

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

ОТЧЕТ ПО НИР

__ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций
при механических и немеханических воздействиях _____
(тема НИР в соответствии с индивидуальным планом)

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника
(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:

Аспирант ____ Исламов Д. Р. ____
(Ф.И.О.)

Год подготовки _____

Факультет ФПМИ

подпись

«__» _____ 20__ г.

Проверил:

Научный руководитель ____ Персова М. Г. ____
(Ф.И.О.)

Балл: _____, ECTS _____,

Оценка _____
«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»

подпись

«__» _____ 20__ г.

Новосибирск 2019

Оглавление

1. Контакт с жесткой поверхностью	3
1.1. Алгоритм	4
1.2. Сплайн поверхности	7
1.3. Оптимизация поиска первого пересечения узла с поверхностью	7
1.4. Распределение сосредоточенных в контактных узлах нагрузок по поверхности	10
1.5. Совмещение итерационных процессов для учёта пластичности и контакта	11
2. Ползучесть	12
3. Влияние температуры на параметры материала	14
4. Тестирование программной реализации	15
4.1. Вдавливание жесткого цилиндра в полупространство	15
Заключение	20
Список литературы	21

1. Контакт с жесткой поверхностью

Пусть некоторый узел сетки в результате шага по времени переместился из положения \mathbf{r}_1 в положение \mathbf{r}_2 и пересёк поверхность опоры в точке \mathbf{r}_2^* , тогда (метод штрафа [2, 3]):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^* &= \mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{F}^N &= -\kappa (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\ \Delta F_k^N &= -\kappa \sum_{l=1}^3 (u_l - u_l^*) n_l n_k\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $\Delta \mathbf{F}^N$ – приращение реакции опоры, $\mathbf{u} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ – перемещение, \mathbf{r}_2^* – предполагаемая точка контакта, \mathbf{u}^* – перемещение узла из начального положения в предполагаемую точку контакта, \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности опоры в точке \mathbf{r}_2^* , κ – коэффициент контактной жёсткости. Тогда для некоторого контактирующего узла m в правую часть заносятся слагаемые

$$\Delta F_{3m-3+k}^{contact} = -\kappa \sum_{l=1}^3 q_{3m-3+l} n_{3m-3+l} n_{3m-3+k} + \kappa \sum_{l=1}^3 u_{3m-3+l}^* n_{3m-3+l} n_{3m-3+k}, k=1,2,3 \quad (1.2)$$

Поскольку слагаемые в (1.2) содержат компоненты неизвестных q_{3i-3+l} , то они переносятся в матрицу левой части СЛАУ:

$$\begin{aligned}G_{(3m-3+k)(3m-3+l)}^{contact} &= \kappa n_{3m-3+k} n_{3m-3+l}, k, l=1,2,3 \\ b_{(3m-3+k)}^{contact} &= \kappa \sum_{l=1}^3 u_{3m-3+l}^* n_{3m-3+k} n_{3m-3+l}, k=1,2,3\end{aligned}\quad (1.3)$$

Контакт прекращается, если суммарная реакция опоры стала действовать против нормали, то есть $\mathbf{F}^N \cdot \mathbf{n} < 0$). Итерации прекращаются, когда суммарные реакции \mathbf{F}^N перестают меняться. Точность зависит от κ .

Сила трения скольжения пропорциональна реакции опоры и направлена против движения:

$$\Delta \mathbf{F}^{Fr} = \mu \Delta F^N \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \times \mathbf{n} \times \mathbf{n} \quad (1.4)$$

1.1. Алгоритм

Более подробный алгоритм учёта контакта некоторого узла с неподвижной жёсткой поверхностью следующий. Исходя из данных предыдущего шага и данных на текущей итерации, определяется новое состояние для следующей итерации:

```

if  $Contact_{new} = true$  then
     $\Delta \mathbf{F}^N = -\kappa (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ 
    if  $side(\mathbf{r}_2) = -1$  then
         $Contact_{new} \leftarrow true$ 
         $Separation \leftarrow false$ 
         $\mathbf{r}_2^* \leftarrow nearestPoint(\mathbf{r}_2)$ 
    if  $side(\mathbf{r}_2) = +1$  then
        if  $(\mathbf{F}_0^N + \Delta \mathbf{F}^{corr} + \Delta \mathbf{F}^N) \cdot \mathbf{n} < 0$  then
             $Contact_{new} \leftarrow false$ 
             $Separation \leftarrow Contact_0$ 
        else
             $Contact_{new} \leftarrow true$ 
             $Separation \leftarrow false$ 
             $\mathbf{r}_2^* \leftarrow nearestPoint(\mathbf{r}_2)$ 
else
     $\Delta \mathbf{F}^N = 0$ 
    if  $Contact_0 = true$  then
        if  $side(\mathbf{r}_2) = -1$  then
             $Contact_{new} \leftarrow true$ 
             $Separation \leftarrow false$ 
             $\mathbf{r}_2^* \leftarrow nearestPoint(\mathbf{r}_1)$ 
        if  $side(\mathbf{r}_2) = +1$  then
             $Contact_{new} \leftarrow false$ 
             $Separation \leftarrow true$ 
    else

