Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

ОТЧЕТ ПО НИП

_ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций__
__________________ при механических и немеханических воздействиях _____________________
(тема НИП в соответствии с индивидуальным планом)

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:	Проверил:
Аспирант ____Исламов Д. Р._____ (Ф.И.О.)	Научный руководитель ___ Персова М. Г.____ (Ф.И.О.)
Год подготовки _____2_______	Балл: __________, ECTS_____________,
Факультет ФПМИ	Оценка _____________________________ «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»
______________________ подпись	______________________ подпись
«___» ______________ 2019 г.	«___» __________________ 2019 г.

Новосибирск 2019

Оглавление

Аннотация

Научно-исследовательская практика по теме «Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций при механических и немеханических воздействиях» проводилась с целью реализации численны схем термомеханики. Сформулированы цели и задачи, выполнена реализация и проверена на модельных задачах.

1. Цели и задачи НИП

Целью научно-исследовательской практики является реализация МКЭ для решения контактных задач термомеханики.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Реализовать в виде ПО численные схемы
2. Верифицировать код программы

2. Ресурсы для проведения исследования

Для выполнения целей и задачь были использованы численные схемы, вычислительная техника и набор модельных задачь для верификации ПО. В качестве вычислительной техники был использован вычислительный комплекс (настольный компьютер), укомплектованный следующим аппаратным обеспечением:

1. Процессор Intel® Core™2 Duo E7200 (литография 45 нм, частота 2,53 GHz, ядер 2, кэш-память 3 MB L2)
2. Две платы оперативной памяти по 2 Гбайт DDR2

и программным обеспечением:

1. Операционная система Kubuntu 18.04 x86_64
2. Компилятор gcc 7.4.0
3. Кроссплатформенный фреймворк Qt 5.12.3
4. IDE Qt Creator 4.9.1 (Community)
5. Программа для построения графиков Gnuplot 5.2

3. Тесты

3.1. Термоупругость

Расмотрим термомеханическое нагружение полого шара, модуль Юнга которого зависит от температуры, с различной очерёдностью:

I) нагружение → нагрев → разгрузка → охлаждение

II) нагружение и нагрев → разгрузка и охлаждение

Подчёркнуты стадии, в процессе которых изменение параметров упругости приводит к изменению НДС. Стадия охлаждения в случае I тоже включена из-за наличия погрешности (т.е. ненулевых напряжений после механической разгрузки).

Механическая нагрузка прикладывается к внутренней стороне полого шара. Температура меняется в результате решения стационарной задачи теплопроводности с краевыми условиями 1-го рода на границах полого шара. Параметры приведены в таблице 1. Численные результаты приведены в таблицах 2, 3. В результате нагружения и разгрузки должны получаться нулевые напряжения.

Таблица 1 – Параметры

r_i	внутренний радиус	1 м
r_o	внешний радиус	4 м
α	коэффициент температурного расширения	0
ν	коэффициент Пуассона	0.3
E	модуль Юнга (в 10 раз уменьшается при нагревании на 100 градусов)	$10^{10} - 9 \cdot 10^{7} \cdot T$ Па
P_i	давление с внутренней стороны	0…100…0 Н
T_i	температура внутренней стороны	0…100…0 °С
T_o	температура внешней стороны	0…1…0 °С

Таблица 2 – численный результат I (нагружение → нагрев → разгрузка → охлаждение)

схема		без коррекции погрешности		с коррекцией погрешности	
$N_\varphi \times N_\theta$	разбиения сферы	8x8	16x16	8x8	16x16
N_r	разбиения вдоль радиуса	32	64	32	64

$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=1$		2.299432e+00	1.483850e+00	1.519932e+00	7.873760e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=1$		1.777558e+00	1.184448e+00	1.074119e+00	6.592418e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=4$		2.200828e+00	1.436845e+00	3.713633e-01	2.026500e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=4$		1.835724e+00	1.114914e+00	1.813595e-01	2.123229e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=16$		2.293349e+00	1.398160e+00	2.143717e-01	8.194470e-02
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=16$		1.863825e+00	9.881973e-01	8.732157e-02	4.788488e-02

Таблица 3 – численный результат II (нагружение и нагрев → разгрузка и охлаждение)

схема		без коррекции погрешности		с коррекцией погрешности	
$N_{\varphi}\times N_{\theta}$	разбиения сферы	8x8	16x16	8x8	16x16
N_r	разбиения вдоль радиуса	32	64	32	64
$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=1$		4.794265e+00	2.463341e+00	1.846751e+00	1.015657e+00
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=1$		4.571552e+00	1.808815e+00	1.394077e+00	8.897855e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=4$		1.190440e+00	5.746421e-01	4.068187e-01	2.345288e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=4$		1.130000e+00	4.096602e-01	2.238758e-01	2.315202e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{\varphi}\rvert\right), N_{Steps}=16$		2.925938e-01	1.360488e-01	2.920198e-01	1.009813e-01
$\max\left(\lvert\sigma_{r}\rvert\right), N_{Steps}=16$		2.774133e-01	9.577898e-02	1.317406e-01	7.963563e-02

На рисунках 1-3 изображены распределения температур и напряжений после каждой из 4-х стадий нагружения/разгрузки в случае I (нагружение → нагрев → разгрузка → охлаждение) при $N_{\varphi}\times N_{\theta}=16\text{x}16, N_r=64, N_{Steps}=16$, если использовать схему с коррекцией. Сплошной линией изображено точное решение. Пунктирной линией изображено точное решение в случае без изменения температуры.

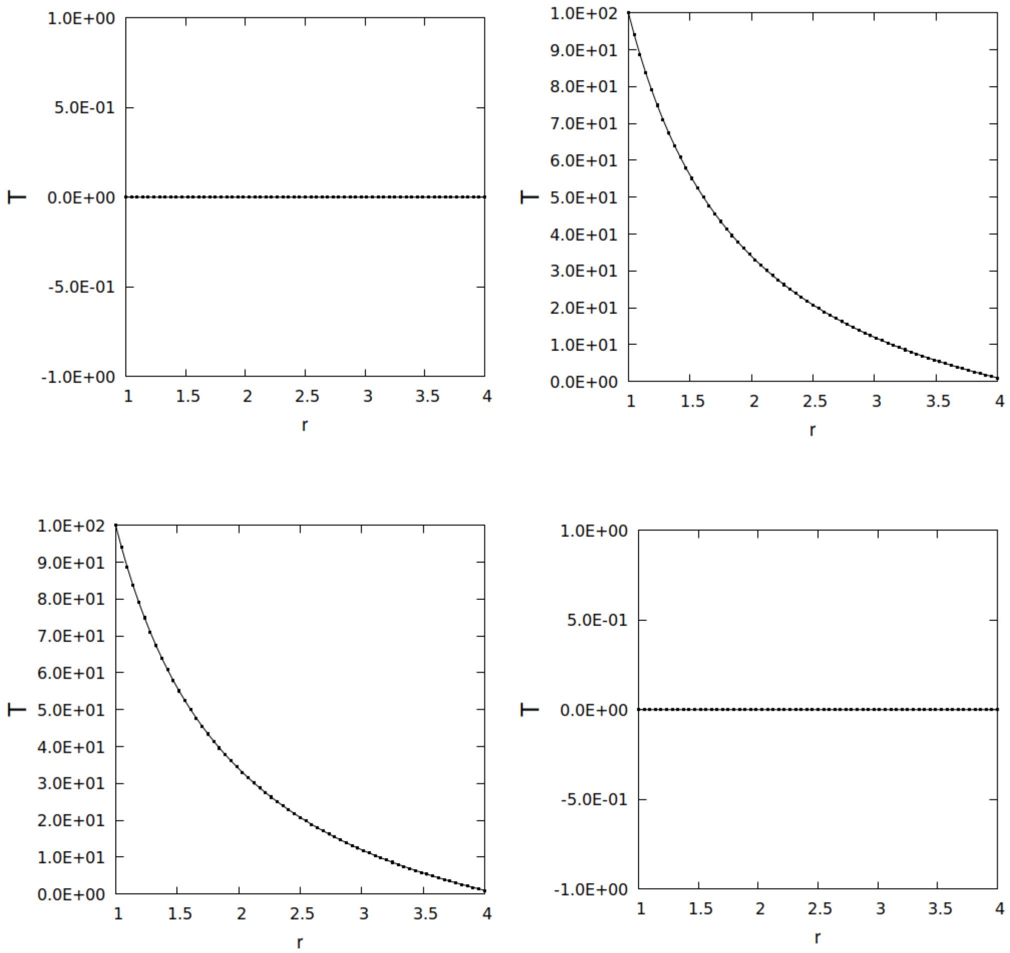
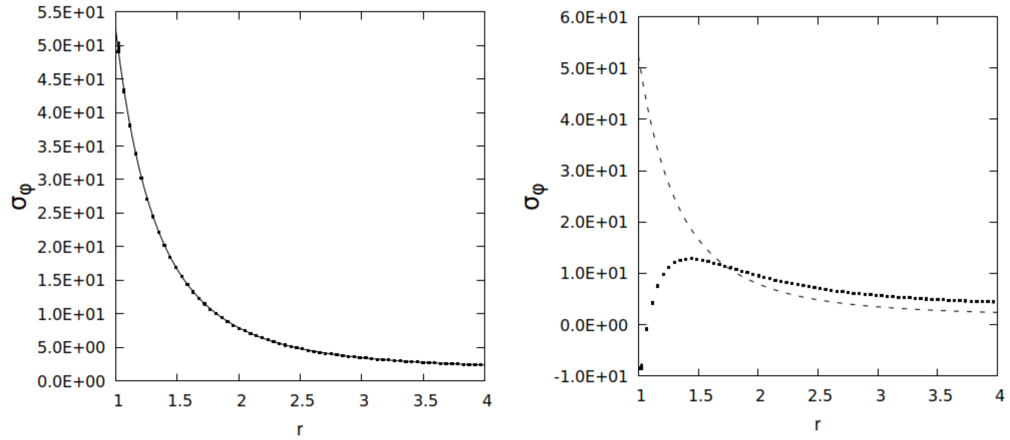


