



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Test delle ipotesi

Giovanni Delnevo

PhD Student

Data Science and Computation

Department of Computer Science and Engineering

University of Bologna

Perché usare i test delle ipotesi?

- In un esperimento che implichi l'estrazione di un campione da una popolazione, c'è sempre la possibilità che il fenomeno osservato sia occorso semplicemente a causa di un errore di campionamento.



Test delle ipotesi: quale usare?

- Esistono una miriade di test delle ipotesi (solo oggi ne citeremo 27!). La domanda che sorge spontanea è: Quale test scegliere?
- Ovviamente dipende!
- Da cosa?
 - Da cosa si vuole provare
 - Dalla tipologia dei dati
 - Dalla distribuzione dei dati
 - Dai parametri disponibili
 - ...



Test delle ipotesi: quale usare?

- Oggi vedremo in dettaglio i più utilizzati. In particolare:
 - Z Test
 - T Test
 - Test Chi Quadrato
- Successivamente, faremo una breve carrellata dei cosiddetti test non parametrici.



Domande?



Z Test

- Lo Z Test ha lo scopo di verificare se il valore medio di una distribuzione si discosta significativamente da un certo valore di riferimento. È un test delle ipotesi di tipo parametrico.
- Assunzioni:
 - La popolazione segue una distribuzione normale.
 - La varianza è nota.
- Vedremo in seguito come questi vincoli possono essere rilassati.



Z Test - Procedimento

1. Formulare l'ipotesi nulla (e la rispettiva ipotesi alternativa)
2. Fissare il livello di significatività α
3. Determinare il valore (o i valori) critici
4. Calcolare la statistica Z
5. Si determina se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla



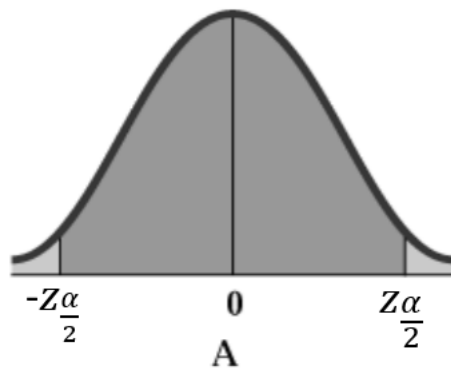
Z Test – 1) Formulare l'ipotesi nulla

- L'ipotesi nulla, H_0 , rappresenta lo stato attuale delle cose.
- Se i valori del campione non sono favorevoli ad H_0 , si conclude che H_0 è falsa. Per cui deve esserci un'altra ipotesi H_1 , opposta ad H_0 , che risulta vera.
- Quando il campione osservato fornisce sufficiente evidenza del fatto che l'ipotesi nulla sia falsa, la si rifiuta (decisione forte).
- Il mancato rifiuto di H_0 NON dimostra che questa sia vera. Semplicemente si conclude che non c'è sufficiente evidenza empirica contraria ad essa (decisione debole).

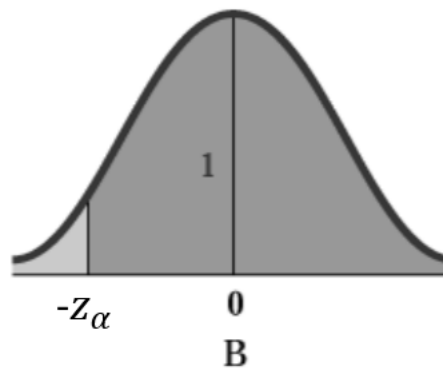


Z Test – 1) Formulare l'ipotesi nulla (2)

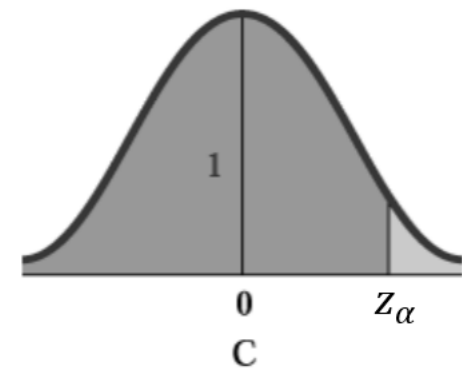
- L'ipotesi nulla contiene sempre un segno di eguale ($=, \geq, \leq$).
- L'ipotesi alternativa non contiene mai un segno di eguale ($\neq, <, >$) e specifica la regione di rifiuto.