```

```

if  $\exists intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  then
     $Contact_{new} \leftarrow true$ 
     $Separation \leftarrow false$ 
     $\mathbf{r}_2^* \leftarrow intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 
else
     $Contact_{new} \leftarrow false$ 
     $Separation \leftarrow false$ 

```

if $Contact_{new} = true$ **then**

$$\Delta \mathbf{F}^{corr} = \mathbf{F}_0^N \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_0^N$$

if $Separation = true$ **then**

$$\Delta \mathbf{F}^{corr} = -\mathbf{F}_0^N$$

Обозначения переменных, заданных для каждого узла, контакт которого с поверхностью возможен:

$Contact_0$ = контакт был в конце предыдущего шага по времени (true/false)

\mathbf{F}_0^N – суммарная сила реакции опоры в конце предыдущего шага по времени

\mathbf{r}_1 – положения узла в конце предыдущего шага по времени

$Contact_{new}$ = происходит контакт на текущей итерации (true/false)

$Separation$ = происходит «отлипание» на текущей итерации (true/false)

$\Delta \mathbf{F}^N$ – предполагаемое приращение реакции опоры в результате текущей итерации

$\Delta \mathbf{F}^{corr}$ – предполагаемая добавка к приращению реакции опоры, корректирующая направление суммарной силы

\mathbf{r}_2 – положения узла после перемещения в результате текущей итерации

\mathbf{r}_2^* – предполагаемая точка контакта

\mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности опоры в точке \mathbf{r}_2^*

$nearestPoint(\mathbf{r})$ – ближайшая к точке \mathbf{r} точка поверхности

$intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – точка пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с поверхностью

$side(\mathbf{r})$ равно -1 , если точка \mathbf{r} находится с внутренней стороны поверхности или $+1$, если точка \mathbf{r} находится с внешней стороны поверхности.

Таким образом, если в результате итерации получается, что контакт есть, то в качестве предполагаемой точки контакта \mathbf{r}_2^* принимается точка пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с поверхностью (если в конце предыдущего шага и на прошлой итерации контакта не было), точка, ближайшая к исходному положению узла \mathbf{r}_1 (если в конце предыдущего шага контакт был, но на прошлой итерации отсутствовал) или точка, ближайшая к положению \mathbf{r}_2 узла после перемещения (в остальных случаях наличия контакта). Корректирующая добавка $\Delta\mathbf{F}_{corr}$ обеспечивает направление суммарной силы реакции опоры $(\mathbf{F}_0^N + \Delta\mathbf{F}^{corr} + \Delta\mathbf{F}^N)$ по нормали. В случае отлипания, то есть когда в конце предыдущего шага контакт был, но в результате итераций контакт прекратился, корректирующей добавке присваивается значение $-\mathbf{F}_0^N$, чтобы суммарная сила реакции стала нулевой. То есть, в случае контакта, контактные матрица и вектор принимают вид

$$\begin{aligned} G_{(3m-3+k)(3m-3+l)}^{contact} &= \kappa n_{3m-3+k} n_{3m-3+l}, k, l = 1, 2, 3, \\ b_{(3m-3+k)}^{contact} &= \kappa \sum_{l=1}^3 u_{3m-3+l}^* n_{3m-3+k} n_{3m-3+l} + \Delta F_{(3m-3+k)}^{corr}, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В случае отлипания, контактная матрица не собирается, а вектор принимает вид

$$b_{(3m-3+k)}^{contact} = \Delta F_{(3m-3+k)}^{corr}, k = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

1.2. Сплайн поверхности

Каждая из трёх координат поверхности задаётся бикубическим сплайном с лагранжевыми или эйлеровыми базисными функциями на (двумерной) регулярной равномерной сетке. Лагранжевый сплайн строится без вычислительных затрат, если заданы координаты точек во всех узлах сетки. В остальных случаях либо должно задаваться достаточное количество точек для однозначного определения сплайна, либо должен задаваться ненулевой коэффициент регуляризации.

