

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

**ОТЧЁТ ПО НИР**

\_\_ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций \_\_  
при механических и немеханических воздействиях \_\_  
(тема НИР в соответствии с индивидуальным планом)

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:

Аспирант: \_\_\_\_\_ Исламов Д.Р. \_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Год подготовки, семестр: 1 год, 2 семестр

Факультет: ФПМИ

\_\_\_\_\_  
подпись

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Проверил:

Научный руководитель: \_\_\_\_\_ Персова М.Г. \_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Балл: \_\_\_\_\_, ECTS \_\_\_\_\_,

Оценка \_\_\_\_\_  
«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»

\_\_\_\_\_  
подпись

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Новосибирск 2018

## Оглавление

1. Постановка задачи .....	3
2. Конечноэлементная дискретизация .....	7
2.1. Вариационная постановка в форме уравнений Галеркина .....	7
2.2. Аппроксимация на конечномерных пространствах .....	8
2.3. Аппроксимация на шестигранных конечных элементах .....	11
3. Задача теплопроводности.....	17
4. Итерационный процесс по пластичности.....	20
5. Учёт ползучего поведения материала.....	22
6. Расчёт сил реакции гладкой опоры .....	24
7. Методы решения СЛАУ .....	25
8. Тестирование программной реализации.....	26
8.1. Нагревание толстостенной сферы .....	26
8.2. Равномерное нагревание термоупругой толстостенной сферы .....	28
8.3. Нагружение упругопластичного полого шара внутренним давлением .....	28
8.4. Нагружение пластины .....	31
Заключение .....	34
Список литературы .....	35

## 1. Постановка задачи

Компоненты тензора малых деформаций Коши  $\varepsilon_{ij}$  выражаются через перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.1)$$

Компоненты тензора напряжений Коши  $\sigma_{ij}$  для линейно-упругого материала выражаются через малые деформации Коши обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.2)$$

где  $C_{ijkl}$  – тензор упругих коэффициентов материала.

Внутри тела, геометрия которого задана некоторой областью  $\Omega$ , выполняются дифференциальные уравнения движения в перемещениях

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, i = \overline{1,3}, \quad (1.3)$$

где  $\vec{F}(t)$  – вектор объёмных сил (силы на единицу объёма). На поверхности  $S_2$  области  $\Omega$  выполняются краевые условия

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_2} = P_i, i = \overline{1,3}, \quad (1.4)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S_2$ , а  $\vec{P}(t)$  – вектор поверхностных сил (силы на единицу площади).

Учитывая симметрию тензоров  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ , обозначим вектор деформаций  $\mathbf{\varepsilon}$  и вектор напряжений  $\mathbf{\sigma}$  в виде векторов 6-мерного пространства:

$$\mathbf{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}^T, \mathbf{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \quad (1.5)$$

тогда обобщенный закон Гука (1.2) примет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

где симметричная матрица упругих коэффициентов  $\mathbf{D}$  определяется выражением

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Полные деформации термо-упруго-пластичного материала представимы в виде суммы упругих, пластических и тепловой деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th}, \quad (1.8)$$

тогда, в соответствии с обобщенным законом Гука (1.2) для упругих деформаций, напряжения связаны с деформациями соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}). \quad (1.9)$$

откуда связь приращений напряжений с приращениями деформаций определяется уравнением [4]

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th}), \quad (1.10)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha\Delta T \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T, \quad (1.11)$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного изотропного теплового расширения,  $\Delta T$  - приращение температуры.

При активном нагружении пластичного материала происходит приращение пластических деформаций. Нейтральное нагружение или разгрузка происходят линейно-упруго, без приращения пластических деформаций.

Для пластичного *изотропного* материала с критерием текучести Мизеса будем считать, что задана кривая пластичности  $\varepsilon_M = \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma})$ , где интенсивность напряжений  $\tilde{\sigma}$  и интенсивность (нетепловых) деформаций  $\tilde{\varepsilon}$  определяются соотношениями [8]

$$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{c_{\tilde{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}}, \quad \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{c_{\tilde{\varepsilon}} (\mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{M} (\mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon})}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Используя кривую пластичности, можно получить уравнение связи приращения интенсивности напряжений  $\Delta \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t + \Delta t) - \tilde{\sigma}(t)$  с приращением интенсивности пластических деформаций  $\Delta \tilde{\varepsilon}^{pl} = \tilde{\varepsilon}^{pl}(t + \Delta t) - \tilde{\varepsilon}^{pl}(t)$  [8]:

$$\Delta \tilde{\sigma} = E^* \Delta \tilde{\varepsilon}^{pl}, \quad (1.14)$$

$$E^*(\boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = 1 / \left( \frac{\varepsilon_m(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma})) - \varepsilon_m(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}))}{\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})} - \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \tilde{\sigma}}(0) \right), \quad (1.15)$$

$$E^* \approx 1 / \left( \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})) - \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \tilde{\sigma}}(0) \right). \quad (1.16)$$

Соотношение (1.16) задает начальное приближение коэффициента  $E^*$ , а соотношение (1.15) позволяет его итерационно уточнять в процессе решения нелинейных уравнений движения.

Также выполняются ассоциированный с условием текучести Мизеса закон пластического течения, связывающий малые приращения пластических деформаций и малое приращение интенсивности пластических деформаций [8]:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_{\tilde{\sigma}}}{c_{\tilde{\varepsilon}}}} \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}} d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}. \quad (1.17)$$

Из соотношений (1.10)–(1.17) можно получить связь малых приращений напряжений  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t)$  с малыми приращениями деформаций  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , которая справедлива в случае активного нагружения или нелинейно-упругой разгрузки [8]:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th}), \quad (1.18)$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D} \left( \mathbf{I} - \frac{\tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{D})}{E^* + \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{Z}}} \right), \quad \tilde{\mathbf{Z}} = \sqrt{\frac{2}{3}} c_{\tilde{\sigma}} \sqrt{\frac{c_{\tilde{\sigma}}}{c_{\tilde{\varepsilon}}}} \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}}. \quad (1.19)$$

Пространственная начально-краевая задача для вектора перемещений  $\vec{u}$  определяется дифференциальными уравнениями (1.3) (с учетом определяющих соотношений), заданными в некоторой области  $\Omega$  с границей  $S = S_1 \cup S_2$ , краевыми условиями (1.4) и

$$\vec{u} \Big|_{S_1} = \vec{u}_0(t), \quad (1.20)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} \vec{u} \Big|_{t=t_0} &= 0, \\ \dot{\vec{u}} \Big|_{t=t_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

## 2. Конечноэлементная дискретизация

### 2.1. Вариационная постановка в форме уравнений Галеркина

Потребуем, чтобы невязки уравнений движения (1.3) были ортогональны пространству пробных функций  $v \in H^1$  в смысле скалярного произведения

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i - \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} \right) v d\Omega = 0, i = \overline{1,3}, \quad (2.1)$$

применим формулу Грина интегрирования по частям [2]:

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} v d\Omega = \int_{\Omega} F_i v d\Omega + \int_{S_2} (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}) \cdot \vec{n} v dS. \quad (2.2)$$

Учитывая (1.4), при  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$ ,  $\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t + \Delta t) - \sigma_{ij}(t)$ , получим

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2}(t) v d\Omega = \int_{\Omega} F_i(t) v d\Omega + \int_{S_2} P_i(t) v dS, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2}(t + \Delta t) v d\Omega = \\ & \int_{\Omega} F_i(t + \Delta t) v d\Omega + \int_{S_2} P_i(t + \Delta t) v dS - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} F_i(t + \Delta t) v d\Omega + \int_{S_2} P_i(t + \Delta t) v dS - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \Delta F_i v d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i v dS + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2}(t) v d\Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

