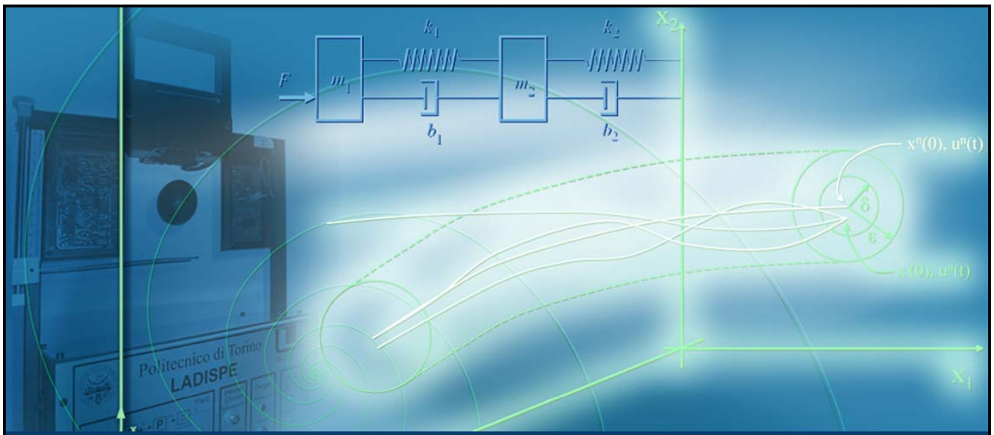


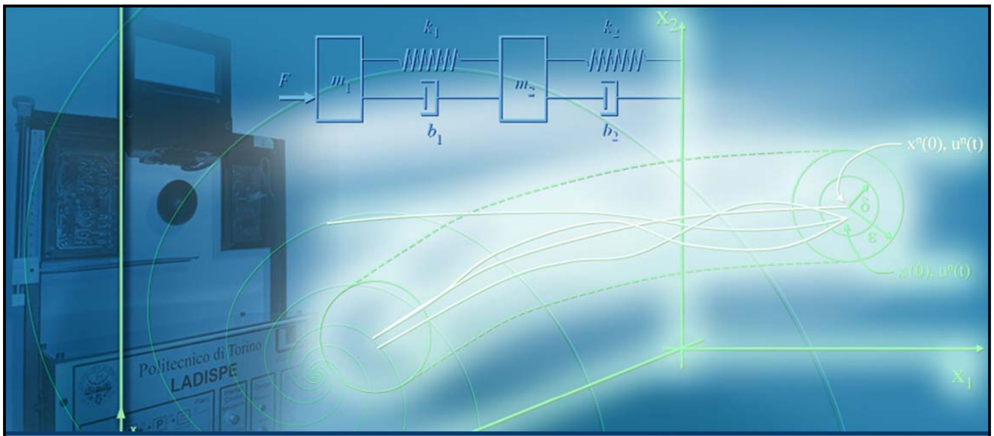
Proprietà strutturali e leggi di controllo

Stima dello stato e regolatore dinamico

Stima dello stato e regolatore dinamico

- Stimatore asintotico dello stato
- Esempi di progetto di stimatori asintotici dello stato
- Regolatore dinamico
- Proprietà del regolatore dinamico
- Esempio di progetto di un regolatore dinamico

2



Stima dello stato e regolatore dinamico

Stimatore asintotico dello stato

Introduzione (1/3)

- L'ingresso $u(\cdot)$ fornito da una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo

$$\boxed{u(\cdot) = -Kx(\cdot) + \alpha r(\cdot)}$$

può essere calcolato solo quando lo stato $x(\cdot)$ risulta completamente accessibile (cioè misurabile)

- L'unica variabile accessibile di un sistema dinamico è l'uscita $y(\cdot)$ che però fornisce, in generale, solo un'informazione parziale sullo stato
- Pertanto nel caso di stato inaccessibile non si può, in generale, realizzare tale legge di controllo anche se il sistema risulta completamente raggiungibile

4

Introduzione (2/3)

- La proprietà di **osservabilità** di un sistema dinamico garantisce la possibilità di **stimare** (ricostruire) lo **stato** $x(\cdot)$ a partire dalla misura di $y(\cdot)$ e dalla conoscenza di $u(\cdot)$
- Vogliamo quindi studiare come si può sfruttare la proprietà di **osservabilità** di un sistema dinamico per ottenere una **stima $\hat{x}(\cdot)$** dello stato $x(\cdot)$
- Poi, studieremo se e come sia possibile impiegare la stima $\hat{x}(\cdot)$ al posto di $x(\cdot)$ per realizzare la legge di controllo per **retroazione statica dallo stato stimato**

$$\boxed{u(\cdot) = -K\hat{x}(\cdot) + \alpha r(\cdot)}$$

5

Introduzione (3/3)