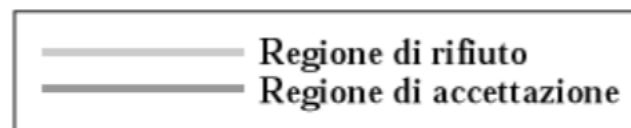
test bilaterale
 $H_1: \mu \neq \mu_0$



test unilaterale sinistro
 $H_1: \mu < \mu_0$



test unilaterale destro
 $H_1: \mu > \mu_0$



Z Test – 2) Fissare il livello di significatività

- Il livello di significatività è la probabilità che lo studio rifiuti l'ipotesi nulla, dato che era vera.
- Rappresenta l'area della regione di rifiuto.
- È solitamente definito a priori.
- I livelli più usati sono:
 - 10%
 - 5%
 - 1%
 - 0.1%



Z Test – 3) Determinare valori critici

- Se il test è a due code, si calcola $1 - \alpha/2$ mentre se il test è ad una coda, si calcola $1 - \alpha$
- Si usa questo valore per determinare il valore critico di z (o i valori critici), usando una cosiddetta tabella Z (riportata nella slide seguente).



Z Test – 3) Determinare valori critici – Tabella Z

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998



Z Test – 3) Determinare valori critici – Tabella Z

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Dato $\alpha = 0.05$ e un test a due code, definire i valori critici



Z Test – 3) Determinare valori critici – Tabella Z

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Dato $\alpha = 0.05$ e un test a due code, definire i valori critici

$$1 - \alpha/2 = 0.975$$

$$z_c = \pm 1.96$$



Z Test – 4) Calcolare la statistica Z

- La statistica Z si calcola con la seguente formula:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- dove:
 - \bar{X} è la media campionaria
 - μ_0 è la media della popolazione
 - σ è la deviazione standard della popolazione
 - n è la dimensione del campione



Z Test – 5) Accettare/rifiutare ipotesi nulla

- Test Bilaterale:
Si rifiuta H_0 se $Z < -z_c$ oppure se $Z > +z_c$
- Test Unilaterale sinistro:
Si rifiuta H_0 se $Z < -z_c$
- Test Unilaterale destro:
Si rifiuta H_0 se $Z > +z_c$



Z Test – Esercizio 1

- I pezzi meccanici tagliati con un procedimento particolare devono avere una lunghezza di 84mm; si sa da precedenti misure che la lunghezza risulta normalmente distribuita con $\sigma = 2.5mm$. Un campione casuale di 25 elementi ha fornito un valore medio di 85mm.
- Sottoporre a test l'ipotesi che le due medie siano uguali contro l'ipotesi che siano diverse con un livello di significatività $\alpha = 0.05$



Z Test – Esercizio 1

1. Abbiamo già le due ipotesi (nulla ed alternativa):

$$H_0: \mu = 84 \text{ e } H_1: \mu \neq 84$$

2. Abbiamo il livello di significatività $\alpha = 0.05$
3. Calcoliamo i valori critici per $\alpha = 0.05$

$$z_c = \pm 1.96$$

4. Calcoliamo la statistica Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{85 - 84}{\frac{2.5}{\sqrt{25}}} = 2$$

5. $Z > z_c$ per cui rifiuto l'ipotesi nulla e accetto l'alternativa. Le medie sono diverse.



Z Test – Esercizio 1b

- Usare gli stessi dati dell'esercizio precedente ma sottoporre a test l'ipotesi che le due medie siano uguali contro l'ipotesi che siano diverse con un livello di significatività $\alpha = 0.01$
- Cosa cambia rispetto all'esercizio precedente?
- I valori critici per $\alpha = 0.01$
 $z_c = \pm 2.57$ (avremmo potuto scegliere anche 2.58)
- Falliamo nel rifiutare l'ipotesi nulla, visto che
$$-z_c \leq Z \leq z_c$$



Z Test – Esercizio 2

- Un'azienda che produce cereali vuole controllare se il peso dei cereali eccede i 368g, peso su cui viene calcolato il prezzo. Il peso è distribuito normalmente con $\sigma = 15g$. Un campione casuale di 16 elementi ha fornito un valore medio di 372.5g.
- Il livello di significatività è $\alpha = 0.05$



Z Test – Esercizio 2

1. Le due ipotesi sono:

$$H_0: \mu \leq 368 \text{ e } H_1: \mu > 368$$

2. Abbiamo il livello di significatività $\alpha = 0.05$

3. Calcoliamo il valore critico per $\alpha = 0.05$

$$z_c = +1.64$$

4. Calcoliamo la statistica Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372.5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{16}}} = 1.2$$

5. $Z \leq z_c$ per cui l'ipotesi nulla non può essere rifiutata.