Учитывая (1.18), (1.2), (1.1) и (2.5) в уравнениях (2.4), получим:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{C}_{ijkl} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \alpha \Delta T \delta_{kl} \right] \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t + \Delta t) v d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \Delta F_i v d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i v dS + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t) v d\Omega \quad (2.6)$$

где тензор  $\tilde{C}_{ijkl}$  соответствует матрице  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Изменим в (2.6) очередность суммирования в  $\sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{C}_{ijkl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ ,

учитём симметрию тензора  $\tilde{C}_{ijkl}$ , получим уравнения Галеркина:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t + \Delta t) v d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \Delta F_i v d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i v dS + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \alpha \Delta T \tilde{C}_{ijll} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t) v d\Omega \quad (2.7)$$

## 2.2. Аппроксимация на конечномерных пространствах

Введем конечномерное линейное пространство  $V^h$ , натянутое на финитные базисные функции  $\psi_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , т.е. каждая базисная функция  $\psi_n$  будет принимать ненулевое значение только на одном из конечных элементов  $\Omega_K \subseteq \Omega$ , на которые разбивается исходная область  $\Omega$  ( $\Omega = \bigcup \Omega_K, \bigcap \Omega_K = \emptyset$ ).

Заменим  $u_1, u_2, u_3$  и  $v$  в уравнениях (2.7) на аппроксимирующие их функции  $u_1^h, u_2^h, u_3^h$  и  $v^h$  из пространства  $V^h$ . Функции  $v^h$  заменим поочередно на функции  $\psi_m, m = \overline{1, N}$ , а функции  $u_1^h, u_2^h, u_3^h$  разложим по элементам базиса

$$u_i^h = \sum_{n=1}^N q_n^i \psi_n, i = \overline{1, 3},$$

$$u_i^{\Sigma h} = \sum_{n=1}^N q_n^{\Sigma i} \psi_n, i = \overline{1, 3}. \quad (2.8)$$



После проделанных преобразований, получим СЛАУ (3.8), решение которой содержит коэффициенты в разложениях искомых функций  $u_1^h, u_2^h, u_3^h$  по базису  $\{\psi_n\}$ . При дифференцировании по времени считаем базисные функции постоянными во времени.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} q_n^k \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 q_n^{\Sigma i}}{\partial t^2} (t + \Delta t) \psi_n \psi_m d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \Delta F_i \psi_m d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \alpha \Delta T \tilde{C}_{ijll} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t) v d\Omega \quad (2.9) \\ & i = \overline{1, 3}, m = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Пусть  $q_{3n+k-3} \equiv q_n^k$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , тогда получим СЛАУ

$$\mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} (t + \Delta t) = \mathbf{b}, \quad (2.10)$$

где матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{M}$  размерностей  $3N \times 3N$  и вектор правой части размерности  $3N$  определяются следующими соотношениями:

$$G_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} d\Omega, \quad (2.11)$$

$$M_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \delta_{ik} \int_{\Omega} \rho \psi_m \psi_n d\Omega, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} b_{(3m+i-3)} &= \int_{\Omega} \Delta F_i \psi_m d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \alpha \Delta T \tilde{C}_{ijll} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^{\Sigma}}{\partial t^2} (t) v d\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Крокенера.

Поскольку базисные функции выбраны финитные, то для каждого конечного элемента  $\Omega_K$  можно записать локальные вклады в СЛАУ (2.10), выраженные только через локальные базисные функции  $\hat{\psi}_i$ , не нулевые только на данном конечном элементе.

Для аппроксимации уравнений (2.10) по времени будем использовать разностные схемы, представляя вектор-функцию  $\mathbf{q}(t)$  полиномиальными интерполянтами его значений на текущем временном слое  $t_r$  и на предыдущих временных слоях  $t_{r-1}, t_{r-2}, t_{r-3}$  и т.д, что позволит вычислить значение производной  $\partial^2 \mathbf{q} / \partial t^2$  на текущем временном слое  $t_r$ . Неявная трехслойная разностная схема аппроксимации уравнений (2.10) по времени с постоянным шагом  $\Delta t = t_r - t_{r-1}$  имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^r &= \mathbf{Q}^{r-1} + \mathbf{q}^r \\ \mathbf{G}^r \mathbf{q}^r + \mathbf{M}^r \frac{\mathbf{Q}^r - 2\mathbf{Q}^{r-1} + \mathbf{Q}^{r-2}}{\Delta t^2} &= \mathbf{b}^r \\ \left( \mathbf{G}^r + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^r \right) \mathbf{q}^r &= \mathbf{b}^r - \mathbf{M}^r \left( -\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{Q}^{r-1} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{Q}^{r-2} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где верхний индекс матриц  $\mathbf{G}, \mathbf{M}$  и векторов  $\mathbf{q}, \mathbf{b}$  означает номер временного слоя, на котором они вычисляются.

Неявная трехслойная схема с переменным шагом по времени имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^r \mathbf{q}^r + \mathbf{M}^r (\eta_0 \mathbf{Q}^r + \eta_1 \mathbf{Q}^{r-1} + \eta_2 \mathbf{Q}^{r-2}) &= \mathbf{b}^r, \\ (\mathbf{G}^r + \eta_0 \mathbf{M}^r) \mathbf{q}^r &= \mathbf{b}^r - \mathbf{M}^r ((\eta_0 + \eta_1) \mathbf{Q}^{r-1} + \eta_2 \mathbf{Q}^{r-2}), \\ \eta_0 &= \frac{2}{(t_r - t_{r-2})(t_r - t_{r-1})}, \\ \eta_1 &= \frac{2}{(t_{r-1} - t_{r-2})(t_{r-1} - t_r)}, \\ \eta_2 &= \frac{2}{(t_{r-2} - t_{r-1})(t_{r-2} - t_r)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Неявная четырехслойная схема с переменным шагом по времени имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{G}^r \mathbf{q}^r + \mathbf{M}^r (\eta_0 \mathbf{Q}^r + \eta_1 \mathbf{Q}^{r-1} + \eta_2 \mathbf{Q}^{r-2} + \eta_3 \mathbf{Q}^{r-3}) = \mathbf{b}^r, \\
& (\mathbf{G}^r + \eta_0 \mathbf{M}^r) \mathbf{q}^r = \mathbf{b}^r - \mathbf{M}^r ((\eta_0 + \eta_1) \mathbf{Q}^{r-1} + \eta_2 \mathbf{Q}^{r-2} + \eta_3 \mathbf{Q}^{r-3}), \\
& \eta_0 = \frac{2(3t_r - t_{r-1} - t_{r-2} - t_{r-3})}{(t_r - t_{r-3})(t_r - t_{r-2})(t_r - t_{r-1})}, \\
& \eta_1 = \frac{2(2t_r - t_{r-2} - t_{r-3})}{(t_{r-1} - t_{r-3})(t_{r-1} - t_{r-2})(t_{r-1} - t_r)}, \\
& \eta_2 = \frac{2(2t_r - t_{r-1} - t_{r-3})}{(t_{r-2} - t_{r-3})(t_{r-2} - t_{r-1})(t_{r-2} - t_r)}, \\
& \eta_3 = \frac{2(2t_r - t_{r-1} - t_{r-2})}{(t_{r-3} - t_{r-2})(t_{r-3} - t_{r-1})(t_{r-3} - t_r)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

При отсутствии инертных слагаемых (т.е.  $\rho=0$ ) уравнения (2.10) принимают вид (2.17) и соответствуют квазистатическому процессу, в котором каждый шаг по времени (которое становится просто параметром нагружения) переводит тело в новое равновесное состояние.

$$\mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{b} \Big|_{\rho=0} \tag{2.17}$$

### 2.3. Аппроксимация на шестигранных конечных элементах

В качестве конечных элементов будем использовать шестигранники, а базисные функции задавать через отображение трилинейных функций на шаблонном кубе в шестигранник.