Рисунок 1. Температура T



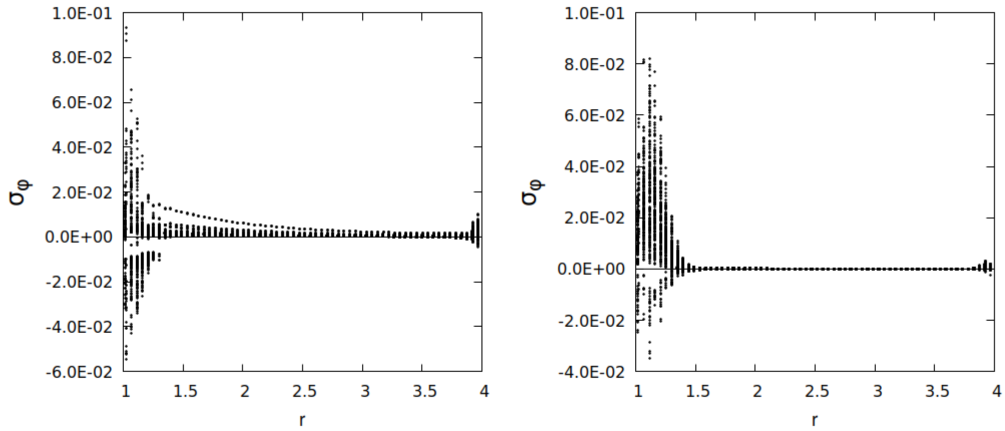


Рисунок 2. Напряжения σ_{φ}

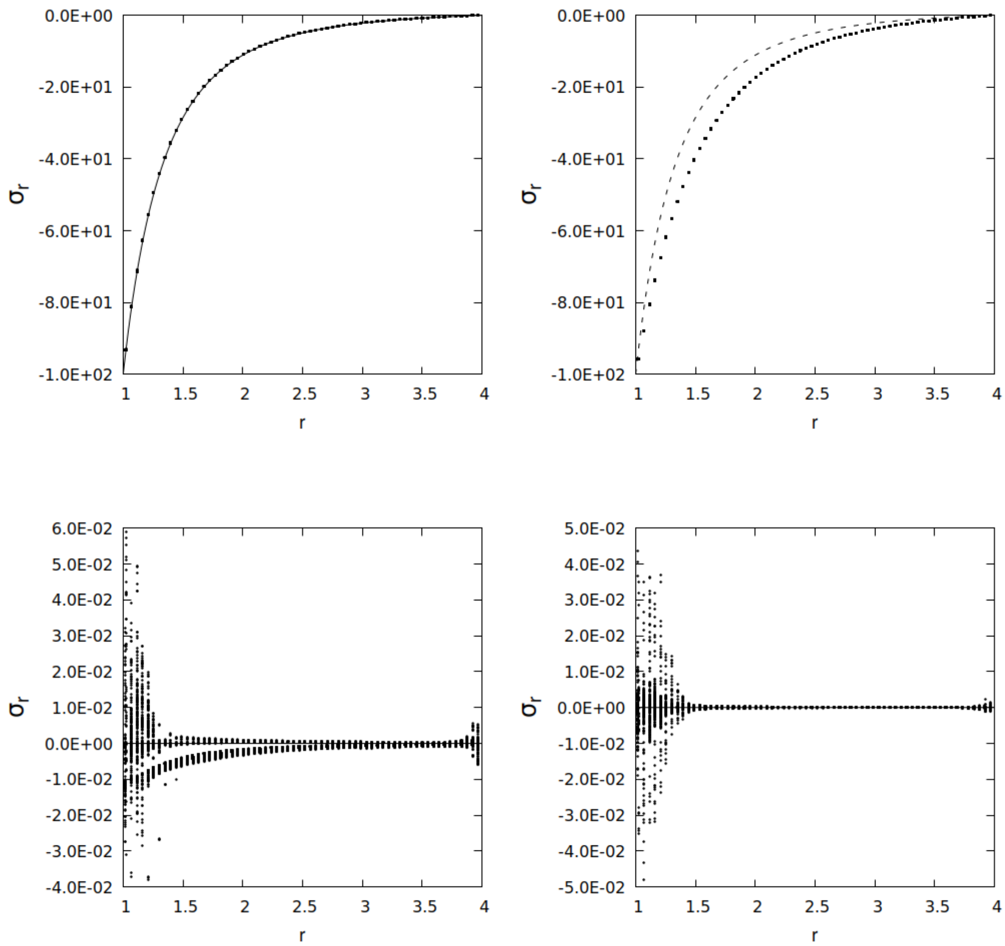


Рисунок 3. Напряжения σ_{r}

На рисунках 4-6 изображены распределения температур и напряжений после каждой из 2-х стадий нагружения/разгрузки в случае II (нагружение и нагрев → разгрузка и охлаждение) при $N_{\varphi} \times N_{\theta} = 16 \text{x} 16,\ N_r = 64,\ N_{Steps} = 16$, если использовать схему с коррекцией. Сплошной линией изображено точное решение. Пунктирной линией изображено точное решение в случае без изменения температуры.

