Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

ОТЧЕТ ПО НИР

_ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций__
__________________ при механических и немеханических воздействиях _____________________
(тема НИР в соответствии с индивидуальным планом)

____

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:

Аспирант ____Исламов Д. Р._____
(Ф.И.О.)

Год подготовки _____2_______

Факультет ФПМИ

____
подпись

«___» ______________ 2019 г.

Проверил:

Научный руководитель ___ Персова М. Г.____
(Ф.И.О.)

Балл: __________, ECTS_____________,

Оценка _____________________________
«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»

____
подпись

«___» __________________ 2019 г.

Новосибирск   2019

Оглавление

1. Постановка задачи

Внутри тела, геометрия которого задана некоторой областью Ω, выполняются дифференциальные уравнения движения в перемещениях

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,\, i = \overline{1,3}. \tag{1.1}$$

На границе $S = S_1 \cup S_2$ области Ω выполняются кинематические и силовые краевые условия

$$\vec{u}\Big|_{S_1} = \vec{u}_0(t), \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_2} = P_i(t),\, i = \overline{1,3}, \tag{1.3}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S_2, $\vec{P}(t)$ – вектор поверхностных сил, $\vec{u}_0(t)$ – вектор перемещения.

Компоненты тензора напряжений Коши σ_{ij} выражаются через упругие компоненты $\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}$ малых деформаций Коши обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}, \tag{1.1}$$

где $C_{ijkl}(T)$ – тензор модулей упругости материала, T – температура.

Исходя из закона Гука для изотропного тела [1, стр. 42], представленного в прямом и обратном виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\left(\varepsilon_{11}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{22}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{33}^{\mathrm{e}}\right) + \mu\left(\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{ji}^{\mathrm{e}}\right),\\
&\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}},\\
&\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{E}\left(\frac{1+\nu}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) - \nu\delta_{ij}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right),\\
&\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijkl}\sigma_{kl},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

тензор модулей упругости C_{ijkl} и тензор упругой податливости A_{ijkl} (обратный к тензору C_{ijkl}) определяются соотношениями

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{1.3}$$

$$A_{ijkl} = \frac{1}{E}\left(\frac{1+\nu}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{1.4}$$

где $\lambda(T), \mu(T)$ – коэффициенты упругости Ламэ, $E(T)$ – модуль Гука, $\nu(T)$ – коэффициент Пуассона.

Компоненты тензора малых деформаций Коши ε_{ij} выражаются через перемещения (*линейные* геометрические соотношения)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

и для термо-упруго-пластичного материала представимы в виде суммы упругих, пластических и температурных компонент:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \alpha T\delta_{ij}, \tag{1.6}$$

где $\alpha T\delta_{ij}$ – деформации изотропного температурного расширения, $\alpha(T)$ – коэффициент линейного изотропного теплового расширения, $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$ – пластические деформации.

Из закона Гука (1.1) получим [2, стр. 126; 3, стр. 228]

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij} = \alpha T\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijkl}\sigma_{kl},\\
&\Delta\varepsilon_{ij} = \left({}^{(t+\Delta t)}\left(\alpha T\right) - {}^{(t)}\left(\alpha T\right)\right)\delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} +\\
&+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}{}^{(t+\Delta t)}\left(A_{ijkl}\sigma_{kl}\right) - \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}{}^{(t)}\left(A_{ijkl}\sigma_{kl}\right),\\
&\Delta\varepsilon_{ij} = \left[\left(\alpha\Delta T + T\Delta\alpha + \Delta\alpha\Delta T\right)\delta_{ij}\right] + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} +\\
&+\left[\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Delta A_{ijkl}\,{}^{(t)}\sigma_{kl}\right] + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}{}^{(t+\Delta t)}A_{ijkl}\Delta\sigma_{kl}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Тогда соотношения (1.6) можно записать в приращениях:

$$
\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}},
\tag{1.8}
$$

где $\Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}}$ – компоненты приращения тензора температурных деформаций

$$
\Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}} = \left({}^{(t)}\alpha\Delta T + {}^{(t)}T\Delta\alpha + \Delta\alpha\Delta T\right)\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Delta A_{ijkl}\,{}^{(t)}\sigma_{kl}.
\tag{1.9}
$$