Точка поверхности, ближайшая к заданной точке, на эйлеровом сплайне находится методом сопряжённых градиентов, на лагранжевом сплайне – методом покоординатного поиска.

1.3. Оптимизация поиска первого пересечения узла с поверхностью

Чтобы установить отсутствие пересечения поверхности узлом, который в конце прошлого шага был вне зоны контакта, а на текущей итерации переместился из положения \mathbf{r}_1 в положение \mathbf{r}_2 , реализованы следующие способы.

1. Поскольку поверхность неподвижна, то перемещение узла с исходным положением \mathbf{r}_1 внутри шара $(\mathbf{r}_1, |nearestPoint(\mathbf{r}_1) - \mathbf{r}_1|)$ происходит без пересечения с поверхностью. Таким образом можно избегать прямого поиска пересечения, не зависимо от способа представления поверхности.

Если поверхность подвижна, то этот способ тоже применим, если уменьшать радиусы шаров исходя из максимума длин перемещений точек поверхности.

2. Если поверхность задана сплайном или сеткой, то можно заключить каждый элемент поверхности в шар (или в несколько шаров) и составить набор таких шаров, тогда отсутствие пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с этими шарами

гарантирует отсутствие пересечения с поверхностью, а информация о шарах, с которыми есть пересечение, сужает область поиска контакта.

Чтобы быстро определять наличие пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с какими-то шарами из набора шаров, для их хранения используется октодерево (дерево рекурсивного разбиения куба на 8 одинаковых вложенных кубов, в котором каждому кубу соответствует узел). Нелистовой узел дерева содержит 8 ссылок на потомков и сферу, которая вмещает шары, содержащиеся в потомках. Листовой узел содержит единственный шар, центр которого находится внутри соответствующего этому узлу куба.

Шары, заключающие в себя поверхность цилиндра, аппроксимированного сплайном, и соответствующее октодерево показаны на рисунке 1.

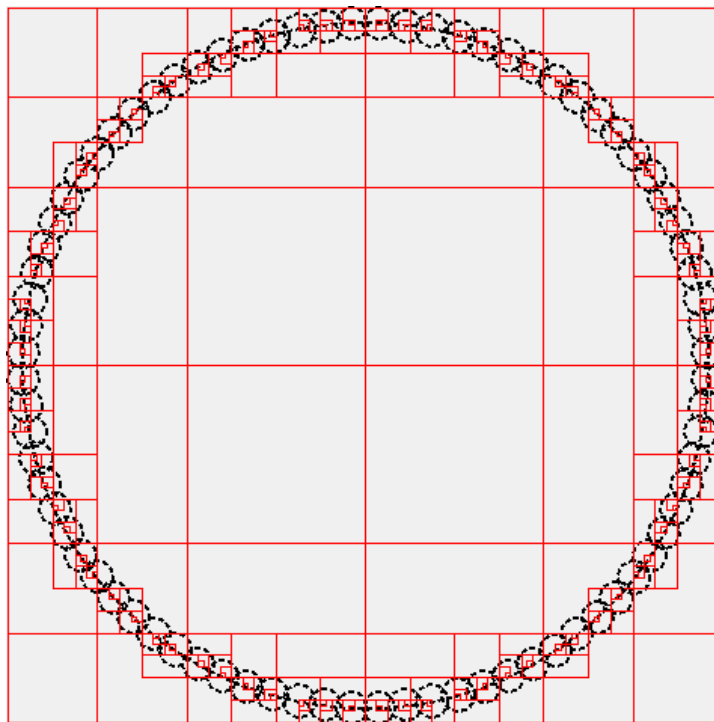


Рисунок 1

Если поверхность подвижна, то этот способ тоже применим, если шары будут заключать в себе участки поверхности с предыдущей итерации и с текущей итераций, но будут требоваться вычислительные затраты на обновление хотя бы радиусов шаров в процессе итераций.

3. Пусть положение всех узлов некоторого куба является внешним относительно поверхности и сфера радиуса R с центром в одном из узлов содержит внутри себя этот куб, а R – расстояние от этого узла до поверхности, тогда этот куб целиком расположен с внешней стороны от поверхности. Исходя из этого, строится октодерево, как показано на рисунке 2. Информация о положении узлов октодерева относительно поверхности и расстояния от узлов до поверхности хранится в хэш-таблице.