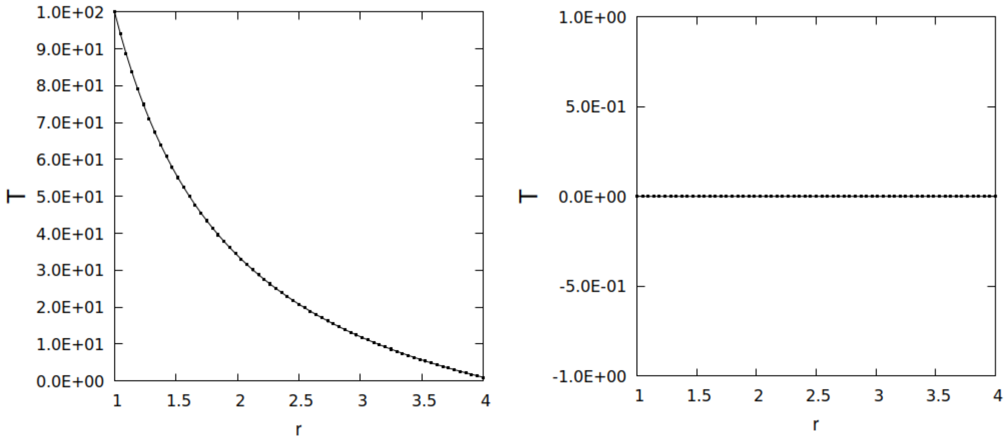


Рисунок 4. Температура T

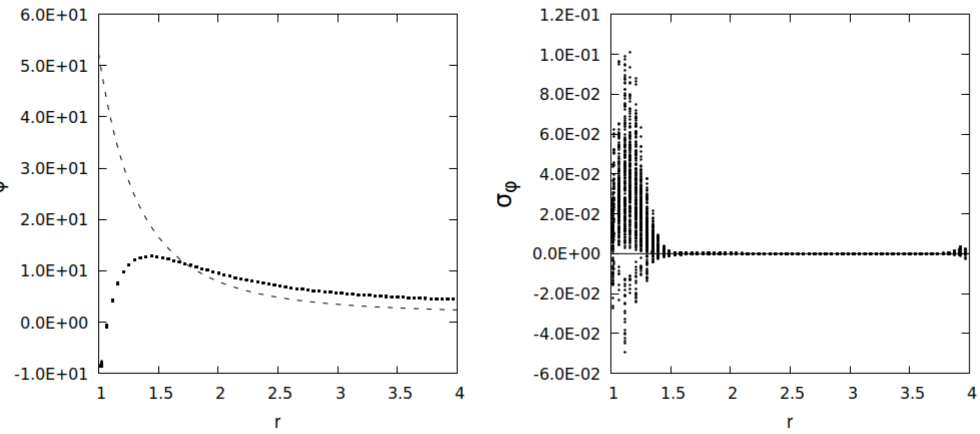


Рисунок 5. Напряжения σ_{φ}

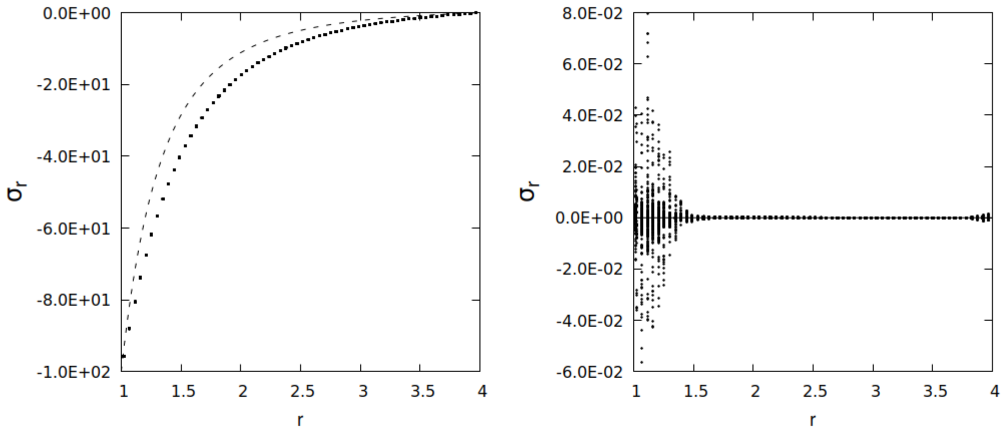


Рисунок 6. Напряжения σ_r

Эталонное решение (нагрев → нагружение → разгрузка → охлаждение) приведено на рисунке 7 (после разгрузки и после охлаждения $|\sigma_\varphi|, |\sigma_r| < 10^{-5}$).

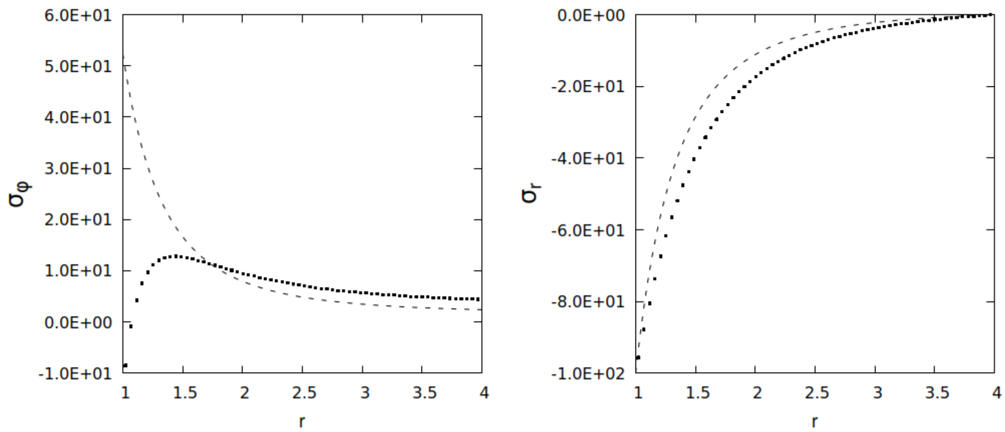


Рисунок 7. Напряжения σ_r

Таким образом, в данном тесте, решение схемой с коррекцией после разгрузки ближе к нулю, чем решение схемой без коррекции.

Результаты после разгрузки в тесте "нагрев → охлаждение → коррекция", с (ненулевым) коэффициентом температурного расширения $\alpha = 10^{-5}$, аналогичны.

3.2. Установившаяся ползучесть полого шара

Рассмотрим нагружение полого шара, с внутренним радиусом r_i и внешним радиусом r_o, внутренним давлением P_i и внешним давлением P_o. При быстром деформировании материал принимается упругим и его поведение определяется модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν; при медленном деформировании деформация ползучести определяется законом Нортона

$$\dot{\varepsilon}^c = B\tilde{\sigma}^n \tag{3.1}$$

или соответствующей функцией ползучести

$$\Phi\left(\tilde{\sigma}, t\right) = B\tilde{\sigma}^n t, \tag{3.2}$$

тогда аналитическое решение в случае установившейся ползучести, т.е. при $t \to \infty$ (или при достаточно большом t, когда процесс становится стационарным), принимает вид [1, 2]

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{P_i - P_o}{k^{-\frac{3}{n}} - 1} R^{-\frac{3}{n}} - \frac{P_i k^{-\frac{3}{n}} - P_o}{k^{-\frac{3}{n}} - 1}, \\
\sigma_\varphi &= \frac{\left(P_i - P_o\right)\left(2n - 3\right)}{2n\left(k^{-\frac{3}{n}} - 1\right)} R^{-\frac{3}{n}} - \frac{P_i k^{-\frac{3}{n}} - P_o}{k^{-\frac{3}{n}} - 1},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где обозначено

$$R = \frac{r}{r_i}, k = \frac{r_o}{r_i}. \tag{3.4}$$

Сравнение численных решений для различных продолжительностей ползучести (при постоянной нагрузке) методом начальных напряжений с изменением матрицы ОС и аналитического решения при установившейся ползучести, с коэффициентами из таблицы 4, приведено на рисунках 9–14. На первых 2-х графиках сплошная линия – точное решение при установившейся ползучести, пунктирная линия – упругое решение.

Таблица 4 – Параметры

r_i	внутренний радиус	1 м
r_o	внешний радиус	4 м
E	модуль Юнга	10^{10} Па
ν	коэффициент Пуассона	0.3
Φ	кривая деформирования	$F(\sigma,t)=B\sigma^n t, B=1\cdot10^{-14}, n=2,$ $\Phi(\varepsilon,t)=\min\left(\left(\frac{\varepsilon}{Bt}\right)^{\frac{1}{n}}, 3G\cdot\varepsilon\right).$
P_i	давление с внутренней стороны	$1\cdot10^5$ Н
P_o	давление с внешней стороны	0 Н
$N_\varphi \times N_\theta$	разбиения сферы	8x8
N_r	разбиения полого шара вдоль радиуса	32
k_R	коэффициент сгущения к полости	1+1/16
t_{el}	длительность нагружения	$1\cdot10^{-7}$ ч
N_{el}	количество временных слоёв нагружения	1
t_{creep}	продолжительность ползучести	меняется
N_{creep}	количество временных слоёв ползучести	$10\cdot t_{\text{creep}}$
$\Delta_\varepsilon^{Limit}$	параметр завершения итераций $\left(\max\left(\Delta_\varepsilon\right)<\Delta_\varepsilon^{Limit}\right)$	10^{-14}

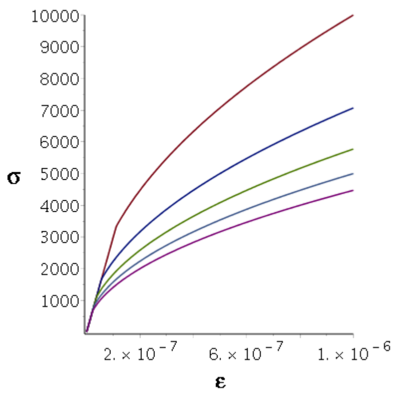


Рисунок 8. $\Phi(\varepsilon,t)$ при $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$, $t=5$.

