

СОДЕРЖАНИЕ

1	Обзор	3
1.1	Гидравлический разрыв пласта	3
1.2	Упругость	6
1.2.1	Уравнения равновесия	6
1.2.2	Базисные функции	6
1.2.3	Интегрирование	7
1.3	Рост трещины (LEFM)	8
1.3.1	Направление роста трещины	8
1.3.2	Величина продвижения фронта при росте трещины	8
1.3.3	Вычисление SIF	9
1.4	Рост трещины (CZM)	10
1.5	Контакт, разветвление трещин, учёт природных трещин	11
1.6	Гидромеханика	11
1.7	*Связанная гидро-механическая задача	12
1.8	Сравнительный обзор статей	12
2	XFEM	14
2.1	Постановка задачи	14
2.2	Дискретизация	14
2.3	Интегрирование	16
2.4	Пластика с трещиной	18
3	Список использованных источников	23

1 Обзор

Обзоры по численному анализу ГРП можно найти в [2, 3, 4]. В [5] рассматривается пересечение трещины гидроразрыва с естественными трещинами. Обзор XFEM есть в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Литература по моделированию ГРП с применением XFEM в трёхмерной постановке: [13, 14, 15, 2, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

1.1 Гидравлический разрыв пласта

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) [1] – это физико-гидродинамический процесс, при котором горная порода разрывается по плоскостям минимальной прочности за счет воздействия на пласт давлением, создаваемым закачкой в скважину специальной жидкости разрыва. В образованные трещины с помощью жидкостей разрыва транспортируется расклинивающий материал – проппант, который, после снятия избыточного давления, закрепляет трещины в раскрытом состоянии. После разрыва давление флюида увеличивает размеры трещины, обеспечивая ее связь с системой естественных природных трещин, не вскрытых скважиной, а также с зонами повышенной проницаемости, расширяя таким образом площадь дренажа скважины и способствуя значительному увеличению ее дебита или приемистости на объектах нагнетания с повышением конечной нефтеотдачи продуктивных пластов.

Цели и области применения ГРП:

- интенсификация добычи из скважин, в первую очередь с интенсивно кольматированной призабойной зоной, увеличение эффективного радиуса за счет создания высокопроводящих трещин ограниченной длины в средне- и высокопроницаемых пластах, а также в низкопроницаемых достаточно однородных коллекторах;
- обеспечение гидродинамической связи скважины с системой естественных трещин пласта и расширение зоны дренирования;

- ввод в разработку низкопроницаемых залежей с потенциальным дебитом скважин в 2-3 раза ниже уровня рентабельной добычи и перевод забалансовых запасов в промышленные;

- разработка сложных расчлененных и неоднородных пластов, характеризующихся высокой степенью прерывистости, на основе комплексной оптимизации системы разработки с целью обеспечения гидродинамического взаимодействия пласта и системы скважин с трещинами гидраразрыва для увеличения темпа отбора извлекаемых запасов, повышения нефтеотдачи за счет вовлечения в активную разработку слабодренируемых зон и прослоев и увеличения охвата пласта воздействием.

Кислотный ГРП предполагает последовательный разрыв пласта полисахаридным гелем и закачку кислотного состава. В качестве жидкости для гидраразрыва могут использоваться прямые и обратные кислотосодержащие эмульсии или полимерные кислотные гели на водной основе.

При обычном ГРП скорость нагружения пород не превышает 1 МПа/с, а в результате локального взрыва (импульсный ГРП) достигает 10^7 МПа/с с чередующейся серией затухающих гидраударов скважинной жидкости. В настоящее время существует ряд методов создания щадящих пролонгированных взрывов в скважине с импульсами давления $10^1 - 10^7$ МПа/с. Как правило, импульсный разрыв формирует сеть горизонтальных коротких трещин. Кроме того, последующее проведение ГРП с закреплением проппантом существенно снижает давление разрыва горных пород и формирует более раскрытые и протяженные трещины.

Согласно промысловой практике, при глубине залегания продуктивного пласта до 200м в процессе ГРП формируются горизонтальные трещины, а на глубине более 400м – вертикальные. На промежуточных глубинах ориентация трещин определяется анизотропией пород. Образование горизонтальных трещин предполагается в вертикальных скважинах с протяженной толщиной однородных по прочности пород и ограниченным интервалом перфорации. Радиальную конфигурацию приобретают вертикальные трещины в горизонтальных скважинах (многостадийный ГРП).

Кроме того, природные трещины по многочисленным анализам промысловых результатов бурения и освоения скважин в подавляющем количестве имеют вертикальную ориентацию.

Этапы ГРП:

- закачка жидкости разрыва для образования трещин;
- закачка жидкости с проппантом;
- закачка жидкости для продавливания проппанта в трещины.

