Вариант реализации конечноэлементного решения упругопластической задачи при наличии контакта с жёстким штампом

Аннотация

Рассматривается квазистатическая задача контакта изотропного, упругопластического, изотропно упрочняющегося тела и жёсткого штампа без трения для случая малых деформаций. Поведение материала определяется теорией пластического течения с условием текучести Мизеса и диаграммой одноосного растяжения, в качестве параметра упрочнения принимается параметр Одквиста. В этой работе приведён алгоритм шагового конечноэлементного решения данной задачи, совмещающий метод начальных напряжений с построением касательной матрицы жёсткости, которая преимущественно остаётся неизменной при итерациях. Условия контакта удовлетворяются расширенным методом множителей Лагранжа, который приводит к отсутствию зазора между узлами сетки и штампом. На примере вдавливания жёсткого шара в упругопластичное полупространство со степенным упрочнением, в трёхмерной постановке, показана работоспособность реализации алгоритма.

1 Введение

Применение универсальных средств расчёта напряжённо-деформированного состояния, таких как ANSYS, в отдельных случаях может быть осложнено большими вычислительными затратами или некоторыми проблемами с определением требуемых видов нелинейностей или со сходимостью итераций. Это обстоятельство обуславливает потребность в построении узкоспециализированных вычислительных средств. В качестве базовой рассматривается задача контакта упругопластичного тела с жёстким подвижным штампом.

Наиболее распространённым методом решения нелинейных задач является метод Ньютона-Рафсона [1], признанный наиболее быстро сходящимся в вычислительной практике и является основным в большинстве современных средств расчёта, но он требует обновления матрицы жёсткости на каждой итерации, а модифицированный метод Ньютона-Рафсона требует большого количества итераций. В данной работе физическая нелинейность учитывается совмещением построения касательной матрицы жёсткости и метода начальных напряжений [2]: в начале шага по времени матрица строится по начальному приближению и меняется на итерациях только когда прогнозируется разгрузка после активного нагружения; величины пластических деформаций корректируются радиальным возвратом на поверхность текучести.

Среди алгоритмов учёта контакта [3] выделяется метод множителей Лагранжа, точно обеспечивающий условие непроникания, но его реализация требует введения дополнительных степеней свободы в СЛАУ (множителей Лагранжа), что замедляет итерации и усложняет реализацию. Поэтому для учёта контакта мы реализовали расширенный метод Лагранжа [4], основанный на многократном применении метода штрафа и позволяющий регулировать соотношение скорости сходимости к увеличению обусловленности СЛАУ, которое происходит из-за добавления контактных жёсткостей в матрицу.

2 Постановка задачи

В области Ω заданы уравнения равновесия [5]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1}$$

На границе $S = S_1 \cup S_2$ заданы кинематические и силовые краевые условия

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{u}_0\left(t\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_2} = P_i\left(t, \mathbf{u}\right), \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\left(t, \mathbf{u}\right) = \mathbf{P}^t\left(t\right) + \mathbf{P}^c\left(t, \mathbf{u}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности S_2, $\mathbf{P}$ — вектор поверхностных сил, $\mathbf{P}^t$ — составляющая внешнего силового воздействия, $\mathbf{P}^c$ — контактная составляющая на $S_c \subseteq S_2$.

На границе S_c задаётся механический контакт с жёстким подвижным штампом геометрически нелинейными краевыми условиями Синьорини [6]

$$\begin{cases} \mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n} \leq 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - g \leq 0, \\ \left(\mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - g\right) = 0, \\ \left(\mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \mathbf{P}^c, \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathbf{n}\left(\mathbf{x},\,\mathbf{t}\right)$ — внутренняя единичная нормаль в точке поверхности штампа, ближайшей к точке тела $\mathbf{x}$, $g\left(\mathbf{x},\,\mathbf{t}\right)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до поверхности штампа (может принимать отрицательные значения в случае внедрения штампа).

Компоненты тензора малых деформаций Коши ε связаны с перемещениями линейными геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{6}$$

Для изотропного тела тензор напряжений Коши σ выражается через упругую составляющую ε^e малой деформации Коши обобщенным законом Гука

$$\sigma = C : \varepsilon^e, \tag{7}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{8}$$

где C — тензор модулей упругости материала, λ, μ — модули упругости Ламэ, δ — символ Кронекера. Символом “:”обозначено двойное скалярное произведение, т.е. $\left(C : \varepsilon\right)_{ij} \equiv C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$.

Для связи напряжений и деформаций принимаются определяющие соотношения теории пластического течения [7] с критерием текучести Мизеса:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \tag{9}$$

$$\sigma_y = \Phi\left(q\right), \tag{10}$$

$$\begin{cases} d\varepsilon^p_{ij} = \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}d\lambda = \frac{\frac{3}{2}s_{ij}}{\tilde{\sigma}}d\lambda, \text{ если } \tilde{\sigma} = \sigma_y \text{ и } dW > 0, \\ d\varepsilon^p_{ij} = 0, \text{ если } \tilde{\sigma} < \sigma_y \text{ или } \tilde{\sigma} = \sigma_y \text{ и } dW \le 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $d\lambda$ — не известный множитель,

$$d\lambda = d\tilde{\varepsilon}^p, \tag{12}$$

σ_y — предел текучести, $\Phi\left(q\right)$ — функция, характеризующая поведение изотропно упрочняющегося материала (функцию $\Phi\left(q\right)$ можно построить по диаграмме одноосного растяжения, при котором $\tilde{\sigma} = \sigma$, $d\tilde{\varepsilon}^p = d\varepsilon^p$), $d\varepsilon$, $d\varepsilon^e$, $d\varepsilon^p$ — приращения полной, упругой и пластической деформаций соответственно, $\tilde{\sigma} \equiv \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$ — эквивалентное напряжение, $\tilde{\varepsilon} \equiv \left(\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$ — эквивалентная деформация, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{kk}$ — девиатор напряжений, $e_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$ — девиатор деформаций, q — параметр Одквиста,

$$q \equiv \int d\tilde{\varepsilon}^p, \tag{13}$$

dW — девиаторная работа приращения деформаций,

$$dW \equiv s_{ij} d\varepsilon_{ij}. \tag{14}$$

3 Дискретизация

Домножим уравнения (1) на пробную функцию υ, применим формулу Грина интегрирования по частям и учтём силовые краевые условия (3), в результате система вариационных уравнений в форме Галеркина примет вид [8]