Учитывая симметрию тензоров ε_{ij} и σ_{ij}, обозначим деформации и напряжения в векторном виде:

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\right\}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\right\}^{\mathrm{T}},
\tag{1.10}
$$

тогда обобщенный закон Гука (1.1) и соотношения (1.6), (1.8) примут вид

$$
\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},
\tag{1.11}
$$

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},
\tag{1.12}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \alpha T\left\{1, 1, 1, 0, 0, 0\right\}^{\mathrm{T}},
\tag{1.13}
$$

$$
\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}},
\tag{1.14}
$$

где матрица $\mathbf{D}$ (соответствующая тензору C_{ijkl}) определяется через компоненты тензора C_{ijkl}:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

Для изотропного пластичного материала будем считать, что выполняется критерий текучести Мизеса, т.е. задана кривая пластичности $\tilde{\sigma}=\Phi\left(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}},T,t,...\right)$, связывающая интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}$ и интенсивность упругопластических деформаций $\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \tag{1.17}$$

которые определяются соотношениями

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{c_{\tilde{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}},\ \ \tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}=\sqrt{c_{\tilde{\varepsilon}}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}\right)}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

и выполняется закон пластического течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}} d\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \tag{1.20}$$

т.е. пластические деформации пропорциональны девиатору напряжений

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right), \tag{1.21}$$

т.к.

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2}\left\{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2s_{23}, 2s_{31}, 2s_{12}\right\}. \tag{1.22}$$

При активном нагружении пластичного материала происходит приращение пластических деформаций. Нейтральное нагружение или разгрузка происходят линейно-упруго, без приращения пластических деформаций.

2. Вычисление НДС

1. Представим приращения наблюдаемых деформаций в виде суммы

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} + \left[\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}\right] + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}, \tag{2.1}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p\text{-}0}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}, \tag{2.2}$$

где $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ – упругие деформации, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}$ – пластические и начальные деформации, пропорциональные (в тензорном виде, но не в векторном) девиатору напряжений s_{ij} (1.21) и введено обозначение

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p\text{-}0}} \equiv \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}. \tag{2.3}$$

Тогда определяющие соотношения (1.12)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} \tag{2.4}$$

с учётом (2.2), можно записать в виде

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p\text{-}0}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}\right). \tag{2.5}$$

Здесь и далее $\mathbf{D} \equiv {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{D}$ и по умолчанию подразумевается временной слой $\left(t + \Delta t\right)$.

2. Обозначим

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p\text{-}0}} \equiv \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p\text{-}0}}. \tag{2.6}$$

и возьмём такую матрицу определяющих соотношений $\tilde{\mathbf{D}}$, чтобы для заданного (на кривой $\tilde{\sigma} = \Phi\left(\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}, T, t, \ldots\right)$) угла наклона $\beta^{*} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполнялось

$$\tan\left(\beta^{*}\right) = \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p\text{-}0}}}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^{*}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p\text{-}0}}, \tag{2.8}$$

то есть матрицу [3, стр. 259; 4]

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*} = \mathbf{D}\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*}\right), \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*} = \frac{\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)}{E^* + \left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{M}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}}, \tag{2.10}$$

Параметр E^* определяется выражением

$$E^* = \frac{1}{1/\tan\left(\beta^*\right) - 1/\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right)} = \frac{\tan\left(\beta^*\right)\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right)}{\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right) - \tan\left(\beta^*\right)}, \tag{2.11}$$

где

$$\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right) = 3G, \tag{2.12}$$

т.е. угол β^{e} соответствует модулю сдвига G упругой матрицы $\mathbf{D}$.

При $\beta^* = \beta^{\mathrm{e}}$ (упругость) или $\Delta\tilde{\sigma} = 0$ (пассивное нагружение) принимается

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*} = \mathbf{D}. \tag{2.13}$$

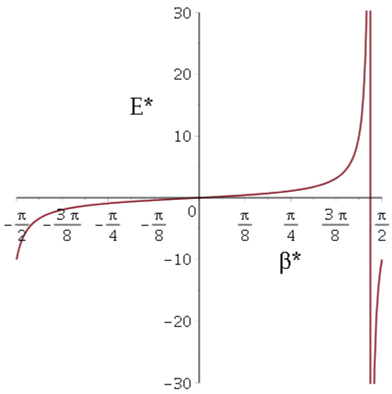

Рисунок 1. График функции $E^*\left(\beta^*\right)$ при $\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right) = 10$.