Z Test – Esercizio 2b

- Usare gli stessi dati dell'esercizio precedente ma sapendo che la dimensione del campione è 36 (e non 16).

- Cosa cambia rispetto all'esercizio precedente?

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372.5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{36}}} = 1.8$$

- $Z > z_c$ per cui rifiuto l'ipotesi nulla e accetto l'alternativa. La media del campione è maggiore di quella della popolazione.



Z Test – Procedimento alternativo con p-value

- È possibile utilizzare un approccio alternativo (ma equivalente) basato sul p-value, il livello di significatività osservato.
- Supponendo l'ipotesi nulla vera, il p-value rappresenta la probabilità di ottenere risultati uguali o meno probabili di quelli osservati durante il test.
- In pratica, serve per capire se la differenza tra il risultato osservato e quello ipotizzato è semplicemente dovuta al caso, oppure se tale differenza è statisticamente significativa
- Le regole decisionali cambiano nel seguente modo. A prescindere dal test (bilaterale,



Z Test – Procedimento alternativo con p-value

- Le regole decisionali cambiano nel seguente modo. A prescindere dal test (bilaterale, unilaterale sinistro e unilaterale destro):
- Si rifiuta H_0 se $p\text{-value} < \alpha$

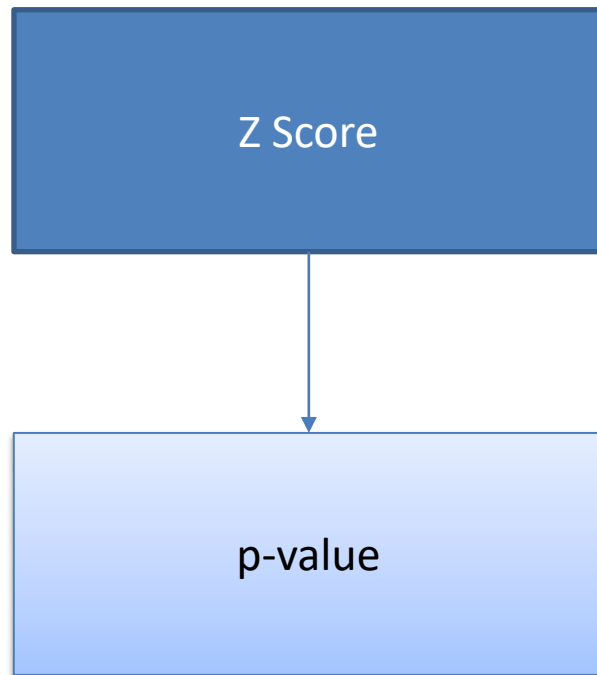


Z Test – Procedimento alternativo con p-value (2)

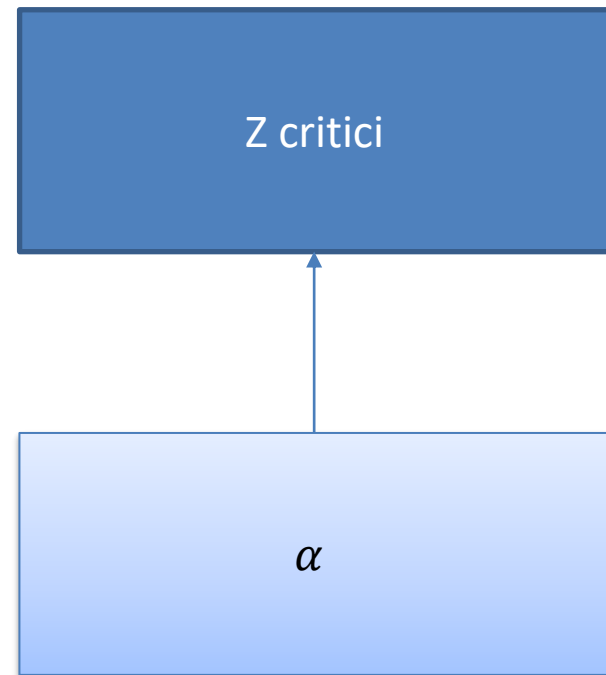
- Il procedimento cambia nel seguente modo.
 - Si salta il punto 3, quindi non si determinano i valori critici.
 - Dopo il punto 4, si calcola il p-value relativo alla statistica Z usando la funzione di ripartizione della distribuzione normale.
 - Si utilizza la regola decisionale della slide precedente.
- Ci sono altri modi per ottenere il p-value della statistica Z ?