Рассмотрим некоторый шестигранник  $\Omega_K \subseteq \Omega$  с вершинами  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i), i=1...8$  и шаблонный куб  $\Omega^E = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ . Отображение шаблонного куба  $\Omega^E$  в шестигранник  $\Omega_K$  определим соотношениями [2]

$$x = \sum_{i=1}^8 \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{z}_i, \tag{2.18}$$

где  $\hat{\phi}_i$  – трилинейные базисные функции на шаблонном кубе  $\Omega^E$ :

$$\hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) = Q_{\beta(i)}(\xi) Q_{\nu(i)}(\eta) Q_{\vartheta(i)}(\zeta), \quad i = 1 \dots 8, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha) &= \frac{1-\alpha}{2}, \quad Q_2(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}, \\ \beta(i) &= ((i-1) \bmod 2) + 1, \\ \nu(i) &= \left( \left[ \frac{i-1}{2} \right] \bmod 2 \right) + 1, \\ \vartheta(i) &= \left[ \frac{i-1}{4} \right] + 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

или

$$x = \sum_{i=1}^{27} \hat{\phi}_i^{tk}(\xi, \eta, \zeta) \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^{27} \hat{\phi}_i^{tk}(\xi, \eta, \zeta) \hat{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^{27} \hat{\phi}_i^{tk}(\xi, \eta, \zeta) \hat{z}_i, \quad (2.21)$$

где  $\hat{\phi}_i^{tk}$  – триквадратичные базисные функции на шаблонном кубе  $\Omega^E$ :

$$\hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) = Q_{\beta(i)}(\xi) Q_{\nu(i)}(\eta) Q_{\vartheta(i)}(\zeta), \quad i = 1 \dots 27, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha) &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \quad Q_2(\alpha) = 1 - \alpha^2, \quad Q_3(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}, \\ \beta(i) &= ((i-1) \bmod 3) + 1, \\ \nu(i) &= \left( \left[ \frac{i-1}{3} \right] \bmod 3 \right) + 1, \\ \vartheta(i) &= \left[ \frac{i-1}{9} \right] + 1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда базисные функции  $\hat{\psi}_i$  на шестиграннике  $\Omega_K$  можно задать в координатах шаблонного куба [2]:

$$\hat{\psi}_i(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) = \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.24)$$

Обозначим

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

– матрицу преобразования координат, переводящего куб  $\Omega^E$  в шестигранник  $\Omega_m$ . Чтобы найти производные функции  $\hat{\psi}_i$  из уравнений (2.11) в координатах шаблонного куба  $(\xi, \eta, \zeta)$ , применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Из системы (2.26) по правилу Крамера получаем искомые производные, обозначив  $J \equiv \det \mathbf{J}$  [2]:

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} = \frac{1}{J} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} & J_{12} & J_{13} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} & J_{22} & J_{23} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} = \frac{1}{J} \det \begin{pmatrix} J_{11} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} & J_{13} \\ J_{21} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} & J_{23} \\ J_{31} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} = \frac{1}{J} \det \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ J_{21} & J_{22} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \\ J_{31} & J_{32} & \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Вклад краевых условий второго рода в вектор правой части (2.13)

$$\int_{S_2 \cap \Omega_K} P_i \hat{\psi}_m dS \quad (2.30)$$

получим из предположения, что каждый участок границы  $S \cap \Omega_K$  является гранью некоторого шестигранника  $\Omega_K$ . Построим грань  $S \cap \Omega_K$  до нового шестигранника  $\tilde{\Omega}_K$  путем параллельного переноса вершин грани этой грани по нормали к самой себе, чтобы не искать тот реальный шестигранник среди конечных элементов, которому эта грань принадлежит. Полученный шестигранник  $\tilde{\Omega}_K$  определим в координатах  $(\xi, \eta, \zeta)$  отображением того же самого шаблонного куба  $\Omega^E = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Примем, что заданные 4 вершины грани будут иметь номера 1, 2, 3 и 4, тогда, с учетом построенного отображения (2.18), базисные функции на грани будут определяться тем же соотношением (2.24) при  $\zeta = -1$ , и можно в интеграле (2.30) произвести следующую замену переменных [2]:

$$\int_{S_2 \cap \Omega_K} P_i \hat{\psi}_m dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i \hat{\psi}_m \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_3^2} d\xi d\eta, \quad (2.31)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
\beta_1(\xi, \eta) &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right) \Big|_{\zeta = -1}, \\
\beta_2(\xi, \eta) &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right) \Big|_{\zeta = -1}, \\
\beta_3(\xi, \eta) &= \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \Big|_{\zeta = -1}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Зная (2.24), (2.27)–(2.29) и (2.31), произведем замены переменных в объемных интегралах в уравнениях (2.11)–(2.13) и окончательно получим компоненты локальных матриц СЛАУ в виде тройных интегралов

$$\hat{\mathbf{G}}_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tilde{C}_{ijkl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial x_l} |J| d\xi d\eta d\zeta, \tag{2.33}$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \delta_{ik} \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \hat{\psi}_n |J| d\xi d\eta d\zeta, \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}}_{(3m+i-3)} &= F_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m |J| d\xi d\eta d\zeta + \\
&+ P_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_3^2} d\xi d\eta + \\
&+ \alpha \Delta T \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tilde{C}_{ijll} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_j} |J| d\xi d\eta d\zeta + \\
&+ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i^\Sigma}{\partial t^2}(t) v d\Omega
\end{aligned} \tag{2.35}$$

в которых базисные функции  $\hat{\psi}_i$  и их производные определяются в координатах шаблонного куба  $(\xi, \eta, \zeta)$  соотношениями (3.23) и (3.26)–(3.28) соответственно.

После построения СЛАУ (2.10), которая оказалась симметричной, учитываются краевые условия первого рода (1.20). Пусть в вершине  $m$  задано некоторое краевое условие  $u_i^h = u_0$ . Поскольку только одна базисная функция,

ассоциированная с вершиной  $m$  и имеющая номер  $n = 3m + i - 3$ , принимает ненулевое значение в этой вершине при выполнении соотношений (2.8), то замена соответствующего этой вершине уравнения номер  $n$  в СЛАУ (2.10) на уравнение  $q_m^i \equiv q_{3m+i-3} = u_0$  обеспечит выполнение данного краевого условия. Такая подмена уравнения оставит ненулевыми только диагональный элемент и, может быть, правую часть, поэтому для сохранения симметричности матрицы достаточно выполнить Гауссово исключение строки номер  $n$ , то есть вычесть её из всех остальных строк для обнуления остальной части столбца номер  $n$ .



### 3. Задача теплопроводности

Уравнение теплопроводности

$$-\operatorname{div}(\Lambda \operatorname{grad} T) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = f, \quad (3.1)$$

где  $\Lambda$  – тензор теплопроводности,  $\rho$  – плотность,  $c$  – удельная теплоёмкость материала,  $f$  – мощность внутренних объёмных источников (стоков) тепла.

Тепловой поток (3-е краевое условие) на поверхности  $S$ :

$$(\Lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n})|_S = q - \chi(T - T_a), \quad (3.2)$$

где  $T_a$  – температура окружающей среды,  $\chi$  – коэффициент конвективного теплообмена,  $q$  – текущая плотность набегающего теплового потока.