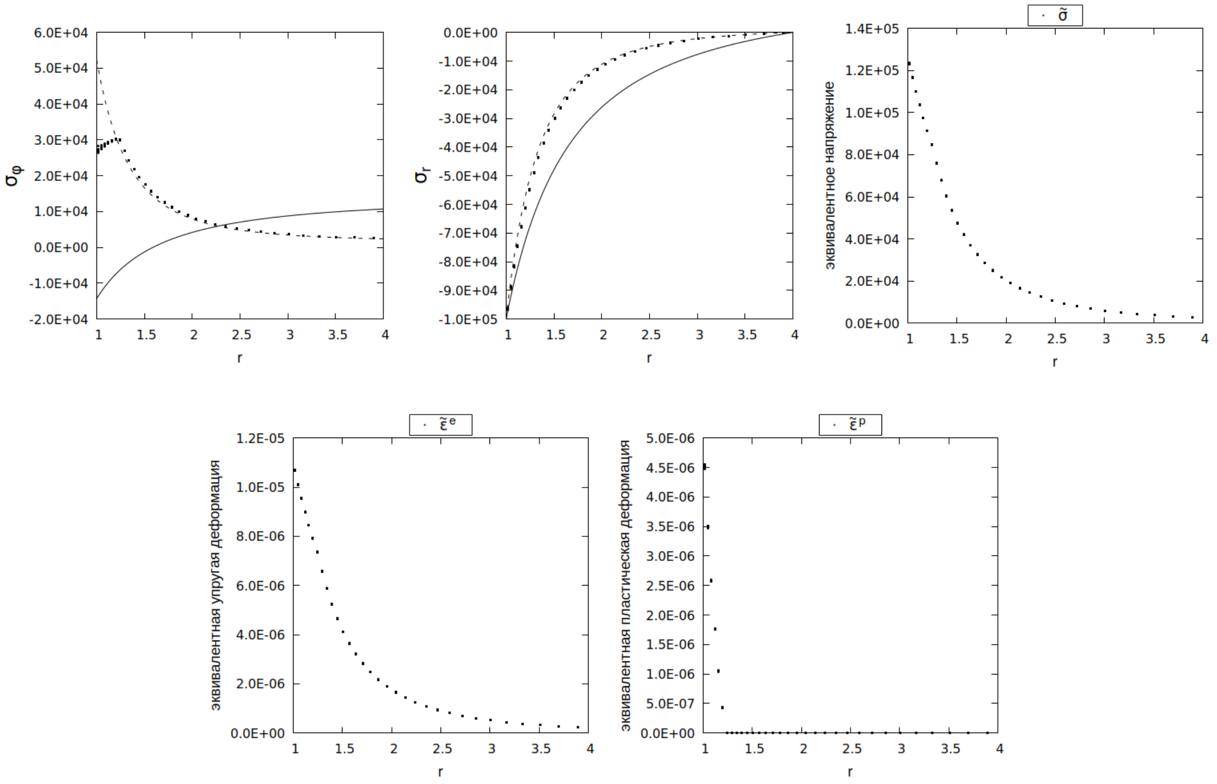


Рисунок 9. $t_{\text{creep}} = 0.1$, $N_{\text{creep}} = 1$.

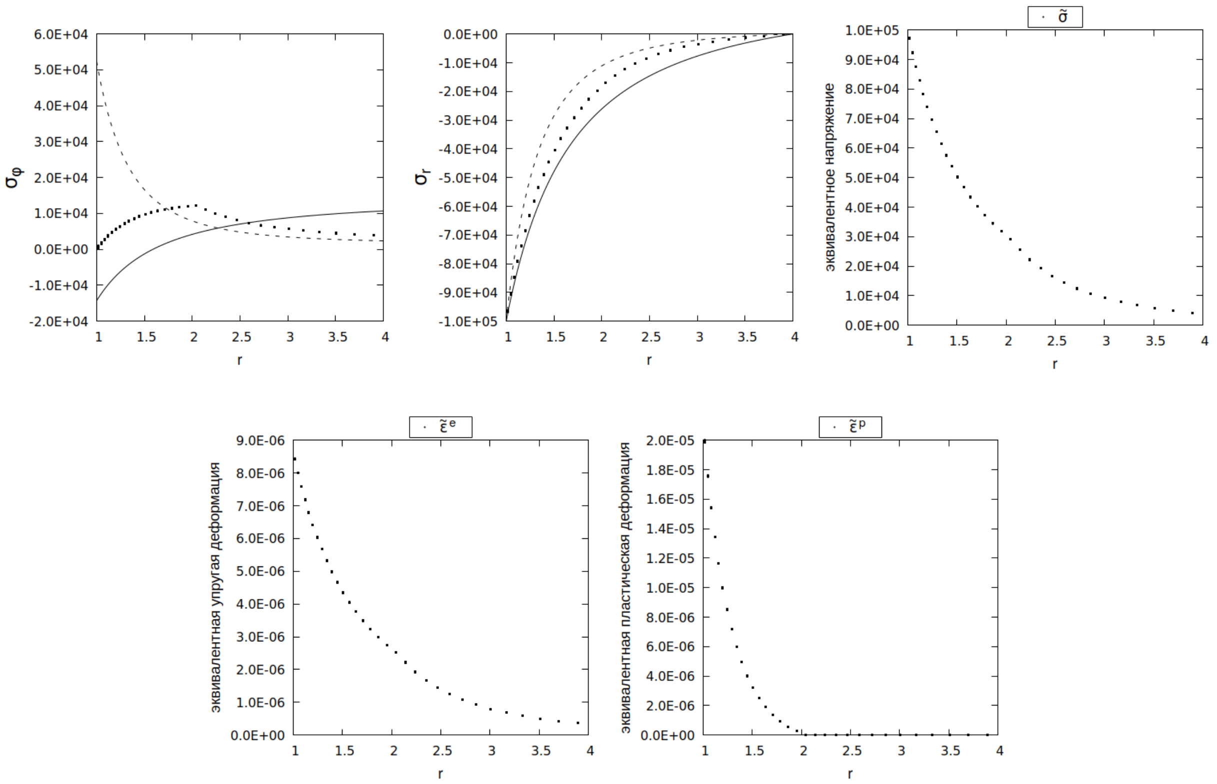


Рисунок 10. $t_{\text{creep}} = 0.3$, $N_{\text{creep}} = 3$.