Для матрицы $\tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}$ выполняются соотношения

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p\text{-}0}}, \tag{2.14}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p-0}} = \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}}, \tag{2.15}$$

$$\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p-0}} = \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} \tag{2.16}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}-0} = \frac{\mathbf{M}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}}{^{(t)}\tilde{\sigma}}\Delta\tilde{\varepsilon}^{\text{p}-0}, \tag{2.17}$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{\text{p-0}} = \Delta\tilde{\sigma}^{\text{e-0}} / E^* = \left(1 - \tan\left(\beta^*\right) / \tan\left(\beta^{\text{e}}\right)\right)\Delta\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p-0}} \tag{2.18}$$

3. Соотношения (2.4), с учётом (2.8) и (2.2), можно записать в виде

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}}, \tag{2.19}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}\right). \tag{2.20}$$

4. Пусть в уравнения (2.19) добавлены начальные напряжения $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 \tag{2.21}$$

и выполняется

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\beta^{**}} - \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}}, \tag{2.22}$$

тогда получим

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^{**}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}}, \tag{2.23}$$

где β^{**} – угол наклона, по которому можно определить компоненты упругих и пластических деформаций по формулам, аналогичным (2.14) и (2.15)

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^{**}}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}}, \tag{2.24}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} = \tilde{\mathbf{Y}}_{\beta^{**}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e+p-0}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{0}, \tag{2.25}$$

как показано на рисунке 2. Начальные напряжения $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$ находятся в результате итерационного процесса (2.44)–(2.46).

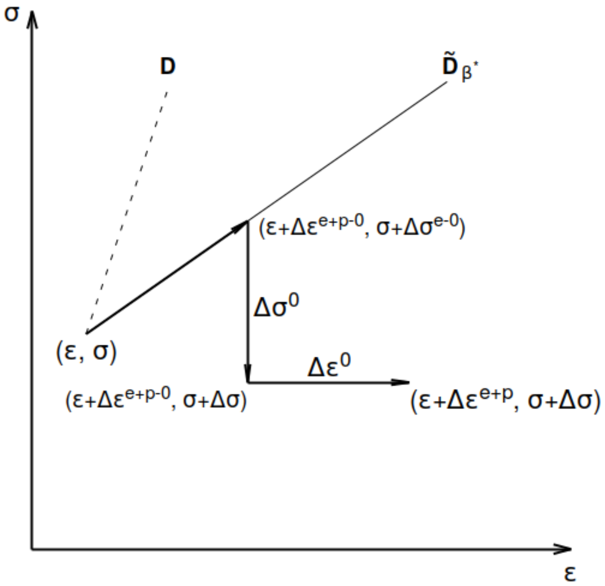

Рисунок 2. Компоненты деформаций.

5. Уравнениям (2.21)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0\right) + \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 \tag{2.26}$$

соответствуют уравнения Галёркина [5]

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)d\Omega = \int\limits_{^{(t)}S_2}\Delta P_i v dS + \\ +\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}} + \Delta\varepsilon_{kl}^{0}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\Delta\sigma_{ij}^{0}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega,\ i=\overline{1,3}\end{gathered} \tag{2.27}$$

с параметрами $\beta^*, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0$ и $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$, где компоненты приращений температурных деформаций $\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}}$ определяются соотношением (1.9). В результате решения (2.27) находятся приращения наблюдаемых деформаций

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial x_i}\right), \tag{2.28}$$

приращения упругих деформаций (2.24), приращения пластичных деформаций (2.25) и приращения напряжений (2.21).