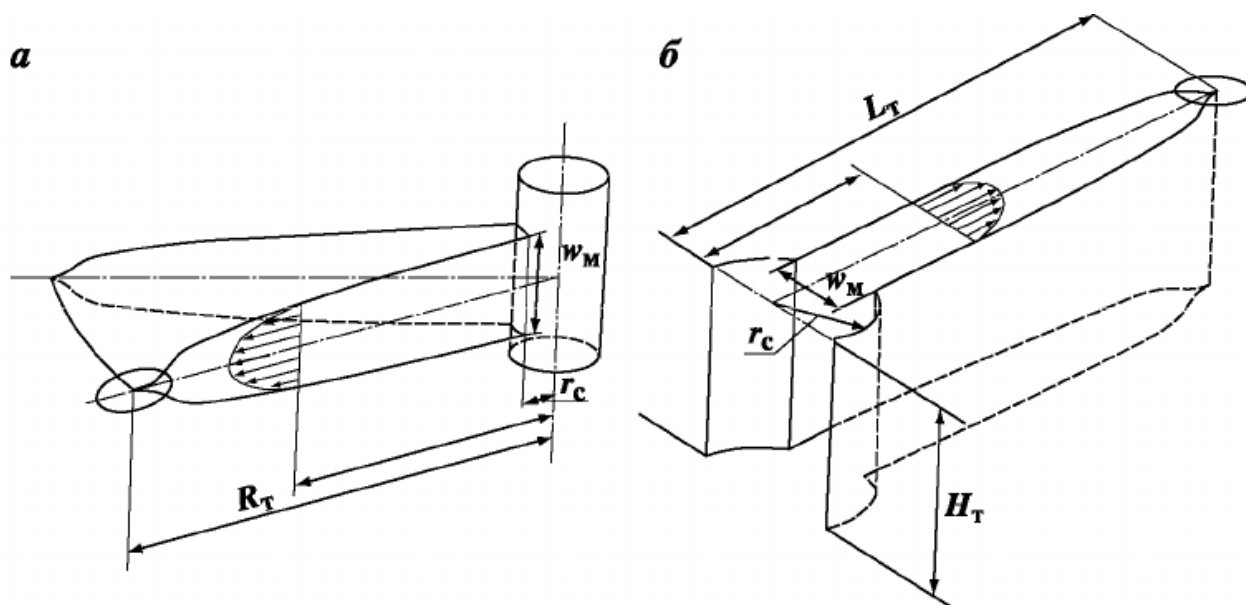


Рис. 3.3. Схематичное изображение радиальной (а) и вертикальной (б) трещин гидроразрыва ствола скважины радиусом r_c в глубь пласта:
 w_M – максимальная раскрытость трещин; R_T – радиус горизонтальной трещины; H_T , L_T – высота и длина вертикальной трещины соответственно

Рисунок 1.1 – [1].

1.2 Упругость

1.2.1 Уравнения равновесия

В статьях [13, 15, 19, 23, 24] используются уравнения равновесия

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon d\Omega = \int_{\partial\Omega} \bar{t} \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} \bar{t}_c^+ \cdot (v^+ - v^-) d\Gamma, \quad (1.1)$$

где v – пробная функция, \bar{t} – давление на границе тела Ω , $v^+ - v^-$ – скачок перемещения через границу трещины, $\bar{t}_c^+ = -\bar{t}_c^-$ – давление на поверхность трещины.

1.2.2 Базисные функции

В XFEM стандартный базис Лагранжа расширяется разрывными функциями:

$$\Delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{n \in N_{nodes}} \sum_{m \in M_n} \psi_{nm} \mathbf{a}_{nm}, \quad (1.2)$$

$$\psi_{nm} = \varphi_n(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

где φ_n – лагранжевы функции формы, $\psi_m(\mathbf{x}) = 1$ для базисных функций Лагранжа, $\psi_m(\mathbf{x}) = \psi_m^{enr}(\mathbf{x}) - \psi_m^{enr}(\mathbf{x}_n)$ для функций обогащения. N_{nodes} – множество узлов сетки, M_n – множество степеней свободы узла n (по каждой из координат).

Для задания сильного разрыва вводится функция знака

$$\psi^{enr} = sgn(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{if } g(\mathbf{x}) < 0 \\ +1 & \text{if } g(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

или Хевисайда

$$\psi^{enr} = H(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{if } g(\mathbf{x}) < 0 \\ 0 & \text{if } g(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

что приводит к тому же результату. Случай нескольких трещин в одном КЭ рассмотрен в [31, 32, 33, 22]

Чтобы около фронта трещины в базисе содержалось точное решение линейно-упругой теории разрушения (LEFM), добавляются функции

$$\psi_m^{enr}(\mathbf{x}) \in \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}, \quad (1.6)$$

где $g(\mathbf{x})$ – функция расстояния от точки \mathbf{x} до поверхности трещины (положительная с одной стороны трещины и отрицательная с другой стороны трещины); $r(\mathbf{x}) = |g(\mathbf{x})|$; $\theta(\mathbf{x})$ – угол, под которым видна плоскость трещины из точки \mathbf{x} .

Функции (1.6) получаются из асимптотического решения Вильямса [29] и применялись в [34] для XFEM. Эквивалентные альтернативы обогащений обсуждаются в [35, 36].

Функции обогащения для ортотропного материала: [37, 38].

В смешанном подходе для упругопластического анализа трещин [39] вводится дополнительное поле давления и аппроксимирующие его функции около фронта трещины [40]

$$\psi_m^{enr}(\mathbf{x}) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (1.7)$$

1.2.3 Интегрирование

Разрывную функцию можно проинтегрировать по КЭ, разделив его на подобласти, на которых функция непрерывна, тогда можно будет применить квадратурные формулы Гаусса на каждой подобласти [8, 2, 17]. Шестигранник можно разрезать на 5 тетраэдров (не единственным способом). Чтобы сгустить точки Гаусса к фронту трещины, тетраэдр можно интегрировать как шестигранник, используя отображение [41], или разбивать поверхность пересечения трещины с тетраэдром на тетраэдры [2]. Разбиение шестигранника на призмы для случая вертикальной трещины с классификацией случаев рассмотрено в [42].

Другой подход, пригодный для интегрирования функций Хевисайда, основан на усреднении объёма и квадратурных формулах Гаусса [43, 44].

1.3 Рост трещины (LEFM)

1.3.1 Направление роста трещины

Направление роста трещины можно задать при помощи угла в координатах фронта трещины: углом изгиба θ_0 и углом закручивания φ_0 при помощи критерия максимума тангенциального напряжения Schollmann [45]:

$$\left. \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad (1.8)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{\theta z}(\theta_0)}{\sigma_{\theta}(\theta_0) - \sigma_z(\theta_0)} \right), \quad (1.9)$$

где σ_1 – максимальное главное напряжение; σ_{θ} , $\tau_{\theta z}$ и σ_z – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, заданной относительно фронта трещины.

Процедура вычисления эффективного направления θ^* с учётом углов θ_0 и φ_0 дана в [6].

1.3.2 Величина продвижения фронта при росте трещины

В случае хрупкого разрушения, величину продвижения фронта (для некоторого узла) можно задать критерием Irwin [46] в регуляризованном виде, предложенном [47], который использовался в [19, 23, 24, 25]:

$$\Delta a = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{K_{I,eq}}{K_{Ic}} < 1 - \alpha - \beta \\ \frac{\Delta a_{max}}{\beta} \left(\frac{K_{I,eq}}{K_{Ic}} - (1 - \alpha - \beta) \right), & 1 - \alpha - \beta \leq \frac{K_{I,eq}}{K_{Ic}} < 1 - \alpha \\ \Delta a_{max}, & 1 - \alpha \leq \frac{K_{I,eq}}{K_{Ic}} \leq 1 + \alpha \end{cases} \quad (1.10)$$

где

$$K_{I,eq} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \left(K_I \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_0) + \sqrt{\left(K_I \cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_0) \right)^2 + 4K_{III}^2} \right), \quad (1.11)$$

K_I , K_{II} , K_{III} – коэффициенты интенсивностей напряжений (КИН, открывающая (I), поперечно-сдвиговая (II) и продольно-сдвиговая (III) моды дефор-

маций), $K_{I,eq}$ – эквивалентная мода I, K_{Ic} – трещиностойкость. $\alpha, \beta, \Delta a_{max}$ – параметры материала.

