Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики

ОТЧЕТ ПО НИР

____ Конечноэлементное моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций__
__________________ при механических и немеханических воздействиях________________________
(тема НИР в соответствии с индивидуальным планом)

____

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

(профиль: "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ")

Выполнил:

Аспирант ____ Исламов Д. Р._____
(Ф.И.О.)

Год подготовки _____3_______

Факультет ФПМИ

____
подпись

«___» ______________ 2020 г.

Проверил:

Научный руководитель ____ Персова М. Г._____
(Ф.И.О.)

Балл: __________, ECTS_____________,

Оценка ____________________________
«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неуд.»

____
подпись

«___» __________________ 2020 г.

Новосибирск 2020

Оглавление

1. Постановка задачи

Внутри тела, геометрия которого задана некоторой областью Ω, выполняются дифференциальные уравнения движения в перемещениях

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,\, i = \overline{1,3}. \tag{1.1}$$

На границе $S = S_1 \cup S_2$ области Ω выполняются кинематические и силовые краевые условия

$$\vec{u}\Big|_{S_1} = \vec{u}_0\left(t\right), \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_2} = P_i\left(t\right),\, i = \overline{1,3}, \tag{1.3}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S_2, $\vec{P}\left(t\right)$ – вектор поверхностных сил, $\vec{u}_0\left(t\right)$ – вектор перемещения.

Компоненты тензора напряжений Коши σ_{ij} выражаются через упругие компоненты $\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}$ малых деформаций Коши обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}, \tag{1.1}$$

где $C_{ijkl}\left(T\right)$ – тензор модулей упругости материала, T – температура.

Исходя из закона Гука для изотропного тела [1, с. 42], представленного в прямом и обратном виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\left(\varepsilon_{11}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{22}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{33}^{\mathrm{e}}\right) + \mu\left(\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{ji}^{\mathrm{e}}\right),\\
&\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}},\\
&\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{E}\left(\frac{1+\nu}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) - \nu\delta_{ij}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right),\\
&\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijkl}\sigma_{kl},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

тензор модулей упругости C_{ijkl} и тензор упругой податливости A_{ijkl} (обратный к тензору C_{ijkl}) определяются соотношениями

$$
C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right),
\tag{1.3}
$$

$$
A_{ijkl} = \frac{1}{E}\left(\frac{1+\nu}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right),
\tag{1.4}
$$

где $\lambda(T), \mu(T)$ – коэффициенты упругости Ламэ, $E(T)$ – модуль Гука, $\nu(T)$ – коэффициент Пуассона.

Компоненты тензора малых деформаций Коши ε_{ij} выражаются через перемещения (*линейные* геометрические соотношения)

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)
\tag{1.5}
$$

и для термо-упруго-пластичного материала представимы в виде суммы упругих, пластических и температурных компонент:

$$
\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \alpha T\delta_{ij},
\tag{1.6}
$$

где $\alpha T\delta_{ij}$ – деформации изотропного температурного расширения, $\alpha(T)$ – коэффициент линейного изотропного теплового расширения, $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$ – пластические деформации.

Из закона Гука (1.1) получим [2, с. 126; 3, с. 228]

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij} = \alpha T \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijkl}\sigma_{kl}, \\
&\Delta\varepsilon_{ij} = \left({}^{(t+\Delta t)}\left(\alpha T\right) - {}^{(t)}\left(\alpha T\right)\right)\delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \\
&+\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} {}^{(t+\Delta t)}\left(A_{ijkl}\sigma_{kl}\right) - \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} {}^{(t)}\left(A_{ijkl}\sigma_{kl}\right), \\
&\Delta\varepsilon_{ij} = \left[\left(\alpha\Delta T + T\Delta\alpha + \Delta\alpha\Delta T\right)\delta_{ij}\right] + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \\
&+\left[\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Delta A_{ijkl}\, {}^{(t)}\sigma_{kl}\right] + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} {}^{(t+\Delta t)}A_{ijkl}\Delta\sigma_{kl}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Тогда соотношения (1.6), (1.1) можно записать в приращениях:

$$
\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}}, \tag{1.8}
$$

$$
\Delta\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} {}^{(t+\Delta t)}C_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} - \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}}\right), \tag{1.9}
$$

