

Notes for Seminar

于向博

Dec. 14. 2025

Contents

1	Intro & Abstract 课题简介与摘要	2
2	Governing Equations of Flexible Plate 柔性板控制方程	3
2.1	Fundamental Axioms	3
2.2	Kinematics 运动学	4
2.2.1	Deformation Geometry 变形几何学	4
2.2.2	Strain Theory 应变理论	6
2.2.3	Stress Theory 应力理论	7
2.3	Conservation Laws from Variational Principles 从变分法到守恒律	7
2.3.1	Mass Conservation 质量守恒	7
2.3.2	Energy Conservation 能量守恒	8
2.3.3	Space Symmetry 空间对称性	8
2.4	Constitutive Relation 本构关系	9
2.5	Governing Equations 控制方程	10
3	Toy Project: Dynamics on Double Pendulum 双摆动力学	11
3.1	Governing Equations 控制方程	11
3.2	Equilibrium & Linear Stability 平衡点与线性稳定性	13
3.3	Bifurcation & Parameter Sensitivity 分岔与参数敏感性	13
3.4	Poincaré Section & Floquet Analysis Poincaré 截面与 Floquet 分析	13
4	From Finite to Infinite: Semigroup Theory 算子半群引论	14
4.1	Motivation 动机	14
4.2	Fundamental Thesis 基础理论	14
4.3	Example: Oscillation via Semigroup 案例：半群方法分析振动方程	15

1 Intro & Abstract 课题简介与摘要

硕士课题题目：柔性结构密频模态建模与动力学研究.

主要研究内容概况为以下三点：

- 1) 建立柔性结构的动力学模型——以柔性梁、板为代表；
- 2) 分析柔性 (高维) 动力系统的全局动力学行为 (Global Dynamical Performance)；
- 3) 建立一套可工程计算分析的柔性结构动力学分析方法。

开展本课题研究所需要的理论基础和数值基础颇多，包括不限于：分析力学 (Analytical Mechanics)、连续介质力学 (Continuum Mechanics)、动力系统理论 (Dynamical System)、泛函分析 (Functional Analysis)、拓扑学 (Topology)、微分几何 (Differential Geometry)。

连续介质力学能够完整描述柔性结构线弹性范围内的任意有限变形行为；**动力系统理论**给出了一套研究有限维动力学系统的方法论；为研究系统的全局大范围时间演化行为，**拓扑学**、**微分几何**工具被引入动力系统理论；为将动力系统方法推广到无限维，必须使用**泛函分析**中的**算子半群 (Semigroup Theory)**方法；若意图对控制方程 (通常非线性) 进行数值求解，往往需要泛函分析中的**广义函数理论 (分布理论)**。

限于水平，本次组会主要介绍以下三点：

- 1) 推导柔性板系统的控制方程；
- 2) 以双摆 (Double Pendulum) 为有限维训练案例，讨论有限维系统的动力学行为；
- 3) 介绍无限维动力系统的分析方法——算子半群理论 (Semigroup Theory)。

2 Governing Equations of Flexible Plate 柔性板控制方程

2.1 Fundamental Axioms

先给出连续介质力学的基本假设，CM 只能解决满足此类假设的力学问题：

- 1) 连续体假设 (Continuum Hypothesis)
 - 2) 局部作用公理 (Locality Axiom)
 - 3) 决定性公理 (Determinism Axiom)
 - 4) 客观性公理 (Objectivity) 亦称为时空无差异公理 (Axiom of Material Frame Indifference)
- 整个连续介质力学理论体系需要仅需要这三条公理 (和一条假设) 作为根基。

Axiom 2.1 (Continuum Hypothesis). 所有关心的物质是空间上的连续分布场；场量在空间中处处有定义且可微。

场量函数 $\in C^1$ 或更高级函数空间

Axiom 2.2 (Locality Axiom). 物质点响应仅依赖于其所在位置的当前状态 (或其有限邻域)，不依赖远场的瞬时状态。

应力应变等局域量函数: $\sigma = \hat{\sigma}(x, t)$

Axiom 2.3 (Determinism Axiom). 给定物质点的当前状态 (响应) 是唯一确定的。

任何物理量均是时间的单值函数，保证存在唯一性

Axiom 2.4 (Objectivity Axiom). 本构关系在任何刚体运动下不变；物理规律不依赖观察者坐标系。

Remark. 公理描述的物质是：一类局部微分型连续介质。这五条公理不是颠扑不破的，而是可以根据研究问题变化的。例如：Peridynamics 近场动力学通过推广 Locality Axiom 将此框架推广到含有非局部作用的问题上。属于采用了一套新的推广的物质本体论 ontology. 换言之，Continuum Mechanics 是 Peridynamics 在局部条件下的近似。