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int\limits_{S_2} P_i \upsilon dS. \tag{15}$$

Согласно шаговому методу для случая малых деформаций [2, 9], для некоторого шага по времени $t \longrightarrow t + \Delta t$ запишем уравнение (15) в приращениях

$$\int\limits_{\Omega} \Delta\sigma_{ij} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int\limits_{S_2} \Delta P_i \upsilon dS + R_i, \tag{16}$$

$$R_i \equiv \int\limits_{S_2} {}^{(t)}P_i \upsilon dS - \int\limits_{\Omega} {}^{(t)}\sigma_{ij} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} d\Omega, \tag{17}$$

где R_i имеет смысл невязки между внутренними напряжениями и силовыми воздействиями, которая понадобится для численной реализации. Здесь и далее для переменных по умолчанию подразумевается момент времени $t + \Delta t$, а момент времени t обозначается левым верхним индексом (t); для областей и границ всегда подразумевается момент времени t и обозначение времени опущено.

Запишем закон Гука (7) с учётом (9) в приращениях

$$\Delta\sigma = C : (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p). \tag{18}$$

С целью последующей численной реализации, совмещающей построение касательной матрицы жёсткости и метода начальных напряжений, одну часть приращения $\Delta\varepsilon^p$ учтём путём изменения тензора модулей упругости C на упругопластический тензор $\tilde{C}$, другую часть — путём добавления начальных напряжений $\Delta\sigma^0$, то есть запишем определяющие соотношения в виде

$$\Delta\sigma = \tilde{C} : \Delta\varepsilon + \Delta\sigma^0, \tag{19}$$

где

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\varepsilon^{\tilde{C}} + \Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0}, \tag{20}$$

$$\Delta\sigma^0 = -C : \Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0}, \tag{21}$$

$$\tilde{C} : \Delta\varepsilon = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\tilde{C}}\right). \tag{22}$$

Для нахождения $\tilde{C}$, с учётом закона течения (11) составим систему

$$\begin{cases} \Delta\sigma^{\tilde{C}} = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\tilde{C}}\right) \\ z : \Delta\sigma^{\tilde{C}} = \Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}} \\ \Delta\varepsilon^{\tilde{C}} = z\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}} \\ \Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}} = E^*\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}}, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$z_{ij} \equiv \frac{\partial^{(t)}\tilde{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\frac{3}{2}{}^{(t)}s_{ij}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}}, \tag{24}$$

$E^* = \frac{\Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}}}{\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}}}$ — параметр упрочнения. При $\tilde{\sigma} \neq 0$, из (23) следует известное [2, 10] выражение

$$\tilde{C} = C - \frac{(C : z) \otimes (z : C)}{E^* + z : (C : z)}, \tag{25}$$

где символом “$\otimes$” обозначено тензорное произведение, т.е. $(a \otimes b)_{ijkl} \equiv a_{ij}b_{kl}$. Используя (8), можно упростить выражение компонент $\tilde{C}$

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{4\mu^2}{E^* + 3\mu} z_{ij}z_{kl}. \tag{26}$$

С учётом (21), составляющие приращения $\Delta\varepsilon^p$

$$\Delta\varepsilon^{\tilde{C}} = \left(\frac{2\mu}{E^* + 3\mu} z \otimes z\right) : \Delta\varepsilon = 2\mu\frac{z : \Delta\varepsilon}{E^* + 3\mu} z \tag{27}$$

и

$$\Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0} = -C^{-1} : \Delta\sigma^0 = -\frac{1}{2\mu}\Delta\sigma^0 \tag{28}$$

пропорциональны девиатору напряжений ${}^{(t)}s$.

Подставим (19) и (6) (для приращений) в левую часть (16) и, воспользовавшись симметрией $\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{ijlk}$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega = \int\limits_{S_2} \Delta P_i v dS - \int\limits_{\Omega} \Delta\sigma^0_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega + R_i. \tag{29}$$

Перейдём к конечномерному пространству, натянутому на базисные функции $\left\{\psi_n \middle| \, n = \overline{1, N}\right\}$, разложим компоненты приращения

$$\Delta u^h_k = \sum_{n=1}^{N} q_{(3n+k-3)}\psi_n, \tag{30}$$

подставим вместо υ поочерёдно функции ψ_n при $n = \overline{1, N}$, получим СЛАУ

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\tilde{C}_{ijkl}q_{(3n+k-3)}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_l}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}d\Omega = \int\limits_{S_2}\Delta P_i\psi_m dS - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\Delta\sigma_{ij}^0\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}d\Omega + R_i|_{\upsilon=\psi_m}, \tag{31}$$

которую можно записать в виде

$$\mathbf{Gq} = \mathbf{b}, \tag{32}$$

где элементы матрицы жёсткости $\mathbf{G}$ и вектора $\mathbf{b}$ представимы в виде

$$G_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_l}d\Omega, \tag{33}$$

$$b_{(3m+i-3)} = \int\limits_{S_2}\Delta P_i\psi_m dS - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\Delta\sigma_{ij}^0\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}d\Omega + R^{\text{node}}_{(3m+i-3)}, \tag{34}$$

$$R^{\text{node}}_{(3m+i-3)} \equiv \int\limits_{S_2}{}^{(t)}P_i\psi_m dS - \int\limits_{\Omega}{}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}d\Omega. \tag{35}$$

