Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

ОТЧЕТ ПО НИР

____ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций__
__________________ при механических и немеханических воздействиях________________________
(тема НИР в соответствии с индивидуальным планом)

____

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:

Аспирант ____ Исламов Д. Р._____
(Ф.И.О.)

Год подготовки _____3_______

Факультет ФПМИ

____
подпись

«___» ______________ 2020 г.

Проверил:

Научный руководитель ____ Персова М. Г._____
(Ф.И.О.)

Балл: __________, ECTS_____________,

Оценка ____________________________
«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»

____
подпись

«___» __________________ 2020 г.

Новосибирск 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 Отчёт по научно-исследовательской работе

1.1 Постановка задачи

В области Ω заданы уравнения равновесия [1]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1.1}$$

На границе $S = S_1 \cup S_2$ заданы кинематические и силовые краевые условия

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{u}_0\left(t\right), \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_2} = P_i\left(t, \mathbf{u}\right), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{P}\left(t, \mathbf{u}\right) = \mathbf{P}^t\left(t\right) + \mathbf{P}^c\left(t, \mathbf{u}\right), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности S_2, $\mathbf{P}$ — вектор поверхностных сил, $\mathbf{P}^t$ — составляющая внешнего силового воздействия, $\mathbf{P}^c$ — контактная составляющая на $S_c \subseteq S_2$.

На границе S_c задаётся механический контакт с жёстким подвижным штампом геометрически нелинейными краевыми условиями Синьорини [2]

$$\begin{cases} \mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n} \leqslant 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - g \leqslant 0, \\ \left(\mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n}\right)\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - g\right) = 0, \\ \left(\mathbf{P}^c \cdot \mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \mathbf{P}^c, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{n}\left(\mathbf{x}, \mathbf{t}\right)$ — внутренняя единичная нормаль в точке поверхности штампа, ближайшей к точке тела $\mathbf{x}$, $g\left(\mathbf{x}, \mathbf{t}\right)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до поверхности штампа (может принимать отрицательные значения в случае внедрения штампа).

Компоненты тензора малых деформаций Коши ε связаны с перемещениями линейными геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.6}$$

Для изотропного тела тензор напряжений Коши σ выражается через упругую составляющую ε^e малой деформации Коши обобщенным законом

Гука

$$\sigma = C : \varepsilon^e, \tag{1.7}$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \tag{1.8}$$

где C — тензор модулей упругости материала, λ, μ — модули упругости Ламэ, δ — символ Кронекера. Символом ":" обозначено двойное скалярное произведение, т.е. $(C : \varepsilon)_{ij} \equiv C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$.

Для связи напряжений и деформаций принимаются определяющие соотношения теории пластического течения [3] с критерием текучести Мизеса:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \tag{1.9}$$

$$\sigma_y = \Phi\left(q\right), \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = \frac{\frac{3}{2} s_{ij}}{\tilde{\sigma}} d\lambda, \text{ если } \tilde{\sigma} = \sigma_y \text{ и } dW > 0, \\ d\varepsilon_{ij}^p = 0, \text{ если } \tilde{\sigma} < \sigma_y \text{ или } \tilde{\sigma} = \sigma_y \text{ и } dW \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $d\lambda$ — не известный множитель,

$$d\lambda = d\tilde{\varepsilon}^p, \tag{1.12}$$

σ_y — предел текучести, $\Phi\left(q\right)$ — функция, характеризующая поведение изотропно упрочняющегося материала (функцию $\Phi\left(q\right)$ можно построить по диаграмме одноосного растяжения, при котором $\tilde{\sigma} = \sigma$, $d\tilde{\varepsilon}^p = d\varepsilon^p$), $d\varepsilon$, $d\varepsilon^e$, $d\varepsilon^p$ — приращения полной, упругой и пластической деформаций соответственно, $\tilde{\sigma} \equiv \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$ — эквивалентное напряжение, $\tilde{\varepsilon} \equiv \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$ — эквивалентная деформация, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ — девиатор напряжений, $e_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}$ — девиатор деформаций, q — параметр Одквиста,

$$q \equiv \int d\tilde{\varepsilon}^p, \tag{1.13}$$

dW — девиаторная работа приращения деформаций,

$$dW \equiv s_{ij} d\varepsilon_{ij}. \tag{1.14}$$

В неизотермическом случае полная деформация представима в виде суммы объёмной деформации изотропного теплового расширения, пластической деформации и упругой деформации:

$$\varepsilon = \alpha T \delta + \varepsilon^p + C^{-1} : \sigma, \tag{1.15}$$

где T — температура (относительно исходного состояния), α — коэффициент линейного изотропного теплового расширения.

Рассмотрим приращение полной деформации $\Delta\varepsilon$ на шаге по времени $t \longrightarrow t + \Delta t$. Здесь и далее для переменных по умолчанию подразумевается момент времени $t + \Delta t$, а момент времени t обозначается левым верхним индексом (t); для областей и границ всегда подразумевается момент времени t и обозначение времени опущено.