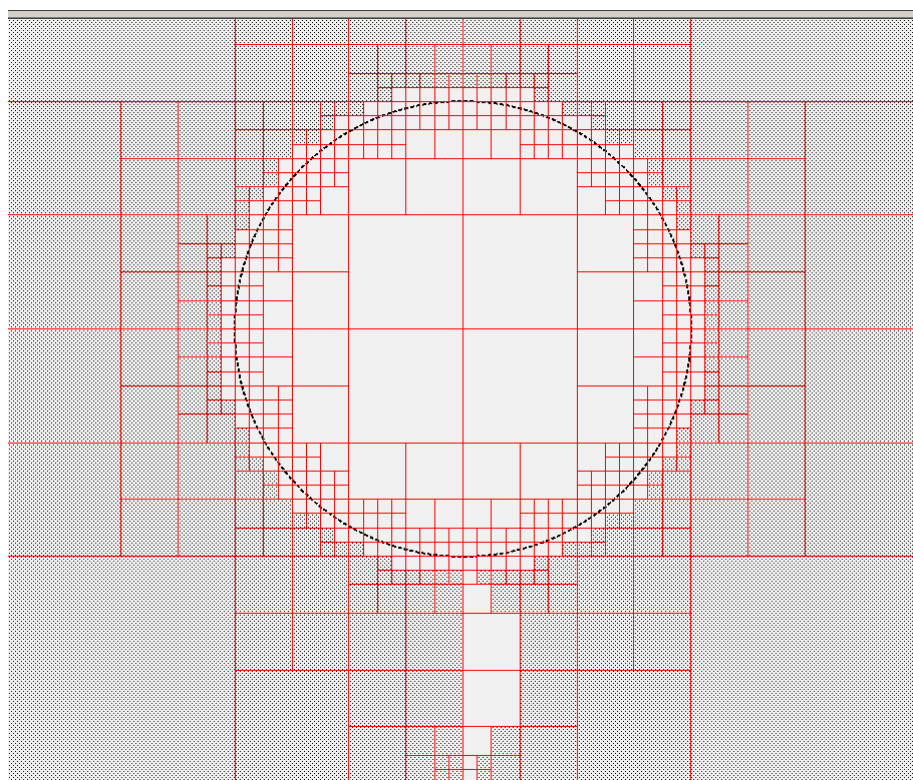


Рисунок 2

Белые кубы снизу возникают из-за того, что ближайшими к поверхности точками от некоторых узлов являются точки границы сплайна, то есть положение этих узлов не является внешним относительно поверхности.

Сравнение времени выполнения участка кода, отвечающего за нахождение точек \mathbf{r}_2^* предполагаемого контакта, приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Время выполнения, без учёта подготовительных процедур

оптимизация	время, с (эйлеровый сплайн)	время, с (лагранжевый сплайн)
-------------	--------------------------------	----------------------------------

без оптимизации	2.729460	8.358453
1	0.6556465	1.118316
2	1.449213	3.493345
3	1.642109	4.331338

1.4. Распределение сосредоточенных в контактных узлах нагрузок по поверхности

Согласно формуле для учёта краевого условия второго рода, поверхностным силам \mathbf{P} соответствует вектор узловых сил \mathbf{b} с компонентами

$$b_{(3m+i-3)} = \int_{S_2} P_i \psi_m dS, i = \overline{1,3}, m = \overline{1,N}. \quad (1.7)$$

Пусть элементы вектора \mathbf{b} соответствуют известным векторам контактных сил $\mathbf{F}^{contact}$ для контактных узлов, то есть

$$b_{(3m+i-3)} = F_{3m+i-3}^{contact}, i = \overline{1,3}, m = \overline{1,N}. \quad (1.8)$$

Разложим компоненты искоемых поверхностных сил по базису:

$$P_i = \sum_{n=1}^N q_{(3n+i-3)} \psi_n, i = \overline{1,3}. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.7) после подстановок (1.8) и (1.9) превращаются в СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N \left(q_{(3n+i-3)} \int_{S_2} \psi_m \psi_n dS \right) = b_{(3m+i-3)}, i = \overline{1,3}, m = \overline{1,N}, \quad (1.10)$$

которую можно представить в виде

$$\mathbf{M}^{S_2} \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (1.11)$$

где элементы матрицы \mathbf{M}^{S_2} и вектора \mathbf{b} определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
M_{(3m+i-3)(3n+k-3)}^{S_2} &= \delta_{ik} \int_{S_2} \psi_m \psi_n dS, \\
b_{(3m+i-3)} &= F_{3m+i-3}^{contact}, i, k = \overline{1, 3}, m, n = \overline{1, N} \\
\hat{M}_{(3m+i-3)(3n+k-3)}^{S_2} &= \delta_{ik} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_m \hat{\psi}_n \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_3^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{1.12}$$

В узлах, которые не участвуют в контакте, давление задаётся нулевое, первыми краевыми условиями.