Для учёта сил контакта, разложим $\Delta\mathbf{P}$ на слагаемые (4)

$$\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P}^t + \Delta\mathbf{P}^c \tag{36}$$

где $\Delta\mathbf{P}^t$ — заданная на временном слое составляющая (константа), $\Delta\mathbf{P}^c$ — контактная геометрически нелинейная составляющая. Считая, что заданы финитные базисные функции на конечноэлементной сетке, то есть каждая базисная функция ненулевая только в одном единственном узле и равна в этом узле единице, заменим приращение контактных распределённых сил со всей поверхности S_c на эквивалентный набор приращений узловых контактных сил в узлах этой поверхности, то есть представим (34) в виде

$$b_{(3m+i-3)} = \Delta F^c_{(3m+i-3)} + \int\limits_{S_2}\Delta P_i^t\psi_m dS - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\Delta\sigma_{ij}^0\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}d\Omega + R^{\text{node}}_{(3m+i-3)}, \tag{37}$$

где

$$\Delta F^c_{(3m+i-3)} = \int\limits_{S_c}\Delta P_i^c\psi_m dS \tag{38}$$

— компоненты приращения контактной силы в узле m.

4 Алгоритм

На некотором шаге по времени $t \longrightarrow t + \Delta t$ решается уравнение (32). Чтобы выполнялись условия текучести (11), для каждого КЭ в определяющих соотношениях (19) подбираются параметр E^* и начальное напряжение $\Delta\sigma^0$. Чтобы выполнялись условия контакта (5), в формуле (37) подбираются приращения узловых сил реакции опоры $\Delta F^c_{(3m+i-3)}$.

Перед 0-й итерацией задаётся начальное приближение. Для каждого контактного узла m

$$\begin{gathered} Contact_0 = {}^{(t)}Contact, \\ \Delta\mathbf{F}^c_0 = 0, \\ \mathbf{x}^*_0 = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right), \\ \mathbf{n} = Norm\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right), \end{gathered} \tag{39}$$

где $Contact$ — статус наличия контакта узла со штампом ($true$ — есть контакт, $false$ — нет контакта),

$$\Delta\mathbf{F}^c = \left\{\Delta F^c_{(3m-2)},\ \Delta F^c_{(3m-1)},\ \Delta F^c_{(3m)}\right\} \tag{40}$$

— приращение силы реакции опоры, действующей на узел, $\mathbf{x}$ — координаты узла, $\mathbf{x}^*$ — координаты точки контакта узла с поверхностью штампа, $\mathbf{n}$ — внутренняя единичная нормаль к поверхности штампа, у которой обнулены компоненты, соответствующие зафиксированным кинематическими краевыми условиями (2) координатам. $NearestPoint\left(\mathbf{x}\right)$ — функция, возвращающая ближайшую к $\mathbf{x}$ точку поверхности штампа, $Norm\left(\mathbf{x}\right)$ — функция, возвращающая внутреннюю единичную нормаль к поверхности штампа в точке $\mathbf{x}$.

Для каждого конечного элемента (КЭ) задаётся начальное напряжение

$$\Delta\sigma^0_0 = 0 \tag{41}$$

и параметр упругопластического тензора (25): если на предыдущем шаге по времени происходило активное нагружение, то

$$E^*_0 = \frac{\partial\Phi\left({}^{(t)}q\right)}{\partial q}, \tag{42}$$

иначе

$$E^*_0 = \infty. \tag{43}$$

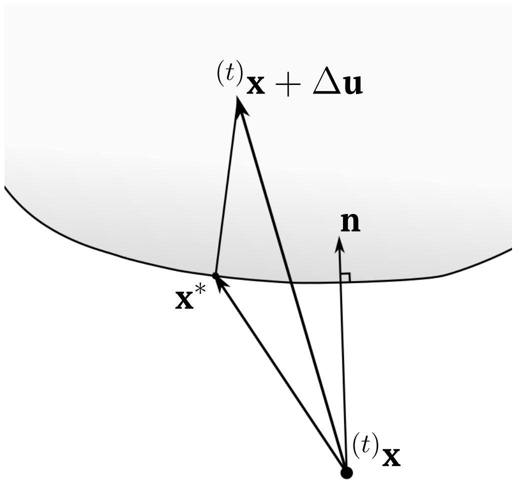

Рис. 1: Контакт некоторого узла сетки со штампом.

После задания начального приближения присваивается номер итерации $k = 0$ и запускается итерационный процесс.

1. Сборка матрицы жёсткости $\mathbf{G}_k$ по формуле (33) с учётом параметра E^* в каждом КЭ.

2. Учёт контакта, составление и решение СЛАУ.