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon = {}^{(t+\Delta t)}\left(\alpha T\right)\delta - {}^{(t)}\left(\alpha T\right)\delta + \Delta\varepsilon^p + {}^{(t+\Delta t)}\left(C^{-1} : \sigma\right) - {}^{(t)}\left(C^{-1} : \sigma\right) = \\ = \underline{\left(\alpha\Delta T + T\Delta\alpha - \Delta\alpha\Delta T\right)\delta} + \Delta\varepsilon^p + \underline{\left(\Delta\ C^{-1}\right) : {}^{(t)}\sigma} + C^{-1} : \Delta\sigma.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Применим “C :” слева и справа, тогда

$$\Delta\sigma = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\text{th}} - \Delta\varepsilon^p\right), \tag{1.17}$$

где $\Delta\varepsilon^{th}$ — “температурная” деформация

$$\Delta\varepsilon^{th} \equiv \left(\alpha\Delta T + T\Delta\alpha - \Delta\alpha\Delta T\right)\delta + \left(\Delta\ C^{-1}\right) : {}^{(t)}\sigma, \tag{1.18}$$

1.2 Дискретизация

Домножим уравнения (1.1) на пробную функцию υ, применим формулу Грина интегрирования по частям и учтём силовые краевые условия (1.3), в результате система вариационных уравнений в форме Галеркина примет вид [4]

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}d\Omega = \int\limits_{S_2} P_i\upsilon dS. \tag{1.19}$$

Согласно шаговому методу для случая малых деформаций [5, 6], для некоторого шага по времени $t \longrightarrow t + \Delta t$ запишем уравнение (1.19) в приращениях

$$\int\limits_{\Omega} \Delta\sigma_{ij}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}d\Omega = \int\limits_{S_2} \Delta P_i\upsilon dS + R_i, \tag{1.20}$$

$$R_i \equiv \int\limits_{S_2} {}^{(t)}P_i\upsilon dS - \int\limits_{\Omega} {}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_j}d\Omega, \tag{1.21}$$

где R_i имеет смысл невязки между внутренними напряжениями и силовыми воздействиями, которая понадобится для численной реализации.

Запишем закон Гука (1.7) с учётом (1.17) в приращениях

$$\Delta\sigma = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\text{th}} - \Delta\varepsilon^{p}\right). \tag{1.22}$$

С целью последующей численной реализации, совмещающей построение касательной матрицы жёсткости и метода начальных напряжений, одну часть приращения $\Delta\varepsilon^p$ учтём путём изменения тензора модулей упругости C на упругопластический тензор $\tilde{C}$, другую часть — путём добавления начальных напряжений $\Delta\sigma^0$, то есть запишем определяющие соотношения в виде

$$\Delta\sigma = \tilde{C} : \Delta\varepsilon - C : \Delta\varepsilon^{\text{th}} + \Delta\sigma^0, \tag{1.23}$$

где

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\varepsilon^{\tilde{C}} + \Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0}, \tag{1.24}$$

$$\Delta\sigma^0 = -C : \Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0}, \tag{1.25}$$

$$\tilde{C} : \Delta\varepsilon = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\tilde{C}}\right). \tag{1.26}$$

Для нахождения $\tilde{C}$, с учётом закона течения (1.11) составим систему

$$\begin{cases} \Delta\sigma^{\tilde{C}} = C : \left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\tilde{C}}\right) \\ z : \Delta\sigma^{\tilde{C}} = \Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}} \\ \Delta\varepsilon^{\tilde{C}} = z\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}} \\ \Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}} = E^*\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}}, \end{cases} \tag{1.27}$$

где

$$z_{ij} \equiv \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\frac{3}{2}s_{ij}}{\tilde{\sigma}}, \tag{1.28}$$

$E^* = \frac{\Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{C}}}{\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{C}}}$ — параметр упрочнения. При $\tilde{\sigma} \neq 0$, из (1.27) следует известное [5, 7] выражение

$$\tilde{C} = C - \frac{(C : z) \otimes (z : C)}{E^* + z : (C : z)}, \tag{1.29}$$

где символом “$\otimes$” обозначено тензорное произведение, т.е. $(a \otimes b)_{ijkl} \equiv a_{ij}b_{kl}$. Используя (1.8), можно упростить выражение компонент $\tilde{C}$

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{4\mu^2}{E^* + 3\mu} z_{ij} z_{kl}. \tag{1.30}$$

Девиатор напряжений s в процессе нагружения может менять направление, в связи с этим направления тензоров $\Delta\sigma^0$ и z выбираются таким образом, чтобы составляющие приращения $\Delta\varepsilon^p$

$$\Delta\varepsilon^{\tilde{C}} = \left(\frac{2\mu}{E^* + 3\mu} z \otimes z\right) : \Delta\varepsilon = 2\mu \frac{z : \Delta\varepsilon}{E^* + 3\mu} z \tag{1.31}$$

и

$$\Delta\varepsilon^{\Delta\sigma^0} = -C^{-1} : \Delta\sigma^0 = -\frac{1}{2\mu}\Delta\sigma^0 \tag{1.32}$$

в сумме были имели какое-то промежуточное направление, например, по правилу средней точки [8] (см. пункт е в разделе "Алгоритм").