Для улучшения сходимости применяется один из способов коррекции погрешности [3, 6–9]. В правую часть уравнений (2.27) добавляется невязка R_i, расчитанная на предыдущем шаге по времени [9]:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial\left(\Delta u_k\right)}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int_{^{(t)}S_2}\Delta P_i v dS+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\int_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}}+\Delta\varepsilon_{kl}^{0}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega-\sum_{j=1}^{3}\int_{^{(t)}\Omega}\Delta\sigma_{ij}^{0}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega+R_i,\ i=\overline{1,3} \quad (2.29)$$

где

$$R_i\equiv\gamma\left(\int_{^{(t-\Delta t)}S_2}{}^{(t)}P_i v dS-\sum_{j=1}^{3}\int_{^{(t-\Delta t)}\Omega}{}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega\right), \quad (2.30)$$

коэффициент γ подбирается экспериментально для каждого шага по времени.

(Ранее использовал безумство:

$$R_i\equiv\int_{^{(t)}S_2}{}^{(t)}P_i v dS-\sum_{j=1}^{3}\int_{^{(t)}\Omega}{}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega.) \quad (2.31)$$

Далее приведены различные варианты расчёта параметров $\beta^*, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0, \Delta\boldsymbol{\sigma}^0$ и невязок в соответствии с кривой деформирования.

1) Изменение матрицы ОС

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0, \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = 0, \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi = \sigma(\varepsilon, t),\\
&\tan\left(\beta_0^*\right) \leftarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p}}, t\right),\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^*\right) \leftarrow \frac{\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\text{e+p}}, t+\Delta t\right) - {}^{(t)}\tilde{\sigma}}{\Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\text{e+p}}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\text{e+p}}, t+\Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k\right)}{\tilde{\sigma}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\text{e+p}} - \Delta\tilde{\varepsilon}_{k-1}^{\text{e+p}}}{\tilde{\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

или

$$\begin{aligned}
&F = \varepsilon(\sigma, t),\\
&\tan\left(\beta_0^*\right) \leftarrow 1 / \frac{\partial F}{\partial \sigma}\left({}^{(t)}\tilde{\sigma}, t\right),\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^*\right) \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\sigma}_k}{F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t+\Delta t\right) - {}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p}}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t+\Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\text{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{k-1}^{\text{e+p}}\right)}{\tilde{\varepsilon}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\sigma}_k - \Delta\tilde{\sigma}_{k-1}}{\tilde{\sigma}}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

2) Метод начальных деформаций

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = 0,\, \beta^* = \beta^{\mathrm{e}}, \tag{2.35}$$

$$F = \varepsilon(\sigma, t), \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^0 \leftarrow 0,\\
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^0 \leftarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^0 + \omega\left(F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t + \Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\right)\right) \cdot \frac{\mathbf{M}\,{}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t + \Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\right)}{\tilde{\varepsilon}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\sigma}_k - \Delta\tilde{\sigma}_{k-1}}{\tilde{\sigma}}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

3) Метод начальных деформаций с изменением матрицы ОС

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = 0, \tag{2.38}$$

$$F = \varepsilon(\sigma, t), \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
&\tan\left(\beta_0^*\right) \leftarrow 1 / \frac{\partial F}{\partial \sigma}\left({}^{(t)}\tilde{\sigma}, t\right),\\
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^0 \leftarrow 0,\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^*\right) \leftarrow \tan\left(\beta_k^*\right)\\
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^0 \leftarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^0 + \omega\left(F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t + \Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\right)\right) \cdot \frac{\mathbf{M}\,{}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{F\left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}_k, t + \Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\right)}{\tilde{\varepsilon}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\sigma}_k - \Delta\tilde{\sigma}_{k-1}}{\tilde{\sigma}}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

4) Метод начальных напряжений [10 – 13, 3]

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0,\ \beta^* = \beta^{\mathrm{e}}, \tag{2.41}$$

$$\Phi = \sigma(\varepsilon, t), \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\boldsymbol{\sigma}_0^0 \leftarrow 0,\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^{**}\right) \leftarrow \left(\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}, t+\Delta t\right) - \tilde{\sigma}\right) / \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\\
&\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^0 \leftarrow \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\beta_{k+1}^{**}} - \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}, t+\Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}\right)}{\tilde{\sigma}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}} - \Delta\tilde{\varepsilon}_{k-1}^{\mathrm{e+p}}}{\tilde{\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Если процесс сойдётся, то получится соотношение (2.22).