Если для контактного узла m выполняется условие $Contact_k = true$, то, согласно методу штрафа и условиям контакта (5), примем соотношение

$$\Delta\mathbf{F}^c_{k+1} = \left(\mathbf{F}^c_k + \kappa_k \left(\left(\mathbf{x}^*_k - {}^{(t)}\mathbf{x}\right) - \Delta\mathbf{u}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - {}^{(t)}\mathbf{F}^c, \tag{44}$$

$$\kappa_k = \omega^c \sum_{i=1}^{3} \left| G_{k\,(3m+i-3)(3m+i-3)}\, \mathbf{n}_i \right|, \tag{45}$$

чтобы штрафная сила реакции опоры действовала по нормали к поверхности штампа и увеличивалась пропорционально зазору между узлом и штампом (рис. 1). Коэффициент контактной жёсткости κ_k выбран близким к жёсткости узла в направлении нормали, с множителем ω^c. Но неизвестными в СЛАУ (32) являются приращения перемещений узлов сетки, поэтому перенесём

$$\Delta\mathbf{u}_k = \left\{q_{k\,(3m-2)},\ q_{k\,(3m-1)},\ q_{k\,(3m)}\right\} \tag{46}$$

в матрицу левой части СЛАУ, получим для узла m подматрицу глобальной контактной матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^c_k$, размера 3×3

$$\tilde{G}^c_{k\,(3m+i-3)(3m+j-3)} = \kappa_k\, n_i n_j \tag{47}$$

и часть вектора $\Delta\mathbf{F}^c_{k+1}$, не зависящую от неизвестных $\Delta\mathbf{u}_k$,

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k = \left(\mathbf{F}^c_k + \kappa_k\left(\mathbf{x}^*_k - {}^{(t)}\mathbf{x}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} - {}^{(t)}\mathbf{F}^c. \tag{48}$$

Если для контактного узла m выполняется условие $Contact_k = false$, то

$$\tilde{G}^c_{k\,(3m+i-3)(3m+j-3)} = 0, \tag{49}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k = -{}^{(t)}\mathbf{F}^c. \tag{50}$$

Таким образом, СЛАУ (32) принимает вид

$$\left(\mathbf{G}_k + \tilde{\mathbf{G}}^c_k\right)\mathbf{q}_k = \tilde{\mathbf{b}}_k, \tag{51}$$

где вектор $\tilde{\mathbf{b}}_k$ построен по формуле (37) с заменой $\Delta\mathbf{F}^c_k$ на $\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k$.

В СЛАУ (51) учитываются кинематические краевые условия (2) методом Гауссова исключения и полученная система решается методом $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ разложения. Матрица хранится в симметричном разреженном блочном строчно-столбцовом формате.

3. Из решения СЛАУ (51), для каждого контактного узла m получается приращение перемещения (46) и новое приближение приращения контактной силы $\Delta\mathbf{F}^c_{k+1}$ по формуле (44), если $Contact_k = true$, или по формуле (50), если $Contact_k = false$.

4. Для каждого контактного узла проверяется условие наличия контакта со штампом

$$\begin{gathered} Contact_{k+1} = g\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right) < 0 \text{ или} \\ \text{или } g\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right) \geqslant 0 \text{ и } \mathbf{F}^c_{k+1}\cdot\mathbf{n} < 0, \end{gathered} \tag{52}$$

где функция $g(\mathbf{x})$ — зазор между точкой $\mathbf{x}$ и штампом (может принимать отрицательные значения в случае внедрения). Если $Contact_{k+1} = true$, то рассчитывается новое приближение $\mathbf{x}^*_{k+1}$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^*_{k+1} = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right), \text{ если } Contact_k = true \\ \mathbf{x}^*_{k+1} = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right), \text{ если } Contact_k = false \end{cases} \tag{53}$$

5. Для каждого КЭ рассчитываются значения $\Delta\varepsilon_k$, $\Delta\varepsilon^{\tilde{C}}_k$, $\Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0}_k$, $\Delta\varepsilon^p_k$, $\Delta\sigma_k$, Δq_k по

формулам (6), (27), (28), (20), (19), (13)

$$
\begin{gathered}
\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\Delta u_i\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\Delta u_j\right)}{\partial x_i}\right), \\
\Delta\varepsilon_k^{\tilde{C}} = 2\mu\frac{z : \Delta\varepsilon_k}{E_k^* + 3\mu}z, \\
\Delta\varepsilon_k^{\Delta\sigma^0} = -\frac{1}{2\mu}\Delta\sigma_k^0, \\
\Delta\varepsilon_k^p = \Delta\varepsilon_k^{\tilde{C}} + \Delta\varepsilon_k^{\Delta\sigma^0}, \\
\Delta\sigma_k = \tilde{C} : \Delta\varepsilon_k + \Delta\sigma_k^0, \\
\Delta q_k = \Delta\tilde{\varepsilon}_k^p.
\end{gathered} \tag{54}
$$

6. Для каждого КЭ проверяются условия активного нагружения

$$
\Delta W_k > 0 \text{ и } \tilde{\sigma}_k^{\text{trial}} > \Phi\left({}^{(t)}q\right), \tag{55}
$$

где $\Delta W_k \equiv {}^{(t)}s : \Delta\varepsilon_k,\ \sigma_k^{\text{trial}} \equiv {}^{(t)}\sigma + C : \Delta\varepsilon_k.$

Если условия (55) выполняются, то

$$
\begin{gathered}
E_{k+1}^* = E_k^*, \\
\Delta\sigma_{k+1}^0 = \Delta\sigma_k^0 + \omega^p\frac{{}^{(t)}s}{{}^{(t)}\tilde{s}}\,d_k,
\end{gathered} \tag{56}
$$

где $\omega^p \in (0,\ 1]$ — коэффициент регуляризации. Значение d_k вычисляется из условия попадания на кривую $\Phi\left(q\right)$, с предположением, что приращение полной деформации $\Delta\varepsilon_k$ остаётся неизменным:

$$
\left({}^{(t)}\sigma + \Delta\sigma_k + \frac{{}^{(t)}s}{{}^{(t)}\tilde{s}}\,d_k\right)_{\text{eqv}} = \Phi\left({}^{(t)}q + \left(\Delta\varepsilon_k^p - \frac{1}{2\mu}\,\frac{{}^{(t)}s}{{}^{(t)}\tilde{s}}\,d_k\right)_{\text{eqv}}\right). \tag{57}
$$

При таком выборе нового приближения методы начальных напряжений и начальных деформаций становятся тождественными. В случае без упрочнения соотношение

$$
d_k = \Phi\left({}^{(t)}q + \Delta q_k\right) - \tilde{\sigma}_k \tag{58}
$$

приводит к примерно такому же результату.

