直觉逐步抽象为数学控制方程的过程。为保证模型在动力学特征上的一致性，本研究采用连续介质力学的变分方法，在严格的张量分析框架下实现建模。研究的技术路线如图5-2这一流程不仅反映了连续介质理论与变分原理的逻辑内涵，也确保了模型能够兼顾几何非线性、材料非线性与边界条件等多方面非线性来源，具有足够的可推广性，为后续动力学分析与降阶设计奠

定坚实的数学与物理基础。

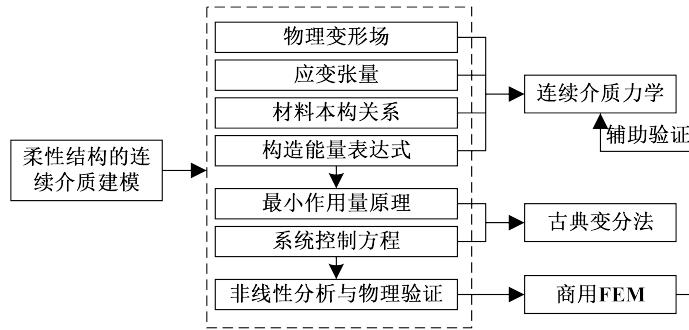


图 5-2 柔性结构建模技术路线

首先，在物理层面，柔性结构的变形应从几何上加以描述。以典型的梁或板为例，其几何构型可由位移场  $u_i(x, t)$  来表征。位移场作为定义在现流形上的矢量场，描述了结构中任意一点随时间的运动状态。在小变形假设下，线性化的应变张量即可捕捉变形特征，但对于柔性航天结构等大挠度系统，必须引入有限变形理论，将 Green-Lagrange 应变张量

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (5-1)$$

作为基本几何量，以确保非线性效应能够准确反映。此时，几何非线性来源于位移梯度的二次项，其在动力学行为中往往起主导作用，是后续非线性算子与模态耦合机制的根源。

其次，在应变张量确定后，需要通过材料本构关系将应变与应力联系起来。在振动这种周期运动下，为保证运动不会无阻尼自动衰减，保证非线性算子的久期性，材料应当均处于线弹性限度内，引入 Hooke 定律

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (5-2)$$

式中  $C_{ijkl}$ ——四阶刚度张量

四阶刚度张量应满足对称性与正定性条件。然而，若考虑复合材料或薄壁结构等形式，则需引入更为复杂的本构模型，例如正交各向异性模型或基于弹性势函数的非线性材料模型。本研究将根据实际结构选型与实验数据，结合有限元文献中的常用本构参数，建立与应变张量相匹配的应力表示，确保能量泛函在数学上自洽、在物理上可信。

第三，在获得应力与应变的关系后，即可构造能量泛函。能量构造是变分法建模的核心步骤，它将张量量化转化为标量量化：由应变能密度函数

$$W(E) = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (5-3)$$

积分子参考构型  $\Omega$  上得到全结构的弹性势能

$$\Pi_e = \int_{\Omega} W(E) d\Omega \quad (5-4)$$

并结合动能项

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \quad (5-5)$$

以及可能的外力作用能  $\Pi_{ext}$ , 构成作用量泛函

$$\mathcal{A}[u] = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi_e + \Pi_{ext}) dt \quad (5-6)$$

这一泛函在数学形式上是定义于函数空间的标量泛函, 其结构保证了控制方程的守恒性与可逆性, 是后续进行哈密顿结构保持分析的必要前提。

接下来, 通过最小作用量原理, 即对泛函  $\mathcal{A}[u]$  取变分并令其一阶变分为零, 可得到欧拉-拉格朗日方程:

$$\delta \mathcal{A}[u] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad (5-7)$$

式中  $L = T - \Pi_e + \Pi_{ext}$ ——系统拉格朗日量

经过张量运算与积分分部, 可以得到柔性结构的控制偏微分方程以及相应的自然边界条件。例如, 在梁的场景下, 上述推导可退化为含有几何非线性项的 Euler-Bernoulli 型 PDE, 在板的场景下则对应 Kirchhoff-Love 板方程。此类 PDE 不仅明确体现了非线性来源, 也在数学上保持了与物理系统一致的辛结构。