Z Test – Confronto



VS



VS



Z Test – Caso di Studio

- Caso di studio riguardante letture di strumenti di misura meccanici.
- Valutazione di 3 dataset distinti:
 - DS1: dataset contenente le letture ottenute dai dati grezzi applicando una prima semantica di validità.
 - DS2: dataset ottenuto da DS1 applicando una semantica «rinforzata».
 - DS3: dataset ottenuto da DS2 selezionando in modo casuale le letture.
- Vogliamo valutare quanto le operazioni di pulizia dei dati hanno trasformato i dati dal punto di vista statistico.



Z Test – Caso di Studio

- Abbiamo quindi valutato le seguenti ipotesi:
 - $H_0: \mu_1 = \mu_2$ e $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
 - $H_0: \mu_2 = \mu_3$ e $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$
 - $H_0: \mu_1 = \mu_3$ e $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$
- Caratteristiche Dataset

Dataset	# Letture	μ	σ
DS1	11,856,582	5,307	86,450
DS2	1,973,493	3,674	17,796
DS3	135,018	3,647	11,852



Z Test – Caso di Studio

- Per ogni test delle ipotesi, si calcolano Z e il rispettivo p-value.
- Il p-value è stato valutato rispetto a due diversi livelli di significatività: 0.05 e 0.01

Ipotesi Nulla	Z	p-value	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
$\mu_1=\mu_2$	-265.36	< 0.0001	Rifiutare	Rifiutare
$\mu_2=\mu_3$	-1.76	0.0784	Fallire nel rifiutare	Fallire nel rifiutare
$\mu_1=\mu_3$	-70.56	< 0.0001	Rifiutare	Rifiutare



Domande?



t test

- Il t test ha lo scopo di verificare se il valore medio di una distribuzione si discosta significativamente da un certo valore di riferimento. È un test delle ipotesi di tipo parametrico.
- Assunzioni:
 - La popolazione segue una distribuzione normale.
 - La varianza **NON** è nota.



t test - Procedimento

1. Formulare l'ipotesi nulla (e la rispettiva ipotesi alternativa)
2. Fissare il livello di significatività α
3. Determinare il valore (o i valori) critici
4. Calcolare la statistica t
5. Si determina se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla



t test – 3) Determinare valori critici

- Se il test è a due code, si calcola $1 - \alpha/2$ mentre se il test è ad una coda, si calcola $1 - \alpha$
- Si usa questo valore, insieme $v=n-1$ (gradi di libertà), per determinare il valore critico di t (o i valori critici), usando una cosiddetta tabella t (riportata nella slide seguente).



t test – 3) Determinare valori critici – Tabella t

α v	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291



t test – 4) Calcolare la statistica t

- La statistica t, che segue la distribuzione di Student con v gradi di libertà, si calcola come:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$$

- dove:
 - \bar{X} è la media campionaria
 - μ_0 è la media della popolazione
 - \hat{S} è la deviazione standard campionaria
 - n è la dimensione del campione

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$



t test – 5) Accettare/rifiutare ipotesi nulla

- Test Bilaterale:
Si rifiuta H_0 se $t < -t_c$ oppure se $t > +t_c$
- Test Unilaterale sinistro:
Si rifiuta H_0 se $t < -t_c$
- Test Unilaterale destro:
Si rifiuta H_0 se $t > +t_c$



t test – Esercizio 1

- Una ditta di semiconduttori afferma che la durata media della vita di funzionamento di alcuni componenti elettronici è di 4000 ore. Un campione di 10 elementi estratto casualmente dalla popolazione ha fornito i seguenti valori (in migliaia di ore):
3.9 3.6 4.1 3.8 4.0 3.7 3.8 3.7 3.9 3.6
- Sottoporre a test l'ipotesi della ditta ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$



t test – Esercizio 1

1. Le ipotesi sono:

$$H_0: \mu = 4 \text{ e } H_1: \mu \neq 4$$

2. $\alpha = 0.05$

3. Calcoliamo i valori critici per $\alpha = 0.05$

$$t_c = \pm 2.262$$

4. Calcoliamo la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} = \frac{38.1}{10} = 3.81$$



t test – Esercizio 1

4. Calcoliamo la deviazione standard campionaria

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - 3.81)^2}{9}} = 0.17$$

Calcoliamo la statistica t

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3.81 - 4}{\frac{0.17}{\sqrt{10}}} = -3.53$$

5. $t < -t_c$ per cui rifiuto l'ipotesi nulla e accetto l'alternativa. Le medie sono diverse.