В [13] применялись критерии

$$\Delta a = \begin{cases} 0, & K_{I,eq} \leq K_{Ic} \\ \Delta a_{max} \left(\frac{K_{I,eq} - K_{Ic}}{K_{I,eq}^{max} - K_{Ic}} \right)^m, & K_{I,eq} > K_{Ic} \end{cases} \quad (1.12)$$

и

$$\Delta a = \Delta a_{max} \left(\frac{K_{I,eq}}{K_{I,eq}^{max}} \right)^m \quad (1.13)$$

где Δa_{max} и m – параметры материала.

1.3.3 Вычисление SIF

Сравнение методов вычисления КИН [48] показывает, что предпочтительным является Displacement Correlation Method (DCM), который основан на связи перемещений и КИН:

$$\begin{aligned} K_{I,r} &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left(\frac{\mu}{\kappa + 1} \right) \Delta v(r), \\ K_{II,r} &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left(\frac{\mu}{\kappa + 1} \right) \Delta u(r), \\ K_{III,r} &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left(\frac{\mu}{4} \right) \Delta w(r), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$. $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ – компоненты скачка вектора перемещений ($\theta = \pm\pi$) в системе координат, связанной с фронтом трещины.

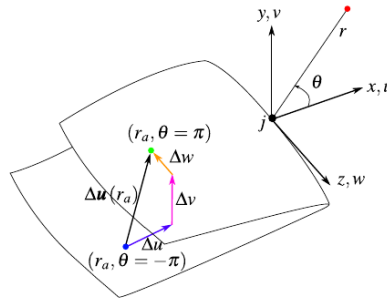


FIGURE A1 Local Cartesian coordinate system at fracture front vertex j on a curved fracture front. The figure also illustrates the displacement jump across the fracture faces, $\Delta \mathbf{u}(r_a) = \mathbf{u}(r_a, \theta = \pi) - \mathbf{u}(r_a, \theta = -\pi)$, at a distance r_a behind the fracture front [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

Рисунок 1.2 – из [19]

Путём экстраполяции [49] можно получить КИН в вершине трещины:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{r_b}{r_b - r_a} \left(K_{I,r_a} - \frac{r_a}{r_b} K_{I,r_b} \right), \\ K_{II} &= \frac{r_b}{r_b - r_a} \left(K_{II,r_a} - \frac{r_a}{r_b} K_{II,r_b} \right), \\ K_{III} &= \frac{r_b}{r_b - r_a} \left(K_{III,r_a} - \frac{r_a}{r_b} K_{III,r_b} \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

Этот метод наиболее просто реализовать. Требуется дробление сетки вблизи фронта трещины для обеспечения хорошей точности.

1.4 Рост трещины (CZM)

Модель сил сцепления (cohesive zone model) применялась в статьях [16, 20, 22], а также с использованием ABAQUS в статьях [14, 18].

Направление роста трещины задаётся формулами (1.8), (1.9).

Рост трещины в модели сил сцепления определяется силами сцепления t_c , действующими на поверхности трещины

$$t_c = \begin{cases} T_{ts} \frac{w}{g_0}, & w \leq g_0 \\ T_{ts} \frac{g_1 - w}{g_1 - g_0}, & g_0 < w \leq g_1 \\ 0, & w > g_1 \end{cases} \quad (1.16)$$

Связь параметра g_2 с вязкостью разрушения K_{IC} определяется формулой [46]

$$K_{IC} = \sqrt{G_{IC} \frac{E}{1 - \nu^2}} \quad (1.17)$$

где G_{IC} – энергии хрупкого разрушения:

$$G_{IC} = \frac{1}{2} T_{ts} g_1 \quad (1.18)$$

Величина упругого участка g_0 считается малой:

$$g_0 = \frac{T_{ts}}{\epsilon}, \quad \epsilon \gg E \quad (1.19)$$

Контакт между сторонами трещины автоматически учитывается дополнительным участком кривой при $w < 0$.

В статьях [26, 27] в форме сил сцепления записана continuous damage model.

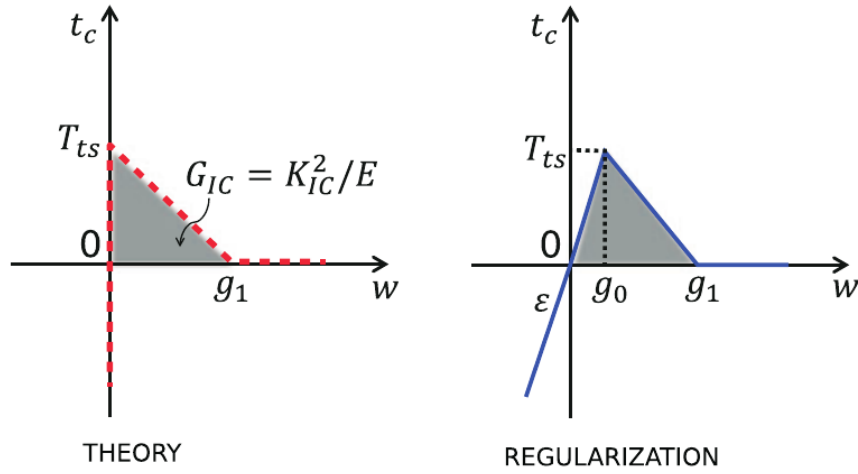


Figure 2. Traction-separation law for the cohesive fracture. The left figure shows the theoretical representation described by equation (13), and the right figure shows the penalty regularization described by equation (17).

Рисунок 1.3 – из [16]

1.5 Контакт, разветвление трещин, учёт природных трещин

Для учёта контакта применимы стандартные методы типа штрафа [2]. Задание разветвлённых трещин (“junction” функции), взаимодействие между трещинами [31, 32, 33, 22].