在获得控制方程后, 需要对其非线性特征进行分析和验证。几何非线性项往往表现为位移与其梯度的乘积, 从而导致模态间的非线性耦合。通过谱展开, 可将 PDE 系统映射到函数空间的算子方程:

$$\mathcal{N}[u] = f \quad (5-8)$$

式中  $\mathcal{N}$ ——非线性算子

非线性算子的谱性质直接决定了密频模态的生成与能量在不同频率分量间的耦合路径。通过算子理论与谱分析, 可以在泛函分析框架下揭示系统的动力学本质; 同时, 通过与 FEM 仿真数值实验数据对比, 可以验证非线性算子项是否准确反映了模态密集特征, 与实际的物理系统一致。

最后, 在整个建模过程中, 还需要对数学模型与物理意义之间进行双重验证。一方面, 从数学角度, 应保证控制方程的自治性、能量守恒性与适定性; 另一方面, 从物理角度, 应确保模型能够再现实验观测到的非线性动力学特征, 例如模态耦合、频率迁移与分岔行为。通过这种“双重约束”, 本研究的建模部分不仅为后续非线性动力系统特

征分析提供了可靠方程基础，也为降阶与控制律设计建立了物理一致性和理论完备性的出发点。

综上所述，柔性结构的连续介质变分方法建模通过“物理几何—张量表述—能量泛函—变分推导—控制方程—非线性分析”的完整链路，将物理系统与数学结构紧密结合。其一方面确保了建模过程能够反映几何非线性和能量耦合的本质特征，另一方面也为后续在算子谱理论框架下进行模态分析与降阶控制提供了可追溯、可推广的统一建模基准。这一建模思想既继承了经典连续介质力学与哈密顿力学的理论传统，又兼具现代非线性动力学的研究视角，是本课题研究方案的逻辑起点和方法学支柱。

## 5.2 动力系统分析与非线性模态分析

在完成柔性结构连续介质变分建模并得到控制偏微分方程后，本研究的第二个环节是对该控制系统进行系统性的动力学分析与非线性模态研究。该部分的核心任务在于：首先将控制方程抽象为泛函空间中的非线性算子方程，从算子理论与谱分析的角度揭示其密频模态的生成机制；其次在模态空间中对控制系统进行重新刻画，结合正则形理论与中心流形方法分析低维模态簇的耦合特性；最后在局部分岔与稳定性框架下识别非线性模态的动力学行为。研究路线如图5-3所示。

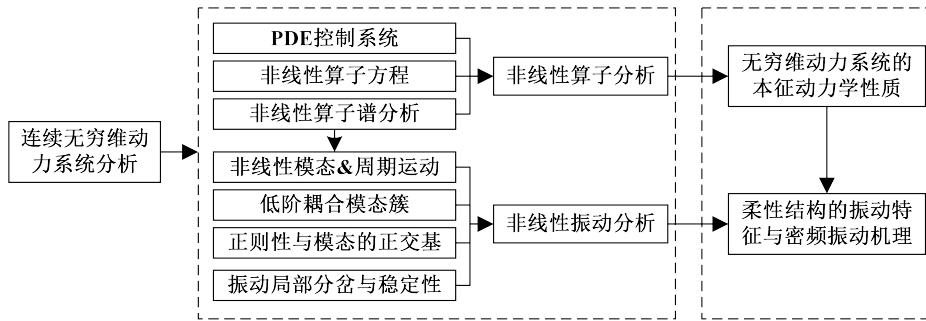


图 5-3 动力系统分析技术路线

首先，柔性结构的控制方程在连续介质建模阶段已经通过变分原理获得，其一般形式可抽象为含有非线性项的偏微分方程组

$$\mathcal{M}\ddot{u}(x, t) + \mathcal{K}u(x, t) + \mathcal{N}[u(x, t)] = f(x, t) \quad (5-9)$$