где $\Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}}$ – компоненты приращения тензора температурных деформаций:

$$
\Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{th}} = \left({}^{(t)}\alpha\Delta T + {}^{(t)}T\Delta\alpha + \Delta\alpha\Delta T\right)\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\Delta A_{ijkl}\, {}^{(t)}\sigma_{kl}. \tag{1.10}
$$

Учитывая симметрию тензоров ε_{ij} и σ_{ij}, обозначим деформации и напряжения в векторном виде:

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\right\}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{1.11}
$$

тогда обобщенный закон Гука (1.1) и соотношения (1.9), (1.6), (1.8) примут вид

$$
\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}, \tag{1.12}
$$

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma} = {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right), \tag{1.13}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \alpha T\left\{1, 1, 1, 0, 0, 0\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{1.14}
$$

$$
\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}, \tag{1.15}
$$

где матрица $\mathbf{D}$ (соответствующая тензору C_{ijkl}) определяется через компоненты тензора C_{ijkl}:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Интенсивности напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{c_{\tilde{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}}, \;\; \tilde{\varepsilon} = \sqrt{c_{\tilde{\varepsilon}} \left(\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \left(\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}\right)}, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

$$c_{\tilde{\sigma}} = 1, c_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{4}{9} \tag{1.20}$$

В соответствии с теорией пластического течения [4, с. 103] для изотропного пластичного материала деформации представимы в виде суммы упругой и пластической составляющих

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e+p}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \tag{1.21}$$

для критерия текучести Мизеса выполняется ассоциированный закон пластического течения

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{\sigma}} \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \tag{1.22}$$

т.е. пластические деформации пропорциональны девиатору напряжений

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \right), \tag{1.23}$$

т.к.

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2} \left\{ s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2s_{23}, 2s_{31}, 2s_{12} \right\}. \tag{1.24}$$

Также задана кривая деформирования $\tilde{\sigma} = \Phi(q)$, связывающая интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}$ и параметр Одквиста q, который определяется как сумма интенсивностей приращений пластических деформаций:

$$q = \int d\tilde{\varepsilon}^{p}. \tag{1.25}$$

Кривая деформирования $\tilde{\sigma} = \Phi(q)$ строится по диаграмме одноосного растяжения. В случае одноосного растяжения

$$\tilde{\sigma} = \sigma, d\tilde{\varepsilon}^{p} = d\varepsilon^{p}. \tag{1.26}$$

При активном нагружении происходит приращение пластических деформаций. Нейтральное нагружение или разгрузка происходят линейно-упруго, без приращения пластических деформаций.

2. Пластичность

В случае активного нагружения, т.е. когда работа внутренних сил больше нуля [5, с.96]

$$\Delta W = {}^{(t)}s_{ij}\Delta э_{ij} > 0, \tag{2.1}$$

где $\Delta \mathbf{э}$ – девиатор приращения деформации, и при нулевом приращении пластической деформации происходит превышение предела упругости (здесь и далее $\tilde{\sigma} \equiv {}^{(t+\Delta t)}\tilde{\sigma}$ и т.п. и по умолчанию подразумевается временной слой $(t + \Delta t)$)

$$\tilde{\sigma} > \Phi\left({}^{(t)}q\right), \boldsymbol{\sigma} = {}^{(t)}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}\right), \tag{2.2}$$

необходимо подобрать значения пластических деформаций, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{\sigma} = \Phi\left({}^{(t)}q + \Delta\tilde{\varepsilon}^{\text{p}}\right), \boldsymbol{\sigma} = {}^{(t)}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}\right). \tag{2.3}$$

Представим закон Гука для приращений (1.13) в виде

$$\begin{gathered}\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}\right) = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}\right) = \\ = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}}\right) - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0} - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} = \tilde{\mathbf{D}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}},\end{gathered} \tag{2.4}$$

где произведена замена ($\sim$ означает пропорциональность)

$$\begin{gathered}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0}, \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0} \sim \mathbf{M} \cdot {}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}\end{gathered} \tag{2.5}$$