Решение СЛАУ (1.11) содержит коэффициенты разложения (1.9) поверхностных сил \mathbf{P} , действие которых равносильно действию заданных узловых сил $\mathbf{F}^{contact}$, приложенных к контактным узлам.

1.5. Совмещение итерационных процессов для учёта пластичности и контакта

Реализованы 2 варианта: параллельный и последовательный. В последовательном варианте один из итерационных процессов активный, другой приторможенный, то есть новое приближение обновляется, но используется приближение, которое было последним в момент притормаживания; после достижения критериев сходимости активного итерационного процесса, активный и приторможенный процессы меняются местами.

2. Ползучесть

Приращение напряжений связано с приращением деформации соотношениями

$$\Delta \sigma = \mathbf{D} \Delta \epsilon^{el} = \mathbf{D} (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^{pl} - \Delta \epsilon^T - \Delta \epsilon^c), \quad (2.1)$$

$$\Delta \sigma = \tilde{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon^{pl} + \Delta \epsilon^{el}) = \tilde{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^T - \Delta \epsilon^c). \quad (2.2)$$

В результате шага по времени получаем приращение суммы всех деформаций $\Delta \epsilon$ за этот шаг (которые наблюдаются в действительности).

В соответствии с теорией течения [1, стр. 120, 112], компоненты скорости деформации ползучести определяются выражением

$$d\epsilon_{ij}^c / dt = g(\tilde{\sigma}, t - t_0, T) s_{ij} = \frac{3s_{ij}}{2\tilde{\sigma}} \frac{\partial \Phi(\tilde{\sigma}, t - t_0, T)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

где t – текущее время, t_0 – время начала ползучести КЭ, T – температура, $\Phi(\tilde{\sigma}, t, T)$ – кривая ползучести материала (по одноосному медленному деформированию, без упругих участков), \mathbf{s} – девиатор, т.е.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (2.4)$$

Перейдём к приращениям

$$\Delta \epsilon_{ij}^c = \frac{3s_{ij}}{2\tilde{\sigma}} \Delta \Phi, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta \Phi = \Phi(\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma}, t + \Delta t - t_0, T + \Delta T) - \Phi(\tilde{\sigma}, t - t_0, T), \quad (2.6)$$

и, используя ранее введённую матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

для которой выполняется

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2} \{ \mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{22}, \mathbf{s}_{33}, 2\mathbf{s}_{23}, 2\mathbf{s}_{31}, 2\mathbf{s}_{12} \}, \quad (2.8)$$

представим выражение (2.5) в векторном виде

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}} \Delta \Phi. \quad (2.9)$$

(Релаксация: при постоянной деформации напряжения будут постепенно уменьшаться автоматически: $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = -\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c$)

3. Влияние температуры на параметры материала

Если параметры *упругого* материала зависят от температуры, то [1, стр. 228]

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{ij} &= \Delta \varepsilon_{ij}^c + \alpha \Delta T \delta_{ij} + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Delta C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 C_{ijkl}^{-1} \Delta \sigma_{kl}, \\ \Delta \sigma &= \mathbf{D}(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^c - \Delta \varepsilon^T) \\ \Delta \varepsilon_{ij}^T &= \alpha \Delta T \delta_{ij} + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Delta C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}\end{aligned}\tag{3.1}$$

где учитывается изменение тензора параметров упругости C_{ijkl} в результате изменения температуры.

4. Тестирование программной реализации

4.1. Вдавливание жесткого цилиндра в полупространство

Рассмотрим контакт между абсолютно жёстким цилиндром и упругим полупространством (рисунок 3).