式中  $\mathcal{M}$  ——质量算子

$\mathcal{K}$  ——线性刚度算子

$\mathcal{N}[\cdot]$  ——非线性算子项

$f(x, t)$ ——外部激励

该控制系统定义在合适的泛函空间（例如  $H^1(\Omega)$  或 Sobolev 空间族）上，可以形式化为非线性算子方程

$$\mathcal{L}u + \mathcal{N}[u] = f \quad (5-10)$$

式中  $\mathcal{L}$ ——线性自伴算子

线性自伴算子具有离散谱或密集谱，其谱特征直接决定了柔性结构振动中密频模态的形成。

在算子方程的层面，可以通过谱分解分析  $\mathcal{L}$  的本征值与本征函数。设  $\mathcal{L}\phi_j = \lambda_j\phi_j$ ，其中  $\{\phi_j\}$  构成完备基，则解可展开为

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t)\phi_j(x) \quad (5-11)$$

式中  $q_j(t)$ ——时间演化的广义坐标

将该展开代入控制方程并投影到模态空间，得到无限维模态动力学方程

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j + \sum_{kl} \alpha_{jkl} q_k q_l + \sum_{klm} \beta_{jklm} q_k q_l q_m + \dots = F_j(t) \quad (5-12)$$

式中  $\omega_j^2 = \lambda_j / M$ ——时间演化的广义坐标

$\alpha_{jkl}, \beta_{jklm}$ ——体现了非线性模态耦合强度

这一模态展开过程本质上对应于对原始 Lagrangian 系统做勒让德变换并在模态基下重整。

由于柔性结构往往具有密集模态分布，高阶模态间的相互作用在理论上是无限维的。为了使分析可行，需要在模态空间中截断高阶模态，只保留低阶且具有强耦合作用的模态簇。此时可得到有限维近似系统

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(t) \quad (5-13)$$

式中  $\mathbf{q}$ ——截断后的模态向量

$\Omega^2$ ——对角化的线性模态频率矩阵

$\mathbf{N}(\mathbf{q})$ ——非线性耦合项

该低维非线性系统仍然保留了原 PDE 的模态耦合机制，是后续研究的核心对象。

为了刻画低维模态簇的内在动力学特征，需要在该有限维系统上构造正交基并施加正规形变换。通过非线性坐标变换与中心流形定理，可以将原系统在平衡点附近约化为正规形方程

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{jk} a_{ijk} z_j z_k + \sum_{jkl} b_{ijkl} z_j z_k z_l + \dots \quad (5-14)$$

式中  $z_i$ ——中心流形上的坐标

$\lambda_i$ ——线性谱

$a_{ijk}, b_{ijkl}$ ——非线性相互作用系数张量

该正规形系统在保留非线性模态耦合机制的同时极大简化了动力学描述，使得后续的周期解与分岔分析得以进行。

最后，需要在正规形框架下识别非线性模态的周期解及其稳定性。周期解对应于非线性模态（Nonlinear Normal Modes, NNMs），其稳定性可通过 Floquet 理论或李雅普诺夫方法进行分析。具体而言，若在模态空间存在稳定的极限环解，则该解在物理上对应于柔性结构中的非线性模态运动；若系统参数变化导致特征乘子穿越单位圆，则相应地会出现 Hopf 分岔或鞍结分岔，从而揭示系统可能产生的复杂非线性动力学现象。

综上所述，本研究在“PDE 控制系统—非线性算子—谱分析—模态截断—正规形与中心流形—非线性模态与分岔分析”的链条下，对柔性结构控制方程进行系统性的动力学刻画。通过这一过程，不仅能够揭示密频模态的生成机制和能量耦合路径，还能够建立基于非线性模态的简化动力学模型，为降阶与控制设计提供严格的理论基础。

### 5.3 降阶方法与保结构控制系统

在经过模态分析与动力学特征提取之后，柔性结构振动问题的无限维偏微分方程模型已被约化为有限维常微分方程组，其一般形式可写为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (5-15)$$