Remark. **Kinematics** 仅需要连续性假设和客观性公理。局部作用公理和决定性公理仅在本构方程中起作用。

接下来仅通过这三条公理和一条假设推导柔性薄板的动力学方程，先定义研究对象：

Definition 2.5 (Thin Plate). 如果一个平面变形体在纤维的两个主方向上承受内力和弯矩，则称这个变形体是可变性薄板。

从基本公理开始，推导可变性薄板的运动学，根据变分原理通过 Neother Theorem 推导系统的守恒定律，建立控制方程。本构方程部分直接采用 Cauchy Method 导出的各项同性弹性体本构关系。

2.2 Kinematics 运动学

2.2.1 Deformation Geometry 变形几何学

Fundamental Definition 基本定义

根据连续性假设2.1, 薄板上的任意一点都不会分裂或消失。可以在薄板上定义连续的物质点编号 (物质坐标), 此参考空间定义为未变形时刻物质构型, 随时间一致变化、无间断、无跳跃。数学上, 薄板模型上一个二维可微流形 Ω_0 , 嵌入三维欧式空间 \mathbb{R}^3 . 按物质坐标建立参考构型与 Lagrangian Description. 薄板上任意一点

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{G}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{G}_i 为参考构型中基矢量. 全部点集构成二维流形 $\Omega_0 = \mathcal{M}^2$

$$\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

对于变形的任意时刻 t , 变形后的物质点构成现时构型 Ω_t , 采用 Eulerian Description.

$$\Omega_t \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

薄板被视为一个光滑曲面在三维空间变形运动。考察现时构型 Ω_t 与参考构型 Ω_0 的关系, 构造变形映射

$$\varphi : \Omega_0(\mathbf{X}) \rightarrow \Omega_t(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = x^i \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

其中 \mathbf{g}_i 为现时构型中基矢量.

Deformation Gradient 变形梯度

变形映射完备地反映了物质的变形运动。为分析物质的变形运动, 对变形映射求微分, 构造变形梯度张量 \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{g}_i \mathbf{G}_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

注意, 变形梯度是正定阵.

变形梯度是连续介质运动学的核心, 其沟通了现时构型和参考构型, 是物质变形运动的微分表达。接下来为了分析运动、变形与工程应变, 以变形梯度为基础继续分析。

Microelement Transforms 微元变换

对现时构型中物质点位置矢量做微分获得线元矢量 $d\mathbf{x}$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.6)$$

对于薄板, 使用 Jacobian 来表征面元变换关系

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.7)$$

则构型间面积变换公式

$$d\mathbf{x} = J d\mathbf{X} = \det(\mathbf{F}) d\mathbf{X} \quad (2.8)$$

Velocity / Acceleration Field 速度加速度场

在现时构型下, 速度显然有定义式

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.9)$$

进一步求时间导数, 加速度场

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

为了将速度与变形联系起来, 使用变形梯度张量的导数, 引入速度梯度 \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}_{,t} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.11)$$

Material Derivative & Reynolds Transport Theorem 物质导数与输运定理

Definition 2.6 (Material Derivative). for any time t , a position \mathbf{x} in current configuration Ω_t and its conjection in reference configuration Ω_0 , define the time derivative for a physical quantity $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} := \left. \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_{,t} \Big|_{\mathbf{X}}$$

Theorem 2.7 (RTT). Let Ω_t be a control volume moving with velocity \mathbf{v} at time t , and $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ be a physical quantity defined in both the reference configuration Ω_0 and the current configuration Ω_t . The time derivative of the integral of \mathbf{A} over the control volume Ω_t is given by:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{A} dV = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dV + \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{A} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$$

where $\partial \Omega_t$ is the boundary of the control volume, \mathbf{v} is the velocity of the control surface, and $\hat{\mathbf{n}}$ is the outward unit normal vector on the boundary.