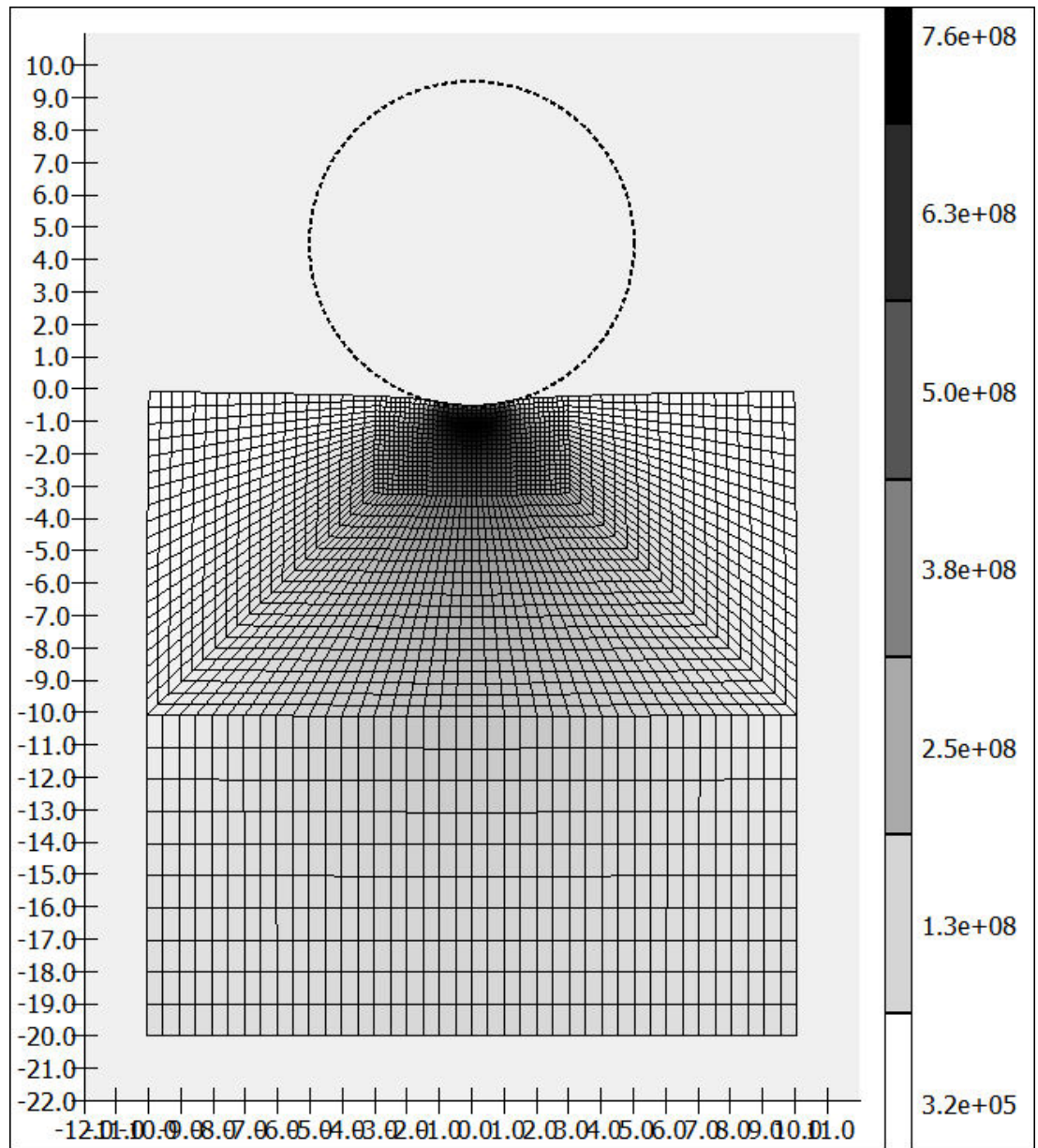


Рисунок 3. $d = 0.5$, $N = 20$, $steps = 16$

Пусть R – радиус цилиндра, d – глубина вдавливания цилиндра в полупространство, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, L – длина цилиндра, тогда [4, 5]

$$\begin{aligned}
E^* &= \frac{2E}{1-\mu^2}, R^* = R, \\
P_{\max} &= \frac{1}{4} E^* \sqrt{\frac{d}{R^*}}, \\
P &= P_{\max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{dR^*}}, \\
a &= \sqrt{dR^*}, \\
F_n &= \frac{\pi}{8} E^* Ld,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где E^* – комбинированная жёсткость, R^* – комбинированный радиус, P_{\max} – максимальное давление, x – расстояние от центра зоны контакта по горизонтали, a – полуширина области контакта, F_n – вертикальная составляющая суммарной силы реакции опоры.

Параметры заданы в таблице 2, результаты отображены в конце таблицы 2 (F_n^{Numb}, d^{Numb}) и на рисунках 4, 5, 6. Поскольку в этом тесте поверхность подвижна, то в алгоритме поиск пересечения с поверхностью $intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ заменён на поиск ближайшей точки $nearestPoint(\mathbf{r}_2)$. Поверхность задаётся аналитически. Первыми краевыми условиями ограничены перемещения по оси z во всех узлах сетки, по оси y на нижней границе и по оси x в плоскости $x=0$. Сетка построена аналогично [4].

Значения d^{Numb} получились примерно вдвое меньше d .