Подставим (1.23) и (1.6) (для приращений) в левую часть (1.20) и, воспользовавшись симметрией $\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{ijlk}$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega = \int\limits_{S_2} \Delta P_i v dS + \int\limits_{\Omega} \left(C : \Delta\varepsilon^{\text{th}}\right)_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega - \int\limits_{\Omega} \Delta\sigma^0_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + R_i. \tag{1.33}$$

Перейдём к конечномерному пространству, натянутому на базисные функции $\left\{\psi_n \middle|\, n = \overline{1,N}\right\}$, разложим компоненты приращения

$$\Delta u_k^h = \sum_{n=1}^{N} q_{(3n+k-3)} \psi_n, \tag{1.34}$$

подставим вместо v поочерёдно функции ψ_n при $n = \overline{1,N}$, получим СЛАУ (здесь все суммирования записаны явно)

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} q_{(3n+k-3)} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega =$$

$$\int\limits_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \left(C : \Delta\varepsilon^{\text{th}}\right)_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega - \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \Delta\sigma^0_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + \left. R_i \right|_{v=\psi_m}, \tag{1.35}$$

которую можно записать в виде

$$\mathbf{Gq} = \mathbf{b}, \tag{1.36}$$

где элементы матрицы жёсткости $\mathbf{G}$ и вектора $\mathbf{b}$ представимы в виде

$$G_{(3m+i-3)(3n+k-3)} = \int\limits_{\Omega} \tilde{C}_{ijkl} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} d\Omega, \tag{1.37}$$

$$b_{(3m+i-3)} = \int\limits_{S_2} \Delta P_i \psi_m dS + \int\limits_{\Omega} \left(C : \Delta\varepsilon^{\text{th}}\right)_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega - \int\limits_{\Omega} \Delta\sigma^0_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + R^{\text{node}}_{(3m+i-3)}, \tag{1.38}$$

$$R^{\text{node}}_{(3m+i-3)} \equiv \int\limits_{S_2} {}^{(t)}P_i \psi_m dS - \int\limits_{\Omega} {}^{(t)}\sigma_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega. \tag{1.39}$$

Для учёта сил контакта, разложим $\Delta\mathbf{P}$ на слагаемые (1.4)

$$\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P}^t + \Delta\mathbf{P}^c \tag{1.40}$$

где $\Delta\mathbf{P}^t$ — заданная на временном слое составляющая (константа), $\Delta\mathbf{P}^c$ — контактная геометрически нелинейная составляющая. Считая, что заданы финитные базисные функции на конечноэлементной сетке, то есть каждая базисная функция ненулевая только в одном единственном узле и равна в этом узле единице, заменим приращение контактных распределённых сил со всей поверхности S_c на эквивалентный набор приращений узловых контактных сил в узлах этой поверхности, то есть представим (1.38) в виде

$$\begin{aligned} b_{(3m+i-3)} = \Delta F^c_{(3m+i-3)} + \int\limits_{S_2} \Delta P^t_i \psi_m dS + \\ + \int\limits_{\Omega} \left(C : \Delta\varepsilon^{\text{th}}\right)_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega - \int\limits_{\Omega} \Delta\sigma^0_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} d\Omega + R^{\text{node}}_{(3m+i-3)}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

где

$$\Delta F^c_{(3m+i-3)} = \int\limits_{S_c} \Delta P^c_i \psi_m dS \tag{1.42}$$

— компоненты приращения контактной силы в узле m.

1.3 Алгоритм

На некотором шаге по времени $t \longrightarrow t + \Delta t$ решается уравнение (1.36). Чтобы выполнялись условия текучести (1.11), для каждого КЭ в определяющих соотношениях (1.23) подбираются параметр E^* и начальное напряжение $\Delta\sigma^0$. Чтобы выполнялись условия контакта (1.5), в формуле (1.41) подбираются приращения узловых сил реакции опоры $\Delta F^c_{(3m+i-3)}$.

Перед 0-й итерацией задаётся начальное приближение. Для каждого контактного узла m

$$
\begin{gathered}
Contact_0 = {}^{(t)}Contact, \\
\Delta \mathbf{F}_0^c = 0, \\
\mathbf{x}_0^* = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right), \\
\mathbf{n} = Norm\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right),
\end{gathered}
\tag{1.43}
$$

где $Contact$ — статус наличия контакта узла со штампом ($true$ — есть контакт, $false$ — нет контакта),

$$
\Delta \mathbf{F}^c = \left\{\Delta F^c_{(3m-2)}, \Delta F^c_{(3m-1)}, \Delta F^c_{(3m)}\right\} \tag{1.44}
$$

— приращение силы реакции опоры, действующей на узел, $\mathbf{x}$ — координаты узла, $\mathbf{x}^*$ — координаты точки контакта узла с поверхностью штампа, $\mathbf{n}$ — внутренняя единичная нормаль к поверхности штампа, у которой обнулены компоненты, соответствующие зафиксированным кинематическими краевыми условиями (1.2) координатам. $NearestPoint\left(\mathbf{x}\right)$ — функция, возвращающая ближайшую к $\mathbf{x}$ точку поверхности штампа, $Norm\left(\mathbf{x}\right)$ — функция, возвращающая внутреннюю единичную нормаль к поверхности штампа в точке $\mathbf{x}$.

Для каждого конечного элемента (КЭ) задаётся начальное напряжение

$$
\Delta \sigma_0^0 = 0 \tag{1.45}
$$

и параметр упругопластического тензора (1.29): если на предыдущем шаге по времени происходило активное нагружение, то

$$
E_0^* = \frac{\partial \Phi\left({}^{(t)}q\right)}{\partial q}, \tag{1.46}
$$

иначе

$$
E_0^* = \infty. \tag{1.47}
$$

После задания начального приближения присваивается номер итерации $k = 0$ и запускается итерационный процесс.

а) Сборка матрицы жёсткости $\mathbf{G}_k$ по формуле (1.37) с учётом параметра E^* в каждом КЭ.