- Nella trattazione considereremo per semplicità un sistema dinamico LTI TC SISO ($q = p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$) descritto dalle equazioni di stato:

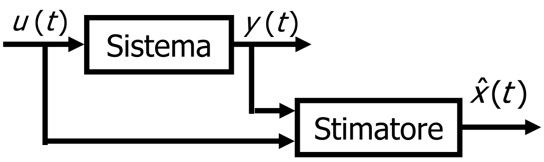
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}}$$

- Tuttavia, i risultati che troveremo saranno validi anche:
  - Per i sistemi LTI TD SISO
  - Per i sistemi LTI MIMO

6

Lo stimatore dello stato

- La **stima dello stato** si può ottenere, come vedremo, sfruttando le caratteristiche di **osservabilità** del sistema mediante opportuni dispositivi detti **stimatori** o **ricostruttori** od **osservatori dello stato**
- Uno **stimatore dello stato** è un sistema dinamico che, utilizzando, come propri ingressi, l'uscita $y(t)$ e l'ingresso $u(t)$ di un sistema dinamico, genera come uscita una stima $\hat{x}(t)$ dello stato



7

Stimatore asintotico dello stato

- Per uno **stimatore dello stato**, si definisce l'**errore di stima** $e(t) \in \mathbb{R}^n$ come la differenza tra lo stato stimato e lo stato vero:

$$\boxed{e(t) = \hat{x}(t) - x(t)}$$

- Uno stimatore per cui l'errore di stima si annulla al tendere del tempo all'infinito è detto **stimatore asintotico dello stato**

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\left\|e(t)\right\| = \lim_{t\to\infty}\left\|\hat{x}(t) - x(t)\right\| = 0}$$

8

Osservazione (1/3)

- L'uso di uno stimatore asintotico dello stato garantisce di ottenere stime con errore asintoticamente nullo
- Infatti, se la dinamica della stima dello stato fosse governata dalle medesime equazioni di stato del sistema, si avrebbe:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$$
$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - \left(Ax(t) + Bu(t)\right) = \\ &= A\left(\hat{x}(t) - x(t)\right) = Ae(t)\end{aligned}$$

9

Osservazione (2/3)

- In tal caso quindi, il comportamento dinamico dell'errore di stima $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ coincide con il movimento libero dello stato del sistema:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \Rightarrow e(t) = \exp(At)e(0)$$

- Per ottenere la condizione

$$\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0$$

bisogna che:
  - Tutti i modi naturali associati agli autovalori di A siano convergenti → sistema asintoticamente stabile

oppure
  - L'errore di stima iniziale sia nullo → $e(0) = 0$

10

Osservazione (3/3)

- Quindi, in generale, non è possibile ottenere la condizione di stima asintotica dello stato

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\|e(t)\| = 0}$$

utilizzando le equazioni

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)}$$

- Per superare tale limite basta usare la misura dell'uscita $y(t)$ nelle equazioni di stato che governano la dinamica della stima dello stato

11

Stimatore asintotico: equazioni dinamiche

- Per tenere conto della misura dell'uscita $y(t)$ nelle equazioni

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)}$$

si può aggiungere il termine di correzione

$$\boxed{-L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)}$$

che dipende dall'errore tra l'uscita misurata $y(t)$ e l'uscita stimata del sistema $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$

- Si ha quindi:

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)}$$

- $L \in \mathbb{R}^{nx1}$ → matrice dei guadagni dello stimatore

12

Stimatore asintotico: errore di stima (1/2)

- Calcoliamo con la nuova struttura:

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)}$$

le proprietà dinamiche dell'errore di stima

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = \\
&= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right) - \left(Ax(t) + Bu(t)\right) = \\
&= A\hat{x}(t) - L\left[C\hat{x}(t) + Du(t) - \left(Cx(t) + Du(t)\right)\right] - Ax(t) = \\
&= A\hat{x}(t) - LC\hat{x}(t) - Ax(t) + LCx(t) = \\
&= \left(A - LC\right)\left(\hat{x}(t) - x(t)\right) = \left(A - LC\right)e(t)
\end{aligned}$$

13

Stimatore asintotico: errore di stima (2/2)

- La dinamica dell'errore di stima è quindi governata dal movimento libero del sistema

$$\boxed{\dot{e}(t) = \left(A - LC\right)e(t) \Rightarrow e(t) = \exp\left[(A - LC)t\right]e(0)}$$

- Pertanto la condizione:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \left\| e(t) \right\| = 0}$$

sarà soddisfatta solo se $A - LC$ ha autovalori asintoticamente stabili

- Si tratta quindi di studiare sotto quali condizioni esiste una matrice L tale da rendere asintoticamente stabili gli autovalori di $A - LC$

14

Stimatore asintotico: calcolo di L (1/3)

