

Topology Notes

James R. Munkres & Simon Yu

2025 年 12 月 9 日

Contents

1	Set Theory and Logic	2
1.1	集合论	2
2	Topological Spaces and Continuous Functions	2
2.1	点集拓扑的结构笔记	2
3	Connectedness and Compactness	4
4	Countability and Separation Axioms	4
5	The Tychonoff Theorem	4
6	Metrization Theorems and Paracompactness	4
7	Complete Metric Spaces and Function Spaces	4
8	Baire Spaces and Dimension Theory	4
9	The Fundamental Group	4
10	Separation Theorems in the Plane	4
11	The Seifert-van Kampen Theorem	4
12	Classification of Surfaces	4
13	Classification of Covering Spaces	4
14	Applications to Group Theory	4

1 Set Theory and Logic

1.1 集合论

整个集合论的逻辑思路大致如下：

集合 $set \rightarrow$ 映射 $map \rightarrow$ 序关系 $order \rightarrow$ 格 $lattice \rightarrow$ 全序 $totally - ordered$

我们直接定义研究对象——集合。

Definition 1.1. Element $x \in or \notin X(Set)$, 子集 $A \subset X$; 集合间关系：交并补差和；集合序列 $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$

接下来定义集合间关系——映射。

Definition 1.2. 将 X 中元素映射到 Y 上 $f: X \rightarrow Y$. 逆映射；扩张 & 限制；像

注意！ $f: X \rightarrow f(X)$ 这个映射一定为满射。

既然有了基本的工具，可以定义序关系（大小关系）

Definition 1.3 (半序/偏序). 集合中某些元素存在 or 可以赋予 序关系如下

- 自反性： $a \prec a$
- 对称性： $a \prec b, b \prec a \Leftrightarrow a = b$
- 传递性： $a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$

则这个集合按关系 \prec 是一个偏序集 (半序集)

在这些元素内，对这个序关系进行统一化，使得这些能够比较的元素之间，任意两个可以互相比，构成格 (lattice).

Definition 1.4 (格). Suppose a partial ordered set P have that:

$$a \prec b, \forall a, b \in P$$

Then called $a := a \wedge b$ 下确界, $b := a \vee b$ 上确界. 集合 P 称为格.

继续加强这个序关系——在整个集合内完备化，使得每两个元素都可比较——全序的（线性序的）。

接下来给出 Zorn Lemma.

Lemma 1.5 (Zorn 引理). Suppose set P is a nonempty partial ordered set and every total ordered subset have a upper boundary in P , then P must at least has a Maxium Element.

Remark. Zorn 引理意指：我给定一个集合的序关系，诱导出的这每一个比较链，都不会飘到无穷之外，就算写不出来我们知道有一个最大元在更大的空间里存在。

2 Topological Spaces and Continuous Functions

2.1 点集拓扑的结构笔记

点集拓扑学的整体逻辑思路如下：

开集公理 \rightarrow 拓扑空间 \rightarrow 闭集 Def \rightarrow 聚点和边界点 \rightarrow 闭包 \rightarrow 稠密性

接下来按此逻辑进行从公理到各个定义和定理的演绎。

Definition 2.1 (拓扑/拓扑空间/开集公理). 集合 X 上的一个拓扑 (topology) 是 X 上选出的一个子集族 \mathcal{F} , 满足以下条件

- 1) \emptyset 和 X 在 \mathcal{F} 中,
- 2) \mathcal{F} 中子集的任意并在 \mathcal{F} 中,
- 3) \mathcal{F} 中子集的有限交在 \mathcal{F} 中.

一个指定了拓扑 \mathcal{F} 的集合 X 称为一个**拓扑空间 (topological space)**, 记为 (X, \mathcal{F}) .

Remark. 其实拓扑就是在集合里选择开集的取法。换言之, 拓扑空间就是指定了什么是开集的空间, 当然开集不能乱取, 拓扑不能随意定义, 限制如三条公理所示——**自身和空集、有限交、任意并**。

介绍两种极端情况。

Example 2.1 (平凡拓扑). $\mathcal{F} := \{\emptyset, X\}$

Example 2.2 (离散拓扑). $\mathcal{F} := \{A \mid \forall A \subset X\}$. X 的任意子集均属于 \mathcal{F}

规定了开集, 注意是我们规定的不是自然的, 接下来按补集定义闭集。

Definition 2.2 (闭集). 拓扑空间有一个开子集 $X \setminus A$, 则称子集 A 为一个**闭集**.

由于定义完全是按照开集的补集定义的, 根据开集公理以下定理是自明的。

Definition 2.3 (闭集). 以下集合是闭集:

- 1) \emptyset, X 是既开又闭的,
- 2) 闭集的有限并是闭的,
- 3) 闭集的任意交也是闭集.

Remark. 注意一个集合不一定是非开即闭的! 显然有以下结论:

- 1) **平凡拓扑空间**的两个集合都是既开又闭的,
- 2) **离散拓扑空间**的任意子集均是既开又闭的.

- 3 Connectedness and Compactness**
- 4 Countability and Separation Axioms**
- 5 The Tychonoff Theorem**
- 6 Metrization Theorems and Paracompactness**
- 7 Complete Metric Spaces and Function Spaces**
- 8 Baire Spaces and Dimension Theory**
- 9 The Fundamental Group**
- 10 Separation Theorems in the Plane**
- 11 The Seifert-van Kampen Theorem**
- 12 Classification of Surfaces**
- 13 Classification of Covering Spaces**
- 14 Applications to Group Theory**