б) Учёт контакта, составление и решение СЛАУ.

Если для контактного узла m выполняется условие $Contact_k = true$, то, согласно методу штрафа [9] и условиям контакта (1.5), примем соотношение

$$\Delta\mathbf{F}^c_{k+1} = \left(\mathbf{F}^c_k + \kappa_k\left(\left(\mathbf{x}^*_k - {}^{(t)}\mathbf{x}\right) - \Delta\mathbf{u}_k\right)\right)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} - {}^{(t)}\mathbf{F}^c, \tag{1.48}$$

$$\kappa_k = \omega^c \sum_{i=1}^{3}\left|G_{k\,(3m+i-3)(3m+i-3)}\,\mathbf{n}_i\right|, \tag{1.49}$$

чтобы штрафная сила реакции опоры действовала по нормали к поверхности

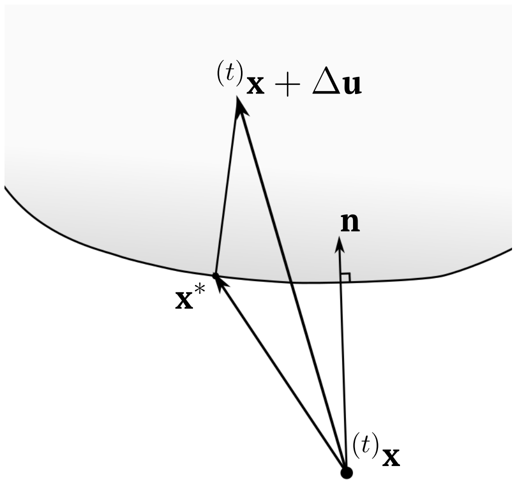

Рисунок 1.1 — Контакт некоторого узла сетки со штампом.

штампа и увеличивалась пропорционально зазору между узлом и штампом (рис. 1.1). Коэффициент контактной жёсткости κ_k выбран близким к жёсткости узла в направлении нормали, с множителем ω^c. Но неизвестными в СЛАУ (1.36) являются приращения перемещений узлов сетки, поэтому перенесём

$$\Delta\mathbf{u}_k = \left\{q_{k\,(3m-2)},\, q_{k\,(3m-1)},\, q_{k\,(3m)}\right\} \tag{1.50}$$

в матрицу левой части СЛАУ, получим для узла m подматрицу глобальной контактной матрицы $\tilde{\mathbf{G}}^c_k$, размера 3×3

$$\tilde{G}^c_{k\,(3m+i-3)(3m+j-3)} = \kappa_k\; n_i n_j \tag{1.51}$$

и часть вектора $\Delta\mathbf{F}^c_{k+1}$, не зависящую от неизвестных $\Delta\mathbf{u}_k$,

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k = \left(\mathbf{F}^c_k + \kappa_k\left(\mathbf{x}^*_k - {}^{(t)}\mathbf{x}\right)\right)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} - {}^{(t)}\mathbf{F}^c. \tag{1.52}$$

Если для контактного узла m выполняется условие $Contact_k = false$, то

$$\tilde{G}^c_{k\,(3m+i-3)(3m+j-3)} = 0, \tag{1.53}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k = -{}^{(t)}\mathbf{F}^c. \tag{1.54}$$

Таким образом, СЛАУ (1.36) принимает вид

$$\left(\mathbf{G}_k + \tilde{\mathbf{G}}^c_k\right)\mathbf{q}_k = \tilde{\mathbf{b}}_k, \tag{1.55}$$

где вектор $\tilde{\mathbf{b}}_k$ построен по формуле (1.41) с заменой $\Delta\mathbf{F}^c_k$ на $\Delta\tilde{\mathbf{F}}^c_k$.

В СЛАУ (1.55) учитываются кинематические краевые условия (1.2) методом Гауссова исключения и полученная система решается методом $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ разложения. Матрица хранится в симметричном разреженном блочном строчно-столбцовом формате.

в) Из решения СЛАУ (1.55), для каждого контактного узла m получается приращение перемещения (1.50) и новое приближение приращения контактной силы $\Delta\mathbf{F}^c_{k+1}$ по формуле (1.48), если $Contact_k = true$, или по формуле (1.54), если $Contact_k = false$.

г) Для каждого контактного узла проверяется условие наличия контакта со штампом

$$\begin{gathered} Contact_{k+1} = g\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right) < 0 \text{ или} \\ \text{или } g\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right) \geqslant 0 \text{ и } \mathbf{F}^c_{k+1}\cdot\mathbf{n} < 0, \end{gathered} \tag{1.56}$$

где функция $g(\mathbf{x})$ — зазор между точкой $\mathbf{x}$ и штампом (может принимать отрицательные значения в случае внедрения). Если $Contact_{k+1} = true$, то рассчитывается новое приближение $\mathbf{x}^*_{k+1}$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^*_{k+1} = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}_k\right), \text{ если } Contact_k = true \\ \mathbf{x}^*_{k+1} = NearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{x}\right), \text{ если } Contact_k = false \end{cases} \tag{1.57}$$