5) Метод начальных напряжений с изменением матрицы ОС

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0, \tag{2.44}$$

$$\Phi = \sigma(\varepsilon, t) \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
&\tan\left(\beta_0^*\right) \leftarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}}, t\right),\\
&\Delta\boldsymbol{\sigma}_0^0 \leftarrow 0,\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^*\right) \leftarrow \tan\left(\beta_k^*\right)\\
&\tan\left(\beta_{k+1}^{**}\right) \leftarrow \left(\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}, t+\Delta t\right) - {}^{(t)}\tilde{\sigma}\right) / \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}\\
&\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^0 \leftarrow \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\beta_{k+1}^{**}} - \tilde{\mathbf{D}}_{\beta^*}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}},\\
&\Delta_k^{\sigma} \leftarrow \frac{\Phi\left({}^{(t)}\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}} + \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}}, t+\Delta t\right) - \left({}^{(t)}\tilde{\sigma} + \Delta\tilde{\sigma}\right)}{\tilde{\sigma}},\\
&\Delta_k^{\varepsilon} \leftarrow \frac{\Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{e+p}} - \Delta\tilde{\varepsilon}_{k-1}^{\mathrm{e+p}}}{\tilde{\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Если процесс сойдётся, то получится соотношение (2.22).

Если требуется обеспечить упругость разгрузки (в случае упругопластичности), то начальный участок кривой деформирования, при $\varepsilon \le \varepsilon^{\mathrm{yeld}}$, заменяется (с сохранением непрерывности) на прямую линию с углом наклона $\tan\left(\beta^{\mathrm{e}}\right) = 3G$, где $\varepsilon^{\mathrm{yeld}}$ – максимальная достигнутая деформация.

3. Механический контакт с жёсткой поверхностью

Контактное взаимодействие с жёсткой поверхностью можно учесть методом штрафа [14, 15]

Для каждого узла, для которого возможен контакт с опорой, введём характеристики (далее по умолчанию подразумевается временной слой $\left(t+\Delta t\right)$):

$Contact$ = узел находится в состоянии контакта,

$Separation$ = происходит «отлипание» на текущей итерации,

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор узла,

$\mathbf{u} \equiv \mathbf{r} - {}^{(t)}\mathbf{r}$ – перемещение узла,

κ – коэффициент контактной жёсткости,

$\mathbf{F}$ – действующая на узел сила реакции опоры,

$\mathbf{r}^*$ – радиус-вектор точки контакта,

$\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{r}^* - {}^{(t)}\mathbf{r}$,

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности опоры в точке $\mathbf{r}^*$.

Также обозначим функции, характеризующие поверхность опоры:

$nearestPoint\left(\mathbf{r}\right)$ – ближайшая к точке $\mathbf{r}$ точка поверхности опоры

$intersectionPoint\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\right)$ – точка пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с поверхностью

$side\left(\mathbf{r}\right)=-1$, если точка $\mathbf{r}$ находится с внутренней стороны поверхности или $side\left(\mathbf{r}\right)=+1$, если точка $\mathbf{r}$ находится с внешней стороны поверхности.

Алгоритм учёта контакта для некоторого узла.

1. Инициализируется начальное приближение для временного слоя $t+\Delta t$:

$$Contact_0 = {}^{(t)}Contact, Separation_0 = {}^{(t)}Separation,$$
$$\mathbf{F}_0 \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{F}, \mathbf{r}_0^* \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{r}^*, \mathbf{n}_0 \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{n}, \kappa_0 \leftarrow {}^{(t)}\kappa \tag{3.1}$$

2. Расчитываются локальная узловая матрица $\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}}$ и локальный узловой вектор $\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}}$ (локальные для заданного узла, т.е. с размерами 3×3 и 3 соответственно; диагональ локальной узловой матрицы принадлежит диагонали глобальной матрицы).