1.6 Гидромеханика

В статьях [15, 19, 23, 25] жидкость внутри трещины считается ньютоновской и несжимаемой, без учета инерционных и гравитационных эффектов, тогда закон сохранения массы приводит к уравнению

$$\int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + q_L - q_I \right) v d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} v d\Gamma_c + \int_{\partial\Gamma_c^N} v \bar{q} ds = 0 \quad (1.20)$$

где $w = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^-$ – ширина трещины, q_L – утечка через границы трещины, q_I – скорость закачки жидкости, v – пробная функция, \bar{q} – поток по нормали к границе трещины $\partial\Gamma_c^N$, \mathbf{q} – поток внутри трещины, заданный кубическим законом Пуазейля

$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{12\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} p, \quad (1.21)$$

где μ – вязкость жидкости,

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \bar{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (1.22)$$

Каждая система координат с базовыми векторами $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ и вектором положения (\bar{x}_1, \bar{x}_2) связана с конечным элементом сетки, используемой для решения уравнения (1.20).

1.7 *Связанная гидро-механическая задача

Gupta2017 ?Дискретизация по времени Пороупругость, leak-off Carter model (жидкость уходит в породу) fluid lag (задержка жидкости из-за пористого включения в трещине)

Cohesive zone method (CZM), traction-separation constitutive law [32] viscosity- (M) ... toughness- dominated (K) regime, GFEM enr.

1.8 Сравнительный обзор статей

Таблица 1.1 – Обзор литературы

Источник	Год	Упругость	Обогащение	Рост трещины	Жидкость	Связанность	Разветвление	Контакт	Ком. САЕ?
GD[13]	2014	упругость (1.1)	Хевисайда, в вершине	Irwin (1.12), (1.13)	$p = const$	—	—	—	—
GD[15]	2015	—//—	—//—	статика	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	—	—
GD[19]	2017	—//—	—//—	Irwin (1.10)	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	—	—
GD[23]	2019	—//—	—//—	Irwin (1.10)	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	—	—
GD[24]	2020	—//—	—//—	Irwin (1.12)	—	—	—	—	—
GD[25]	2020	—//—	—//—	Irwin (1.10)	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	—	—
Liu[16]	2016	упругость (1.1)	Хевисайда	CZM (1.16)	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	включён в CZM	—
Liu[20]	2017	упругость (1.1)	Хевисайда	CZM (1.16)	(1.20)	м. Ньютона-Рафсона	—	включён в CZM	—
[22]	2018	пороупругость	Хевисайда, junction	CZM без рег.	(1.20)	расш. м. Лагранжа	разветвление		—
[21]	2018								—
Roth[26]	2020	пороупругость	Хевисайда	CDM $\frac{1}{3} t_c$...	м. Ньютона-Рафсона	—	м. штрафа	—
Roth[27]	2020	пороупругость	Хевисайда	CDM $\frac{1}{3} t_c$...	м. Ньютона-Рафсона	—	м. штрафа	—
[14]	2014	пороупругость	Хевисайда, ф. узлы	CZM (1.16)	(1.20)		—	—	ABAQUS
[18]	2016	пороупругость	Хевисайда, ф. узлы	CZM (1.16)			пересечение	—	ABAQUS

2 XFEM

2.1 Постановка задачи

В области Ω заданы уравнения равновесия [50]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1)$$

На границе $S = S_1 \cup S_2$ заданы кинематические и силовые краевые условия

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{u}_0(t), \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j|_{S_2} = P_i(t, \mathbf{u}), \quad (2.3)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения, \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к поверхности S_2 , \mathbf{P} — вектор поверхностных сил.

Компоненты тензора малых деформаций Коши ε связаны с перемещениями линейными геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.4)$$

Для изотропного тела тензор напряжений Коши σ выражается через упругую составляющую ε^e малой деформации Коши обобщенным законом Гука

$$\sigma = C : \varepsilon^e, \quad (2.5)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.6)$$

где C — тензор модулей упругости материала, λ, μ — модули упругости Ламэ, δ — символ Кронекера. Символом “:” обозначено двойное скалярное произведение, т.е. $(C : \varepsilon)_{ij} \equiv C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$.

2.2 Дискретизация

Домножим уравнения (2.1) на пробную функцию v , применим формулу Грина интегрирования по частям и учтём силовые краевые условия (2.3), в результате система вариационных уравнений в форме Галеркина примет вид

[51]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \int_{S_2} P_i v dS. \quad (2.7)$$

Согласно шаговому методу для случая малых деформаций [52, 53], для некоторого шага по времени $t \rightarrow t + \Delta t$ запишем уравнение (2.7) в приращениях

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \int_{S_2} \Delta P_i v dS + R_i, \quad (2.8)$$

$$R_i \equiv \int_{S_2} {}^{(t)} P_i v dS - \int_{\Omega} {}^{(t)} \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega. \quad (2.9)$$

Подставим закон Гука (2.5) в приращениях

$$\Delta \sigma = C : \Delta \varepsilon \quad (2.10)$$

и (2.4) (для приращений) в левую часть (2.8) и, воспользовавшись симметрией $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, получим

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \int_{S_2} \Delta P_i v dS + R_i. \quad (2.11)$$

Перейдём к конечномерному пространству, натянутому на базисные функции $\{\psi_n | n = \overline{1, N}\}$, разложим компоненты приращения

$$\Delta u_k^h = \sum_{n=1}^N q_{(3n+k-3)} \psi_n, \quad (2.12)$$

подставим вместо v поочерёдно функции ψ_n при $n = \overline{1, N}$, получим СЛАУ (здесь все суммирования записаны явно)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} C_{ijkl} q_{(3n+k-3)} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega = \\ \int_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + R_i|_{v=\psi_m}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

которую можно записать в виде

$$\mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{b}, \quad (2.14)$$

где элементы матрицы жёсткости \mathbf{G} и вектора \mathbf{b} представимы в виде

$$G_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} d\Omega, \quad (2.15)$$

$$b_{(3m+i-3)} = \int_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + R_{(3m+i-3)}^{\text{node}}, \quad (2.16)$$

$$R_{(3m+i-3)}^{\text{node}} \equiv \int_{S_2} {}^{(t)}P_i \psi_m dS - \int_{\Omega} {}^{(t)}\sigma_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega. \quad (2.17)$$

2.3 Интегрирование

Рассмотрим некоторый шестигранный КЭ Ω_K . Отображение шаблонного куба $\Omega^E = [-1, 1]^3$ в шестигранник Ω_K с заданными координатами вершин $\hat{\mathbf{x}}_i$ задаётся соотношениями