д) Для каждого КЭ рассчитываются значения $\Delta\varepsilon_k$, $\Delta\varepsilon_k^{\tilde{C}}$, $\Delta\varepsilon_k^{\Delta\sigma^0}$, $\Delta\varepsilon_k^p$, $\Delta\sigma_k$, Δq_k по формулам (1.6), (1.31), (1.32), (1.24), (1.23), (1.13)

$$
\begin{gathered}
\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\Delta u_i\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\Delta u_j\right)}{\partial x_i}\right), \\
\Delta\varepsilon_k^{\tilde{C}} = 2\mu\frac{z : \Delta\varepsilon_k}{E_k^* + 3\mu}z, \\
\Delta\varepsilon_k^{\Delta\sigma^0} = -\frac{1}{2\mu}\Delta\sigma_k^0, \\
\Delta\varepsilon_k^p = \Delta\varepsilon_k^{\tilde{C}} + \Delta\varepsilon_k^{\Delta\sigma^0}, \\
\Delta\sigma_k = \tilde{C} : \Delta\varepsilon_k + \Delta\sigma_k^0 - C : \Delta\varepsilon^{\text{th}}, \\
\Delta q_k = \Delta\tilde{\varepsilon}_k^p.
\end{gathered} \tag{1.58}
$$

е) Для каждого КЭ проверяется условие активного нагружения

$$
\tilde{\sigma}_k^{\text{trial}} > \Phi\left({}^{(t)}q\right), \tag{1.59}
$$

где $\sigma_k^{\text{trial}} \equiv {}^{(t)}\sigma + C : \Delta\varepsilon_k$.

Если условия (1.59) выполняются, то в соответствии с правилом средней точки выберем единичный (с нормой $\|h\| = (h : h)^{0.5}$) направляющий тензор пластической деформации

$$
h_k = \left(\omega^{\text{mp}} h_k^{\text{trial}} + \left(1 - \omega^{\text{mp}}\right){}^{(t)}h\right) / \left\|\omega^{\text{mp}} h_k^{\text{trial}} + \left(1 - \omega^{\text{mp}}\right){}^{(t)}h\right\|, \tag{1.60}
$$

где

$$
\begin{gathered}
{}^{(t)}h = {}^{(t)}s / \left\|{}^{(t)}s\right\|, \\
h_k^{\text{trial}} = s_k^{\text{trial}} / \left\|s_k^{\text{trial}}\right\|,
\end{gathered} \tag{1.61}
$$

и новое приближение

$$
\begin{gathered}
E_{k+1}^* = E_k^*, \\
\Delta\sigma_{k+1}^0 = \Delta\sigma_k^0 + \Delta\sigma_k^{\text{corr}} + \omega^p\, d_k\, h_k,
\end{gathered} \tag{1.62}
$$

где $\omega^p \in (0, 1]$ — коэффициент регуляризации,

$$
\Delta\sigma_k^{\text{corr}} = -2\mu\left(\left(\Delta\varepsilon_k^p : h_k\right) h_k - \Delta\varepsilon_k^p\right). \tag{1.63}
$$

Значение d_k вычисляется из условия попадания на кривую $\Phi(q)$, с предположением, что приращение полной деформации $\Delta\varepsilon_k$ остаётся неизменным:

$$\left({}^{(t)}\sigma + \Delta\sigma_k + \Delta\sigma_k^{\text{corr}} + d_k\, h_k\right)_{\text{eqv}} = \Phi\left({}^{(t)}q + \left(\Delta\varepsilon_k^p - \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\sigma_k^{\text{corr}} + d_k\, h_k\right)\right)_{\text{eqv}}\right). \tag{1.64}$$

При таком выборе нового приближения методы начальных напряжений и начальных деформаций становятся тождественными.

Если условия (1.59) не выполняются, то прогнозируется упругое нагружение, нейтральное деформирование или разгрузка, и

$$E_{k+1}^* = \infty,\, \Delta\sigma_{k+1}^0 = 0. \tag{1.65}$$

Если ${}^{(t)}s = 0$, $\omega^{\text{mp}} = 0$ и $\tilde{\sigma}_k^{\text{trial}} > \Phi\left({}^{(t)}q\right)$, то происходит аварийное завершение итераций (шаг по времени слишком велик).

В случае, когда результате итерации хотя в бы в одном КЭ параметр E^* меняет значение (это может происходить только когда прогнозируется разгрузка после активного нагружения), то приходится перестраивать матрицу жёсткости. Чтобы уменьшить количество изменений матрицы, дополнительно выделяются КЭ, “близкие к разгрузке”, то есть для которых выполняются условия

$$E_{k+1}^* \neq \infty, \tag{1.66}$$

$$cos\left(\theta_k\right) = \frac{{}^{(t)}s : (C : \Delta\varepsilon_k)}{\left\|{}^{(t)}s\right\| \cdot \|C : \Delta\varepsilon_k\|} < cos\left(\theta_{\text{min}}\right), \tag{1.67}$$

где $cos\left(\theta_{\text{min}}\right) \geqslant 0$ — параметр, влияющий на количество разложений матрицы жёсткости; знак $cos\left(\theta_k\right)$ совпадает со знаком $\Delta W_k \equiv {}^{(t)}s : \Delta\varepsilon_k$. Для выбранных таким образом КЭ следующее приближение корректируется:

$$\begin{aligned} E_{k+1}^* &= \infty \\ \Delta\sigma_{k+1}^0 &= -2\mu\, \Delta\varepsilon_k^p + \Delta\sigma_k^{\text{corr}} + \omega^p\, d_k\, h_k. \end{aligned} \tag{1.68}$$