Домножим на пробную функцию  $v$ , получим

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div}(\Lambda \operatorname{grad} T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + f \right) v d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

Применим формулу Грина и подставим (3.2):

$$\int_S (\Lambda \operatorname{grad} T) \cdot \vec{n} v dS - \int_{\Omega} \Lambda \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} v d\Omega - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} f v d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} \Lambda \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_S \chi T v dS = \int_S (q + \chi T_a) v dS + \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (3.5)$$

Функции  $v^h$  заменим поочередно на функции  $\psi_m, m = \overline{1, N}$ , а функцию  $T$  разложим по элементам базиса

$$T^h = \sum_{n=1}^N q_n \psi_n, \quad (3.6)$$

получим

$$\sum_{n=1}^N q_n \int_{\Omega} \Lambda \operatorname{grad} \psi_n \cdot \operatorname{grad} \psi_m d\Omega + \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial(q_n \psi_n)}{\partial t} \psi_m d\Omega + \sum_{n=1}^N q_n \int_S \chi \psi_n \psi_m dS = \int_S (q + \chi T_a) \psi_m dS + \int_{\Omega} f \psi_m d\Omega, m = \overline{1, N}, \quad (3.7)$$

где

$$\Lambda \operatorname{grad} \psi_n \cdot \operatorname{grad} \psi_m = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

Если  $\psi_n$  не зависят от времени, то

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial(q_n \psi_n)}{\partial t} \psi_m d\Omega = \frac{\partial q_n}{\partial t} \int_{\Omega} \rho c \psi_n \psi_m d\Omega \quad (3.9)$$

Уравнения (3.7) представим в виде СЛАУ:

$$\mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{b}, \quad (3.10)$$

где элементы матриц определяются соотношениями

$$\begin{aligned} G_{mn} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \Lambda_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j} d\Omega + \int_S \chi \psi_m \psi_n dS \\ M_{mn} &= \int_{\Omega} \rho c \psi_m \psi_n d\Omega \\ b_m &= \int_S (q + \chi T_a) \psi_m dS + \int_{\Omega} f \psi_m d\Omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

Элементы локальные матриц для шестигранных конечных элементов:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{mn} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial x_j} |J| d\xi d\eta d\zeta + \chi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \hat{\psi}_n \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_3^2} d\xi d\eta \\ \hat{M}_{mn} &= \rho c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \hat{\psi}_n |J| d\xi d\eta d\zeta \\ \hat{b}_m &= (q + \chi T_a) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_3^2} d\xi d\eta + f \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m |J| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Дискретизация по времени:

$$\mathbf{G}^r \mathbf{q}^r + \mathbf{M}^r \frac{\mathbf{q}^r - \mathbf{q}^{r-1}}{\Delta t} = \mathbf{b}^r, \quad (3.13)$$

$$\left( \mathbf{G}^r + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^r \right) \mathbf{q}^r = \mathbf{b}^r + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^r \mathbf{q}^{r-1}$$

#### 4. Итерационный процесс по пластичности

Пусть для пластичного изотропного материала решаются нелинейные уравнения

$$\mathbf{G}^{(J)}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(J-1)})\mathbf{q}^{(J)} + \mathbf{M}\frac{\partial^2\mathbf{q}^{(J)}}{\partial t^2} = \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

$$G_{(3m+i-3)(3n+k-3)}^{(J)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl}^{(J)}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(J-1)}) \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} d\Omega, \quad (4.2)$$

где  $J$  – номер итерации, тогда в качестве условия завершения итерационного процесса можно использовать следующие критерии:

$$\left\| \tilde{\mathbf{G}}^{(J)}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(J-1)})\mathbf{q}^{(J)} + \mathbf{M}\frac{\partial^2\mathbf{q}^{(J)}}{\partial t^2} - \mathbf{b}^{(J)} \right\| / \|\mathbf{b}^{(J)}\| < \delta_u, \quad (4.3)$$

$$\text{Max}\left(\left|\tilde{\sigma}^{(J)} - \tilde{\sigma}^{(J-1)}\right|\right) < \delta_{\tilde{\sigma}}, \quad (4.4)$$

$$\text{Max}\left(\left|\tilde{\varepsilon}^{(J)} - \tilde{\varepsilon}^{(J-1)}\right|\right) < \delta_{\tilde{\varepsilon}}. \quad (4.5)$$

Для вычисления на некотором конечном элементе матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}$  используется значение интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}^{(J-1)}$ , полученное на предыдущей итерации. После завершения итерации получается новое значение  $\tilde{\sigma}^{(J+1)} = \varphi(\tilde{\sigma}^{(J)})$ , которое используется на следующей итерации. Таким образом, если пренебречь изменениями матриц  $\tilde{\mathbf{D}}$  на других конечных элементах, искомое значение  $\tilde{\sigma}$  приближенно удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\sigma} - \varphi(\tilde{\sigma}) = 0. \quad (4.6)$$

В конце третьей и последующих итераций будут известны две пары  $(\tilde{\sigma}^{(J)}, \varphi(\tilde{\sigma}^{(J-1)}))$  и  $(\tilde{\sigma}^{(J-1)}, \varphi(\tilde{\sigma}^{(J-2)}))$ , что позволяет приближенно вычислить производную функции  $\varphi(\tilde{\sigma})$

$$\varphi'(\tilde{\sigma}^{(J)}) \approx \frac{\varphi(\tilde{\sigma}^{(J-1)}) - \varphi(\tilde{\sigma}^{(J-2)})}{\tilde{\sigma}^{(J-1)} - \tilde{\sigma}^{(J-2)}} \quad (4.7)$$

и получить уточненное значение эквивалентного напряжения для следующей итерации (метод секущих [9]):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{(J+1)*} &= \tilde{\sigma}^{(J)} + \omega(\varphi(\tilde{\sigma}^{(J)}) - \tilde{\sigma}^{(J)}), \\ \omega &= \frac{-1}{\varphi'(\tilde{\sigma}^{(J)}) - 1} \in (0; 1]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если итерационный процесс не сходится, можно уменьшить величину шага по времени и начать итерации сначала.

## 5. Учёт ползучего поведения материала

Приращение напряжений:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{D} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c), \quad (5.1)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{el}) = \tilde{\mathbf{D}} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c). \quad (5.2)$$

В результате шага по времени получаем приращение суммы всех деформаций  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  за этот шаг (которые наблюдаются в действительности).

Приращение деформаций ползучести (теория течения) [10]:

$$\left( \begin{array}{l} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c / dt = g(\tilde{\sigma}, t - t_0, T) \mathbf{s}_{ij} = \frac{3\mathbf{s}_{ij}}{2\tilde{\sigma}} \frac{\partial \Phi(\tilde{\sigma}, t - t_0, T)}{\partial t}, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3\mathbf{s}_{ij}}{2\tilde{\sigma}} \Delta \Phi, \\ \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\{1, 1, 1, 0, 0, 0\} - \text{девиатор} \\ \frac{2}{3} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{22}, \mathbf{s}_{33}, 2\mathbf{s}_{23}, 2\mathbf{s}_{31}, 2\mathbf{s}_{12}\} \end{array} \right) \quad (5.3)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{\mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}} \Delta \Phi \quad (5.4)$$

$$\Delta \Phi = \Phi(\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma}, t + \Delta t - t_0, T + \Delta T) - \Phi(\tilde{\sigma}, t - t_0, T) \quad (5.5)$$

где  $t$  – текущее время,  $t_0$  – время начала ползучести КЭ,  $T$  – температура,  $\Phi(\tilde{\sigma}, t, T)$  – кривая ползучести материала (по одноосному медленному деформированию) без упругих участков.

Учёт обратной ползучести: если становится  $\Delta \Phi < 0$  и  $\dot{\Phi}(t + \Delta t - t_0) < 0$ , то перестраиваем кривую  $\Phi$ .