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (2.18)$$

где $\hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi})$ – трилинейные базисные функции на шаблонном кубе Ω^E :

$$\hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}) = Q_{\beta_1(i)}(\xi_1) Q_{\beta_2(i)}(\xi_2) Q_{\beta_3(i)}(\xi_3), \quad i = 1 \dots 8 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha) &= (1 - \alpha) / 2, \quad Q_2(\alpha) = (1 + \alpha) / 2, \\ \beta_1(i) &= ((i - 1) \bmod 2) + 1, \\ \beta_2(i) &= [(i - 1) / 2] \bmod 2 + 1, \\ \beta_3(i) &= [(i - 1) / 4] + 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Локальные базисные функции можно задать в координатах шаблонного куба:

$$\hat{\psi}_n = \hat{\psi}_n(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.21)$$

Разделим шестигранник Ω_K на шестигранные подобласти, которые не пересекаются трещиной. Пусть некоторый шестигранник ω_k (подобласть) задан координатами шаблонного куба $\hat{\xi}_i$. Тогда координаты вершин шестигранника ω_k определяются отображением (2.18)

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\hat{\xi}_j) \hat{\mathbf{x}}_i, j = 1 \dots 8 \quad (2.22)$$

Аналогично (2.18), зададим отображение из шаблонного куба в шестигранник ω_k :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (2.23)$$

Базисные функции в подобласти ω_k зададим интерполянтom в координатах шаблонного куба

$$\hat{\psi}_n(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^8 \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\eta}) \hat{\psi}_n(\hat{\xi}_i). \quad (2.24)$$

Для нахождения производных в выражении

$$\int_{\omega_k} \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial x_l} d\Omega \quad (2.25)$$

воспользуемся правилом интегрирования сложной функции

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

где \mathbf{J} – якобиан отображения (2.23) шаблонного куба в шестигранник ω_k . Тогда

$$\int_{\omega_k} \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial x_l} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial x_l} |\mathbf{J}| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \quad (2.28)$$

Для интегрирования по поверхности трещины

$$\int_{S_k^+} \Delta P_i^+ \psi_m dS + \int_{S_k^-} \Delta P_i^- \psi_m dS \quad (2.29)$$

имеем

$$\int_{S_k^+} \hat{\psi}_m ds = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m |\mathbf{J}| d\eta_1 d\eta_2 \quad (2.30)$$

2.4 Пластика с трещиной

Параллелепипед с трещиной растягивается вдоль оси x (рис. 2.1). Параметры задачи приведены в таблице 2.1. Пластика закреплена в плоскостях $x = -4, y = -4, z = 0$ по осям x, y, z соответственно, и имеет 3 слоя с различными модулями Юнга (границы слоёв $y = -1, y = 1$). К стороне $x = 4$ приложены поверхностные силы. Сравнение решений FEM и XFEM изображены на рисунках 2.2, 2.3. На графиках приведены решения, в которых обогащаются узлы 2-х слоёв шестигранников вокруг вершины трещины (XFEM) и решения, в которых обогащается только один слой (XFEM1). Решения различаются не значительно.

Таблица 2.1 – Параметры задачи

Параметр	Обозначение	Значение
Модуль Юнга	E_1, E_2, E_3	$10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6$ Па
Коэффициент Пуассона	ν	0.4
Размеры		$8 \times 8 \times 2$ м
Разбиение		$32 \times 32 \times 2$
Давление на границе справа		$-5 \cdot 10^3$ Па
Координаты трещины		$-0.85 < y < 0.85, -1 < y < 1$