- Il problema può essere risolto grazie alla proprietà di osservabilità ed al principio di dualità
- Vale il seguente Teorema:

  Se il sistema dinamico

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}}$$

  risulta completamente osservabile allora è sempre possibile trovare una matrice L tale da assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori della matrice $A - LC$

15

Stimatore asintotico: calcolo di L (2/3)

- Ci siamo quindi ricondotti ad un problema di assegnazione degli autovalori
- Ricordando il principio di dualità:
  (A,C) osservabile $\Leftrightarrow$ (A^T,C^T) raggiungibile
  si può applicare il Teorema di assegnazione degli autovalori che garantisce che è sempre possibile trovare una matrice $L^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ in grado di assegnare ad arbitrio gli autovalori di $A^T - C^T L^T$
- Se il sistema non è completamente osservabile, non si può imporre arbitrariamente la dinamica dell'errore di stima, poiché si possono modificare solo gli o autovalori della parte osservabile

16

Stimatore asintotico: calcolo di *L* (3/3)

- Poiché $A^T - C^T L^T = (A - LC)^T$, il teorema di assegnazione degli autovalori permette di calcolare la matrice dei guadagni L in modo tale da rendere il sistema dinamico descritto da:

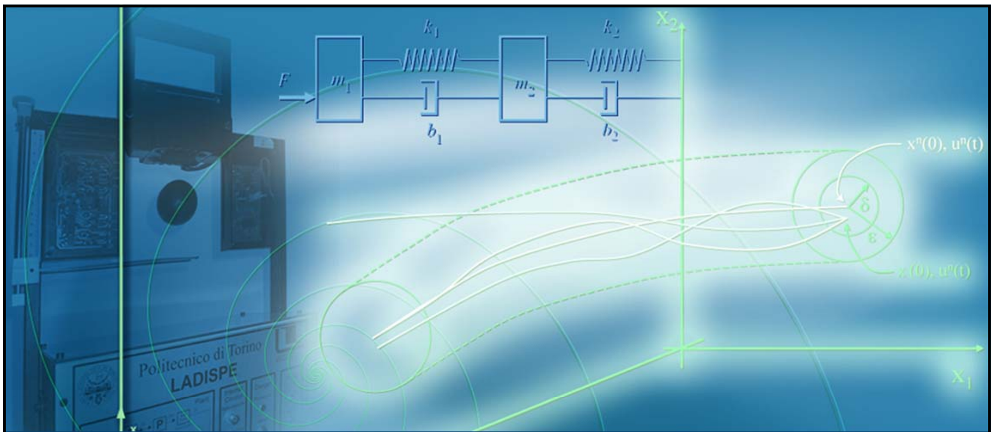
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)\\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}}$$

uno **stimatore asintotico dello stato**

- Per i sistemi LTI TD lo stimatore asintotico assume la forma:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) - L\left(\hat{y}(k) - y(k)\right)\\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) + Du(k)\end{aligned}}$$

17



Stima dello stato e regolatore dinamico

Esempi di progetto di stimatori asintotici dello stato

Esempio 1: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni L di uno stimatore asintotico dello stato:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$$

in modo che la dinamica dello stato stimato sia governata dagli autovalori: $\lambda_{1,des}=-10$, $\lambda_{2,des}=-20$

19

Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice L occorre procedere come segue:
  - Verificare la completa osservabilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare L)
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare allo stimatore $\{\lambda_{1,des}, \ldots \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
  - Si calcola, in funzione degli elementi incogniti di L, il polinomio caratteristico della matrice $A - LC$: $p_{A-LC}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di L applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\boxed{p_{A-LC}(\lambda) = p_{des}(\lambda)}$$

20

Esempio 1: verifica dell'osservabilità

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poiché il sistema è di ordine n = 2, la matrice di osservabilità è della forma:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

21

Esempio 1: verifica dell'osservabilità

- Poiché risulta che:

$$M_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_O) = 2$$

- Allora il sistema è **completamente osservabile**

22

Esempio 1: determinazione di $p_{des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\boxed{\lambda_{1,des} = -10, \lambda_{2,des} = -20}$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$
\begin{aligned}
p_{des}(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{i,des}) = \\
&= (\lambda - \lambda_{1,des})(\lambda - \lambda_{2,des}) = \\
&= (\lambda - (-10))(\lambda - (-20)) = \\
&= \lambda^2 + 30\lambda + 200
\end{aligned}
$$

23

Esempio 1: determinazione di $p_{A-LC}(\lambda)$

- Poiché n = 2, la matrice dei guadagni L è della forma:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
A - LC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \ell_1 \\ 0 & \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\ell_1 \\ -1 & 2-\ell_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