Domande?



χ^2 test per dati categorici

- Il test chi quadrato è usato per determinare se c'è una differenza statistica significativa tra le frequenze teoriche e quelle osservate in una o più categorie della cosiddetta tabella di contingenza.
- In un campione, si osserva un insieme di eventi E_1, \dots, E_k , che si sono presentati con frequenze o_1, \dots, o_k mentre le frequenze teoriche sono e_1, \dots, e_k .

Evento	E_1	E_2	...	E_k
Frequenze osservate	o_1	o_2	...	o_k
Frequenze attese	e_1	e_2	...	e_k



χ^2 test - Procedimento

1. Formulare l'ipotesi nulla (e la rispettiva ipotesi alternativa)
2. Fissare il livello di significatività α
3. Determinare il valore critico
4. Calcolare la statistica χ^2
5. Si determina se accettare o rifiutare l'ipotesi nulla



χ^2 test – 1) Formulare l'ipotesi nulla

- L'ipotesi nulla è sempre che le differenze tra le frequenze osservate e quelle teoriche sono imputabili completamente al caso.



χ^2 test – 3) Determinare valori critici

- Il valore critico si determina a partire da α e dai gradi di libertà $k-1$ (dove k è il numero di eventi).
- La tabella è riportata nella slide seguente.



χ^2 test – 3) Determinare valori critici - Tabella

Tavola distribuzione CHI-QUADRATO

Gradi di libertà	Livello di Probabilità α									
	1.00	0.99	0.95	0.90	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1				0.02	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.01	0.02	0.10	0.21	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.35	0.58	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.71	1.06	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	1.15	1.61	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.64	2.20	7.84	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	2.17	2.83	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.73	3.49	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	3.33	4.17	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.94	4.87	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	4.58	5.58	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	5.23	6.30	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.89	7.04	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.08	4.66	6.57	7.79	17.12	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	7.26	8.55	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	7.96	9.31	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	8.67	10.09	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.27	7.02	9.39	10.87	21.61	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	10.12	11.65	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	10.85	12.44	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	11.59	13.24	24.94	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	12.34	14.04	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	13.09	14.85	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	13.85	15.66	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	14.61	16.47	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	15.38	17.29	30.44	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	16.15	18.11	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	16.93	18.94	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	17.71	19.77	33.71	39.09	42.56	45.72	49.50	52.34
30	13.79	14.95	18.49	20.60	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	14.46	15.66	19.28	21.43	35.89	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00
32	15.13	16.36	20.07	22.27	36.97	42.59	46.19	49.48	53.49	56.33
33	15.82	17.07	20.87	23.11	38.06	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65
34	16.50	17.79	21.66	23.95	39.14	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96
35	17.19	18.51	22.47	24.80	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.28
36	17.89	19.23	23.27	25.64	41.30	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58
37	18.59	19.96	24.08	26.49	42.38	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88
38	19.29	20.69	24.88	27.34	43.46	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18
39	20.00	21.43	25.70	28.20	44.54	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48
40	20.71	22.16	26.51	29.05	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
41	21.42	22.91	27.33	29.91	46.69	52.95	56.94	60.56	64.95	68.05
42	22.14	23.65	28.14	30.77	47.77	54.09	58.12	61.78	66.21	69.34
43	22.86	24.40	28.97	31.63	48.84	55.23	59.30	62.99	67.46	70.62
44	23.58	25.15	29.79	32.49	49.91	56.37	60.48	64.20	68.71	71.89
45	24.31	25.90	30.61	33.35	50.99	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
46	25.04	26.66	31.44	34.22	52.06	58.64	62.83	66.62	71.20	74.44
47	25.78	27.42	32.27	35.08	53.13	59.77	64.00	67.82	72.44	75.70
48	26.51	28.18	33.10	35.95	54.20	60.91	65.17	69.02	73.68	76.97
49	27.25	28.94	33.93	36.82	55.27	62.04	66.34	70.22	74.92	78.23
50	27.99	29.71	34.76	37.69	56.33	63.17	67.51	71.42	76.15	79.49
55	31.74	33.57	38.96	42.06	61.67	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75
60	35.53	37.49	43.19	46.46	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	51.74	55.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.43	104.22
80	51.17	53.54	60.39	64.28	88.13	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	69.13	73.29	98.65	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	77.93	82.36	109.56	119.68	125.92	131.97	138.01	142.57