式中  $\mathbf{z}$ —有限维模坐标

$\mathbf{F}$ —系统主要非线性耦合效应的约化动力学算子

此时的核心任务是进一步实施降阶，剔除对主要动力学行为影响有限的高阶模态，仅保留关键模态簇，从而降低计算复杂度并提取本征力学机制。研究的技术路线如图5-4所示。

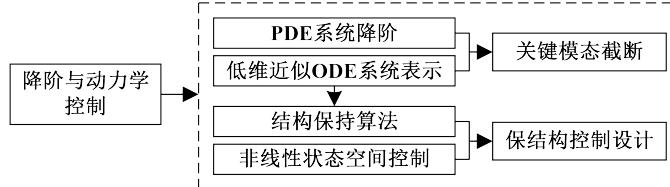


图 5-4 降阶与保辛控制技术路线

首先，通过模态截断与正交化操作，可将高维的偏微分方程系统有效降阶为有限维常微分方程组，形式上记作

$$\dot{z} = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (5-16)$$

式中  $z$ —保留的低阶模态簇的广义坐标

$f$ —原始 PDE 系统的非线性算子

由于该降阶过程是基于模态空间的投影与能量一致性原则，因此所得系统在哈密顿框架或梯度系统框架下依然保留了原系统的几何特征。

其次，降阶系统的动力学性质往往可以通过能量泛函来统一描述。对于保守系统，存在哈密顿量

$$H(z) = \frac{1}{2}z^\top Mz + V(z) \quad (5-17)$$

式中  $M$  ——模态质量矩阵

$V(z)$ ——非线性势能项

该哈密顿量不仅刻画了系统的能量分布，而且为后续的保结构控制提供了自然的参考框架。

在降阶系统的建模基础上，下一步是寻找合适的低维表示，使得非线性相互作用关系在形式上保持与原始系统一致。具体而言，通过结构保持的数值算法，可以确保在时间积分过程中保留辛结构或能量衰减律。例如，对于辛系统，要求积分算子满足

$$\Phi^\top J \Phi = J \quad (5-18)$$

式中  $J$ ——标准辛矩阵

$\Phi$ ——一步时间推进算子

该条件保证了相空间体积的不变性，从而避免数值解的长期漂移。

在控制设计层面，保结构控制的目标是通过外加控制力在不破坏系统几何特征的前提下实现稳定性调节或振动抑制。设控制输入为  $u(t)$ ，则降阶系统可写为

$$\dot{z} = f(z) + Bu \quad (5-19)$$

式中  $B$ ——输入分布矩阵

若以哈密顿系统为背景，则一种常用策略是设计控制输入使得闭环系统的哈密顿量沿轨道单调衰减，即

$$\frac{d}{dt} H(z) \leq -\alpha \|z\|^2, \quad \alpha > 0 \quad (5-20)$$

从而保证系统渐近稳定。对于更一般的非线性耦合模态簇，则可借助中心流形理论与正则形变换，构建针对局部分岔点的反馈控制器，使得系统在非线性模态的邻域内依然保持结构上的一致性。

综上所述，通过“PDE 系统降阶—ODE 表示—结构保持算法—保结构控制设计”的路线，可以在有限维模态簇的层面上同时实现动力学分析与振动控制，从而为复杂柔性结构在密频模态条件下的建模与控制提供系统性的解决方案。

## 5.4 进度安排

(1) 2025 年 3 月——2025 年 7 月 对柔性结构尤其是柔性梁、板模型的相关文献、建模、原理、降阶与控制等相关内容进行学习和整理。制定柔性结构建模、分析、控制方

法的研究框架。

(2)2025 年 8 月——2025 年 11 月 根据连续介质力学原理，完成单个构件的柔性结构的建模，形成以梁、板为主要研究对象的分析基础，为后续分析和控制提供数学模型。数学模型与数值仿真结果对齐。

(3)2025 年 12 月——2026 年 6 月 学习 PDE 理论和几何力学，完成对柔性细长梁、薄板的动力学分析。完成对柔性梁、板的有限变形的模态耦合分析。

(4)2026 年 7 月——2027 年 2 月 改进 Galerkin 截断法截断所需模态，降阶为保持辛结构的控制系统，按其设计诸如滑膜法的控制律。开展数值或验证实验。