24

Esempio 1: calcolo di $p_{A-LC}(\lambda)$

$$A-LC = \begin{bmatrix} 0 & 1-\ell_1 \\ -1 & 2-\ell_2 \end{bmatrix}$$

- Per cui:

$$\begin{aligned} p_{A-LC}(\lambda) &= \det\left(\lambda I - \left(A-LC\right)\right) = \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -(1-\ell_1) \\ 1 & \lambda-(2-\ell_2) \end{bmatrix}\right) = \\ &= \lambda\left[\lambda-(2-\ell_2)\right]+1\cdot(1-\ell_1) = \\ &= \lambda^2+(\ell_2-2)\lambda+1-\ell_1 \end{aligned}$$

25

Esempio 1: calcolo di L

- Affinché i due polinomi:

$$p_{des}(\lambda) = \lambda^2+30\lambda+200$$

$$p_{A-LC}(\lambda) = \lambda^2+(\ell_2-2)\lambda+1-\ell_1$$

abbiano le stesse radici, per il principio di identità dei polinomi deve risultare:

$$\begin{cases} \ell_2-2=30 \\ 1-\ell_1=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1=-199 \\ \ell_2=32 \end{cases}$$

- Per cui

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -199 \\ 32 \end{bmatrix}$$

26

Esempio 2: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni L di uno stimatore asintotico dello stato:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) - L\left(\hat{y}(k) - y(k)\right)$$
$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) + Du(k)$$

in modo che la dinamica dello stato stimato sia governata dagli autovalori: $\lambda_{1,des} = \lambda_{2,des} = 0.01$

27

Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice L occorre procedere come segue:
  - Verificare la completa osservabilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare L)
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare allo stimatore $\{\lambda_{1,des}, \ldots \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
  - Si calcola, in funzione degli elementi incogniti di L, il polinomio caratteristico della matrice $A - LC$: $p_{A-LC}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di L applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\boxed{p_{A-LC}(\lambda) = p_{des}(\lambda)}$$

28

Esempio 2: verifica dell'osservabilità

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -0.1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

- Poiché il sistema è di ordine n = 2, la matrice di osservabilità è della forma:

$$M_O=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

29

Esempio 2: verifica dell'osservabilità

- Poiché risulta che:

$$M_O=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \rho(M_O)=1<2$$

- Allora il sistema **non è osservabile**
- Non è pertanto possibile determinare lo stimatore asintotico dello stato richiesto, poiché non è sempre possibile trovare una matrice L tale da assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori della matrice $A-LC$

30

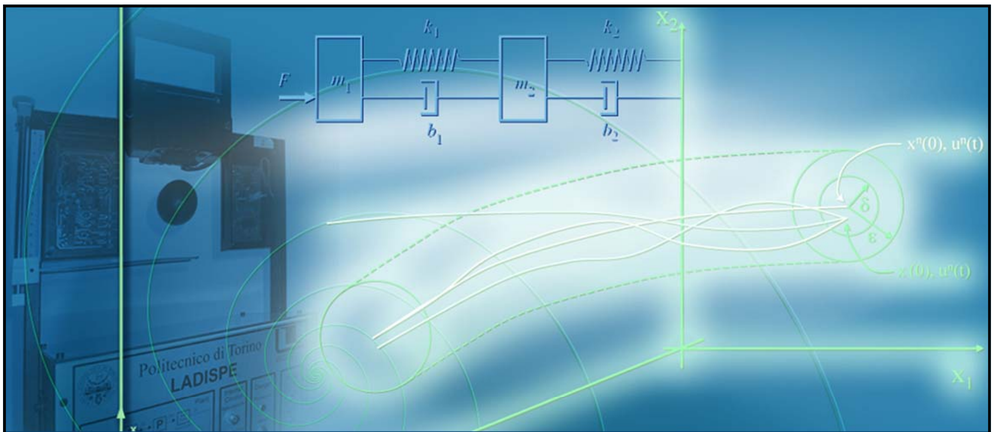
MatLab

- In MatLab, la matrice dei guadagni *L* può essere calcolata, nel caso di autovalori di molteplicità unitaria, mediante l'istruzione `place` sfruttando il principio di dualità: `L = place(A',C',p)'`
  - `A, C:` matrici della rappresentazione di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad & x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \qquad & y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

  - `p:` vettore contenente gli autovalori da assegnare
- Se invece gli autovalori da assegnare non hanno molteplicità unitaria, bisogna usare l'istruzione: `L = acker(A',C',p)'`

31



Stima dello stato e regolatore dinamico

Regolatore dinamico

Stima dello stato e legge di controllo

- Abbiamo visto come l'impiego di uno stimatore asintotico possa fornire la stima dello stato
- Vogliamo quindi studiare come si possono sfruttare i risultati ottenuti finora dal punto di vista del calcolo di:
  - Leggi di controllo per retroazione statica dallo stato
  - Stimatori asintotici dello stato

  al fine di progettare leggi di controllo per assegnazione degli autovalori qualora lo stato non sia completamente accessibile