Таблица 2 – Параметры сеток и численный результат

$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$20 \times 20 \times 1$
R	радиус цилиндра	5
$L(=L_z)$	длина цилиндра	1
E	модуль Юнга	10^{10} Па
μ	коэффициент Пуассона	0.3
κ	коэффициент контактной жёсткости	10^{14} Н/м
	условие завершения итераций	$\left (\Delta \mathbf{F}^{corr} + \Delta \mathbf{F}^N)_{new} - (\Delta \mathbf{F}^{corr} + \Delta \mathbf{F}^N) \right / \mathbf{F}^N < 10^{-7}$

d	глубина вдавливания	0.1				0.5			
N	разбиение сетки	20	20	40	40	20	20	40	40
$steps$	количество шагов сдвига цилиндра	4	16	4	16	4	16	4	16
F_n^{Numb}	вертикальная составляющая суммарной силы реакции опоры, 10^9 Н	0.3630	0.3630	0.3628	0.3627	2.260	2.260	2.261	2.261
d^{Numb}	$\frac{8F_n^{Numb}}{\pi E^* L}$	0.0421	0.0421	0.0420	0.0420	0.262	0.262	0.262	0.262

На рисунках 4, 5 сплошной линией изображён график давления $P(d, x)$ из (4.1), в котором параметром является исходная глубина вдавливания цилиндра d .

Пунктирной линией изображён график давления $P(d^{Numb}(F_n^{Numb}), x)$, в котором вместо настоящей глубины вдавливания цилиндра принято значение, вычисленное по формуле

$$d^{Numb} = \frac{8F_n^{Numb}}{\pi E^* L} \quad (4.2)$$

где сила F_n^{Numb} вычислена исходя из численного решения, как вертикальная компонента суммы сил реакций опоры в контактных узлах. Кружками обозначено давление, полученное численно при $N = 20$ (менее подробная сетка); крестиками обозначено давление, полученное численно при $N = 40$ (более подробная сетка).