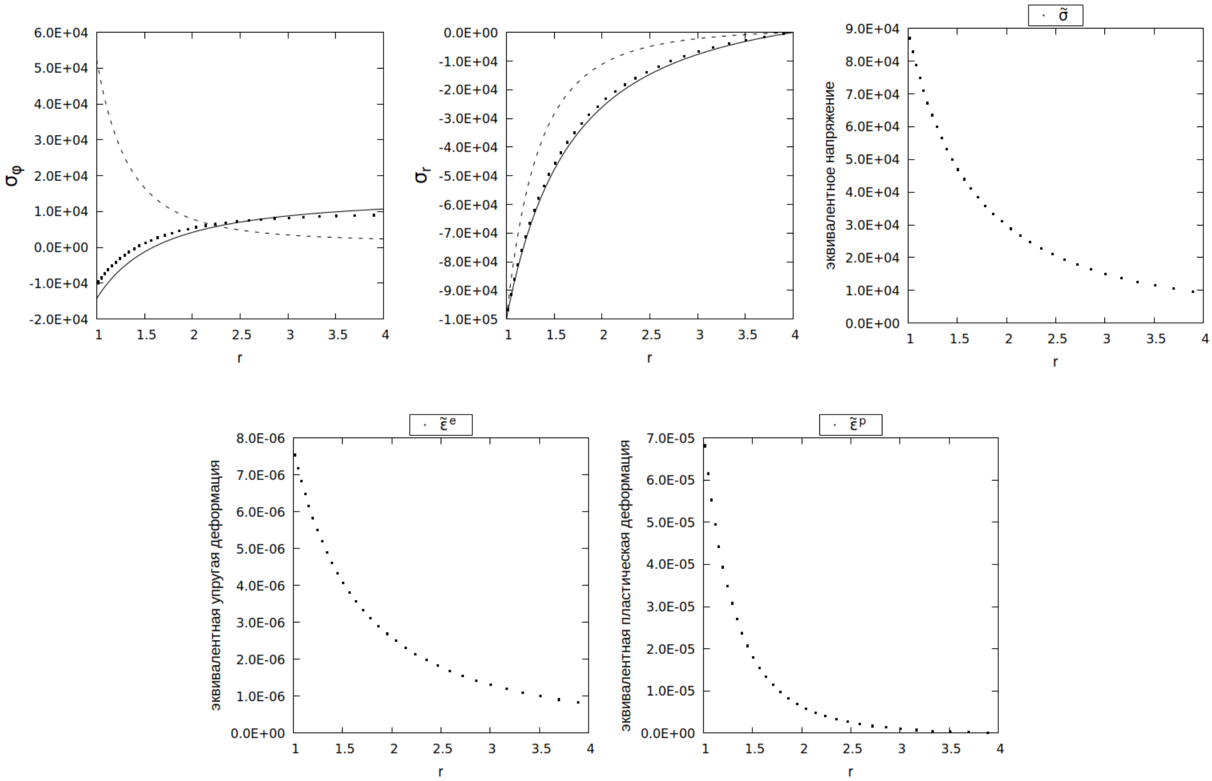


Рисунок 11. $t_{\text{creep}} = 1, N_{\text{creep}} = 10$.

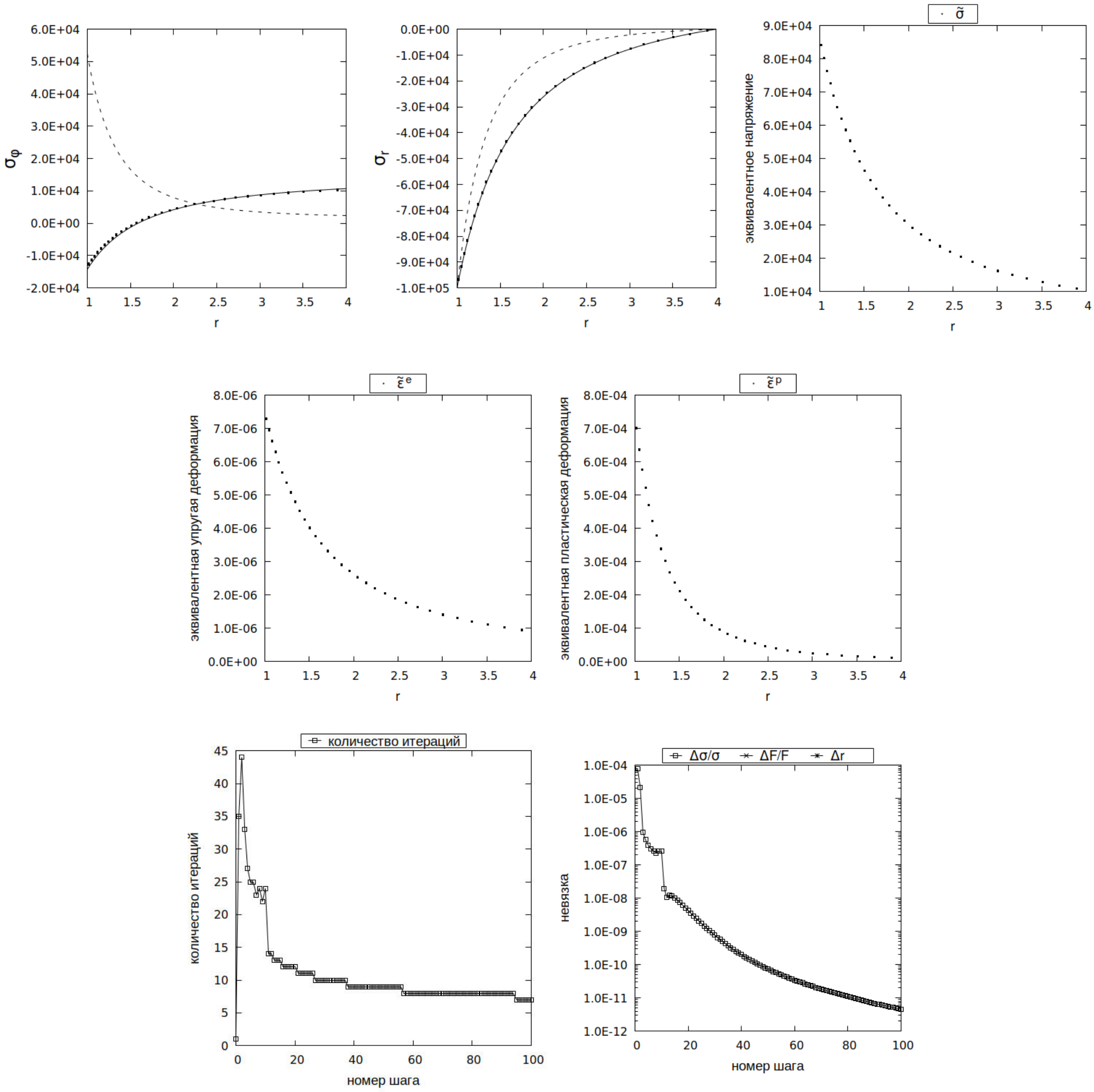


Рисунок 12. $t_{\text{creep}} = 10$, $N_{\text{creep}} = 100$.

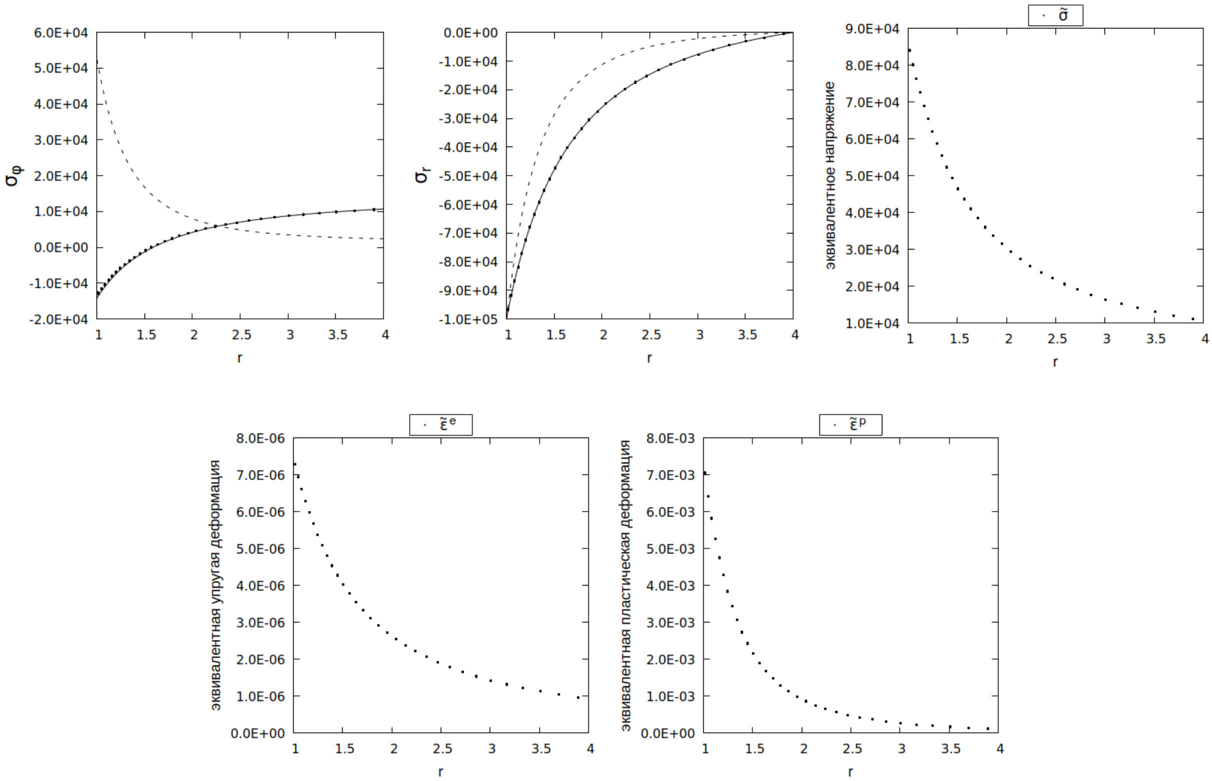


Рисунок 13. $t_{\text{creep}} = 100$, $N_{\text{creep}} = 1000$.