Cauchy-Green Deformation Tensor 变形张量

在参考构型中, 线元做内积得到

$$dS = (d\mathbf{x})^T \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})^T \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} \quad (2.12)$$

在现时构型中，线元内积表达为

$$dS = (d\mathbf{X})^T \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

由于变形梯度是酉的，其转置与逆相等

$$\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \quad (2.14)$$

参考构型与现时构型的 Cauchy-Green Deformation Tensor 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

也即，构型中线元内积表达为

$$\begin{aligned} dS &= d\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{x} \\ dS &= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.2.2 Strain Theory 应变理论

为方便介质变形的分析，引入长度平方的差值衡量长度变化. 在参考构型中展开：

$$|d\mathbf{S}_t|^2 - |d\mathbf{S}_0|^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (c_{ij} - I) dX^i \cdot dX^j \quad (2.17)$$

利用其定义 Lagrange Strain:

$$|d\mathbf{S}_t|^2 - |d\mathbf{S}_0|^2 = (c_{ij} - \delta_{ij}) dX^i \cdot dX^j = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.18)$$

也即

$$\mathbf{E} = \mathbf{c} - \mathbf{I} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.19)$$

同理，在现时构型下展开，定义 Euler Strain:

$$|d\mathbf{S}_t|^2 - |d\mathbf{S}_0|^2 = (\delta_{ij} - C_{ij}) dx^i \cdot dx^j = d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

也即

$$\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F} \mathbf{F}^T) \quad (2.21)$$

显然，变形张量和应变张量都是对称的。

2.2.3 Stress Theory 应力理论

当物质体元受力时，我们可以将力按照作用位置简单分为两类：

- 1) **Body Force 体力**：分布在体积上；
- 2) **Surface Force 面力**：作用在物质表面上。

引入 Cauchy Stress tensor 来描述现时构型下，物质每个点的面力密度。设面元 $d\mathbf{a}$ ，法向量 $\hat{\mathbf{n}}$ ，Cauchy Stress 描述通过该面元的表面力为

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.22)$$

注意，Cauchy Stress 描述现时构型的面应力。

将其投射到参考构型中，按微元变换关系，Cauchy Stress 描述为

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} = J\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.23)$$

在参考构型中定义对应的应力——Piola-Kirchhoff Stress (第一类)

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.24)$$

给定了参考构型和现时构型应力状态的关系。注意，第一 Piola-Kirchhoff stress 是非对称的。

为描述材料内部的应力相应，符合各项同性材料的线弹性情况，定义本构关系中的第二 Piola-Kirchhoff stress

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \quad (2.25)$$

第二 Piola-Kirchhoff stress 是对称的，描述参考构型中的内应力状态。

2.3 Conservation Laws from Variational Principles 从变分法到守恒律

本节基于三个公理和连续性假设，利用变分方法和 Noether theorem 直接获得连续介质力学守恒律的强形式。

其中，连续性假设 \rightarrow 系统质量守恒/连续性方程；时间平移对称性 \rightarrow 能量守恒；空间对称性 \rightarrow 线动量和角动量守恒。

2.3.1 Mass Conservation 质量守恒

根据连续性假设，物质量属于连续函数空间，不能出现突变。也即，密度函数 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 作为一种物理量也是只能连续的平滑运动的。这说明，质量在体积元之间是连续平滑变化的，质量不能在某点创造或突然消失，总能找到最小的系统使得质量守恒。不妨设控制体 \mathcal{B}_t ，控制体内质量为

$$M(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.26)$$

其不随时间变化，也即，求物质导数

$$\frac{D}{Dt} M(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (2.27)$$

按 Reynolds transport theorem,

$$\frac{D}{Dt} M(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \quad (2.28)$$

根据 Gauss theorem, 将积分域统一为体积域

$$\int_{\mathcal{B}_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{B}_t} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (2.29)$$