(5)2027 年 3 月——2027 年 5 月 撰写学位论文，准备答辩。

## 5.5 预期达到的目标和取得的研究成果

(1) 建立柔性细长梁、薄板的动力学模型，能够描述构件的任意有限变形，与数值结果和有限元结果对齐。

(2) 得到梁、板在有限变形下的模态和振型规律，清楚刻画其模态耦合现象和模态间的能量流动规律。

(3) 得到梁、板的保辛结构降阶控制方程，设计出一款响应快、稳定性好、鲁棒性强，能够特定振动运动的保辛控制律。

(4) 撰写 1-2 篇论文并发表式中 1 篇在 SCI 或 EI 期刊上。

## 6 为完成课题已具备和所需的条件和经费

本课题以理论分析与数值计算为主要研究手段，所需硬件条件简单，已具备完成研究的主要环境与资源：

- 1) **研究基础：**已系统学习并掌握连续介质力学、非线性动力学、有限元法等相关理论，为后续柔性结构密频模态建模与分析奠定了坚实基础。
- 2) **计算与软件条件：**具备高性能个人计算机，已配备 MATLAB、Python 及有限元分析软件（如 ABAQUS、COMSOL 等），能够满足大规模数值模拟与数据处理的需求。
- 3) **文献与资料：**通过学校图书馆及数据库（如 Web of Science、ScienceDirect 等）获取相关领域的最新研究成果。
- 4) **学术指导：**在研究过程中可获得导师的方向指引，并就学术前沿与细节问题向国内外相关领域的专家进行咨询，确保研究方向与方法的科学性与先进性。

本课题对实验及大型设备依赖程度低，主要经费用于购买专业书籍、文献获取、软件维护及数据存储等，学校及导师科研经费可予以保障，因此经费需求能够得到充分满足，不存在制约课题进展的条件短板。

## 7 预计研究过程中可能遇到的困难和问题，以及解决的措施

### 7.1 本研究涉及复杂的无限维动力系统数学理论，跨越泛函分析、PDE 分析与力学建模等多个领域和学科

**问题描述：**在柔性结构密频模态分析中，需要从连续介质力学理论出发，借助变分原理得到全阶的非线性偏微分方程，并结合泛函分析方法进行稳定性与分岔分析。这要求研究者具备坚实的连续介质力学和动力学基础，还需要对涉及谱分析、算子理论、非线性动力系统理论等现代数学理论有深刻认识。多学科交叉也增加了建模和分析的难度，可能导致课题研究时间周期延长。

**解决措施：**研究初期就制定充分系统的数学和力学技术路线框架，优先掌握每个理论的有效边界，注重物理意义的认识，利用 Mathematica 软件等符号计算工具简化推导。必要时及时与数学力学有关方向的专家开展讨论以缩短摸索周期。

### 7.2 商用 CAE 软件绝大多数为线性模态分析，无法对照非线性模态分析进行对比，理论正确性难以验证

**问题描述：**目前工程领域成熟的商业软件均基于线性模态分析，对非线性模态和模态耦合的计算和分析支持不足，尤其是密频模态的捕捉和非线性效应的刻画几乎空白。这导致理论分析结果不能快速得到计算支持，难以快速验证正确性。

**解决措施：**自行采用 MATLAB 或 Python 语言搭建小型数值求解平台，基于非线性 PDE 离散和数值积分方法自定义求解方法，实现密频模态分析功能。利用商业软件初步分析解的合理性和模态空间在小变形下的拓扑结构，与小变形线性近似的非线性理论对照，间接验证理论正确性。

