Continuum Mechanics Notes v2.0

Simon Yu

2025 年 12 月 9 日

Contents

0 Introduction

0.1 Fundamental Axioms

先给出连续介质力学的基本假设，CM 只能解决满足此类假设的力学问题:

1) **连续体假设** (Continuum Hypothesis)
2) **局部作用公理** (Locality Axiom)
3) **决定性公理** (Determinism Axiom)
4) **客观性公理** (Objectivity) 亦称为**时空无差异公理** (Axiom of Material Frame Indifference)

整个连续介质力学理论体系需要仅需要这三条公理 (和一条假设) 作为根基。

Axiom 0.1 (Continuum Hypothesis). 所有关心的物质量是空间上的连续分布场；场量在空间中处处有定义且可微。

$$\text{场量函数} \in C^1 \text{或更高级函数空间}$$

Axiom 0.2 (Locality Axiom). 材料点响应仅依赖于其所在位置的**当前状态 (或其有限邻域)**，不依赖远场的瞬时状态。

$$\text{应力应变等局域量函数: } \sigma = \hat{\sigma}(x, t)$$

Axiom 0.3 (Determinism Axiom). 给定材料点的当前状态 (响应) 是**唯一确定**的。

$$\text{任何物理量均是时间的单值函数，保证存在唯一性}$$

Axiom 0.4 (Objectivity Axiom). 本构关系在任何刚体运动下不变；物理规律不依赖观察者坐标系。

Remark. 公理描述的材料是：一类**局部微分型连续介质**。这五条公理不是颠扑不破的，而是可以根据研究问题变化的。例如：Peridynamics 近场动力学通过推广 Locality Axiom 将此框架推广到含有非局部作用的问题上。属于采用了一套新的推广的材料本体论 ontology. 换言之，Continuum Mechanics 是 Peridynamics 在局部条件下的近似。

Remark. Kinematics 仅需要连续性假设和客观性公理。局部作用公理和决定性公理仅在本构方程中起作用。

0.2 连续介质力学的基本逻辑链

连续介质力学的基本逻辑为:

$$\text{运动学} \to \text{有限变形理论} \to \text{守恒律}$$
$$\text{本构公理} \to \text{本构方程}$$

Continuum Mechanics 的核心前置语言为 Tensor Analysis，此为 Differential Geometry 的核心工具。

传统的 Solid Mechanics, Material Mechanics 等力学体系侧重于描述与刻画力学现象，基于实验结果搭建**唯象理论** (phenomenology theory)。从实验现象通过几何、本构(此是唯象观点最明显的一点, Hooke's Law 等弹性本构关系，均属于实验得出的唯象理论)、力学三方面建立唯一可解的方程，这种方法的好处是确保正确, 确保工程可用, 但是知识系统性差, 难以从原有本构关系**推广**到新的本构关系甚至**预测**新材料的本构特征。

Continuum Mechanics 意图从严谨的现代几何方法出发，直接定义物质 (matertal) 的运动学和**变形**，进而求取力学里我们比较关心的**应变**，到此为止，刻画了任意连续体的有限变形行为。

Remark. Kinematics 逻辑没有提到应力！

自然界对称性 (symmetry) 普遍存在。Noether theorem 是对称性的数学刻画，对称性的结果是守恒律 (conservation laws)，也即系统中的某个物理量守恒 (守恒量)。连续体的运动方程、能量守恒、动量平衡等，均可以从一个统一的变分原理导出。写出这类系统在守恒律下的微分形式 (局部作用公理所决定的)，为 $\mathbb{R}^3$ 中的 PDEs.

质量守恒 Mass Conservation & 连续性方程 Continuity Equation

动量守恒 Balance of Momentum

角动量守恒 Balance of Angular Momentum

能量守恒 Energy Conservation

熵不等式 Entropy Inequality

其中，角动量守恒没有给出新的 PDE，仅给出材料的内禀条件：Cauchy Stress $\sigma = \sigma^T$(应力张量是对称的).

运动学刻画了材料行为。根据决定性公理，然而，材料内部的动力学问题除了变形还有应力，应力与变形的关系。连续介质力学给出了一套完全基于公理的演绎方法，直接通过公理约束材料行为，称为本构理论 (Constitutive Theory).

也即，本构理论是一套从公理推演材料行为全部可能数学形式的理论。这套理论在守恒律方程下，直接影响了 PDE 的形式，例如，相同的守恒方程，在理想线弹性介质的控制方程 (Governing Equation) 为双曲型 PDE 。而在牛顿流体上，控制方程则为抛物型 PDE ，这是完全由本构关系决定的。

本笔记全部采用张量语言书写。

1 Kinematics

1.1 Deformation Geometry

1.1.1 Coordinate System

连续介质力学使用**构型** (configuration) 来描述我们关心的全部物质点运动学状态的集合：全部物质点的**位置矢量**的集合。全部物质点的运动轨迹则给出构型随时间的变化——**介质的变形运动**.