χ^2 test – 4) Calcolare χ^2

- La variabile test χ^2 si calcola come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$



χ^2 test – 5) Accettare/rifiutare ipotesi nulla

- Si rifiuta H_0 se $\chi^2 > \chi^2_c$



χ^2 test – Esercizio 1

- Un dado viene lanciato 3000 volte con il seguente risultato

Esito	# Occorrenze
1	582
2	483
3	471
4	474
5	516
6	474

- Sottoporre a test l'ipotesi della ditta ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$



χ^2 test – Esercizio 1

1. Le ipotesi sono:

$$H_0: o_i = e_i \quad \forall i \quad e \quad H_1: o_i \neq e_i \quad \forall i$$

2. $\alpha = 0.05$

3. Calcoliamo il valore critico per $\alpha = 0.05$

$$\chi^2_c = 11.07$$

4. Calcoliamo χ^2

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{6724}{500} + \frac{289}{500} + \frac{841}{500} + \frac{676}{500} \\ &\quad + \frac{256}{500} + \frac{676}{500} = 18.924 \end{aligned}$$

5. $\chi^2 > \chi^2_c$ per cui rifiuto l'ipotesi nulla e accetto l'alternativa.



Domande?

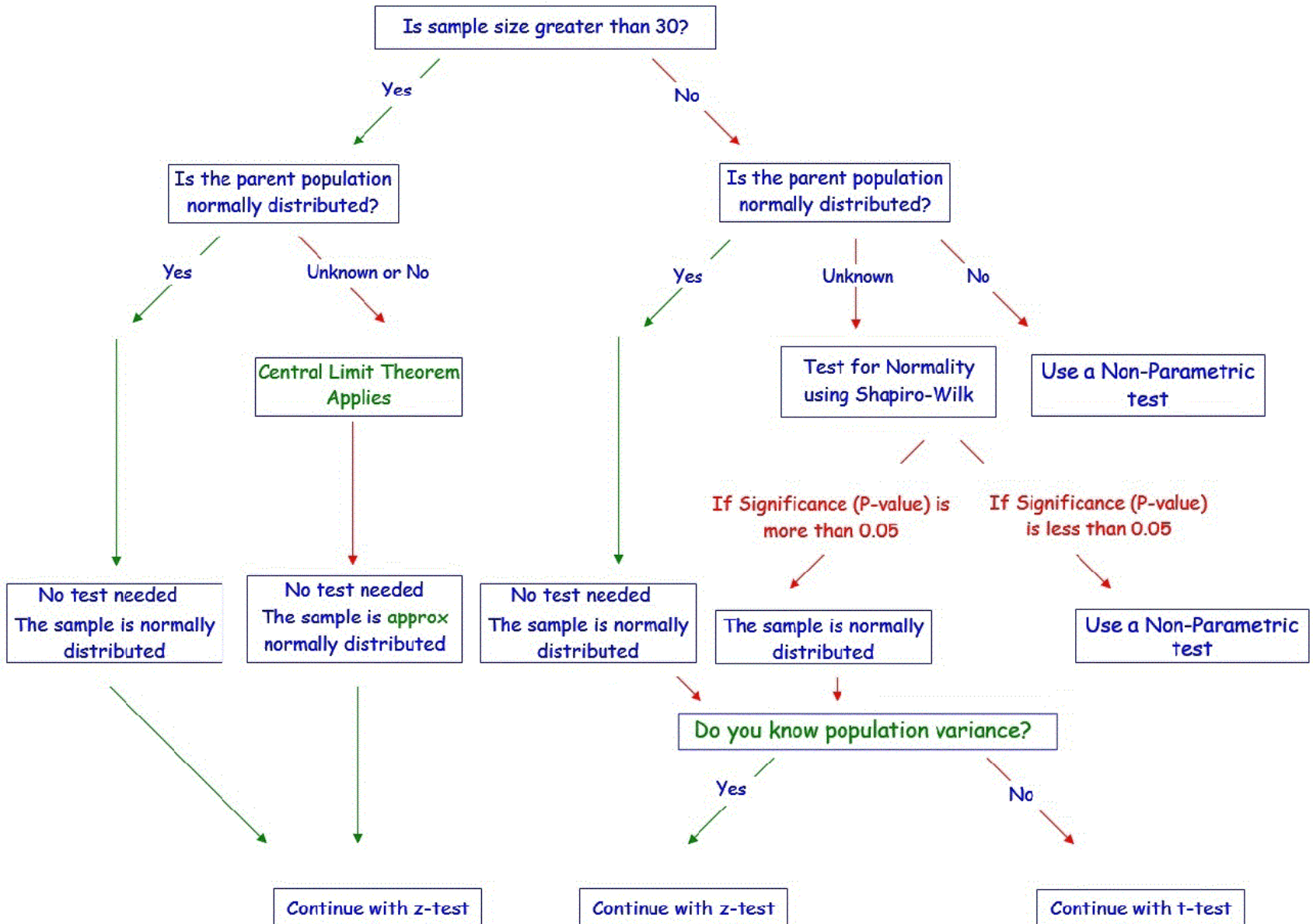


Recap

- Abbiamo visto due test statistici per campioni quantitativi e un test per campioni qualitativi.
- Quando devo usare uno e quando l'altro? Ci sono casi in cui non posso usare ne l'uno ne l'altro?



Recap Test per Campione Quantitativo



Test non parametrici

Anderson–Darling test	tests whether a sample is drawn from a given distribution
Statistical bootstrap methods	estimates the accuracy/sampling distribution of a statistic
Cochran's Q	tests whether k treatments in randomized block designs with 0/1 outcomes have identical effects
Cohen's kappa	measures inter-rater agreement for categorical items
Friedman two-way analysis of variance by ranks	tests whether k treatments in randomized block designs have identical effects
Kaplan–Meier	estimates the survival function from lifetime data, modeling censoring
Kendall's tau	measures statistical dependence between two variables
Kendall's W	a measure between 0 and 1 of inter-rater agreement
Kolmogorov–Smirnov test	tests whether a sample is drawn from a given distribution, or whether two samples are drawn from the same distribution