### 7.3 非线性 PDE 数值模拟计算量大，密频模态导致求解过程易出现数值不稳定和精度损失

**问题描述：**柔性结构的密频模态意味着模态频率间距极小，数值积分时为避免数值奇异和表达模态间的能量通路的需要，需要相当高的精度和极细的步长设置，长时间数值积分亦会导致累积误差放大，影响结果可信度。

**解决措施：**采用结构保持型数值方法，保证能量、动量等守恒量在长时间积分过程中保持不变，从守恒律角度规避累计误差；采用多尺度方法和模态降阶技术以减少自由度，适当截断不必要的高频模态及其能量通路；必要时接入高性能计算平台以缩短模拟时间。

## 8 参考文献

- [1] YAN Y, LI J, HUANG H, et al. Design and investigation of flexible solar wing: In-plane dynamics[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 283: 109673.
- [2] ZHOU J, ZHANG Q, ZHANG M, et al. Flexible wearable medical devices: from material innovations and data processing to intelligent healthcare applications[J]. Journal of Advanced Research, 2025.
- [3] WANG W, CHEN S, CHEN B, et al. Development and application of metallic dampers in bridge engineering: A review[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition), 2025, 12(2): 236-268.
- [4] WEI Y, BAI X, WU P. Complex motion parameters estimation of space target with flexible solar panels based on vibration mode database[J]. Aerospace Science and Technology, 2025, 164: 110442.
- [5] ZHU H, LI J, XU W. Thermal-induced vibration control of a solar wing based on piezoelectric ceramic actuator[J]. Thermal Science and Engineering Progress, 2025, 66: 104002.
- [6] 董卓敏. 柔性结构的实验建模与主动控制[D]. 中国科学技术大学, 2003.
- [7] 何贵勤. 带柔性太阳翼航天器结构动力学建模与姿态-振动协同控制研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2023.
- [8] 黄正. 基于等几何配点法的几何精确 Euler-Bernoulli 梁几何非线性分析[D]. 华中科技大学, 2017.
- [9] Ayfeh A H P P F L. Linear and nonlinear structural mechanics[M]. 1 ed. US: John Wiley & Sons, 2004.
- [10] REISSNER E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1972, 23(5): 795-804.
- [11] REISSNER E. On One-Dimensional Large Displacement Finite Strain Beam Theory[J]. Studies in Applied Mathematics, 1973, 52(2): 87-95.
- [12] HODGES D H. Nonlinear Composite Beam Theory[M]. Blacksburg, Virginia, USA: AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), 2006.
- [13] REISSNER E. On finite deformations of space-curved beams[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1981, 32(6): 734-744.
- [14] SIMO J C. A Finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49: 55-70.

- [15] SIMO J C, VU-QUOC L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions — a geometrically exact approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 66(2): 125-161.
- [16] CARDONA A, GÉRADIN M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, 26: 2403-2438.
- [17] IBRAHIMBEGOVIĆ A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 122(1-2): 11-26.
- [18] IBRAHIMBEGOVIĆ A, FREY F, KOŽAR I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(21): 3653-3673.
- [19] JELENIĆ G, SAJE M. A kinematically exact space finite strain beam model — finite element formulation by generalized virtual work principle[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 120(1-2): 131-161.
- [20] PAI P F. Geometrically exact beam theory without Euler angles[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48(21): 3075-3090.
- [21] PAI P F. Highly Flexible Structures: Modeling, Computation, and Experimentation[M]. Blacksburg, Virginia, USA: AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), 2007.
- [22] PAI P F. Three kinematic representations for modeling of highly flexible beams and their applications[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48(19): 2764-2777.
- [23] 吴根勇, 和兴锁, PAI P F. 几何精确梁理论及其在柔性多体系统动力学仿真中的应用[C]//中国计算力学大会' 2010 (CCCM2010) 暨第八届南方计算力学学术会议 (SCCM8) 论文集. 2010.
- [24] 吴根勇, 和兴锁, PAI P F. 大变形柔性多体系统非线性动力学数值仿真与实验研究 [J]. 实验力学, 2011, 26(1): 103-108.
- [25] WU G, HE X, PAI P F. Geometrically exact 3D beam element for arbitrary large rigid-elastic deformation analysis of aerospace structures[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2011, 47(4): 402-412.
- [26] LUO A C J. Nonlinear Deformable-body Dynamics[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010: 4-9.