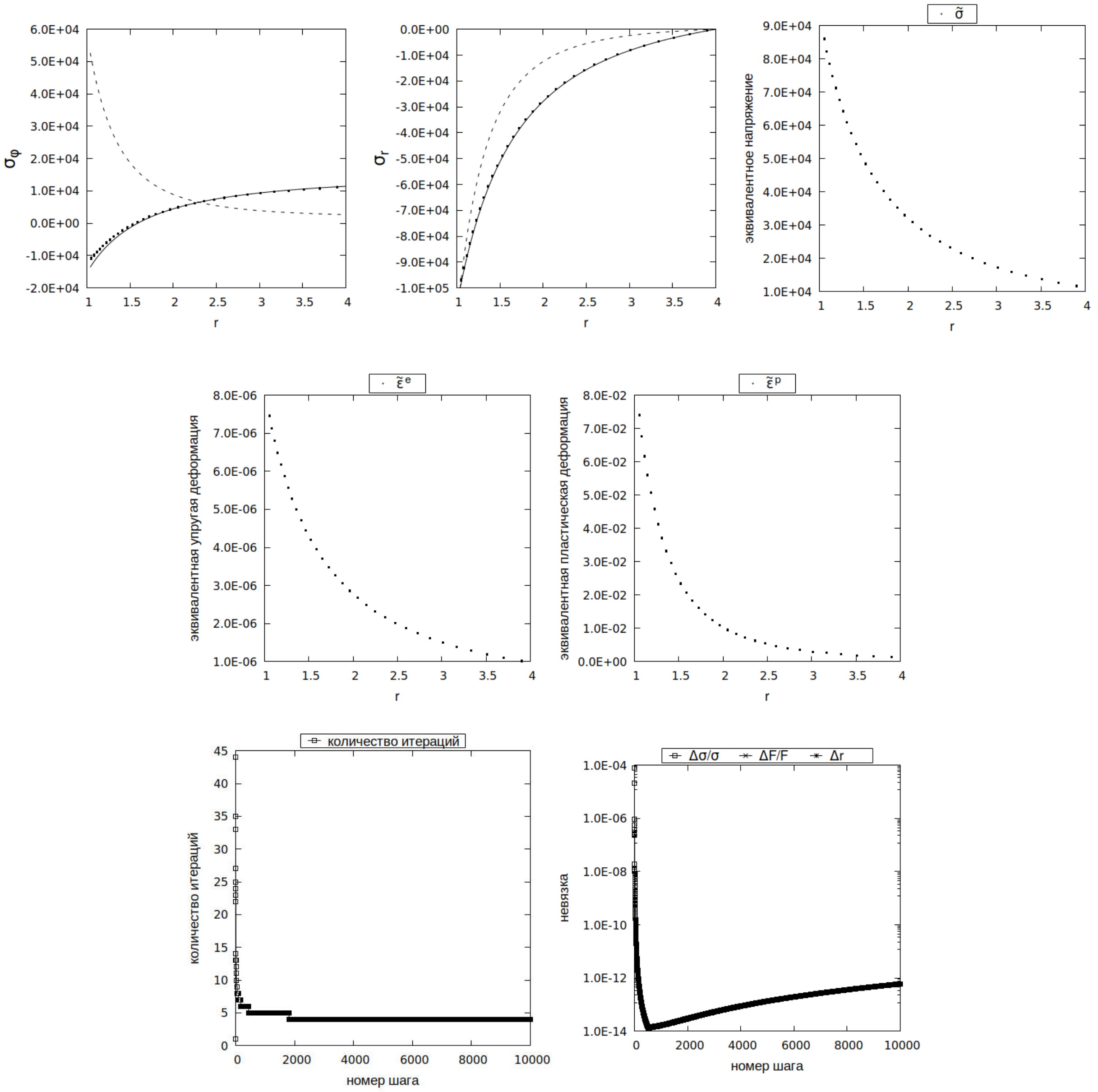


Рисунок 14. $t_{\text{creep}} = 1000$, $N_{\text{creep}} = 10000$.

3.3. Вдавливание жёсткого цилиндра в упругое полупространство

Рассмотрим контакт между абсолютно жёстким цилиндром и упругим полупространством (рисунок 15).

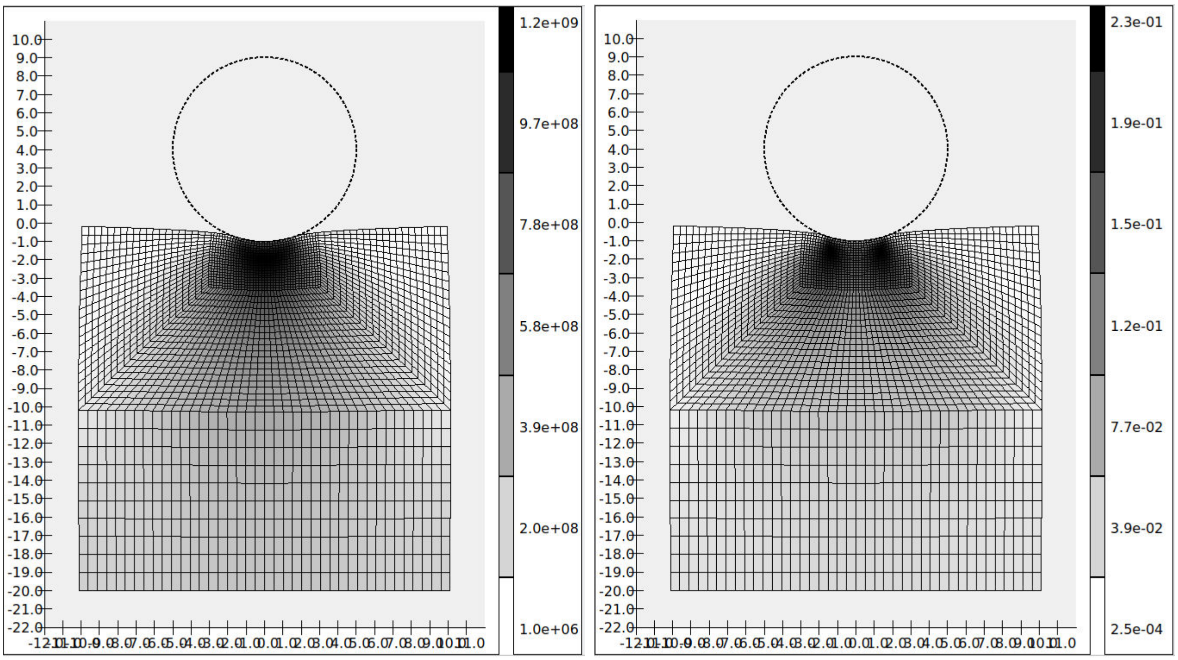


Рисунок 15. $d = 1.0, N = 20, steps = 16$, с коррекцией. Слева эквивалентные напряжения, справа эквивалентные упругие деформации.

Пусть R – радиус цилиндра, d – глубина вдавливания цилиндра в полупространство, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, L – длина цилиндра, тогда [3, 4]

$$
\begin{aligned}
&E^* = \frac{2E}{1-\mu^2},\ R^* = R,\\
&P_{\max} = \frac{1}{4} E^* \sqrt{\frac{d}{R^*}},\\
&P = P_{\max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{dR^*}},\\
&a = \sqrt{dR^*},\\
&F_n = \frac{\pi}{8} E^* L d,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где E^* – комбинированная жёсткость, R^* – комбинированный радиус, $P_{\max}$ – максимальное давление, x – расстояние от центра зоны контакта по горизонтали, a – полуширина области контакта, F_n – вертикальная составляющая суммарной силы реакции опоры.

Параметры заданы в таблице 5, результаты отображены в таблице 6 и на рисунках 16-20. Поскольку в этом тесте поверхность подвижна, то в алгоритме поиск пересечения с поверхностью $intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ заменён на поиск ближайшей точки $nearestPoint(\mathbf{r})$. Поверхность задаётся аналитически. Первыми краевыми условиями ограничены перемещения по оси z во всех узлах сетки, по оси y на нижней границе и по оси x в плоскости $x = 0$. Сетка построента аналогично [3].

Таблица 5 – Параметры.