В итоге для квазистатики получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \\ \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \right)_{kl} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{S_2} \Delta P_i v dS \end{aligned} \quad (5.6)$$

Учёт релаксации по кривой релаксации (?):

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{rel} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ \Phi_{rel}(\tilde{\sigma}(t + \Delta t)) / \Phi_{rel}(\tilde{\sigma}(t)) - 1 \right] \quad (5.7)$$

## 6. Расчёт сил реакции гладкой опоры

Для подбора узловых сил  $\mathbf{b}_{Contact}$  в уравнении

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{b}_{Contact}(\mathbf{u}) \quad (6.1)$$

были опробованы следующие неэффективные подходы:

1) На некотором шаге времени после каждой итерации определяются «рабочие» узлы:

- те узлы, на которые уже подействовала строго положительная сила реакции опоры (на предыдущих шагах по времени),
- те узлы, которые попали внутрь области опоры.

Для каждого рабочего узла определяется расстояние  $h_m$  до поверхности опоры ( $h_m < 0$ , если узел не попал в область опоры). Сила, действующая на некоторый рабочий узел, определяется системой

$$\begin{cases} |\Delta \mathbf{F}_m| = k_m \cdot w_m, k_m = h_m \\ (\mathbf{F}_m + \Delta \mathbf{F}_m) \parallel \mathbf{n}_m, \\ |\mathbf{F}_m + \Delta \mathbf{F}_m| \cdot \mathbf{n}_m \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

и заносится в вектор  $\mathbf{b}_{Contact}$ , затем итерации продолжаются (с изменением весовых коэффициентов  $w_m$ ), пока

$$\min \{|h_m|\} > \varepsilon_{Contact} \quad (6.3)$$

2) Такой же алгоритм, отличающийся от предыдущего другим выбором коэффициентов  $k_m$ . Для вектора  $\mathbf{u}_m^0$ , соответствующего смещению некоторого рабочего узла  $m$  по нормали  $\mathbf{n}_m$  к поверхности опоры (при фиксированных остальных узлах), вычисляется вектор  $\mathbf{b}_m^0 = \mathbf{G}\mathbf{u}_m^0$  узловых сил, из которого вычленяется сила  $\Delta \mathbf{F}_m^0$ , действующая на данный рабочий узел. Модуль коэффициента  $k_m$  вычисляется по формуле

$$|k_m| = \mathbf{n}_m \cdot \Delta \mathbf{F}_m^0 \quad (6.4)$$

знак выбирается исходя из положения узла.



## 7. Методы решения СЛАУ

Для решения симметричных СЛАУ реализованы итерационные методы ЛОС и МСГ с полными и неполными предобуславливателями LLT, LDLT и с диагональным предобуславливателем. Матрицы и неполные разложения хранятся в симметричном строчно-столбцовом формате. Для полных разложений используется симметричный профильный формат хранения матрицы. Полные разложения обновляются, если СЛАУ начинает решаться медленнее, чем в среднем (перед обновлением разложения среднее время зануляется) или по требованию.

## 8. Тестирование программной реализации

### 8.1. Нагревание толстостенной сферы

В таблице 1 отображены параметры сетки.

Таблица 1 – Параметры сеток

№	номер сетки	1	2	3
$a$	внутренний радиус	1 м	1 м	1 м
$b$	внешний радиус	4 м	4 м	4 м
$N$	разбиения «рёбер» «куба»	4	8	16
$N_R$	разбиения вдоль радиуса	16	32	64
$k_R$	коэффициент сгущения к полости	1	1	1
$\sum_{fe}$	общее количество шестигранников в сетке	1536	12288	98304

1) На границах заданы фиксированные температуры. Параметры теста и погрешности численных результатов приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2 – Параметры теста

$T_1$	температура поверхности $r = a$	1
$T_2$	температура поверхности $r = b$	2

Таблица 3 – Погрешности результатов

	$\text{Max} \left  \frac{\Delta T}{T} \right  \cdot 100\%, r \in [1; 4]$	
№ сетки	отображение базисными функциями 1-го порядка	отображение базисными функциями 2-го порядка
1	8.346527e-01	9.723214e-02
2	2.759932e-01	2.450044e-02
3	8.617211e-02	6.139054e-03

2) На внутренней границе задана фиксированная температура, на внешней границе конвекция. Параметры теста и погрешности численных результатов приведены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4 – Параметры теста

$T_1$	температура поверхности $r = a$	1
$T_a$	температура внешней среды $r > b$	2
$\chi$	коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой $r > b$	1
$\lambda$	коэффициент теплопроводности	10

Таблица 5 – Погрешности результатов

	$\text{Max} \left  \frac{\Delta T}{T} \right  \cdot 100\%, r \in [1; 4]$	
№ сетки	отображение базисными функциями 1-го порядка	отображение базисными функциями 2-го порядка
1	3.021247e-01	1.089926e-01
2	1.734704e-01	2.737930e-02
3	4.341720e-02	6.854252e-03

3) Конвекция на обеих границах. Параметры теста и погрешности численных результатов приведены в таблицах 6 и 7.

Таблица 6 – Параметры теста

$Ta_1$	температура внешней среды $r < a$	1
$\chi_1$	коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой $r < a$	10
$Ta_2$	температура внешней среды $r > b$	2
$\chi_2$	коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой $r > b$	20
$\lambda$	коэффициент теплопроводности	10

Таблица 7 – Погрешности результатов

	$\text{Max} \left  \frac{\Delta T}{T} \right  \cdot 100\%, r \in [1; 4]$	
№ сетки	отображение базисными функциями 1-го порядка	отображение базисными функциями 2-го порядка
1	8.860089e-01	7.774886e-02
2	2.503077e-01	1.942600e-02
3	6.947237e-02	4.853020e-03

4) Тепловой поток на внутренней границе, фиксированная температура на внешней границе. Параметры теста и погрешности численных результатов приведены в таблицах 8 и 9.

Таблица 8 – Параметры теста

$q$	плотность теплового потока на $r = a$	100
$T_2$	температура поверхности $r = b$	1
$\lambda$	коэффициент теплопроводности	15

Таблица 9 – Погрешности результатов

	$\text{Max} \left  \frac{\Delta T}{T} \right  \cdot 100\%, r \in [1; 4]$	
№ сетки	отображение базисными функциями 1-го порядка	отображение базисными функциями 2-го порядка
1	4.206491e+00	4.261429e-01
2	1.165755e+00	1.067839e-01
3	3.137415e-01	2.670305e-02

## 8.2. Равномерное нагревание термоупругой толстостенной сферы

В таблице 10 отображены параметры сетки.

Таблица 10 – Параметры сетки (1/8 часть сферы) и теста

$a$	внутренний радиус	2.5 м
$b$	внешний радиус	5 м
$E$	модуль Юнга	$21 \cdot 10^3$ Па
$\mu$	коэффициент Пуассона	0.3 Па
$\sigma_T$	коэффициент температурного расширения	$10^{-4} \frac{1}{^\circ C}$
$P$	прирост температуры	$30 \text{ } ^\circ C$
$N_{fe}$	количество шестигранников в сетке	12288

Результаты отображены на рисунке 1, где  $\left| \frac{\Delta u}{u} \right| < 10^{-13}$