Kruskal–Wallis one-way analysis of variance by ranks	tests whether > 2 independent samples are drawn from the same distribution
Kuiper's test	tests whether a sample is drawn from a given distribution, sensitive to cyclic variations such as day of the week
Logrank test	compares survival distributions of two right-skewed, censored samples



Test non parametrici (2)

Mann–Whitney U or Wilcoxon rank sum test	tests whether two samples are drawn from the same distribution, as compared to a given alternative hypothesis.
McNemar's test	tests whether, in 2×2 contingency tables with a dichotomous trait and matched pairs of subjects, row and column marginal frequencies are equal
Median test	tests whether two samples are drawn from distributions with equal medians
Pitman's permutation test	a statistical significance test that yields exact p values by examining all possible rearrangements of labels
Rank products	detects differentially expressed genes in replicated microarray experiments
Siegel–Tukey test	tests for differences in scale between two groups
Sign test	tests whether matched pair samples are drawn from distributions with equal medians
Spearman's rank correlation coefficient	measures statistical dependence between two variables using a monotonic function
Squared ranks test	tests equality of variances in two or more samples
Tukey–Duckworth test	tests equality of two distributions by using ranks
Wald–Wolfowitz runs test	tests whether the elements of a sequence are mutually independent/random
Wilcoxon signed-rank test	tests whether matched pair samples are drawn from populations with different mean ranks



Domande?



References

- Sprinthall, R. C. (2011). Basic Statistical Analysis (9th ed.). Pearson Education. ISBN 978-0-205-05217-2.
- Boggio, A., Borello, G. (2008). Statistica. Statistica industriale Ricerca Operativa. Petrini Editore.
- Baldi, P. (1998). Calcolo delle probabilità e statistica, 2^a ed., McGraw-Hill, ISBN 9788838607370.





ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Giovanni Delnevo

PhD Student

Data Science and Computation

Department of Computer Science and Engineering

University of Bologna

giovanni.delnevo2@unibo.it

www.unibo.it