ж) Проверяются условия завершения итераций: для каждого контактного узла

$$
\begin{gathered}
\left|\Delta \mathbf{F}_{k+1}^{c}-\Delta \mathbf{F}_{k}^{c}\right| / \left|\mathbf{F}_{k+1}^{c}\right|<\Delta_{F}, \\
\left|\mathbf{r}_{k+1}^{*}-\mathbf{r}_{k}^{*}\right|<\Delta_{r}, \\
Contact_{k+1}=Contact_{k},
\end{gathered} \tag{1.69}
$$

и для каждого КЭ

$$
\begin{gathered}
\left(\Phi\left({}^{(t)}q+\Delta q_{k}\right)-\tilde{\sigma}_{k}\right) / \tilde{\sigma}_{k}<\Delta_{\sigma}, \\
\left|\Delta q_{k}-\Delta q_{k-1}\right| / \tilde{\varepsilon}_{k}<\Delta_{\varepsilon}.
\end{gathered} \tag{1.70}
$$

Если все условия удовлетворены, то итерации успешно завершаются и осуществляется переход к следующему временному слою, иначе $k=k+1$ и переход к шагу а.

1.4 Учёт пластичности без изменения правой части

Начальные напряжения всегда нулевые

$$
\Delta\sigma^{0}=0. \tag{1.71}
$$

Новое приближение E_{k+1}^{*} выбирается из соотношения

$$
\frac{2\mu\, z_{k}:\Delta\varepsilon_{k}}{E_{k+1}^{*}+3\mu} z_{k}=\Delta\varepsilon_{k}^{p}-\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\sigma_{k}^{\mathrm{corr}}+\omega^{p} d_{k}\, h_{k}\right), \tag{1.72}
$$

где направляющий тензор z_k с единичной эквивалентной деформацией выбран пропорциональным h_k (см. (1.60)). Из (1.72) следует

$$
E_{k+1}^{*}=\frac{\left(2\mu\, z_{k}:\Delta\varepsilon_{k}\right) z_{k}:h_{k}}{\left(\Delta\varepsilon_{k}^{p}-\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\sigma_{k}^{\mathrm{corr}}+\omega^{p} d_{k}\, h_{k}\right)\right):h_{k}}-3\mu. \tag{1.73}
$$

На тестовой задаче вдавливания жёсткого шара в упругопластическое полупространство такая схема совсем плохо сходится, если $\omega^{p}=1$, и $\omega^{\mathrm{mp}}=0$ или $\omega^{\mathrm{mp}}=0.5$ (см. (1.60)).

При $\omega^{p}=1$ и $\omega^{\mathrm{mp}}=1$, если секта подробная, то на некоторых шагах итерации не сходятся: чередуются состояния активного нагружения и упругой разгрузки. Если $\omega^{p}=0.5$ и $\omega^{\mathrm{mp}}=1$, то отсутствие сходимости случается реже. Наверно формула (1.73) нуждается в упрощении и требуется замена $\frac{1}{E^*+3\mu}$ на новую переменную.

Другой способ расчёта нового приближения для активного нагружения

$$\begin{cases} E^*_{k+1} = \frac{\partial \Phi\left({}^{(t)}q\right)}{\partial q} \text{ если } E^*_k = \infty \\ E^*_{k+1} = \frac{\left({}^{(t)}\sigma + \Delta\sigma_k\right)_{\text{eqv}}}{\Phi\left({}^{(t)}q + \Delta q_k\right)} E^*_k, \text{ если } E^*_k \neq \infty \end{cases} \tag{1.74}$$

тоже на некоторых шагах не сходится: чередуются состояния активного нагружения и упругой разгрузки.

1.5 Тест: индентация жёсткого шара, упругость и пластичность

Жёсткий шар вдавливается в упругое или упругопластическое полупространство.

Таблица 1.1 – Параметры задачи ($n = 0.0$, $\bar{\delta}_{max} = 110$, $\frac{E^*}{Y} = 1100$)

Параметр	Обозначение	Значение
Модуль Юнга	E	10^{10} Па
Коэффициент Пуассона	ν	0.3
Предел текучести	Y	$9.990010 \cdot 10^6, \infty$
Упрочнение		отсутствует
Радиус шара	R	1 м
Размер образца-куба		1.029226 м
Глубина индентации	δ_{max}	$5.886770 \cdot 10^{-4}$ м
Коэффициент в (1.49)	ω^c	10
Коэффициент в (1.60)	ω^{mp}	0.5
Коэффициент в (1.62)	ω^p	1
Коэффициент в (1.67)	$cos\left(\theta_{\min}\right)$	0.1

Зависимости общей силы реакции опоры P и площади A от глубины индентации δ, и упругое аналитическое решение

$$\begin{gathered} P^{\text{el}}_{\text{analit}} = \frac{4E}{3\left(1-\nu^2\right)} R^{1/2} \delta^{3/2}, \\ A^{\text{el}}_{\text{analit}} = \pi R \delta \end{gathered} \tag{1.75}$$

показаны на рисунке 1.2. Разгрузка показана как в упругопластическом случае, так и в упругом. Площадь вычисляется путём суммирования площадей граней КЭ, все узлы которых находятся в состоянии контакта (нижняя граница площади).