$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$20 \times 20 \times 1$
R	радиус цилиндра	5
$L(= L_z)$	длина цилиндра	1
E	модуль Юнга	10^{10} Па
μ	коэффициент Пуассона	0.3
κ	коэффициент контактной жёсткости	10^{10} Н/м (константа)
	условия завершения итераций	$\lvert \Delta\mathbf{F}_{k+1} - \Delta\mathbf{F}_k \rvert / \lvert \mathbf{F} \rvert < 10^{-10}$, $\lvert \mathbf{r}^*_{k+1} - \mathbf{r}^*_k \rvert < 10^{-14}$

Таблица 5 – Численные результаты. d – глубина вдавливания, N – подробность разбиения сетки, $steps$ – количество шагов сдвига цилиндра. "С коррекцией" означает, что после каждого шага добавляется шаг без смещения цилиндра для коррекции баланса сил и напряжений.

	F_n^{Numb} – вертикальная составляющая суммарной силы реакции опоры, Н	$d^{Numb} = \dfrac{8F_n^{Numb}}{\pi E^* L}$
$d = 0.5,\ N = 20,\ steps = 4$, с коррекцией	2.262733e+09	0.2621711
$d = 0.5,\ N = 20,\ steps = 4$, без коррекции	2.259888e+09	0.2618415
$d = 0.5,\ N = 20,\ steps = 8$, с коррекцией	2.262828e+09	0.2621821

$d=0.5,\ N=20,\ steps=8$, без коррекции	2.260196e+09	0.2618771
$d=0.5,\ N=40,\ steps=8$, с коррекцией	2.263364e+09	0.2622442
$d=1.0,\ N=20,\ steps=8$, с коррекцией	5.111560e+09	0.5922499
$d=1.0,\ N=20,\ steps=8$, без коррекции	5.091652e+09	0.5899432
$d=1.0,\ N=20,\ steps=16$, с коррекцией	5.114002e+09	0.5925329
$d=1.0,\ N=20,\ steps=16$, без коррекции	5.093665e+09	0.5901765

На рисунках 16-20 сплошной линией изображён график давления $P(d, x)$ из (3.5), в котором параметром является исходная глубина вдавливания цилиндра d. Во всех тестах расстояния от контактных узлов до поверхности цилиндра не превосходит 10^{-13}.

Жирной линией изображён график давления $P\left(d^{Numb}\left(F_n^{Numb}\right), x\right)$, в котором вместо настоящей глубины вдавливания цилиндра принято значение, вычисленное по формуле

$$d^{Numb} = \frac{8F_n^{Numb}}{\pi E^* L} \tag{3.6}$$

где сила F_n^{Numb} вычислена исходя из численного решения, как вертикальная компонента суммы сил реакций опоры в контактных узлах.

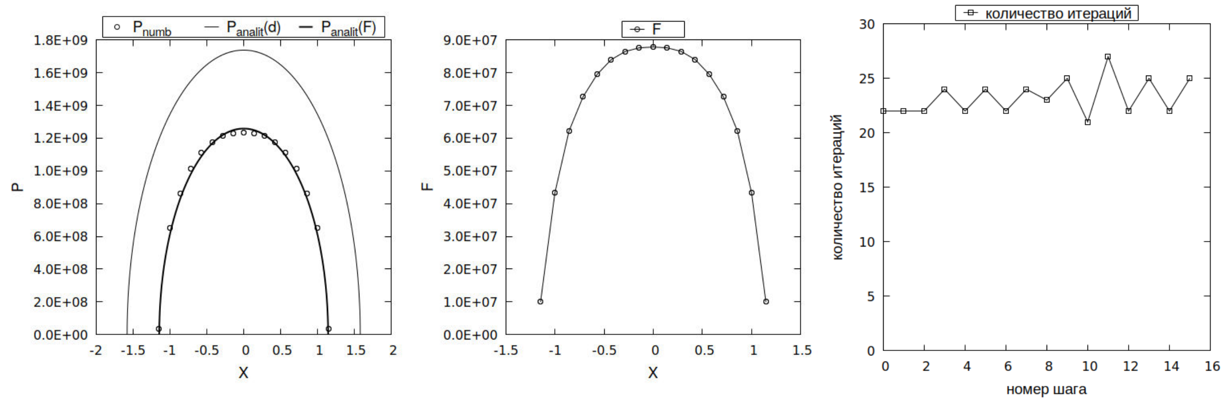


Рисунок 16. $d = 0.5$, $N = 20$, $steps = 8$, с коррекцией

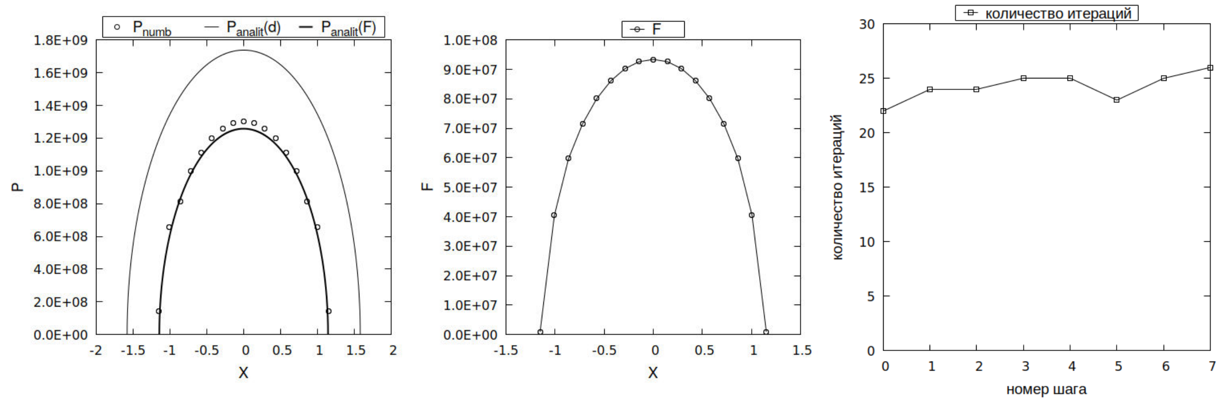


Рисунок 17. $d = 0.5$, $N = 20$, $steps = 8$, без коррекции

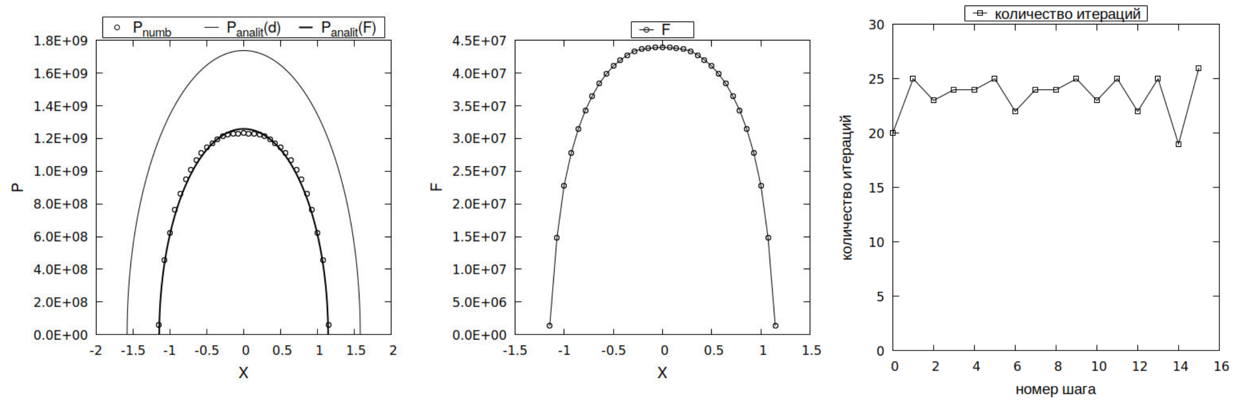


Рисунок 18. $d = 0.5$, $N = 40$, $steps = 8$, с коррекцией (более подробная сетка)