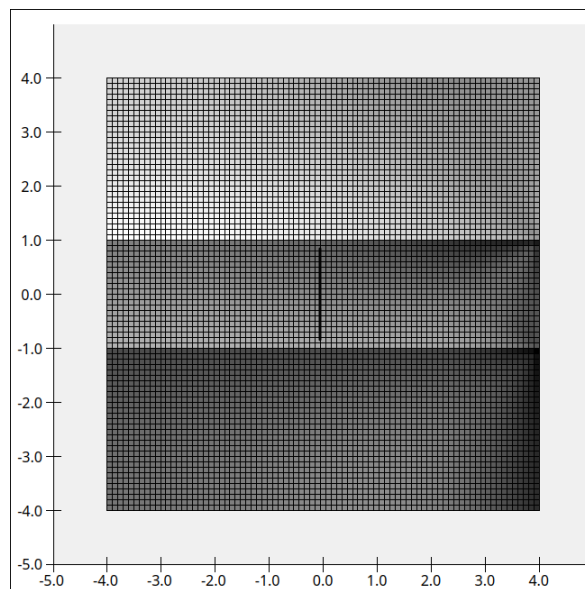


Рисунок 2.1 – Сетка

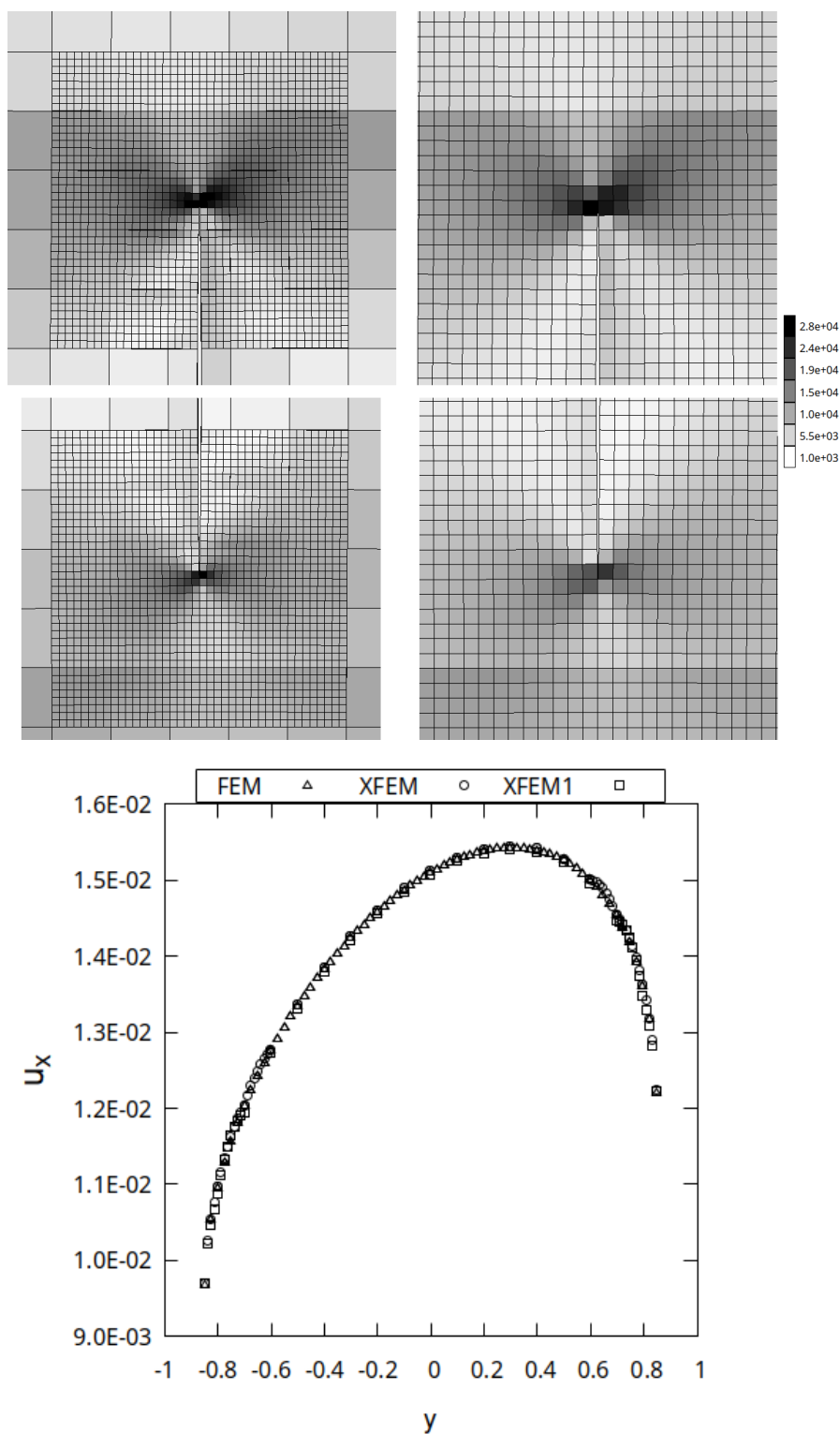


Рисунок 2.2 – Трещина $-0.85 < y < 0.85$. Сверху показаны эквивалентные напряжения (слева XFEM, справа FEM). На графике показано сравнение перемещений по оси x в правой части трещины. Напряжения в XFEM достигали значения $3.8 \cdot 10^4$.

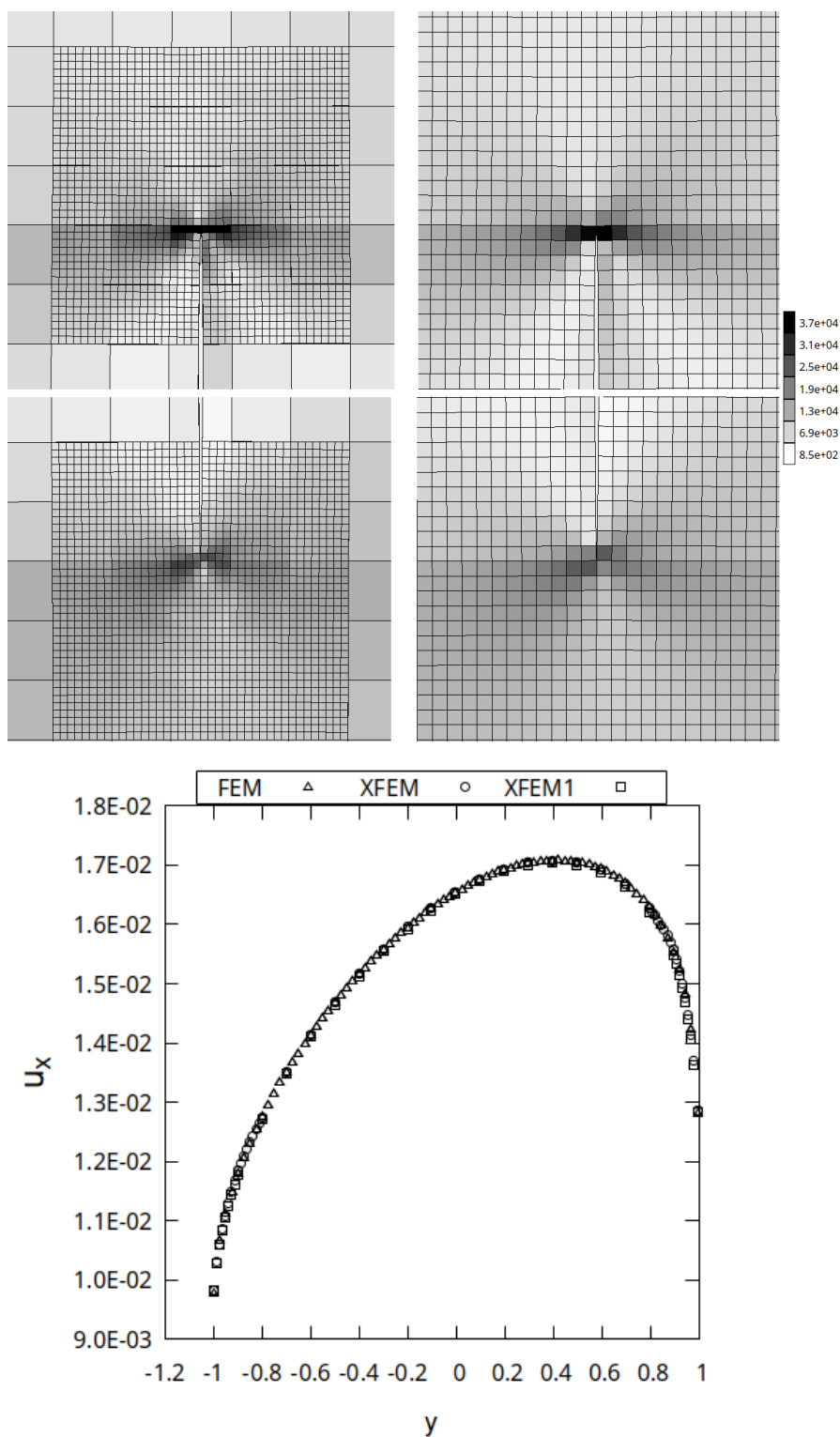


Рисунок 2.3 – Трещина $-1 < y < 1$. Сверху показаны эквивалентные напряжения (слева XFEM, справа FEM). На графике показано сравнение перемещений по оси x в правой части трещины. Напряжения в XFEM достигали значения $4.3 \cdot 10^4$.

