1 柱函数大题

题目：求解如下柱外定解问题:

$$\begin{cases} \Delta u=0, \qquad (\rho>a) \\ u\Big|_{\rho=a}=A\cos\dfrac{2\pi z}{L}, \quad u\Big|_{\rho=\infty}=\text{有限值} \\ u\Big|_{z=0}=0, \quad u\Big|_{z=L}=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

参考答案：

解：令 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 并分离变数得:

$$\begin{gathered} \Phi''+m^2\Phi=0 \\ Z''-\mu Z=0 \\ R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

由于问题与 φ 无关，所以有 $m=0,\Phi=const.$ 上下底面具有齐次边界条件，$\mu>0$ 的情况可以排除，因为 $\mu>0$ 时

$$Z(z)=\begin{bmatrix} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

不满足上下底面齐次边界条件的非零解。

当 $\mu=-\nu^2<0$ 时,

$$Z(z)=\begin{bmatrix} \cos\nu z \\ \sin\nu z \end{bmatrix}, \qquad R(\rho)=\begin{bmatrix} I_0(\nu\rho) \\ K_0(\nu\rho) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

由于上下底面的第二类齐次边界条件可知

$$Z(z)=\cos\nu z \tag{1.5}$$

本征值为

$$\nu=\frac{n\pi}{L}, \qquad (n=1,2,3\dots) \tag{1.6}$$

由自然边界条件 $u\Big|_{\rho\to\infty}$ 有限，可知 $R(\rho)$ 中应排除 $I_0(\nu\rho)$, 即

$$R(\rho)=K_0(\nu\rho) \tag{1.7}$$

由此可见

$$u_n=A_nK_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)\cos\frac{n\pi z}{L} \tag{1.8}$$

当 $\mu=0$ 时,

$$Z(z)=\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}, \qquad R(\rho)=\begin{bmatrix} 1 \\ \ln\rho \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

代入边界条件，可知 $Z(z)=const., R(\rho)=const.$，即

$$u=A_0 \tag{1.10}$$

把上述解叠加起来:

$$u(\rho, z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)\cos\frac{n\pi z}{L} \tag{1.11}$$

代入柱侧边界条件，有

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\frac{n\pi z}{L} = A\cos\frac{2\pi z}{L} \tag{1.12}$$

比较两边系数得

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{A}{K_0\left(\frac{2\pi a}{L}\right)} \\ \text{其他}A_n = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

由此可得

$$u(\rho, z) = \frac{A}{K_0\left(\frac{2\pi a}{L}\right)} K_0\left(\frac{2\pi a}{L}\right)\cos\frac{2\pi z}{L} \tag{1.14}$$