Если условия (55) не выполняются, то прогнозируется упругое нагружение, нейтральное деформирование или разгрузка, и

$$
E_{k+1}^* = \infty,\ \Delta\sigma_{k+1}^0 = 0. \tag{59}
$$

Если ${}^{(t)}s = 0$ и $\tilde{\sigma}_k^{\text{trial}} > \Phi\left({}^{(t)}q\right)$, то происходит аварийное завершение итераций (шаг по времени слишком велик).

В случае, когда результате итерации хотя в бы в одном КЭ параметр E^* меняет значение (это может происходить только когда прогнозируется разгрузка после активного нагружения), то приходится перестраивать матрицу жёсткости. Чтобы уменьшить количество изменений матрицы, дополнительно выделяются КЭ, “близкие к разгрузке”, то есть для которых выполняются условия

$$E_{k+1}^* \neq \infty, \tag{60}$$

$$cos\left(\theta_k\right) = \frac{{}^{(t)}s : (C : \Delta\varepsilon_k)}{\left\|{}^{(t)}s\right\| \cdot \|C : \Delta\varepsilon_k\|} < cos\left(\theta_{\min}\right), \tag{61}$$

где $cos\left(\theta_{\min}\right) \geqslant 0$ — параметр, влияющий на количество разложений матрицы жёсткости; знак $cos\left(\theta_k\right)$ совпадает со знаком ΔW_k. Для выбранных таким образом КЭ следующее приближение корректируется:

$$\begin{gathered} E_{k+1}^* = \infty \\ \Delta\sigma_{k+1}^0 = -2\mu\,\Delta\varepsilon_k^p + \omega^p \frac{{}^{(t)}s}{{}^{(t)}\tilde{s}}\,d_k. \end{gathered} \tag{62}$$

7. Проверяются условия завершения итераций: для каждого контактного узла

$$\begin{gathered} \left|\Delta\mathbf{F}_{k+1}^c - \Delta\mathbf{F}_k^c\right| / \left|\mathbf{F}_{k+1}^c\right| < \Delta_F, \\ \left|\mathbf{r}_{k+1}^* - \mathbf{r}_k^*\right| < \Delta_r, \\ Contact_{k+1} = Contact_k, \end{gathered} \tag{63}$$

и для каждого КЭ

$$\begin{gathered} \left(\Phi\left({}^{(t)}q + \Delta q_k\right) - \tilde{\sigma}_k\right) / \tilde{\sigma}_k < \Delta_\sigma, \\ \left|\Delta q_k - \Delta q_{k-1}\right| / \tilde{\varepsilon}_k < \Delta_\varepsilon. \end{gathered} \tag{64}$$

Если все условия удовлетворены, то итерации успешно завершаются и осуществляется переход к следующему временному слою, иначе $k = k + 1$ и переход к шагу 1.

5 Вдавливание жёсткого шара в упруго-пластичное полупространство

Рассмотрим задачу индентации жёсткого шара в упруго-пластичное полупространство [11], которая схематично изображена на рисунке 2.

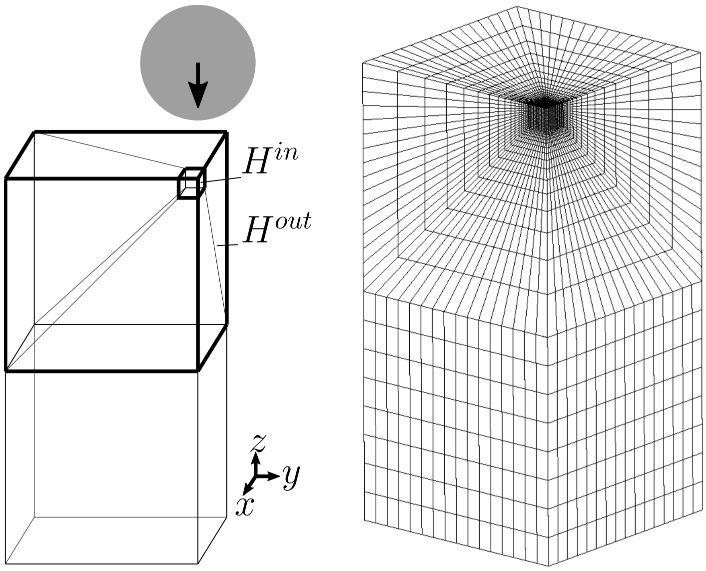

Рис. 2: Геометрия задачи и сетка.

Общую силу реакции опоры P, глубину индентации δ (величину сближения удалённых точек) и площадь контактной поверхности A можно представить в безразмерном виде [12]:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= P/P_Y,\\ \bar{A} &= A/A_Y,\\ \bar{\delta} &= \delta/\delta_Y,\end{aligned} \tag{65}$$

где P_Y, A_Y, δ_Y — значения, при которых начинается пластическое течение:

$$\begin{aligned}P_Y &= \frac{9\pi^3}{16}c^3YR^2\left(\frac{E^*}{Y}\right)^{-2},\\ A_Y &= \frac{9\pi^3}{16}c^2R^2\left(\frac{E^*}{Y}\right)^{-2},\\ \delta_Y &= \frac{9\pi^2}{16}c^3YR\left(\frac{E^*}{Y}\right)^{-2}\end{aligned} \tag{66}$$

$$c = 1.08, \tag{67}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}, \tag{68}$$

c — константа для случая критерия пластического течения Мизеса, E^* — приведённый модуль упругости, R — радиус шара, E — модуль упругости полупространства, ν — коэффициент Пуассона полупространства, Y — предел текучести полупространства.