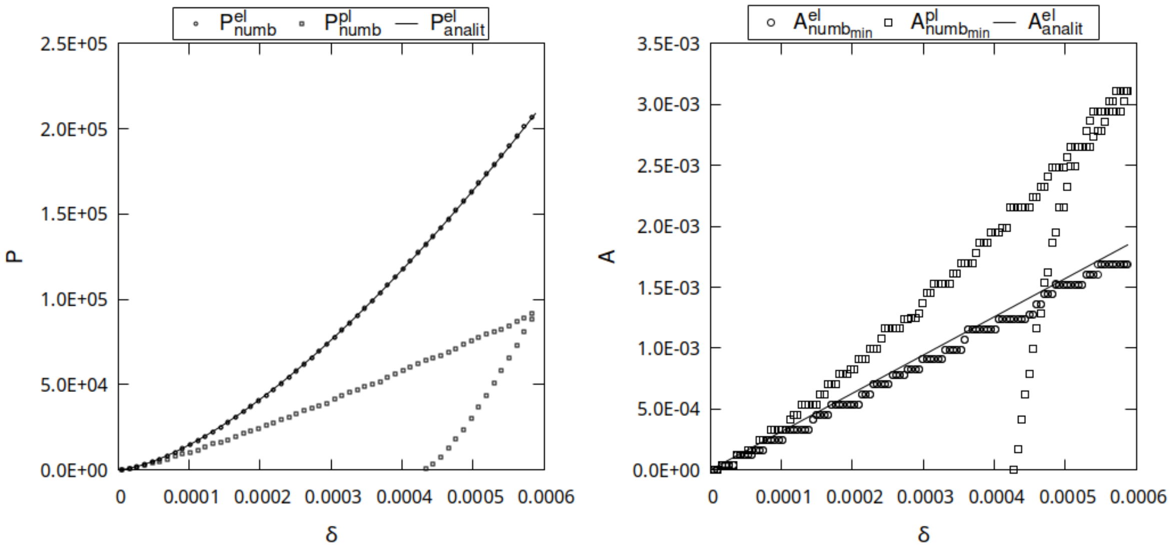

Рисунок 1.2 — Решение

1.6 Тест: контакт и пластичности в плосконапряжённом случае

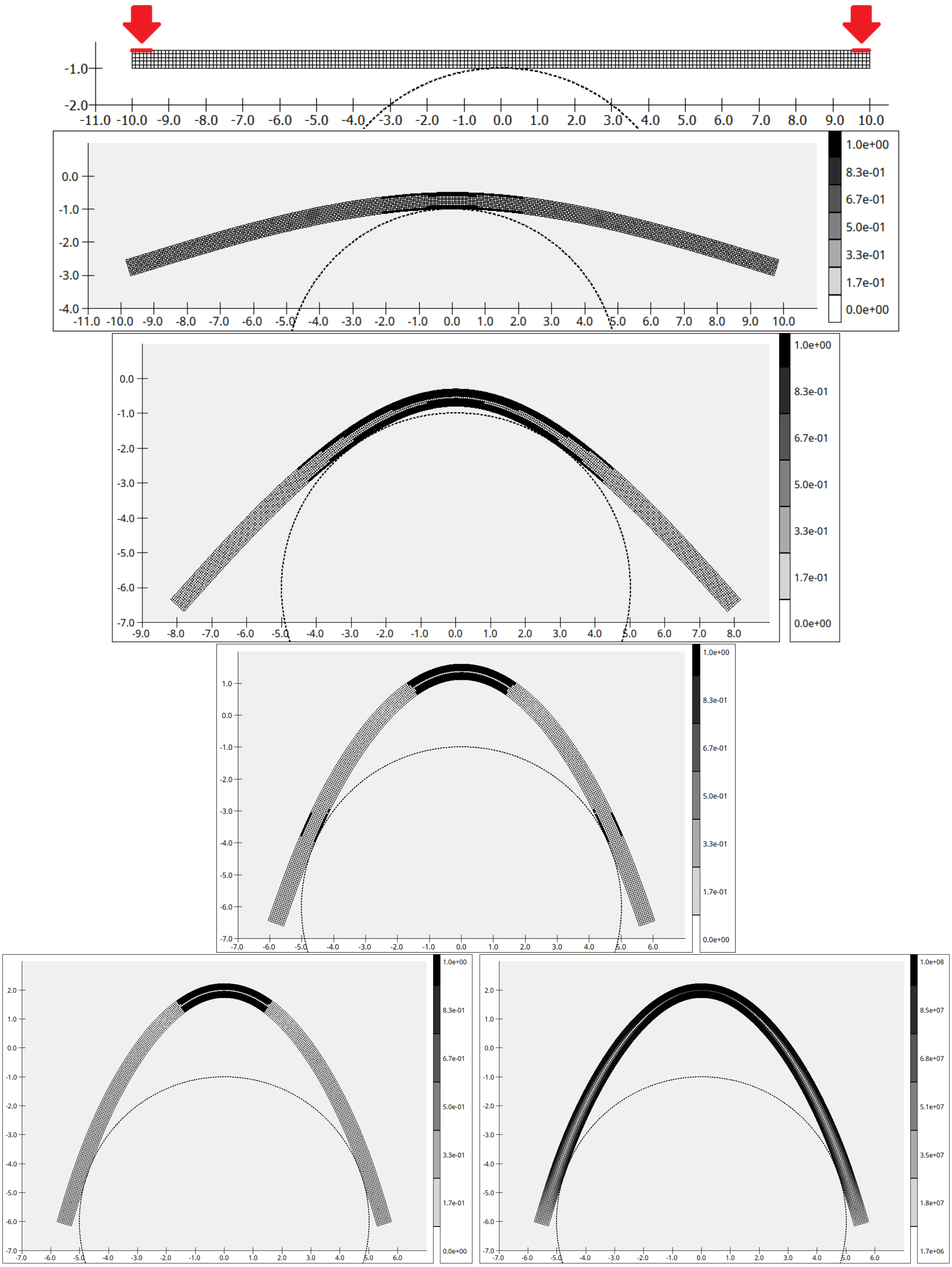

Рисунок 1.3 — процесс нагружения

Один из узлов изначально задан контактным. $\omega^{\text{пр}} = 1$; 50 шагов; без упрочнения.