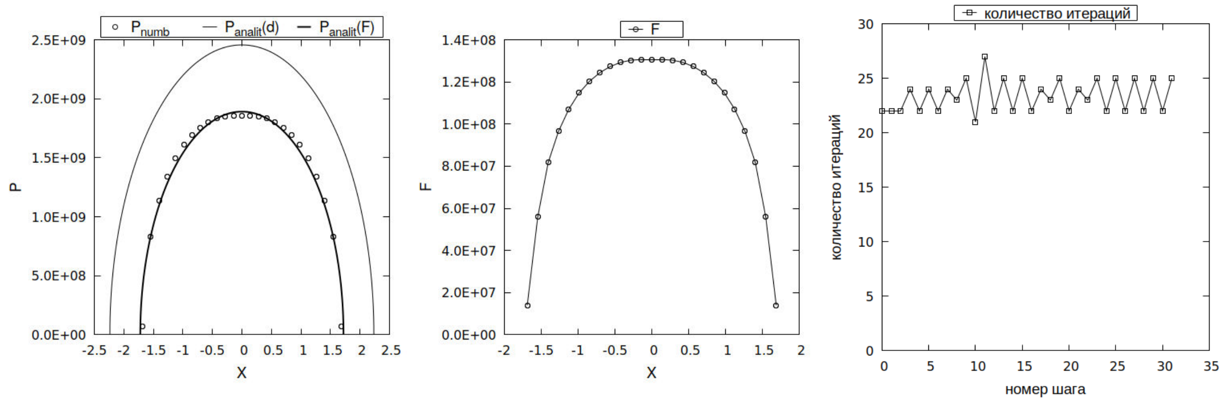


Рисунок 19. $d = 1.0,\ N = 20,\ steps = 16$, с коррекцией

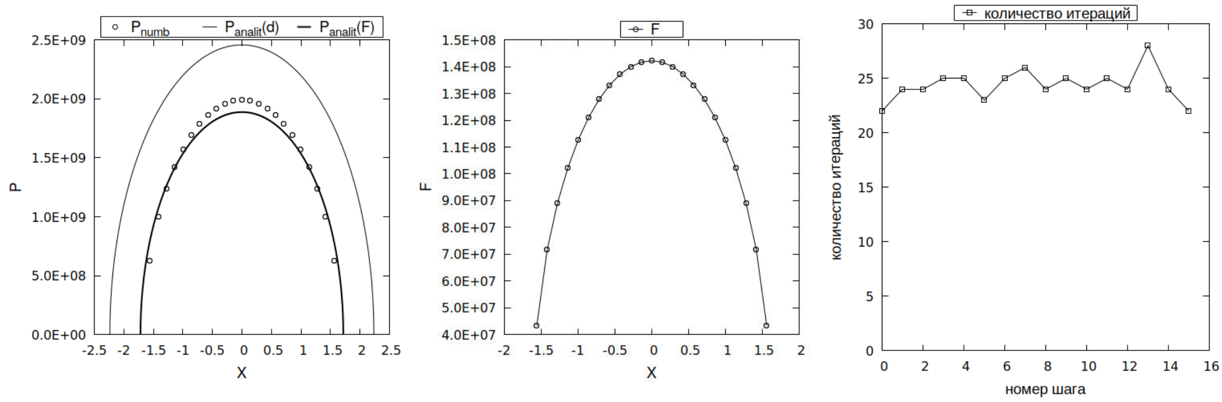


Рисунок 20. $d = 1.0,\ N = 20,\ steps = 16$, без коррекции

4. Способы оптимизации технологического процесса для регулирования остаточных напряжений

В [5] предлагаются следующие способы:

- кратковременный неравномерный нагрев готового изделия
- приложение на стадии охлаждения изделия переменной во времени внешней нагрузки (силовой, кинематической)

В [6] показано, что зависимости упругих модулей от температуры могут слабо влиять на остаточные напряжения. (Рассматривается задача о локальном нагреве круглой пластины, изготовленной из идеального упругопластического материала. Предел текучести и упругие модули полагаются зависимыми от температуры.)

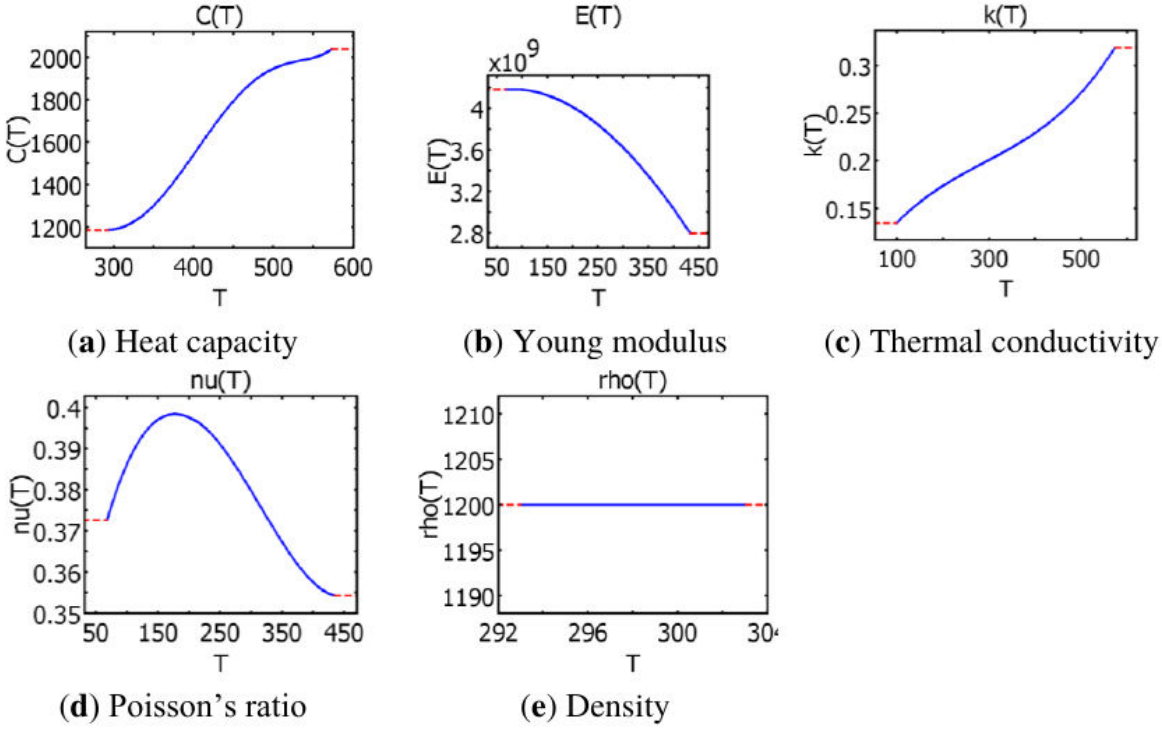
Существуют методы определения остаточных напряжении, например, поляризационно-оптический метод фотоупругости и фотопластичности.

5. Поликарбонат

В [7, 8] даны кривые ползучести и релаксации поликарбоната.

В [9] поликарбонат рассматривается как упруго-пластический материал и приведены зависимости параметров материала от температуры

Figure 6. Thermal dependencies of polycarbonate material properties (COMSOL Multiphysics 3.5a material library).



,

которые взяты из [10].

В [10] версии 5.4 зависимости параметров материала от температуры представлены в аналитическом виде и даны ссылки на источники, но нет кривых ползучести.

Заключение

Численные схемы реализованы. Тестирование реализации показало адекватные результаты.

Список литературы

1) Nejad M. Z. et al. A new analytical solution for creep stresses in thick-walled spherical pressure vessels //Journal of Basic and Applied Scientific Research. – 2011. – Т. 1. – №. 11. – С. 2162-2166.
2) Сапунов В. Т. Основы теории пластичности и ползучести: учебное пособие //М.: МИФИ. – 2008.
3) Konter A. Advanced finite element contact benchmarks. – Nafems, 2006.
4) Попов В. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. – Litres, 2017.
5) Матвеенко В. П. и др. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода //М.: Физматлит. – 2009. – Т. 176.
6) Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22. – №. 1.
7) Cao K., Wang Y., Wang Y. Experimental investigation and modeling of the tension behavior of polycarbonate with temperature effects from low to high strain rates //International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Т. 51. – №. 13. – С. 2539-2548.
8) Abu-Abdeen M. The unusual effect of temperature on stress relaxation and mechanical creep of polycarbonate at low strain and stress levels //Materials & Design. – 2012. – Т. 34. – С. 469-473.
9) Narijauskaitė B. et al. Polycarbonate as an elasto-plastic material model for simulation of the microstructure hot imprint process //Sensors. – 2013. – Т. 13. – №. 9. – С. 11229-11242.
10) COMSOL Multiphysics material library