Материал с изотропным степенным упрочнением задаётся диаграммой одноосного растяжения вида

$$\begin{cases} \sigma = F(\varepsilon) \equiv E\varepsilon, \text{ если } \sigma < Y, \\ \sigma = F(\varepsilon) \equiv Y\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y}\right)^n, \text{ если } \sigma \geqslant Y, \end{cases} \tag{69}$$

где $\varepsilon_Y = Y/E$, Y — предел упругости. Соответствующая функция $\sigma_y = \Phi(q)$ (см. (10)) строится из соотношений

$$\Phi(q) = F(\varepsilon), \ \varepsilon - \frac{1}{E}F(\varepsilon) = q, \tag{70}$$

т.к. $q \equiv \int d\tilde{\varepsilon}^p$ и в одноосном случае $\tilde{\sigma} = \sigma$, $d\tilde{\varepsilon}^p = d\varepsilon^p$. На рисунке 3 приведены кривые для материала при различных коэффициентах n.

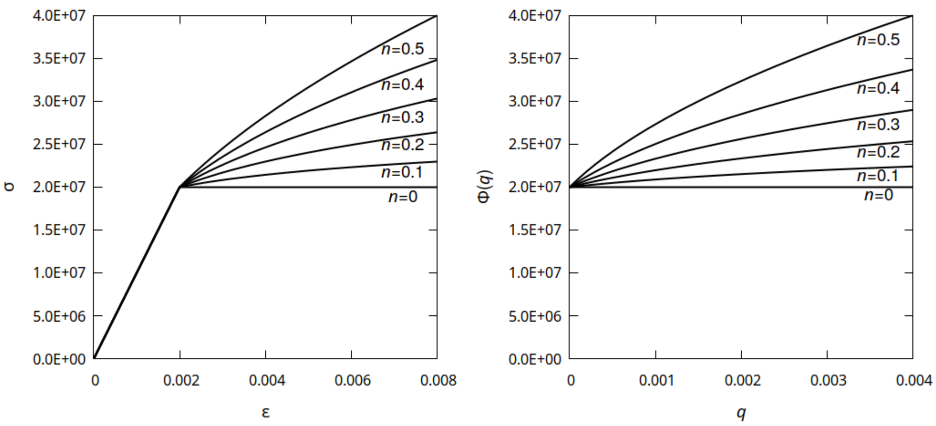

Рис. 3: Диаграммы одноосного деформирования (слева) и соответствующие функции $\sigma_y = \Phi(q)$ (справа) для изотропного степенного упрочнения при $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 550$ и различных значениях коэффициента n.

Параметры задачи приведены в таблице 1. Симметрия относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ учитывается однородными кинематическими краевыми условиями, и рассматривается $1/4$ образца. Сетка четвертинки изображена на рисунке 2. Размеры куба H^{in}, в котором наиболее подробная сетка, выбирались так, чтобы зона контакта не выходила за пределы его поверхности. Размеры куба H^{out} выбирались в 10 раз больше, чем размеры H^{in} (исходя из принципа Сен Венана). Коэффициент разрядки выбирался таким, чтобы примыкающие к граням H^{in} конечные элементы были примерно одинакового размера. Были использованы базисные функции Лагранжа, первого порядка.

Таблица 1: Параметры задачи

Параметр	Обозначение	Значение
Модуль Юнга	E	10^{10} Па
Коэффициент Пуассона	ν	0.3
Коэффициент степенного упрочнения	n	$0, 0.1, ..., 0.9$
Безразмерная глубина индентации	$\bar{\delta}_{max}$	$1, 3, 6, 10, 15, 20, 30, 50, 70, 90, 110$
	$\frac{E^*}{Y}$	$110, 220, 550, 1100$
Радиус шара	R	1м
Глубина индентации	δ	$\bar{\delta}_{max}\delta_Y$
Размеры H^{in}	$H_x^{in} \times H_y^{in} \times H_z^{in}$	$H_x^{in} = H_y^{in} = H_z^{in} = 1.5\sqrt{2R\delta - \delta^2}$
Размеры H^{out}	$H_x^{out} \times H_y^{out} \times H_z^{out}$	$H_x^{out} = H_y^{out} = H_z^{out} = 10H_x^{in}$
Разбиение H^{in}	$N \times N \times N$	$N = 16$
Коэффициент сгущения	q	находится из решения уравнения $\frac{1-q^{N-1}}{1-q^N} = \frac{H_x^{out}-H_x^{in}}{H_x^{out}}$
Количество КЭ		18432
Количество шагов нагружения/разгрузки		110
Параметры завершения итераций	Δ_σ, Δ_ε, Δ_F, Δ_r	$\Delta_\sigma = \Delta_\varepsilon = \Delta_F = 10^{-10}$, $\Delta_r = 10^{-14}$
Коэффициент в (45)	ω^c	10
Коэффициент в (56)	ω^p	1
Коэффициент в (61)	$cos\left(\theta_{\text{min}}\right)$	0.1

На рисунках 4, 5, 6 приведены решения при различных параметрах задачи, полученные с помощью реализации приведённого в статье алгоритма; решения ANSYS, полученные на точно такой же сетке, с учётом больших деформаций; и численное решение аналогичной задачи в осесимметричной (двумерной) постановке из [12]. При решении в ANSYS без учёта больших деформаций значения $\bar{P}$ и $\bar{A}$ значительно отличаются от приведённых на рисунке 4, но остаточная глубина индентации $\bar{\delta}_{res}$ отличается не значительно.