对控制体内局部某点有强形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.30)$$

此为连续介质力学的连续性方程/质量守恒方程。

2.3.2 Energy Conservation 能量守恒

为了从公理推导出守恒方程，我们先引入 Noether 定理。

Theorem 2.8 (Noether Theorem). 假设物理系统由 Lagrangian $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ 描述，其中 q_i 是广义坐标， t 是时间。如果 Lagrangian 对某种连续变换不变 (对称性的李群描述)，则起对应一个守恒量 J 由以下形式给出：

$$\frac{d}{dt} J = 0$$

Remark. Noether 定理还有一个更正式的极小元的李群描述，好像利用了纤维丛等知识。暂时还不会。

根据客观性公理，无论从哪个时刻开始，只要连续体的初始构型不变，在相同作用条件下，一定有同样的响应，这就是时间平移对称性。时间平移对称性 (时间均匀性) 对应时间变换 $\mathcal{T} : t \mapsto t' = t + \epsilon$ 下守恒流存在。对超弹性体，系统状态通过 Lagrangian $\mathcal{L}(\mathbf{X}, t)$ 刻画

$$\mathcal{L} = T - W + V = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 dV - \int_{\mathcal{B}_t} W dV + \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \Phi(\varphi) dV \quad (2.31)$$

其中， T 为动能函数， W 为应变能函数， V 为体力的势能函数。

2.3.3 Space Symmetry 空间对称性

空间平移对称性

根据客观性公理, 在空间任意位置, 物理规律相同, 这就是空间平移对称性。根据 Noether 定理, 可以构造一个空间平移变换, 证明空间平移变换群作用下, 系统的动量的空间导数是 0.

空间旋转对称性

根据客观性公理, 在空间中任意方向上, 物理规律相同, 旋转对称性的直接结果是**角动量守恒**。鉴于角动量平衡方程的结果不是复杂的 PDE, 略去推导和证明。直接给出结果。

空间旋转对称性的结果是: Cauchy Stress 是二阶对称张量

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad (2.32)$$

2.4 Constitutive Relation 本构关系

具备了守恒律的行为约束, 还应该材料表现的表征, 这就是本构方程。从确定性公理、局部作用公理、客观性公理出发, 推导一般各向同性弹性体的本构方程。

由确定性公理和局部作用公理, Cauchy 应力可以表示为变形历史的泛函 $\mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow -\infty}^t[\mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau)] \quad (2.33)$$

根据客观性公理, 本构关系在不同坐标系下相同。引入观察者变换 $\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$, 其中 $\mathbf{Q}(t)$ 为任意正交张量, 本构方程满足

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad (2.34)$$

带入本构泛函获得约束

$$\mathcal{F}[\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau)] = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}[\mathbf{F}(\tau)]\mathbf{Q}(t)^T, \quad \forall \mathbf{Q}(\tau) \quad (2.35)$$

不考虑具有记忆效应的材料, 则物质变为简单弹性材料。定义应变能密度函数 W , 对于超弹性材料

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}\mathbf{F}^T, \quad J = \det \mathbf{F}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.36)$$

考虑简单情况, 材料在参考构型中为各项同性材料, 则 W 为应变张量不变量的函数。对于各向同性简单弹性体, W 可以写作 \mathbf{C} 和 \mathbf{E} 的三个主不变量的函数:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.37)$$

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], \quad I_3 = \det \mathbf{C}$$

在小应变下, 可以将应变能函数 W 线性化。小应变假设下, Green-Lagrange 应变近似为无穷小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T), \quad \mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.38)$$

保留 W 中关于 ϵ 的二次项，令参考构型中无初始应力，各向同性线弹性简单弹性体应变能函数变为

$$W = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \epsilon)^2 + \mu \text{tr} (\epsilon^2) \quad (2.39)$$

其中， λ 和 μ 为 Lamé 常数。对 ϵ 求导数获得 Cauchy 应力

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} = \lambda (\text{tr} \epsilon) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon = 2\mu \epsilon + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (2.40)$$

至此，连续介质力学原理推导的薄板动力学方程具有唯一解。

2.5 Governing Equations 控制方程

通过守恒方程和本构关系组装薄板的控制方程。

3 Toy Project: Dynamics on Double Pendulum 双摆动力学

双摆是典型的两自由度非线性动力系统。考察其无阻尼空间中，无激励下，任意初始条件的动力学响应，在此条件下，双摆系统为保守系统。

对于保守系统，使用 Hamiltonian 力学体系能够快速搭建相空间，揭示系统的动力学本质。

3.1 Governing Equations 控制方程

Selecting the generalized coordinates

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2$$

where θ_i represent the angular displacements of the double pendulum.

