1 弦振动大题

题目：求解如下回复力 $f=-ku$ 的作用下的弦的振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=-ku, \quad (k>0) \\ u_x\Big|_{x=0}=0, \quad u_x\Big|_{x=l}=0, \\ u\Big|_{t=0}=\beta\cos\frac{2\pi x}{l}, \quad u_t\Big|_{t=0}=\gamma\cos\frac{3\pi x}{l} \end{cases} \tag{1.1}$$

参考答案:

解：把 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程，有

$$XT''-a^2X''T-kXT \tag{1.2}$$

两边同除 a^2XT 有

$$\frac{T''}{a^2T}+\frac{k}{a^2}=\frac{X''}{X}=-\lambda \tag{1.3}$$

进而得

$$\begin{gathered} \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0, \quad X'(l)=0 \end{cases} \\ T''+(a^2\lambda+k)T=0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda x}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda x}}$，代入边界条件可知 $C_1=C_2=0$，也即 $X(x)=0$，无意义。

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1x+C_2$, 代入边界条件求得 $C_1=0$, 即 $X(x)=C_2$，即此时只有常数解。

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, 代入边界条件，有

$$\begin{cases} C_2=0 \\ C_1\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases} \tag{1.5}$$

由此可知:

$$\begin{gathered} \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad (n=1,2,3\cdots) \\ X(x)=C\cos\frac{n\pi x}{l} \end{gathered} \tag{1.6}$$

再由 T 满足的方程

$$T''+\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+k\right)T=0 \tag{1.7}$$

解得

$$T=A_n\cos\left[\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+k\right)^{1/2}t\right]+B_n\sin\left[\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+k\right)^{1/2}t\right] \tag{1.8}$$

而当 $\lambda=0$ 时,

$$T''+kT=0$$

$A_0\cos k^{1/2}t+B_0\sin k^{1/2}t$

$$\begin{aligned} u(x,t)=&A_0\cos k^{1/2}t+B_0\sin k^{1/2}t \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos\left[\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+k\right)^{1/2}t\right]+B_n\sin\left[\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+k\right)^{1/2}t\right]\right\}\cos\frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \tag{1.9}$$

把上式代入初始条件，有

$$
\begin{aligned}
A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} &= \beta \cos\frac{2\pi x}{l} \\
k^{1/2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{l} &= \gamma \cos\frac{3\pi x}{l}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

比较两边系数，得:

$$
\begin{aligned}
A_0 = B_0 &= 0, \\
A_2 = \beta, \quad B_3 &= \left(\frac{9\pi^2 a^2}{l^2} + k\right)^{1/2} \gamma, \\
\text{其他} A_n = 0, \quad B_n &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

最后得定解问题的解为:

$$
u(x,t) = \beta \cos\left[\left(\frac{4\pi^2 a^2}{l^2} + k\right)^{1/2} t\right] \cos\frac{2\pi x}{l} + \left(\frac{9\pi^2 a^2}{l^2} + k\right)^{1/2} \gamma \sin\left[\left(\frac{9\pi^2 a^2}{l^2} + k\right)^{1/2} t\right] \cos\frac{3\pi x}{l} \tag{1.12}
$$