Если $Contact_k = true$, то

$$\left[\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} = \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k\left(\mathbf{u}_k^* \underline{\underline{-\mathbf{u}_k}}\right)\right)\cdot\mathbf{n}_k\cdot\mathbf{n}_k - {}^{(t)}\mathbf{F}\right]$$
$$\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}} \leftarrow \kappa_k\mathbf{n}_k\mathbf{n}_k^{\mathrm{T}}$$
$$\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} \leftarrow \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k\mathbf{u}_k^*\right)\cdot\mathbf{n}_k\cdot\mathbf{n}_k - {}^{(t)}\mathbf{F} \tag{3.2}$$

Если $Separation_k = true$, то

$$\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}} \leftarrow 0$$
$$\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} \leftarrow 0 - {}^{(t)}\mathbf{F} \tag{3.3}$$

3. Из решения СЛАУ получается перемещение $\mathbf{u}_k$ и расчитывается новое приближение силы реакции опоры.

Если $Contact_k = true$, то

$$\mathbf{F}_{k+1} \leftarrow \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k\left(\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k\right)\right)\cdot\mathbf{n}_k\cdot\mathbf{n}_k \tag{3.4}$$

Если $Separation_k = true$, то

$$\mathbf{F}_{k+1} \leftarrow 0 \tag{3.5}$$

4. Обновляется состояние узла, находится новое приближение точки контакта:

if $Contact_k = true$ **then**

  if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right) = -1$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^{*}_{k+1} \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right)$

if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right) = +1$ **then**

if $\mathbf{F}_{k+1} \cdot \mathbf{n} < 0$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow false$

$Separation_{k+1} \leftarrow {}^{(t)}Contact$

else

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^{*}_{k+1} \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right)$

else

if ${}^{(t)}Contact = true$ **then**

if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right) = -1$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^{*}_{k+1} \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r} \right)$

if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right) = +1$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow false$

$Separation_{k+1} \leftarrow true$

else

if $\exists intersectionPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r},\ {}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right)$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^{*}_{k+1} \leftarrow intersectionPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r},\ {}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k \right)$

else

$Contact_{k+1} \leftarrow false$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

? $\kappa_{k+1} \leftarrow <$ *некоторая стратегия* $>$

С учётом дополнительных узловых сил контакта, в схеме с коррекцией к глобальному вектору невязок $\mathbf{R}$, соответствующему (2.30), добавляются узловые локальные векторы

$$\hat{\mathbf{R}}^{contact} = {}^{(t)}\mathbf{F}, \tag{3.6}$$

котороые расчитываются в конце предыдущего шага.

Заключение

Описаны численные схемы для решения контактных задач термомеханики.

Список литературы

1) Филиппов А. С. Численные методы в механике деформируемого твердого тела //Москва. – 2016.
2) Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Термопрочность деталей машин //М.: Машиностроение. – 1975. – Т. 455.
3) Колесников К. С., Александров Д. А., Асташев В. К. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. Кн. 1 //М.: Машиностроение. – 1994. – Т. 1.
4) Отчет о ПНИ по теме: "Разработка программно-технических решений в области промышленного программного обеспечения для моделирования поведения элементов конструкций из современных материалов в экстремальных условиях при механических и немеханических воздействиях для решения задач проектирования авиакосмической техники" (№ гос. регистрации: 114112440083)
5) Соловейчик Ю. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
6) Темис Ю. М. Решение задач деформационной теории пластичности методом последовательных нагружений с коррекцией погрешности //Ученые записки ЦАГИ. – 1983. – Т. 14. – №. 5.
7) Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Изд-во" Судостроение", 1974.
8) Лукашевич А. А. Современные численные методы строительной механики. – Изд-во ХГТУ, 2003.
9) Станкевич И. В. Численное решение контактных задач с учетом деформации ползучести //Вестник МГТУ им. НЭ Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – №. 4. – С. 145-153.
10) Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат //Москва. – 1948.

11) Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность //Устойчивость. Колебания. – 1968. – Т. 1.
12) Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с
13) Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести //Киев: Наукова думка. – 1981. – Т. 496. – С. 1.
14) Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния Рос. АН, 2000.
15) Wriggers P., Zavarise G. Computational contact mechanics //Encyclopedia of computational mechanics. – 2004.