Then the generalized velocities make

$$\dot{q}_1 = \dot{\theta}_1, \quad \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2$$

The positions of Mass m_1 and m_2 are

$$\mathbf{r}_1 = l_1 [\sin q_1, \cos q_1]^T \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_2 [\sin q_2, \cos q_2]^T \quad (3.1)$$

The velocities of Masses are

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = l_1 \dot{q}_1 [\cos q_1, -\sin q_1]^T \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + l_2 \dot{q}_2 [\cos q_2, -\sin q_2]^T \quad (3.2)$$

The kinetic energy of the pendulum masses can be written as:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2 \quad (3.3)$$

where m_i are the mass, l_i are the length of the pendulums.

Simplifying:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \quad (3.4)$$

The potential energy is given by the gravitational potential energy

$$V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 - m_2 g l_2 \cos q_2 \quad (3.5)$$

Then the Lagrangian \mathcal{L} is defined as the difference between the kinetic and potential energies:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (3.6)$$

Simplifying

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos q_1 + m_2gl_2 \cos q_2 \quad (3.7)$$

To transition to Hamiltonian mechanics, we need to perform a Legendre transformation. The canonical momentum conjugate to $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \quad (3.8)$$

Simplifying:

$$\begin{aligned} p_1 &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1 + m_2l_1l_2\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \\ p_2 &= m_2l_2^2\dot{q}_2 + m_2l_1l_2\dot{q}_1 \cos(q_2 - q_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Solving for \dot{q}_1, \dot{q}_2

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{l_2p_1 - l_1 \cos(q_2 - q_1)p_2}{l_1^2l_2[m_1 + m_2 \sin^2(q_2 - q_1)]} \\ \dot{q}_2 &= \frac{m_2l_2p_1 \cos(q_2 - q_1) - (m_1 + m_2)l_1p_2}{-l_1l_2^2[m_2^2 \sin^2(q_2 - q_1) + m_1m_2]} \end{aligned} \quad (3.10)$$

The Hamiltonian H is given by the sum of the kinetic and potential energies expressed in terms of the generalized coordinates and conjugate momenta:

$$\begin{aligned} H = T + V &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \\ &\quad - (m_1 + m_2)gl_1 \cos q_1 - m_2gl_2 \cos q_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Thus, the Hamiltonian of the system is:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1l_1^2} + \frac{p_2^2}{2m_2l_2^2} - \frac{p_1p_2 \cos(q_2 - q_1)}{m_1m_2l_1l_2} + m_1gl_1 \cos q_1 + m_2g(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) \quad (3.12)$$

The equations of motion can be derived using Hamilton's canonical equations:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.13)$$

From the Hamiltonian, we compute the time derivative of q_1, q_2 :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1}{m_1l_1^2} - \frac{p_2 \cos(q_2 - q_1)}{m_1m_2l_1l_2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{m_2l_2^2} - \frac{p_1 \cos(q_2 - q_1)}{m_1m_2l_1l_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

These match the generalized velocity as expected.

Now compute the time derivative of p_1, p_2 :

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{p_1 p_2 \sin(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} - (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 \\ \dot{p}_2 &= \frac{p_1 p_2 \sin(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} - m_2 g l_2 \sin q_2\end{aligned}\tag{3.15}$$

These equations corresponds to generalized force arising from the gravitational torque acting on the pendulums.

Thus, the Hamiltonian system of equations describing the dynamics of the pendulums is:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{p_1}{m_1 l_1^2} - \frac{p_2 \cos(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{p_1 p_2 \sin(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} - (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{m_2 l_2^2} - \frac{p_1 \cos(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} \\ \dot{p}_2 &= \frac{p_1 p_2 \sin(q_2 - q_1)}{m_1 m_2 l_1 l_2} - m_2 g l_2 \sin q_2\end{aligned}\tag{3.16}$$

This set of first-order differential equations describes the dynamics of double pendulum under full nonlinear regime, and it can be used to study its behavior for arbitrary initial conditions and without relying on small-angle approximations.

3.2 Equilibrium & Linear Stability 平衡点与线性稳定性

Derive the equilibrium of the Hamiltonian system by the governing equations given by 3.16. Equilibriums have conditions:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= 0 \\ \dot{p}_i &= 0\end{aligned}\tag{3.17}$$

where $i = 1, 2$.