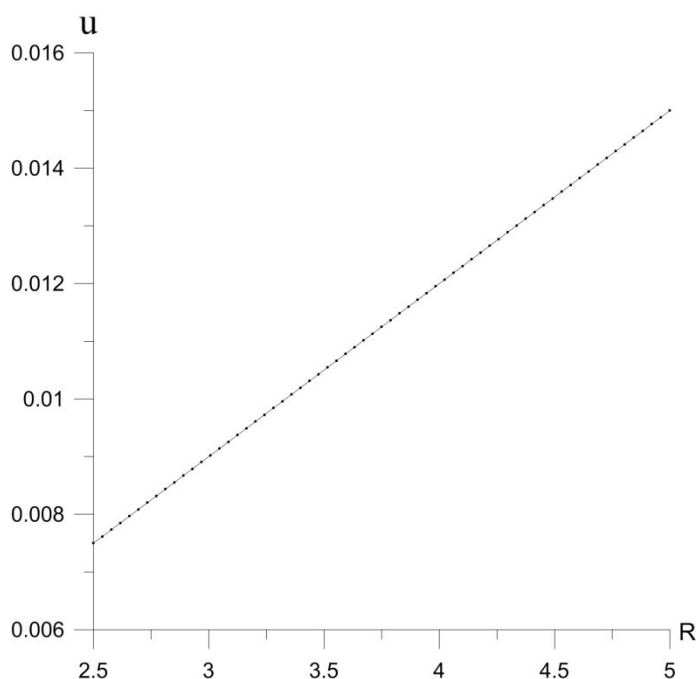


Рисунок 1

## 8.3. Нагружение упругопластичного полого шара внутренним давлением

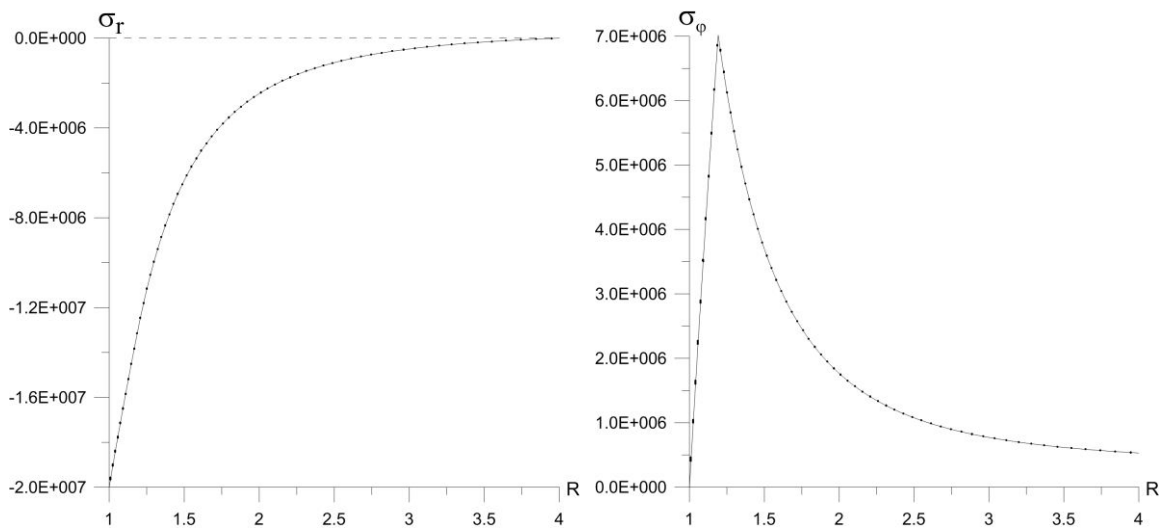
В таблице 10 отображены параметры сетки и теста.

Таблица 11 – Параметры сетки (1/8 часть сферы) и теста

№	номер сетки	1	2	3
$a$	внутренний радиус	1 м	1 м	1 м

$b$	внешний радиус	4 м	4 м	4 м
$N$	разбиения граней «куба»	4x4	8x8	16x16
$N_R$	разбиения вдоль радиуса	16	32	64
$k_R$	коэффициент сгущения к полости	1+1/8	1+1/16	1+1/32
$\sum_{fe}$	общее количество шестигранников в сетке	192	1536	12288
$E$	модуль Юнга	$10^{10}$ Па		
$\mu$	коэффициент Пуассона	0.3		
$\sigma_T$	предел текучести	$2 \cdot 10^7$		
$P$	внутреннее давление	$2 \cdot 10^7$		

На рисунках 2 и 3 изображены решения и погрешности после нагружения и после последующей разгрузки соответственно. Решения при нагружении за 1+512+1+1 шагов и менее 20 итераций на каждом шаге (используется горизонтальный возврат на кривую, сглаженная кривая пластичности  $\varepsilon_M = \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma})$  с корректировкой) и за 1+1+1+1 шагов и 49 итераций (используется просто вертикальный возврат на кривую и кривая пластичности  $\sigma_M = \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$  с почти горизонтальным пластичным участком) практически совпадают. В обоих случаях критерий сходимости итераций  $\Delta \varepsilon_{\max} \rightarrow 10^{-13}$ .