- [27] KIRCHHOFF G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1850, 40: 51-88.
- [28] KIRCHHOFF G. Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe[J]. Poggendorffs Annalen der Physik, 1850, 81: 258-264.
- [29] LOVE A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity[M]. 4th ed. New York: Dover Publications, 1944.
- [30] CHIEN W Z. The intrinsic theory of thin shells and plates I: General theory[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1944, 1: 297-327.
- [31] CHIEN W Z. The intrinsic theory of thin shells and plates II: Application to thin plates [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1944, 2: 43-59.
- [32] GOL'DENVEIZER A L. Applicability of the general theorems of the theory of elasticity to the thin shells[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Prikl. Mat. Mekh., Akad. Nauk SSSR), 1944, 8: 3-14.
- [33] REISSNER E. On the theory of bending of elastic plates[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1944, 23: 184-191.
- [34] NAGHDI P E. The Theory of Shells and Plates[G]//Handbuch der Physik: vol. VIa/2. Berlin: Springer, 1972.
- [35] DUHEM P. Recherches sur l'elasticité[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1906.
- [36] COSSERAT E, COSSERAT F. Sur la théorie de l'élasticité, premier Mémoire[J]. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1896, 10: 1-116.
- [37] COSSERAT E, COSSERAT F. Théorie des Corps Déformables[M]. Paris: Hermann, 1909: 953-1173.
- [38] Von KARMAN T. Festigkeitsprobleme im mashinenbau[G]//Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften: vol. 4(4). Leipzig: Teubner, 1910: 348-352.
- [39] Von KARMAN T, TSIEN H S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1941, 8: 303-312.
- [40] NOLVOZHILOV V V. General theory of stability of thin shells (Russian)[J]. Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1941, 32: 316-319.
- [41] WANG F Y. Two-dimensional theories deduced from three-dimensional theory for a transversely isotropic body-I: plate problems[J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(4): 455-470.

- [42] HODGES D H, ATILGAN A R, DANIELSON D A. A geometrically nonlinear theory of elastic plates[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1993, 60: 109-116.
- [43] LUO A C J. An approximate theory for geometrically nonlinear thin plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37: 7655-7670.
- [44] LUO A C J, HAMIDZADEH H R. Equilibrium and buckling stability for axially traveling plates[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2004, 9: 343-360.
- [45] LUO A C J. Chaotic motion in resonant separatrix zones of periodically forced, axially traveling, thin plates[J]. Proceedings of the IMechE, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2005, 219: 237-247.
- [46] SHAW S W, PIERRE C. Normal modes for non-linear vibratory systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 164(1): 85-124.
- [47] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields[M]. Springer, 1983.
- [48] BOIVIN N, PIERRE C, SHAW S W. Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems[J]. Nonlinear Dynamics, 1995, 8: 315-346.
- [49] SUN C, ZHAO W, LIU W, et al. Nonlinear dynamics and stability analysis of horizontal vibration for rolling system with gyro-precession and eccentricity effects[J]. Alexandria Engineering Journal, 2025, 124: 303-316.
- [50] ZOLKIN T, NAGAITSEV S, MOROZOV I, et al. Isochronous and period-doubling diagrams for symplectic maps of the plane[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2025, 198: 116513.
- [51] BALAJI N N, KRISHNA I P, PADMANABHAN C. A multi-harmonic generalized energy balance method for studying autonomous oscillations of nonlinear conservative systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 422: 526-541.
- [52] LEE G Y, PARK Y H. A proper generalized decomposition-based harmonic balance method with arc-length continuation for nonlinear frequency response analysis[J]. Computers & Structures, 2023, 275: 106913.
- [53] HONG A, XU Q, MA X, et al. Investigations of flow structures and dynamical behaviors of steam jet condensation in crossflow based on dynamic mode decomposition and proper orthogonal decomposition[J]. Energy, 2025, 333: 137540.
- [54] ZHAO X, XING X, KANG C W, et al. Predictive modeling of wake flow for a floating offshore wind turbine using dynamic mode decomposition[J]. Ocean Engineering, 2025,

334: 121590.

- [55] HUANG H, ZHENG Z, XU Y, et al. A dynamics analysis method for flexible multibody system based on null space symplectic Runge-Kutta algorithm[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2025, 170: 104999.