33

Introduzione

- Anche in questo caso considereremo per semplicità un sistema dinamico LTI TC SISO
  ($q = p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}, D \in \mathbb{R}$)
  descritto dalle equazioni di stato:

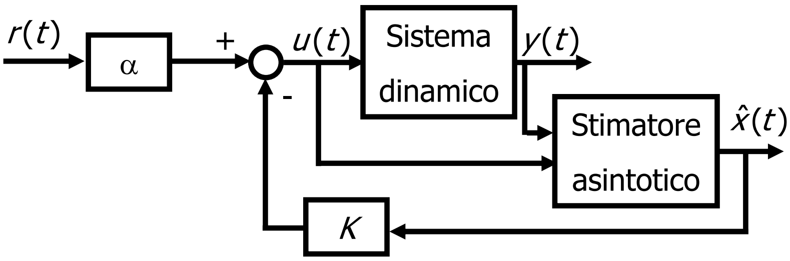
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}}$$

- Tuttavia, i risultati che troveremo saranno validi anche:
  - Per i sistemi LTI TD SISO
  - Per i sistemi LTI MIMO

34

Struttura del regolatore

- ... e retroazionare tale stima



per ottenere una legge di controllo tramite **retroazione statica dallo stato stimato**

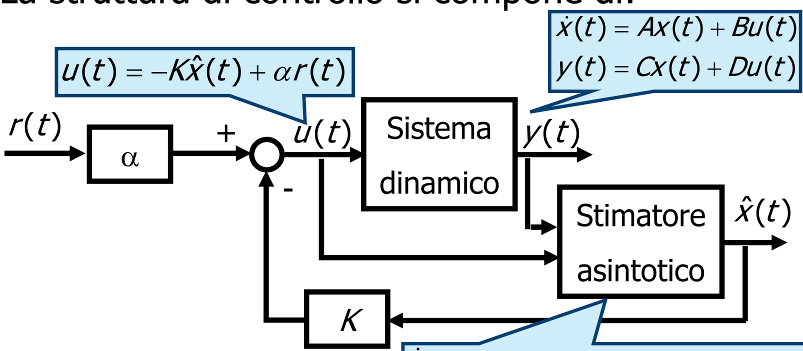
$$\boxed{u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)}$$

- Il dispositivo di controllo ottenuto si dice anche **regolatore dinamico**

35

Descrizione

- La struttura di controllo si compone di:



$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$$

  - Sistema da controllare
  - Legge di controllo
  - Stimatore asintotico dello stato

36

Equazioni del regolatore (1/2)

- Il comportamento dinamico di un sistema controllato con una legge di controllo per retroazione statica dallo stato stimato è descritto dal seguente insieme di equazioni:

$$
\begin{array}{ll}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \rightarrow \text{Eq. stato sistema} \\
y(t) = Cx(t) + Du(t) & \rightarrow \text{Eq. uscita sistema} \\
\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right) & \rightarrow \text{Eq. stato stimatore} \\
\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) & \rightarrow \text{Stima dell'uscita} \\
u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t) & \rightarrow \text{Legge di controllo}
\end{array}
$$

37

Equazioni del regolatore (2/2)

$$
\begin{array}{ll}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \rightarrow \text{Eq. stato sistema} \\
y(t) = Cx(t) + Du(t) & \rightarrow \text{Eq. uscita sistema} \\
\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right) & \leftarrow\!\rightarrow \text{Eq. stato stimatore} \\
\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) & \rightarrow \text{Stima dell'uscita} \\
u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t) & \rightarrow \text{Legge di controllo}
\end{array}
$$

- Pertanto il sistema controllato complessivo è descritto da $2n$ equazioni di stato in $2n$ variabili di stato:
  - n variabili di stato del sistema da controllare
  - n variabili di stato dello stimatore asintotico

38

Progetto del regolatore

- Vogliamo ora studiare come si possono calcolare
  - La matrice dei guadagni K della legge di controllo
  - La matrice dei guadagni L dello stimatore asintotico dello stato

  al fine di:
  - Assegnare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema controllato complessivo
  - Ottenere una stima asintotica dello stato
- Al momento siamo in grado di calcolare K ed L in modo indipendente ma non sappiamo come procedere quando la legge di controllo e lo stimatore interagiscono fra di loro

39

Equazioni dinamiche I (1/2)

- Introducendo come vettore di stato $x_{tot}^{I}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$

  e assumendo $r(t)$ ed $y(t)$ come ingresso ed uscita rispettivamente si possono scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_{tot}^{I}(t) = A_{reg}^{I} x_{tot}^{I}(t) + B_{reg}^{I} r(t) \\ y(t) = C_{reg}^{I} x_{tot}^{I}(t) + D_{reg}^{I} r(t) \end{cases}$$