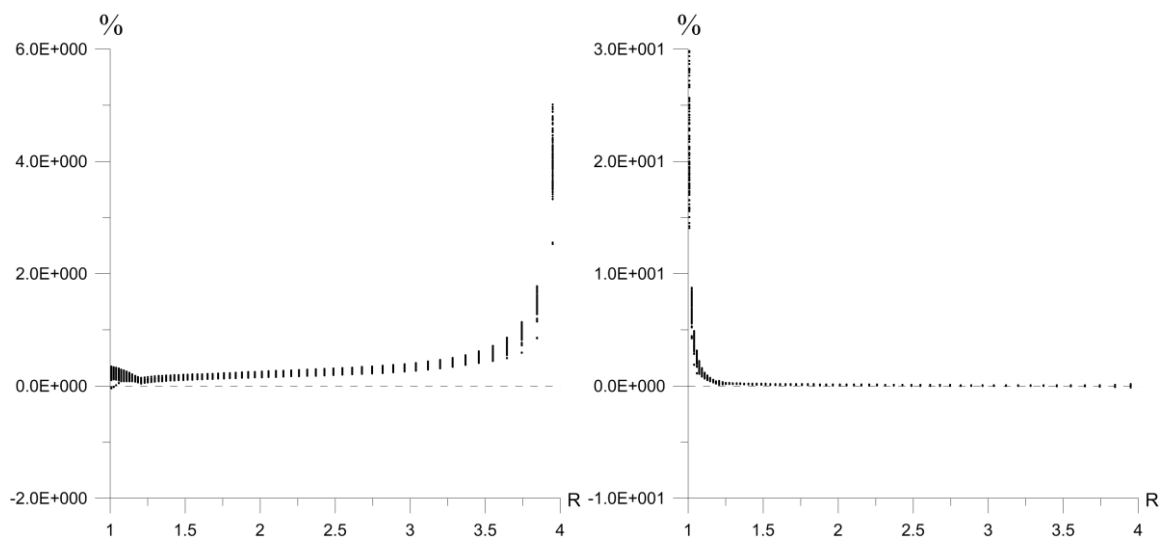


Рисунок 2

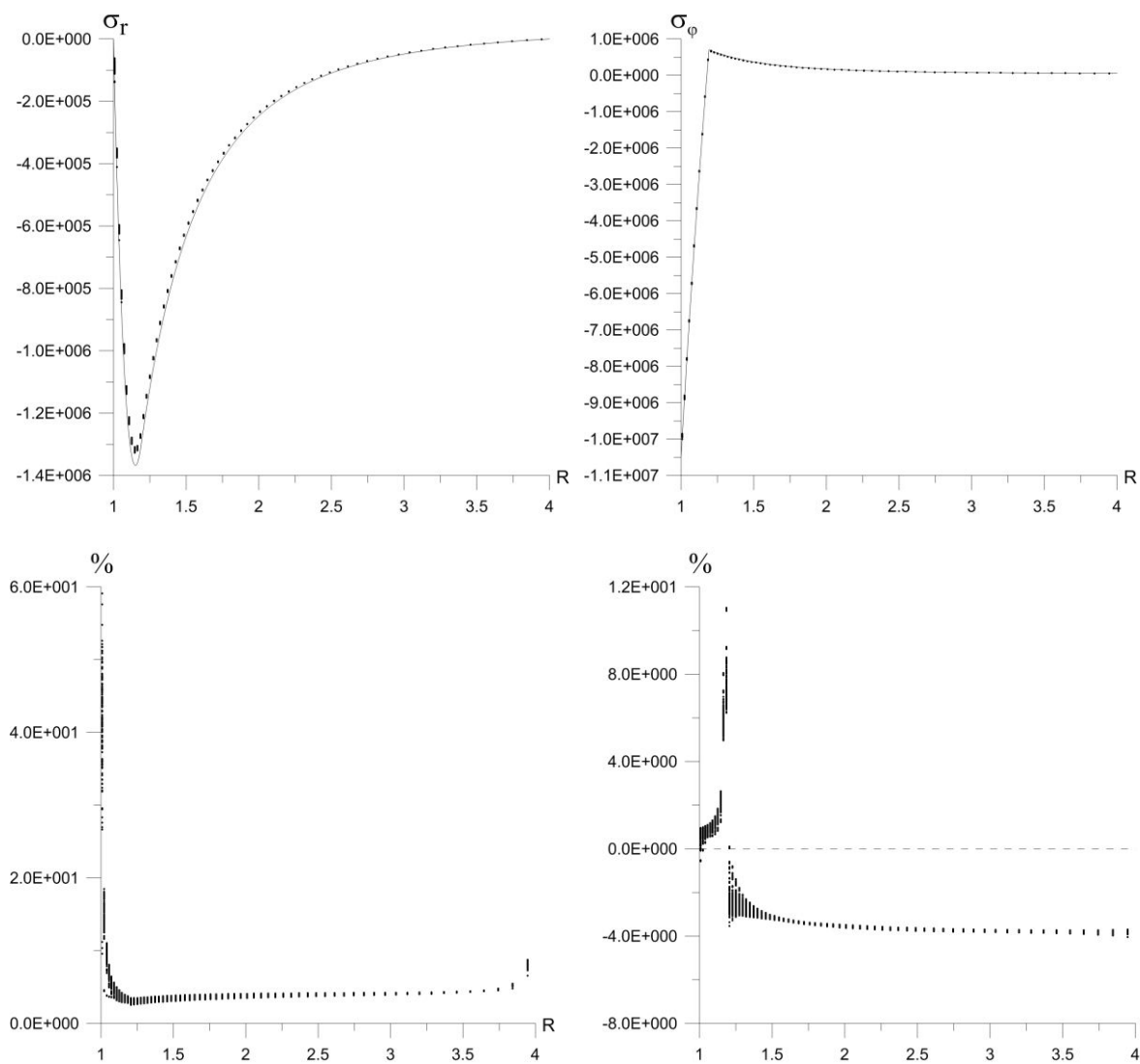


Рисунок 3

## 8.4. Нагружение пластины

### 1) Нагружение упругой пластины с учётом сил реакции гладкой опоры

Параметры нагружения отображены в таблице 12. Состояние до нагружения отображено на рисунке 4. Участок сетки около контакта отображен на рисунке 5. На рисунках 6 и 7 отображены силы реакции опоры узлов и расстояние от узлов до поверхности опоры соответственно. Количество итераций доходило до 10000, при итерациях не изменялась матрица СЛАУ.

Уменьшение шага или увеличение нагрузки приводит к отсутствию сходимости. Если допускать не точные решения (например,  $\min\{|h_m|\} > 10^5$ ), то они приводят к значительному нарушению симметрии решения на следующих шагах.

Таблица 12 – Параметры

$E$	$10^{10}$	модуль Юнга
$\mu$	0.3	коэффициент Пуассона
$P$	$8 \cdot 10^5$	поверхностные силы
$N_p$	100	количество шагов нагружения
$x, y, z$	20, 0.5, 0.5	размеры пластины
$N_x, N_y, N_z$	200, 5, 2	разбиения сетки
$LX_p$	5/200	длина участков нагружаемой поверхности сверху