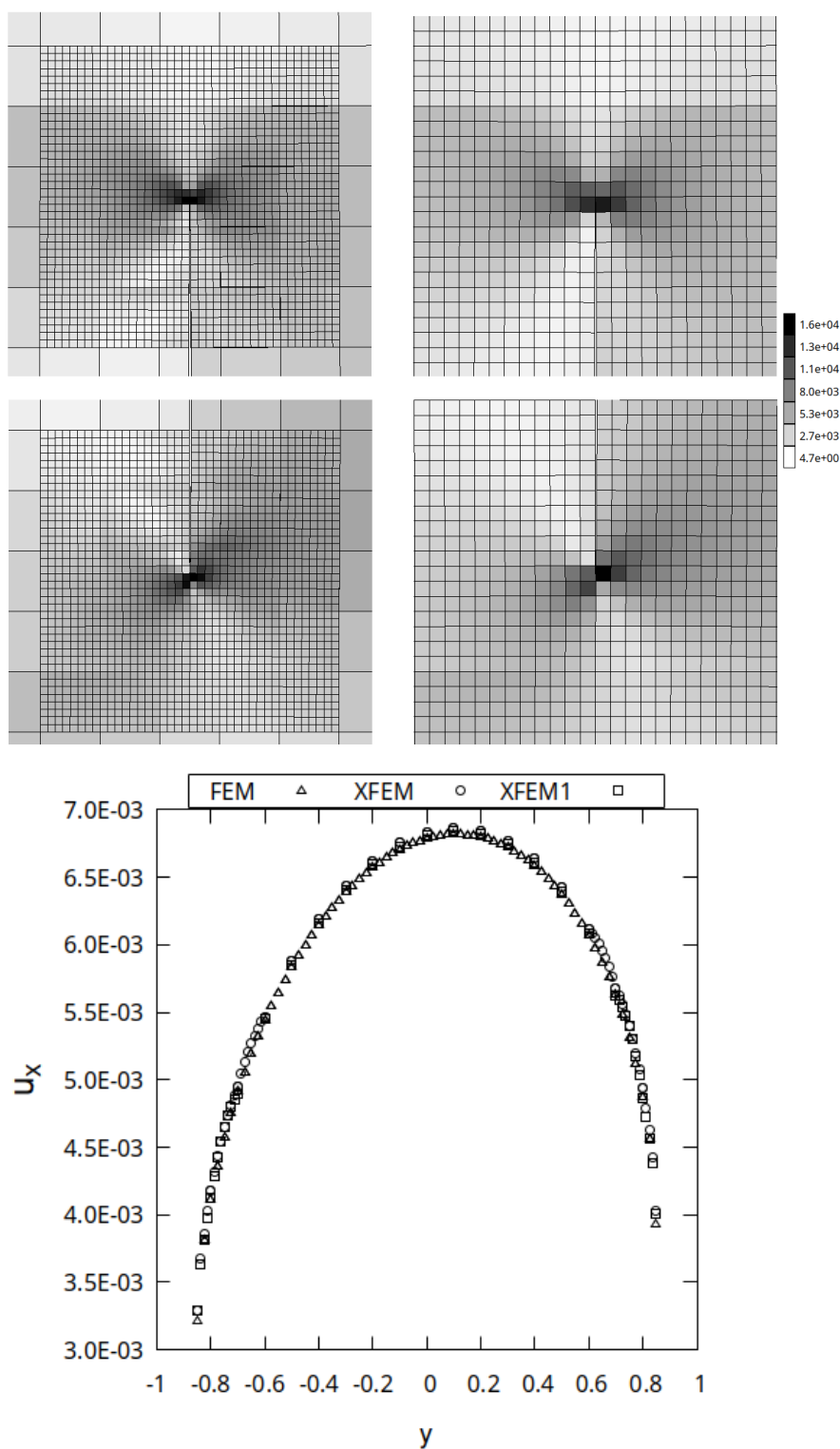


Рисунок 2.4 – Трещина $-0.85 < y < 0.85$, давление приложено к правой части трещины. Сверху показаны эквивалентные напряжения (слева XFEM, справа FEM). На графике показано сравнение перемещений по оси x в правой части трещины. Напряжения в XFEM достигали значения $2.0 \cdot 10^4$.

3 Список использованных источников

1. Магадова Л. А., Силин М. А., Глущенко В. Н. Нефтепромысловая химия. Технологические аспекты и материалы для гидроразрыва пласта //издательский центр РГУ нефти и газа им. ИМ Губина учебное пособие.– 2012.–423 с. – 2012.
2. Gupta P. A generalized finite element method for the simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation : дис. – University of Illinois at Urbana-Champaign, 2016.
3. Weber N. The XFEM for Hydraulic Fracture Mechanics Die XFEM für die hydraulische Bruchmechanik.
4. Lecampion B., Bungier A., Zhang X. Numerical methods for hydraulic fracture propagation: a review of recent trends //Journal of natural gas science and engineering. – 2018. – Т. 49. – С. 66-83.
5. Kolawole O., Ispas I. Interaction between hydraulic fractures and natural fractures: current status and prospective directions //Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. – 2020. – Т. 10. – №. 4. – С. 1613-1634.
6. Pereira J. P. Generalized finite element methods for three-dimensional crack growth simulations : дис. – University of Illinois at Urbana-Champaign, 2010.
7. Belytschko T., Gracie R., Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling //Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 2009. – Т. 17. – №. 4. – С. 043001.
8. Fries T. P., Belytschko T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications //International journal for numerical methods in engineering. – 2010. – Т. 84. – №. 3. – С. 253-304.
9. Karihaloo B., Xiao Q. Z. Accurate simulation of mixed-mode cohesive crack propagation in quasi-brittle structures using exact asymptotic fields in XFEM: an overview //Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2011.

– T. 6. – №. 1. – C. 267-276.

10. Fries T. P. Overview and comparison of different variants of the XFEM //PAMM. – 2014. – T. 14. – №. 1. – C. 27-30.

11. Flemisch B., Fumagalli A., Scotti A. A review of the XFEM-based approximation of flow in fractured porous media //Advances in Discretization Methods. – 2016. – C. 47-76.

12. Kanth S. A. et al. Elasto Plastic Crack Growth by XFEM: A Review //Materials Today: Proceedings. – 2019. – T. 18. – C. 3472-3481.