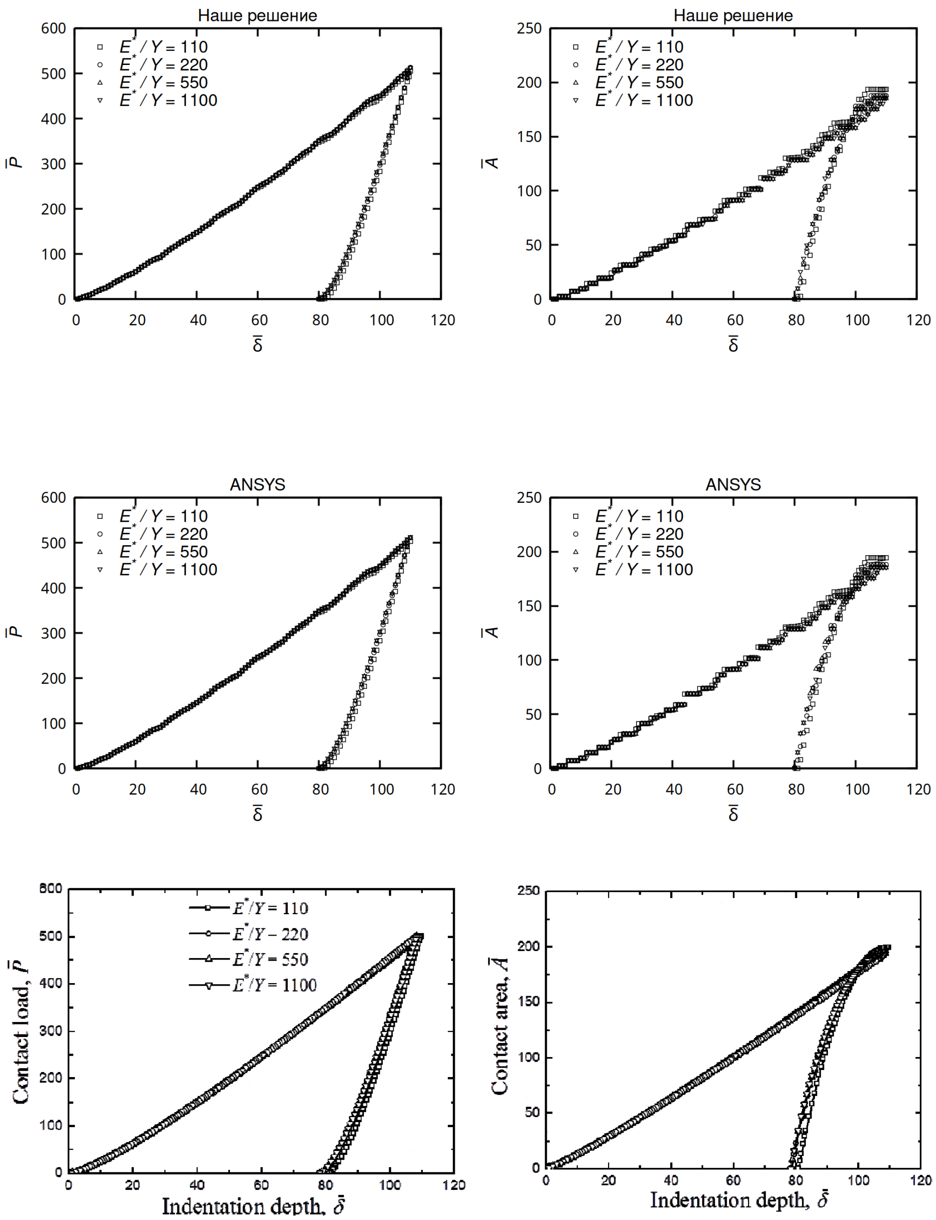

Рис. 4: Зависимости общей силы реакции опоры $\bar{P}$ (слева) и площади контактной поверхности $\bar{A}$ (справа) от глубины индентации $\bar{\delta}$ при $n = 0$, $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 110, 220, 550, 1100$. Сверху полученное численное решение, по середине решение ANSYS, снизу численное решение из [12].

Значения $\bar{A}$, $\bar{P}$ и $\bar{\delta}_{res}$ в нашей реализации и в ANSYS вычислялись одинаковыми способами. Площадь получена путём суммирования площадей 4-угольных граней конечных элементов, все 4 узла которых находятся в состоянии контакта, т.е. рассчитывалась нижняя оценка площади. Общая сила реакции опоры вычислялась суммированием сил в контактных узлах. Остаточной глубиной считалась

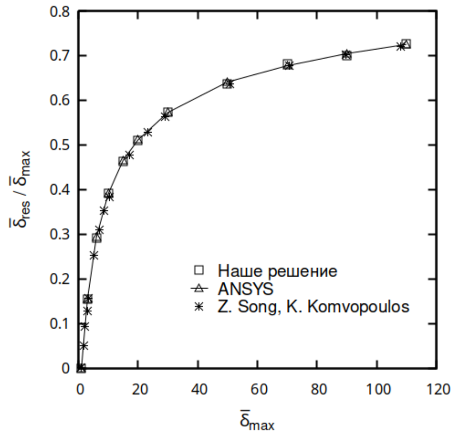

Рис. 5: Зависимость остаточной глубины индентации $\bar{\delta}_{res}$ (по отношению к $\bar{\delta}_{max}$) от максимальной глубины индентации при $n = 0$, $\bar{\delta}_{max} = 1, 3, 6, 10, 15, 20, 30, 50, 70, 90, 110$, $\frac{E^*}{Y} = 550$.