- Dove

$$A_{reg}^{I} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \qquad B_{reg}^{I} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}\alpha$$

$$C_{reg}^{I} = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix} \qquad D_{reg}^{I} = [D]\alpha$$

40

Equazioni dinamiche I (2/2)

$$A_{reg}^{I} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix}$$

- La forma della matrice A^{I}_{reg} non permette di evidenziare in modo immediato l'influenza delle matrici dei guadagni K ed L sugli autovalori del sistema complessivo
- Pertanto le equazioni di stato non forniscono indicazioni utili ai fini della scelta di K ed L

41

Equazioni dinamiche II

- Si possono ottenere indicazioni più utili se si considera come vettore di stato:

$$x_{tot}^{II}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) - x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

- Assumendo $r(t)$ e $y(t)$ come ingresso e uscita si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_{tot}^{II}(t) = A_{reg}^{II} x_{tot}^{II}(t) + B_{reg}^{II} r(t) \\ y(t) = C_{reg}^{II} x_{tot}^{II}(t) + D_{reg}^{II} r(t) \end{cases}$$

$$A_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0_{n\times n} & A-LC \end{bmatrix} \qquad B_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}\alpha$$

$$C_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} C-DK & -DK \end{bmatrix} \qquad D_{reg}^{II} = [D]\alpha$$

42

Proprietà di separazione (1/2)

$$A^{II}_{reg} = \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0_{n\times n} & A-LC \end{bmatrix}$$

- Si può notare che la matrice A^{II}_{reg} risulta triangolare a blocchi per cui i suoi $2n$ autovalori (che sono gli autovalori del sistema controllato complessivo) sono dati da:

$$\lambda(A^{II}_{reg}) = \{\lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)\}$$

- Tale caratteristica è nota come **Proprietà di Separazione**

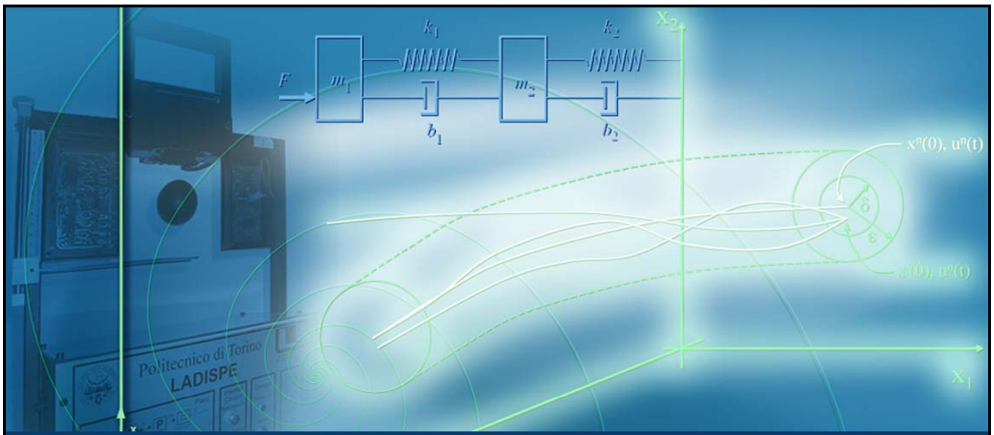
43

Proprietà di separazione (2/2)

- La **Proprietà di Separazione** permette di progettare la legge di controllo per retroazione statica dallo stato stimato (cioè il regolatore) progettando in modo **indipendente** la matrice dei guadagni della legge di controllo ***K*** e la matrice dei guadagni dello stimatore ***L***
- Il **progetto del regolatore** è quindi ricondotto al progetto separato di
  - Una legge di controllo (→ matrice dei guadagni K)
  - Uno stimatore asintotico dello stato (→ matrice dei guadagni L)

  secondo le modalità già studiate

44



Stima dello stato e regolatore dinamico

Proprietà del regolatore dinamico

Matrice di trasferimento

- Si può dimostrare che la matrice di trasferimento ***H*(*s*)** tra l'ingresso ***r*(*t*)** (riferimento) e l'uscita ***y*(*t*)** del sistema controllato mediante regolatore dinamico coincide con quella ottenuta nel caso della retroazione statica dallo stato:

$$\boxed{H(s) = \left\{ (C - DK)\left[sI - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\} \alpha}$$

- Questo dimostra che le dinamiche associate alla stima dello stato non influenzano il comportamento ingresso – uscita del sistema controllato complessivo

46

Funzione di trasferimento

- Nel caso SISO:

$$\boxed{\begin{aligned}H(s) &= \left\{(C-DK)\left[sI-(A-BK)\right]^{-1}B+D\right\}\alpha = \\ &= \frac{\alpha\left\{(C-DK)\,Adj\left[sI-(A-BK)\right]B+D\right\}}{\det\left[sI-(A-BK)\right]}\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ i poli di $H(s)$ sono solo gli autovalori di $A-BK$