13. Gupta P., Duarte C. A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2014. – T. 38. – №. 13. – C. 1397-1430.

14. Zielonka M. G. et al. Development and validation of fully-coupled hydraulic fracturing simulation capabilities //Proceedings of the SIMULIA community conference, SCC2014. – 2014. – C. 19-21.

15. Gupta P., Duarte C. A. Coupled formulation and algorithms for the simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fractures using the generalized finite element method //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2016. – T. 40. – №. 10. – C. 1402-1437.

16. Liu F. et al. A stabilized extended finite element framework for hydraulic fracturing simulations //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2017. – T. 41. – №. 5. – C. 654-681.

17. Weber N. The XFEM for Hydraulic Fracture Mechanics Die XFEM für die hydraulische Bruchmechanik.

18. Haddad M., Sepehrnoori K. XFEM-based CZM for the simulation of 3D multiple-cluster hydraulic fracturing in quasi-brittle shale formations //Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2016. – T. 49. – №. 12. – C. 4731-4748.

19. Gupta P., Duarte C. A. Coupled hydromechanical fracture simulations of nonplanar three-dimensional hydraulic fracture propagation //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2018. – T.

42. – №. 1. – C. 143-180.

20. Liu F., Gordon P. A., Valiveti D. M. Modeling competing hydraulic fracture propagation with the extended finite element method //Acta Geotechnica. – 2018. – T. 13. – №. 2. – C. 243-265.

21. Luo Z. et al. Seepage-stress coupling mechanism for intersections between hydraulic fractures and natural fractures //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2018. – T. 171. – C. 37-47.

22. Paul B. et al. 3D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2018. – T. 342. – C. 321-353.

23. Shauer N., Duarte C. A. Improved algorithms for generalized finite element simulations of three-dimensional hydraulic fracture propagation //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2019. – T. 43. – №. 18. – C. 2707-2742.

24. Mukhtar F. M., Alves P. D., Duarte C. A. Validation of a 3-D adaptive stable generalized/eXtended finite element method for mixed-mode brittle fracture propagation //International Journal of Fracture. – 2020. – T. 225. – №. 2. – C. 129-152.

25. Shauer N., Duarte C. A. A generalized finite element method for three-dimensional hydraulic fracture propagation: Comparison with experiments //Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – T. 235. – C. 107098.

26. Roth S. N., Léger P., Soulaïmani A. Strongly coupled XFEM formulation for non-planar three-dimensional simulation of hydraulic fracturing with emphasis on concrete dams //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – T. 363. – C. 112899.

27. Roth S. N., Léger P., Soulaïmani A. Fully-coupled hydro-mechanical cracking using XFEM in 3D for application to complex flow in discontinuities including drainage system //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – T. 370. – C. 113282.

28. Shi F., Liu J. A fully coupled hydromechanical XFEM model for the simulation of 3D non-planar fluid-driven fracture propagation //Computers and Geotechnics. – 2021. – T. 132. – C. 103971.
29. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. – 1961.
30. Geniaut S., Massin P., Moës N. A stable 3D contact formulation using X-FEM //European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique. – 2007. – T. 16. – №. 2. – C. 259-275.
31. Siavelis M. et al. Large sliding contact along branched discontinuities with X-FEM //Computational mechanics. – 2013. – T. 52. – №. 1. – C. 201-219.
32. Ferté G., Massin P., Moës N. 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2016. – T. 300. – C. 347-374.
33. Paul B. et al. An integration technique for 3D curved cracks and branched discontinuities within the extended Finite Element Method //Finite Elements in Analysis and Design. – 2017. – T. 123. – C. 19-50.
34. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing //International journal for numerical methods in engineering. – 1999. – T. 45. – №. 5. – C. 601-620.
35. Gupta V. et al. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics //Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2013. – T. 266. – C. 23-39.
36. Gupta V. et al. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics //Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2015. – T. 289. – C. 355-386.
37. Asadpoure A., Mohammadi S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2007. – T. 69. – №. 10. – C. 2150-2172.

38. Hattori G. et al. New anisotropic crack-tip enrichment functions for the extended finite element method //Computational Mechanics. – 2012. – T. 50. – №. 5. – C. 591-601.
39. Feulvarch E., Lacroix R., Deschanel H. A 3D locking-free XFEM formulation for the von Mises elasto-plastic analysis of cracks //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – T. 361. – C. 112805.
40. Westergaard H. M. Bearing pressures and cracks //Trans AIME, J. Appl. Mech. – 1939. – T. 6. – C. 49-53.
41. Minnebo H. Three-dimensional integration strategies of singular functions introduced by the XFEM in the LEFM //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2012. – T. 92. – №. 13. – C. 1117-1138.
42. NAGASHIMA T. Three-dimensional crack analyses under thermal stress field by XFEM using only the Heaviside step function //Mechanical Engineering Journal. – 2020. – T. 7. – №. 4. – C. 20-00098-20-00098.
43. Belytschko T., Fish J., Engelmann B. E. A finite element with embedded localization zones //Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1988. – T. 70. – №. 1. – C. 59-89.
44. Nikolakopoulos K., Crete J. P., Longère P. Volume averaging based integration method in the context of XFEM-cohesive zone model coupling //Mechanics Research Communications. – 2020. – T. 104. – C. 103485.
45. Schollmann M. et al. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures //International Journal of Fracture. – 2002. – T. 117. – №. 2. – C. 129-141.
46. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. – 1997.
47. Lazarus V. Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3D plane cracks under uniform remote tensile loading //International journal of Fracture. – 2003. – T. 122. – №. 1. – C. 23-46.

48. Gupta P., Duarte C. A., Dhankhar A. Accuracy and robustness of stress intensity factor extraction methods for the generalized/eXtended Finite Element Method //Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – Т. 179. – С. 120-153.
49. Dirgantara T., Aliabadi M. H. Stress intensity factors for cracks in thin plates //Engineering fracture mechanics. – 2002. – Т. 69. – №. 13. – С. 1465-1486.
50. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — Киев : Наукова думка, 1981. — 496 с.
51. Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 895 с.
52. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М. : Мир, 1975. — 542 с.
53. Александров А. В., Алфутов Н. А., Астанин В. В. и др. Энциклопедия "Машиностроение". Том I-3. "Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин". В 2-х книгах. Кн. 2 / Под ред. Фролов К. В. (гл. ред.). — М. : Машиностроение, 1995. — 624 с.
54. Khoei A. R. Extended finite element method: theory and applications. – John Wiley & Sons, 2014.