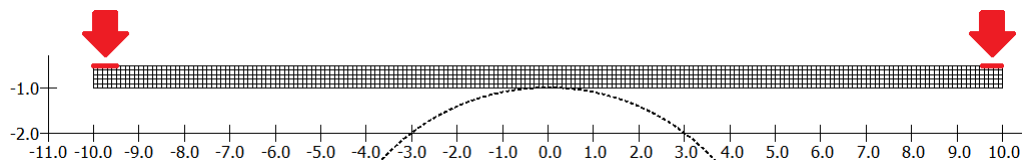


Рисунок 4

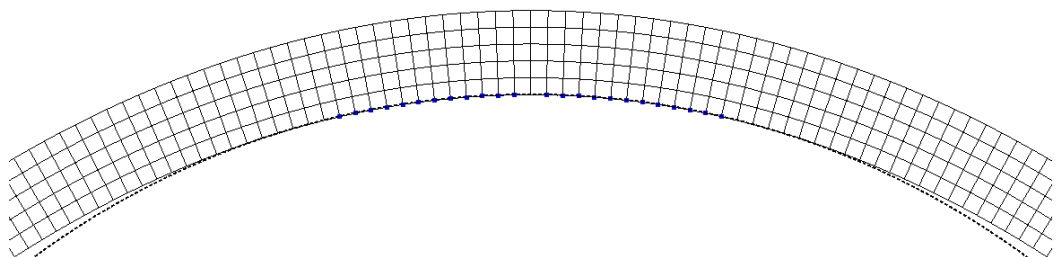


Рисунок 5

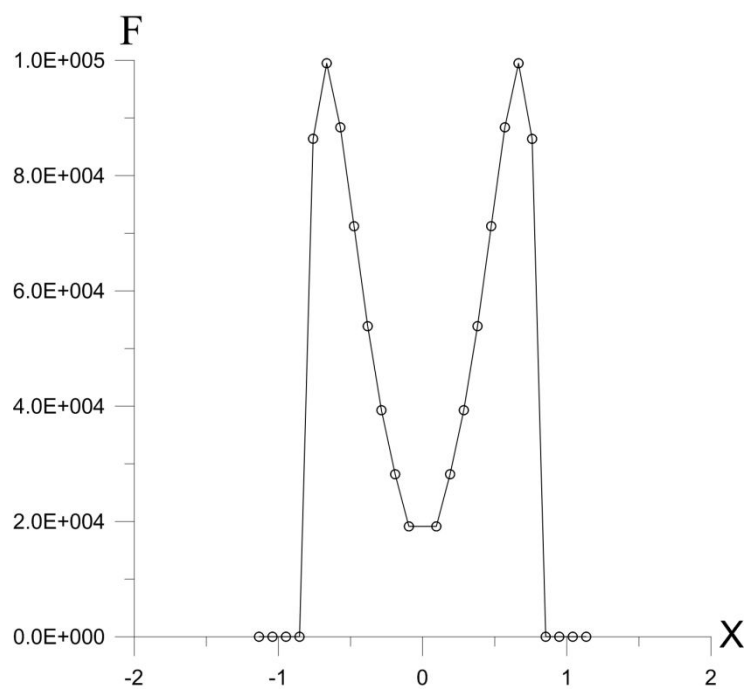


Рисунок 6. Модули сил реакции опоры в узлах

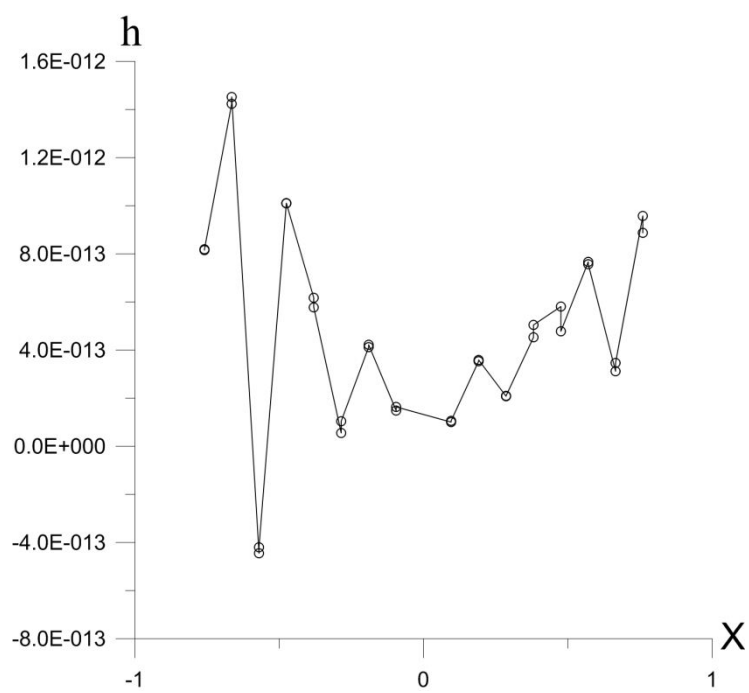


Рисунок 7. Расстояния от узлов до опоры

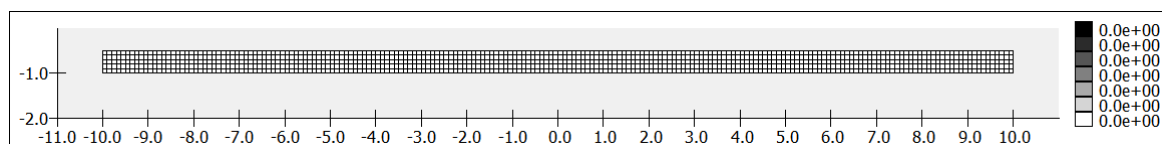


## 2) Нагружение пластичной пластины

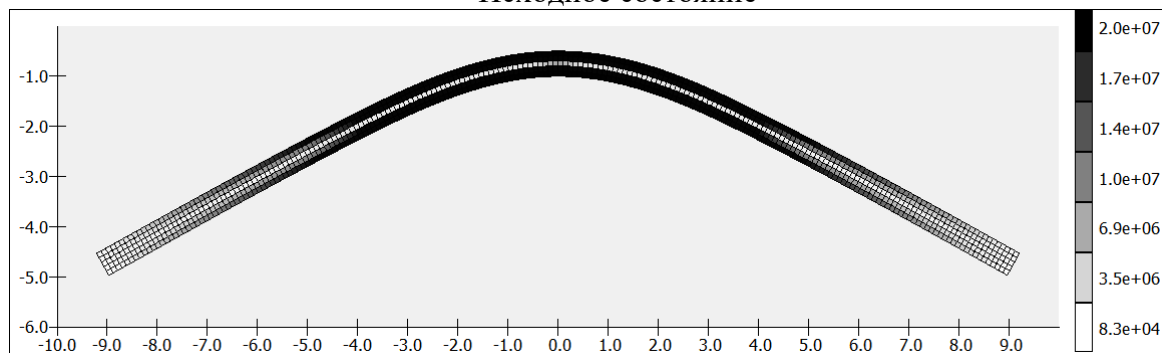
Параметры нагружения отображены в таблице 13. Состояния до и после нагружения отображены на рисунке 8. Увеличение нагрузки приводит к разрушению пластины.

Таблица 13 – Параметры

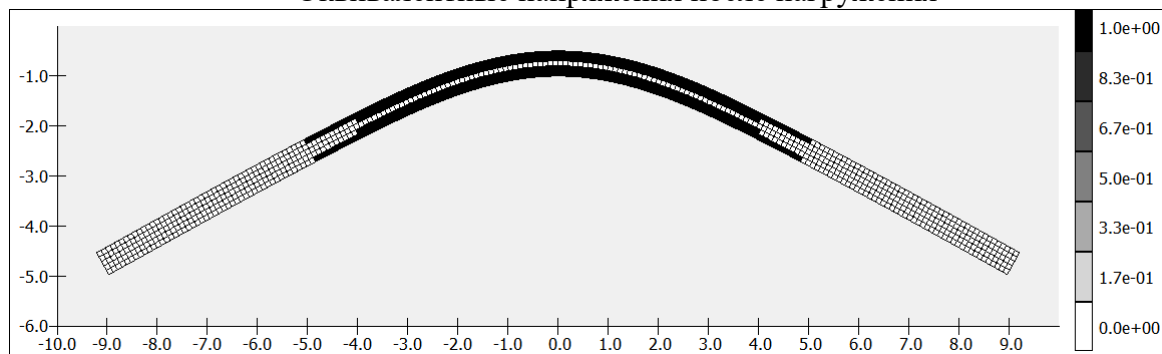
$E$	$10^{10}$	модуль Юнга
$\mu$	0.3	коэффициент Пуассона
$\sigma_T$	$2 \cdot 10^7$	предел текучести
$P$	$8 \cdot 10^5$	поверхностные силы
$N_p$	100	количество шагов механического нагружения
$x, y, z$	20, 0.5, 0.5	размеры пластины
$N_x, N_y, N_z$	200, 5, 2	разбиения сетки
$LX_p$	5/200	длина участков нагружаемой поверхности сверху



Исходное состояние



Эквивалентные напряжения после нагружения



Пластичная область после нагружения

Рисунок 8

## **Заключение**

Реализованы численные схемы для решения задач упругопластичности с учётом тепловых воздействий, реализация проверена на некоторых модельных задачах с известным точным аналитическим решением. Частично реализована двумерная визуализация решения. Применённые подходы для учёта контактного механического взаимодействия тела с твёрдым гладким телом оказались не эффективными. Также стало ясно из литературы [10], что если изменение температуры значительно влияет на упругопластичные, ползучие или иные характеристики материала, то это необходимо дополнительно учесть в определяющих соотношениях, чтобы более точно описать поведение материала. Можно наверно попробовать перестраивать сетку, чтобы конечные элементы не пересекали границу между упругой и пластичной областью, или как-то дополнять базисные функции, чтобы решение получалось точнее. В процессе итераций приходится неоднократно получать разложение матрицы СЛАУ, поэтому могут понадобиться более эффективные способы разложения.

## Список литературы

- 1) Численные методы в механике деформируемого твердого тела: электронный конспект лекций / Филиппов А.С. / ИБРАЭ РАН.
- 2) Соловейчик Ю. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
- 3) Прикладная теория пластичности [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. – СПб. : Политехника, 2011.
- 4) Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие С. — Киев: Наук. думка, 1981. — 496 с.
- 5) Каудерер Г. Нелинейная механика. – Иностранной литературы, 1961.
- 6) Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния Рос. АН, 2000.
- 7) Белов Н. Н., Копаница Д. Г., Югов Н. Т. Математическое моделирование динамической прочности конструкционных материалов. – Томск: SST, – 2008 – 332 с.
- 8) Отчет о ПНИ по теме: "Разработка программно-технических решений в области промышленного программного обеспечения для моделирования поведения элементов конструкций из современных материалов в экстремальных условиях при механических и немеханических воздействиях для решения задач проектирования авиакосмической техники" (№ гос. регистрации: 114112440083)
- 9) Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы //М.: Бином. – 2003.
- 10) Колесников К. С., Александров Д. А., Асташев В. К. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. Кн. 1 //М.: Машиностроение. – 1994. – Т. 1. – 536 с.