Solving for state variables $[q_1, q_2, p_1, p_2]^T$:

$$[q_1, q_2, p_1, p_2]^T = [0, 0, 0, 0]^T, [\pi, 0, 0, 0]^T, [0, \pi, 0, 0]^T, [\pi, \pi, 0, 0]^T\tag{3.18}$$

3.3 Bifurcation & Parameter Sensitivity 分岔与参数敏感性

3.4 Poincaré Section & Floquet Analysis Poincaré 截面与 Floquet 分析

4 From Finite to Infinite: Semigroup Theory 算子半群引论

4.1 Motivation 动机

Consider the following linear ODE in Banach space X

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0 \in X \quad (4.1)$$

where A is a linear operator on X with domain $D(A) \subseteq X$. If A is bounded, then we expect that

$$e^{At}u_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k u_0}{k!} \quad (4.2)$$

is the solution for Cauchy problem 4.1.

算子半群理论的动机如上文描述的 Cauchy 问题。核心是将本应用于有限维的矩阵指数 (Lie 群生成元) 推广到无限维动力系统问题, 给出了 PDE 方程的解的一种刻画。此时, 这个生成元变成一个抽象函数空间中的算子, 通常在 Banach 空间中。

Example 4.1. We have a development partial differential equation as follow

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, t), \quad x \in \Omega$$

Let operator $V(t) = u(t, \cdot)$, which gives $V(t) : \mathbb{R} \rightarrow X \ni x$, thus

$$\frac{dV}{dt} = AV(t), \quad A := \Delta$$

which is an abstract ODE dynamical problem.

4.2 Fundamental Thesis 基础理论

We shall introduce the C_0 semigroup.

Definition 4.1 (C_0 semigroup). A family of bounded linear operators $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ on a Banach space X is called **strongly continuous semigroup** or C_0 semigroup if

- 1) $T_0 = I$;
- 2) $T(t+s) = T(t)T(s)$
- 3) $t \rightarrow T(t)x$ is continuous in $t \geq 0, \forall x \in X$

Definition 4.2. The infinitesimal generator $A : D(A) \rightarrow X$ of a C_0 semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ is the operator

$$Ax := \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

where $D(A)$ is the set containing all the vectors in X such that $T(t)x$ is right differentiable.

Hille-Yosida Theorem 略去 (定理内容和证明较长)

简要记为: A 为有界闭算子、Cauchy 问题有唯一解 \Rightarrow 算子 A 生成一个强连续半群 e^{At} , 系统的解存在且唯一。

4.3 Example: Oscillation via Semigroup 案例: 半群方法分析振动方程

Consider a simple hyperbolic PDE system which describes the phenomenon on oscillation of beam. Consider the following equation

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + f(u(x, t)), \quad (4.3)$$

where $u(x, t)$ is the displacement field of the beam, $c = \frac{EI}{\rho A}$ is the physical parameter of the beam, $f(u(x, t))$ is the function describing the external motivation.

Suppose there's no motivation for the system, simplifying

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}, \quad (4.4)$$

which is a typical PDE describing the vibrations of the beam.

Let's analysis the oscillation behavior of this equation via semigroup method.

Define linear differential operator $L = c \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, system equation can be rewritten as

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Lu(x, t) \quad (4.5)$$

We shall transform the system into an abstract operator question. Define an operator in a proper function space to describe the system.

First, introduce the time-dependent vector $z(t) = [u(t), \dot{u}(t)]^T$, thus the system

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ c \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Let linear operator $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ L & 0 \end{bmatrix}$, where I is identity operator.

To analysis the spectrum of the system, we shall compute the eigenvalues and eigenvectors of the system.

First, consider the eigenvalue problem of operator A :

$$Av = \lambda v \quad (4.7)$$

where λ is the eigenvalues, $v = [v_1, v_2]^T$ is the corresponding eigenvectors. Substituting the expression

of A , yields the following equation

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Simplifying we have the following equation

$$\lambda L v_2 = \lambda v_2 \quad (4.9)$$

Thus, eigenvalues λ is also the eigenvalues of operator L .

We shall solve the eigenvalues problem of operator L . For linear differential operator L , **solve classic Sturm-Liouville question to compute the λ_n and $u_n(x)$.**

The semigroup theory gives the explicit solution as follow:

$$z(t) = e^{At} z(0) \quad (4.10)$$

where operator e^{At} can be represented as spectral decomposition. Suppose the spectrum of A is composed by sequence λ_n , then

$$e^{At} = \sum_n e^{\lambda_n t} P_n \quad (4.11)$$

where P_n are a sequence of projection operator corresponding λ_n , indicating the contribution of this modal.