Remark. 注意，configuration 仅包含全部位矢信息，**不包含速度信息**，可以理解为：构型——构成形貌。

令, 初始时刻的构型 (称为**初始构型** (reference configuration)) 记为 $\mathcal{B}_0$, 某时刻 t 时的构型 (**当前构型** (current configuration)) 记为 $\mathcal{B}_t$.

位矢需要使用坐标系 (coordinate system) 表示，按物质点位矢的时间依赖关系，建立以下两坐标系。

Definition 1.1 (**Lagrange Coordinate Sys.**)**.** 在 t_0 时刻，如果一个物质点的逆变坐标 $X^i(i=1,2,3)$ 不随着时间 t 而改变，称坐标 X^i 为系统的 Lagrange 坐标. 对应的坐标系称为 Lagrange 坐标系.

Definition 1.2 (**Euler Coordinate Sys.**)**.** 在任意 t 时刻，如果一个物质点的逆变坐标 $x^i(i=1,2,3)$ 随着时间 t 而改变，但是空间中一指定处的 x^i 的基矢量 g_i 不随时间改变，称坐标 x^i 为系统的 Euler 坐标. 对应的坐标系称为 Euler 坐标系.

Remark. Lagrange 坐标系是**长在物质上**的坐标系, 也叫随体坐标系, 随着物质变形而变形——**跟踪采访**.Euler 坐标系在空间中不变，物质不断穿过某一 Euler 中的坐标点——**蹲点监控**.
对一个物质点:

$$x^i = x^i(X^j, t)$$

Remark. 从此往后，为了明确表达某物理量属于哪个坐标系 (L & E)，将 Lagrange 坐标系的内容全部大写字母表示，将 Euler 坐标系全部采用小写表示。例如

$$\text{坐标分量：} X^i - - - x^i$$

$$\text{坐标系协变基矢量：} \boldsymbol{G}_i - - - \boldsymbol{g}_i$$

为分析方便，一般取**初始构型下，Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系重合**。

1.1.2 Equation of Motion

显然，物质的变形可以由两个坐标系的关系刻画。构造表征时间演化的变形映射 (deformation mapping)：

$$\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_t, \quad X \mapsto x(X, t)$$

初始构型中的位矢表示为:

$$\boldsymbol{r}_0 = X^j \boldsymbol{G}_j(X^k, t_0) = x^i(X^j, t_0)\boldsymbol{g}_i(x^k)$$

注意，Lagrange 坐标系中基矢量与时间有依赖关系，而 Euler 坐标系中基矢量与时间无依赖关系。此外，由于是任意 (可能是曲线) 坐标系，基矢量均与坐标有依赖关系。

现时构型下，任一物质点位矢表示为

$$\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{g}_i = x^i(X^j, t)\boldsymbol{g}_i(x^k) = \varphi^i(X^j, t)\boldsymbol{g}_i$$

由此，获得物质的运动方程的分量形式为

$$x^i = \varphi^i(X^j, t)$$

其中，由于连续性假设0.1，变形映射 $\varphi(X^i, t)$ 一定为单值可微函数，也即其 Jacobian 行列式恒不为 0.

$$J = \det(\frac{\partial x^i}{\partial X^j}) \neq 0$$

也即，可以给出唯一的变形反映射：$X^j = \varphi^{-1}(x^i, t)$.

Example 1.1. 给定直角坐标系中一运动方程 $\boldsymbol{r}(x^j, t) = \boldsymbol{r}_0 + f(X^i, t) = \varphi(X^i, t)$

可将方程展开为分量形式，略去基矢量 (直角系中基矢量无时间变化)

$$x^1 = X^1 + f(X^1, t)$$

$$x^2 = X^2 + f(X^2, t)$$

$$x^3 = X^3 + f(X^3, t)$$

也就变成了一个线性映射。

1.1.3 Deformation Gradiant & Tensors

按变形映射定义变形梯度:

Definition 1.3.

1.1.4 Green-Cauchy Strain Tensor

1.1.5 Prime Decomposition Theorem

1.2 Kinematics

1.2.1 Material Derivative

1.2.2 Strain Rate

1.2.3 Reynold Transport Theorem

1.3 Stress

2 Variational Principles & Conservation Laws

根据 Noether Theorem，可以使用变分法 (variational principle) 从基本公理推导出系统的守恒律，用于获得系统的控制方程。

连续性假设0.1→ 质量守恒/连续性方程

决定性公理0.3→ 空间平移、旋转对称性 → 线动量平衡、角动量平衡

客观性公理0.4→ 时间平移对称性 → 能量守恒

2.1 Mass Conservation

我们按连续性假设，推导连续介质的质量守恒方程/连续性方程。

2.2 Balance of Linear Momentum

2.3 Balance of Angular Momentum

2.4 Energy Conservation

2.5 Entropy Inenquality & Second Law of Thermodynamics

3 Constitutive Theory

3.1 Green Method

3.2 Cauchy Method