1.7 Учёт ползучести

В соответствии с наследственной теорией ползучести, величина деформации ползучести при одноосном нагружении определяется выражением [10]

$$\varepsilon^c = \int\limits_0^t K(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau. \tag{1.76}$$

В трёхмерном случае по теории течения

$$\begin{gathered}
{}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^c = \int\limits_0^t K(t-\tau)\,\tilde{\sigma}(\tau)\,d\tau, \\
\Delta\tilde{\varepsilon}^c = \int\limits_0^t \left(K(t+\Delta t-\tau) - K(t-\tau)\right)\tilde{\sigma}(\tau)\,d\tau + \\
+ \int\limits_t^{t+\Delta t} K(t+\Delta t-\tau)\,\tilde{\sigma}(\tau)\,d\tau.
\end{gathered} \tag{1.77}$$

Вместе с пластичностью (1.23)

$$\begin{gathered}
\Delta\sigma = \tilde{C} : \Delta\varepsilon - C : \Delta\varepsilon^{\mathrm{th}} + \Delta\sigma^0 + \Delta\sigma^c, \\
\Delta\sigma^c = -\frac{1}{2\mu}\Delta\tilde{\varepsilon}^c\,h_k,
\end{gathered} \tag{1.78}$$

где $\Delta\tilde{\varepsilon}^c$ нелинейно зависит как минимум от ${}^{(t+\Delta t)}\tilde{\sigma}$. Пластические деформации добавляются если происходит превышение предела текучести с параметром упрочнения

$$q = \int d\tilde{\varepsilon}^p + \int d\tilde{\varepsilon}^c. \tag{1.79}$$

Примеры ядра ползучести [11] (с особенностью и без):

$$\begin{gathered}
K = \frac{a_1 + a_2(t-\tau) + a_3 T + a_4 J_2}{(t-\tau)^\alpha}, \\
K = \frac{a_1 + a_2(t-\tau) + a_3 T + a_4 J_2}{\exp(\alpha(t-\tau))},
\end{gathered} \tag{1.80}$$

где $J_2 = -\frac{1}{2}s : s$ — второй инвариант тензора напряжений

1.8 Метод Ньютона-Рафсона-Канторовича

На шаге по времени уравнение

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{q}\right)\ \mathbf{q} = \mathbf{b}\left(\mathbf{q}\right) \tag{1.81}$$

решается по формуле (?)

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{q}_k\right)\ \left(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k\right) = \mathbf{b}\left(\mathbf{q}_k\right) \tag{1.82}$$

где матрица $\mathbf{G}\left(\mathbf{q}_k\right)$ строится с касательными тензорами $\tilde{C} = \frac{\partial\sigma(\mathbf{q}_k)}{\partial\varepsilon}$. Вектор $\mathbf{b}\left(\mathbf{q}_k\right)$ включает невязку между силами и внутренними напряжениями. Матрица $\mathbf{G}\left(\mathbf{q}_k\right)$ и вектор $\mathbf{b}\left(\mathbf{q}_k\right)$ строятся на сдвинутой перемещениями $\mathbf{q}_k$ сетке. Можно записать

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \mathbf{G}^{-1}\left(\mathbf{q}_k\right)\ \mathbf{b}\left(\mathbf{q}_k\right) \tag{1.83}$$

1.9 Большие деформации

Выбор объективных тензоров деформаций и напряжений, и их производных зависит от определяющих соотношений [3]

1.10 Оптимизация

Есть в [12, 13]

2 Заключение

Составлены и реализованы эффективные и хорошо сходящиеся при сложном нагружении численные схемы для решения контактных задач с физической нелинейностью на основе теории течения.

3 Список использованных источников

1. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — Киев : Наукова думка, 1981. — 496 с.

2. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — РФФИ, 1994. — 334 с.

3. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2000. — 262 с.

4. Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 895 с.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М. : Мир, 1975. — 542 с.

6. Александров А. В., Алфутов Н. А., Астанин В. В. и др. Энциклопедия ”Машиностроение”. Том I-3. ”Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин”. В 2-х книгах. Кн. 2 / Под ред. Фролов К. В. (гл. ред.). — М. : Машиностроение, 1995. — 624 с.

7. Belytschko T., Liu W. K., Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures, 2000.

8. Ortiz M., Popov E. P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations //International journal for numerical methods in engineering. – 1985. – Т. 21. – №. 9. – С. 1561-1576.

9. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. — Springer Science & Business Media, 2006.

10. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочнённых конструкциях. – Mikhail Saushkin, 2005.

11. Зарубин В. С., Станкевич И. В. Расчет теплонапряженных конструкций. – 2005.

12. Матвеенко В. П. и др. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода. – 2009.

13. Бормотин К. С., Вин А. Численный метод оптимизации процесса формообразования панелей обтяжкой //вычислительные методы и программирование. – 2019. – Т. 20. – С. 386-395.