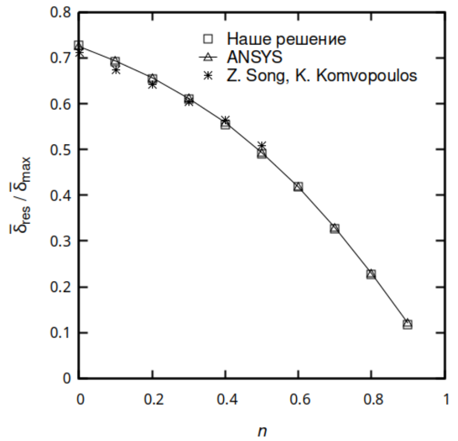

Рис. 6: Зависимость остаточной глубины индентации $\bar{\delta}_{res}$ (по отношению к $\bar{\delta}_{max}$) от коэффициента степенного упрочнения при $n = 0, 0.1, ..., 0.9$, $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 550$.

глубина индентации на шаге, на котором полностью пропадает контакт.

На рисунке 7 приведены характеристики итерационного процесса для нескольких параметров задачи. Количество изменений матрицы СЛАУ в результате разгрузок на КЭ (физических или численных из-за наличия вектора узловых невязок $\mathbf{R}^{\text{node}}$ или погрешности) лишь на некоторых шагах превосходит 2, количество итераций на каждом шаге меньше 40.

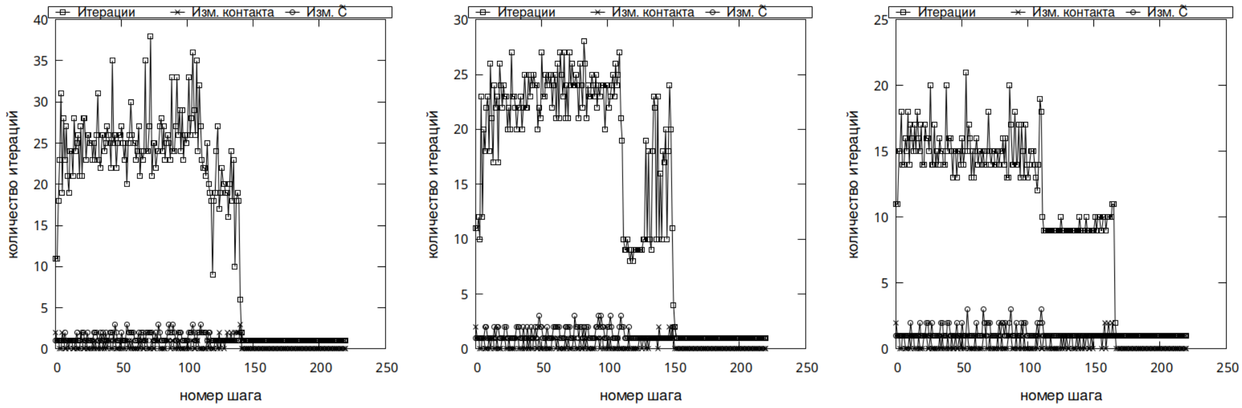

Рис. 7: Количество итераций и изменений матрицы из-за разгрузки или изменения статусов контактных узлов при $n = 0$, $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 550$ (слева), $n = 0$, $\bar{\delta}_{max} = 50$, $\frac{E^*}{Y} = 550$ (по середине) и $n = 0.5$, $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 550$ (справа).

6 Заключение

Проверка реализации приведённого алгоритма на модельной задаче показала удовлетворительные результаты, не смотря на неизменность при итерациях значений направляющих тензоров $z \equiv \frac{\partial^{(t)}\tilde{\sigma}}{\partial \sigma}$ и $\frac{^{(t)}s}{^{(t)}\tilde{s}}$. В случае быстрого поворота траектории сложного нагружения, для лучшей сходимости можно обновлять эти значения (или только одно), например, по правилу трапеций или средней точки [13] и вместо непрерывного (continuum) упругопластического тензора (25) использовать согласованный (consistent) с алгоритмом возврата на поверхность текучести [14] или [15] и т.п. Для простоты, мы эти модификации здесь рассматривали. Нормаль к поверхности штампа $\mathbf{n} = Norm\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right)$ так же можно обновлять после каждой итерации, и дополнительные вычислительные затраты на разложения матрицы будут не значительными, если степени свободы контактных узлов (которых на поверхности не много) хранить в нижней части матрицы СЛАУ.

Список литературы

1. Bathe K.-J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. En-glewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1982.

2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М. : Мир, 1975. — 542 с.

3. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов //Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2005. — №. 1. — С. 45-87.

4. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. — Springer Science & Business Media, 2006.
5. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — Киев : Наукова думка, 1981. — 496 с.
6. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — РФФИ, 1994. — 334 с.
7. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2000. — 262 с.
8. Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 895 с.
9. Александров А. В., Алфутов Н. А., Астанин В. В. и др. Энциклопедия "Машиностроение". Том I-3. "Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин". В 2-х книгах. Кн. 2 / Под ред. Фролов К. В. (гл. ред.). — М. : Машиностроение, 1995. — 624 с.
10. Belytschko T., Liu W. K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures, 2000.
11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия : пер. с англ. — М. : Мир, 1989.
12. Song Z., Komvopoulos K. An elastic–plastic analysis of spherical indentation: Constitutive equations for singleindentation unloading and development of plasticity due to repeated indentation // Mechanics of Materials, 2014.
13. Ortiz M., Popov E. P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations //International journal for numerical methods in engineering. – 1985. – Т. 21. – №. 9. – С. 1561-1576.
14. Simo J. C., Taylor R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity //Computer methods in applied mechanics and engineering, 1985. — Т. 48. — №. 1. — С. 101-118.
15. Gu Q. et al. Consistent tangent moduli for multi-yield-surface J_2 plasticity model //Computational Mechanics, 2011. — Т. 48. — №. 1. — С. 97-120.