- Mentre gli autovalori del sistema controllato complessivo sono gli autovalori di $A-BK$ e gli autovalori di $A-LC$

47

Regolazione

- Come conseguenza di questo risultato si ha che per imporre la condizione di regolazione:

$$\boxed{\bar{y}=\bar{r}}$$

si può calcolare il parametro α della legge di controllo

$$\boxed{u(t)=-K\hat{x}(t)+\alpha r(t)}$$

utilizzando la medesima relazione trovata nel caso della retroazione statica dallo stato

$$\boxed{\alpha=\left[-(C-DK)(A-BK)^{-1}B+D\right]^{-1}}$$

48

Sistemi LTI TD

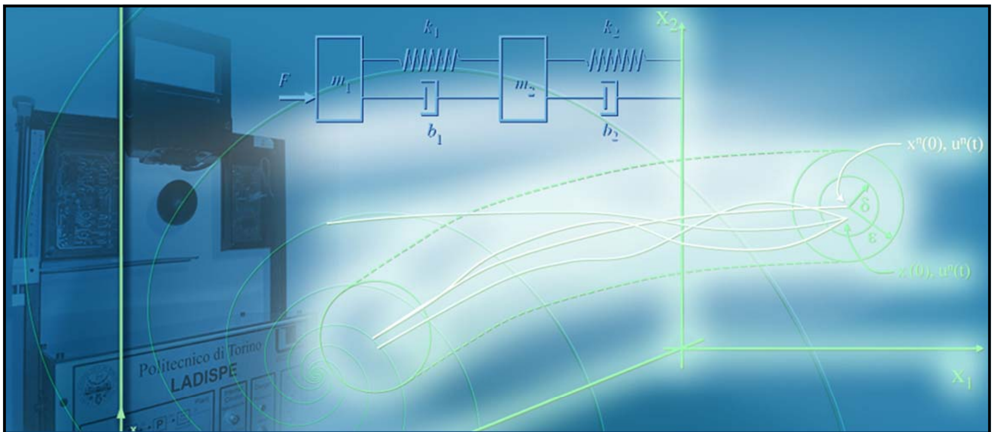
- Risultati analoghi valgono per i sistemi LTI TD. In particolare:
  - La matrice di trasferimento ***H(z)*** tra l'ingresso ***r(k)*** (riferimento) e l'uscita ***y(k)*** è data da:

$$H(z) = \left\{ (C - DK)\left[zI - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\} \alpha$$

  - La condizione di regolazione si ottiene imponendo

$$\alpha = \left\{ (C - DK)\left[I - (A - BK) \right]^{-1} B + D \right\}^{-1}$$

49



Stima dello stato e regolatore dinamico

Esempio di progetto di un regolatore dinamico

Formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

progettare, se possibile, un regolatore dinamico in modo da soddisfare i seguenti requisiti:
  - Autovalori desiderati imposti dalla legge di controllo complessi coniugati e aventi $\omega_{n,des} = 45 \quad \zeta_{,des} = 0.2$
  - Autovalori desiderati dello stimatore dello stato $\lambda_{L1,des} = \lambda_{L2,des} = -100$
  - Regolazione dell'uscita

51

Procedimento di soluzione

- Per il progetto del regolatore dinamico richiesto si può procedere con i seguenti passi:
  - Verifica della completa raggiungibilità ed osservabilità del sistema (in caso contrario non è possibile procedere con il progetto)
  - Nel caso di completa raggiungibilità ed osservabilità, in virtù del principio di separazione, si procede al
    - Calcolo dei parametri K ed α della legge di controllo

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)$$

    - Calcolo della matrice L dello stimatore

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right)$$

52

Verifica della raggiungibilità

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è di ordine n = 2, quindi:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 2$$

- Pertanto il sistema è **completamente raggiungibile**

53

Verifica dell'osservabilità

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è di ordine n = 2, per cui:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 0 \\ 0 & 600 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_O) = 2$$

- Pertanto il sistema è **completamente osservabile**

54

Calcolo di *K*: procedimento

- Per determinare gli elementi della matrice K occorre procedere come segue:
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare $\{\lambda_{K,1,des},\ldots \lambda_{K,n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{K,des}(\lambda)$
  - Si calcola, in funzione degli elementi incogniti di K, il polinomio caratteristico della matrice $A-BK$: $p_{A-BK}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di K applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\boxed{p_{A-BK}(\lambda) = p_{K,des}(\lambda)}$$

55

Determinazione di $p_{K,des}(\lambda)$ (1/2)

- Gli autovalori che la legge di controllo deve assegnare sono dati da:

$$\lambda_{K,1,des} = \sigma_{des} + j\omega_{des}, \quad \lambda_{K,2,des} = \sigma_{des} - j\omega_{des}$$