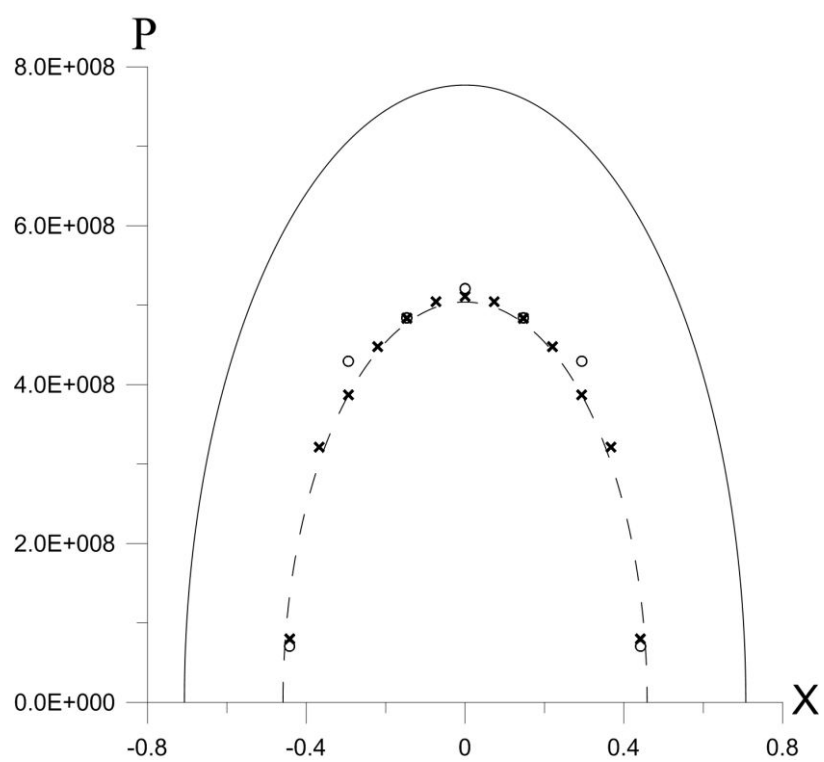


Рисунок 4. $d = 0.1$

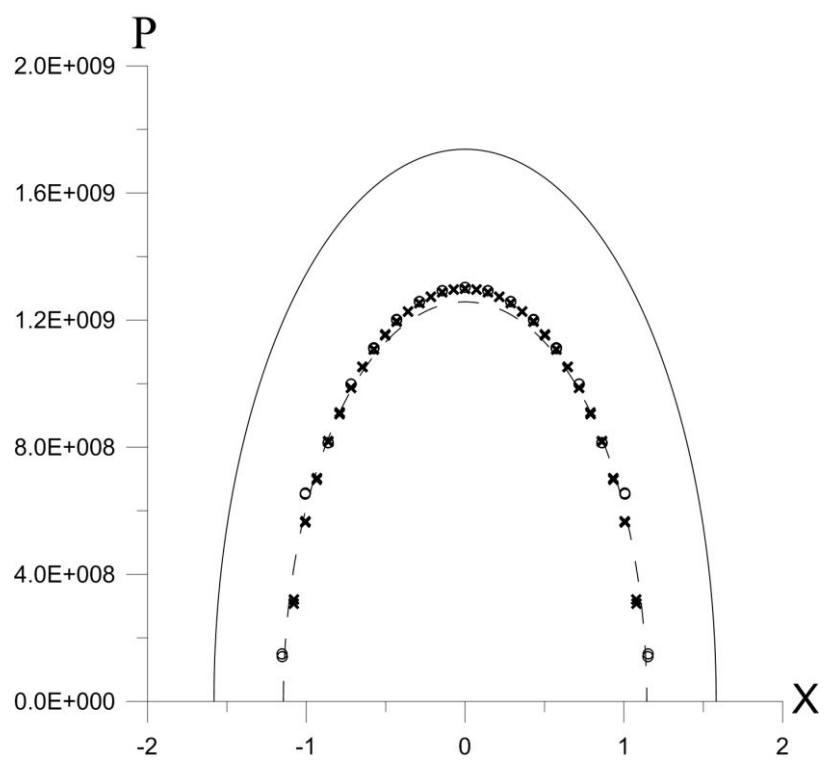


Рисунок 5. $d = 0.5$

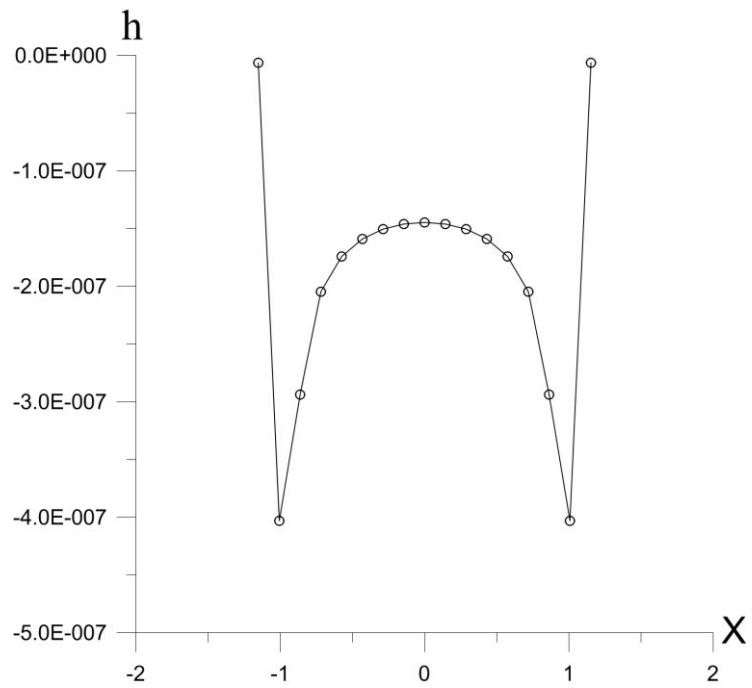


Рисунок 6. Расстояния от контактных узлов до поверхности.
 $d = 0.5, N = 20, steps = 4$

Расхождение аналитического решения с численным может быть обусловлено ограниченными размерами упругого параллелепипеда. Если принять (4.2) как исходные данные для построения («аналитического») графика, то расхождение не столь существенное.

Заключение

Реализованы численные схемы для решения задач упругопластичности с учётом контактного взаимодействия с жёсткой поверхностью. Программная реализация проверена на модельной задаче с известным аналитическим решением.

Намечены численные схемы для учёта ползучести и влияния температуры на параметры упругого материала. Помимо проверки этих численных схем, для решения задачи формования необходимо реализовать процедуру разгрузки.

Список литературы

- 1) Колесников К. С., Александров Д. А., Асташев В. К. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. Кн. 1 //М.: Машиностроение. – 1994. – Т. 1.
- 2) Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния Рос. АН, 2000.
- 3) Wriggers P., Zavarise G. Computational contact mechanics //Encyclopedia of computational mechanics. – 2004.
- 4) Konter A. Advanced finite element contact benchmarks. – Nafems, 2006.
- 5) Попов В. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. – Litres, 2017.