- Poiché:

$$\sigma_{des} = -\zeta_{des}\omega_{n,des}, \quad \omega_{des} = \omega_{n,des}\sqrt{1-\zeta_{des}^2}$$
$$\omega_{n,des} = 45, \zeta_{des} = 0.2$$

- Si ha:

$$\sigma_{des} = -9, \omega_{des} = 44.09$$
$$\lambda_{K,1,des} = -9 + j44.09, \lambda_{K,2,des} = -9 - j44.09$$

56

Determinazione di $p_{K,des}(\lambda)$ (2/2)

- Dati gli autovalori desiderati:

$$\lambda_{K,1,des} = -9 + j44.09, \lambda_{K,2,des} = -9 - j44.09$$

il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$\begin{aligned} p_{K,des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_{K,1,des})(\lambda - \lambda_{K,2,des}) = \\ &= (\lambda - (-9 + j44.09))(\lambda - (-9 - j44.09)) = \\ &= \lambda^2 + 18\lambda + 2025 \end{aligned}$$

57

Determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$ (1/2)

- Poiché n = 2, la matrice dei guadagni K è della forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9k_1 & -9k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 + 9k_1 & 9k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

58

Determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$ (2/2)

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 + 9k_1 & 9k_2 \end{bmatrix}$$

- Notiamo che la matrice $A - BK$ è in forma compagna inferiore
- Si può quindi determinare direttamente il polinomio caratteristico $p_{A-BK}(\lambda)$ in base ai coefficienti dell'ultima riga:

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 - 9k_2\lambda - 900 - 9k_1$$

59

Calcolo di K

- Affinché i polinomi:

$$p_{K,des}(\lambda) = \lambda^2 + 18\lambda + 2025$$

e

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 - 9k_2\lambda - 900 - 9k_1$$

abbiano le stesse radici, per il principio di identità dei polinomi deve risultare:

$$\begin{cases} -9k_2 = 18 \\ -900 - 9k_1 = 2025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -325 \\ k_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -325 & -2 \end{bmatrix}$$

60

Calcolo di α

- Applicando la condizione per la regolazione di sistemi LTI TC

$$\alpha = \left[-(C-DK)(A-BK)^{-1}B+D\right]^{-1}$$

con i dati

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 900 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ -9\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}600 & 0\end{bmatrix}, D=0, K=\begin{bmatrix}-325 & -2\end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\alpha = -\left(\begin{bmatrix}600 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2025 & -18\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ -9\end{bmatrix}\right)^{-1} = -0.375$$

61

Calcolo di L: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice L occorre procedere come segue:
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare allo stimatore $\{\lambda_{L,1,des}, \ldots \lambda_{L,n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{L,des}(\lambda)$
  - Si calcola, in funzione degli elementi incogniti di L, il polinomio caratteristico della matrice $A-LC$: $p_{A-LC}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di L applicando il principio di identità dei polinomi:

$$p_{A-LC}(\lambda) = p_{L,des}(\lambda)$$

62

Determinazione di $p_{L,des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\lambda_{L,1,des} = \lambda_{L,2,des} = -100$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$\begin{aligned} p_{L,des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_{L,1,des})(\lambda - \lambda_{L,2,des}) = \\ &= (\lambda - (-100))^2 = \\ &= \lambda^2 + 200\lambda + 10000 \end{aligned}$$

63

Determinazione di $p_{A-LC}(\lambda)$ (1/2)

- Poiché $n = 2$, la matrice dei guadagni L è della forma:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} A - LC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 600\ell_1 & 0 \\ 600\ell_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600\ell_1 & 1 \\ 900 - 600\ell_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

64

Determinazione di $p_{A-LC}(\lambda)$ (2/2)

$$A-LC=\begin{bmatrix}-600\ell_1 & 1\\ 900-600\ell_2 & 0\end{bmatrix}$$

- Notiamo che la matrice $A-LC$ è in forma compagna sinistra
- Si può quindi determinare direttamente il polinomio caratteristico $p_{A-LC}(\lambda)$ in base ai coefficienti della prima colonna:

$$p_{A-LC}(\lambda)=\lambda^2+600\ell_1\lambda-900+600\ell_2$$

65

Calcolo di L

- Affinché i due polinomi:

$$p_{L,des}(\lambda)=\lambda^2+200\lambda+10000$$

$$p_{A-LC}(\lambda)=\lambda^2+600\ell_1\lambda-900+600\ell_2$$

abbiano le stesse radici, per il principio di identità dei polinomi deve risultare:

$$\begin{cases}600\ell_1=200\\ -900+600\ell_2=10000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ell_1=0.\overline{3}\\ \ell_2=18.1\overline{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\qquad L=\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.\overline{3}\\ 18.1\overline{6}\end{bmatrix}$$

66