и для матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$ и вектора $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$ выполняются соотношения

$$\tilde{\mathbf{D}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}}\right), \tag{2.6}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = -\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0}. \tag{2.7}$$

Поскольку пластическая деформация $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}^0}$ пропорциональна девиатору напряжений (в тензорном представлении), то напряжение $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$ также пропорционально девивтору напряжений (это следует из (2.7) и (1.17)):

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 \sim {}^{(t)}\mathbf{s}. \tag{2.8}$$

Матрица $\tilde{\mathbf{D}}$, для которой выполняется (2.6), определяется соотношениями [6, 3, 7]

$$\tilde{\mathbf{D}}_{E^*} = \mathbf{D}\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Y}}_{E^*}\right), \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{E^*} = \frac{\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)}{E^* + \left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\right)\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{M}^{(t)}\boldsymbol{\sigma}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}}, \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} E^* = \frac{\Delta\tilde{\sigma}^{\tilde{\mathbf{D}}}}{\Delta\tilde{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}}}, \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\mathbf{D}}} \equiv \tilde{\mathbf{D}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\tilde{\mathbf{D}}}\right) \end{gathered} \tag{2.11}$$

Рассмотрим итерационный процесс [1, с. 185; radial return algorithm], в котором матрица $\tilde{\mathbf{D}}_{E^*}$ зафиксирована при некотором значении E^*, например $E^* = \infty$ или

$$E^* = \frac{\partial\Phi\left({}^{(t)}q\right)}{\partial q}. \tag{2.12}$$

На 0-й итерации задаётся начальное напряжение

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_0^0 = 0 \tag{2.13}$$

Пусть в некотором конечном элементе, на k-й итерации для значения начального напряжения $\Delta\boldsymbol{\sigma}_k^0$ в результате конечноэлементного решения получена деформация $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k$, тогда приращение напряжения $\Delta\boldsymbol{\sigma}_k$ определяется соотношением (2.4)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_k = \tilde{\mathbf{D}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k + \Delta\boldsymbol{\sigma}_k^0 - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}, \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k = {}^{(t)}\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_k, \tag{2.15}$$

приращения упругой и пластической компонент деформации определяются напрямую из (2.4) соотношениями

$$\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{p}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\tilde{\mathbf{D}}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\boldsymbol{\sigma}^0} = \tilde{\mathbf{Y}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathbf{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^0, \\ &\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{e}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{p}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если выполняются условия активного нагружения (2.1) и (2.2), то приращение параметра Одквиста

$$\Delta q_k = \Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{p}} \tag{2.17}$$

и начальные напряжения корректируются в соответствии с кривой деформирования:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^0 = \Delta\boldsymbol{\sigma}_k^0 + \frac{{}^{(t)}\mathbf{s}}{{}^{(t)}\tilde{\mathbf{s}}} \cdot \left(\Phi\left({}^{(t)}q + \Delta q_k\right) - \tilde{\sigma}_k\right) \tag{2.18}$$

Невязки в этом случае определяются выражениями

$$\begin{aligned} &\Delta_k^{\sigma} = \frac{\Phi\left({}^{(t)}q + \Delta q_k\right) - \tilde{\sigma}_k}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}}, \\ &\Delta_k^{\varepsilon} = \frac{\Delta q_k - \Delta q_{k-1}}{{}^{(t)}\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Если условия активного нагружения не выполняются, то

$$\Delta q_k = 0 \tag{2.20}$$

и необходимо, чтобы выполнялись линейные соотношения ((2.4) без пластичных деформаций)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right) = \tilde{\mathbf{D}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 - \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}, \tag{2.21}$$

откуда следует

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{0}=\mathbf{D}\tilde{\mathbf{Y}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{2.22}$$

или с регуляризацией (которая не помогает)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{0}=\omega_{\text{elastic}}\cdot\mathbf{D}\tilde{\mathbf{Y}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_k+\left(1-\omega_{\text{elastic}}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{\sigma}_k^{0}. \tag{2.23}$$

Невязки в этом случае определяются выражениями

$$\begin{aligned}&\Delta_k^{\sigma}=\frac{\tilde{\Delta}_k^{\sigma^0}}{{}^{(t)}\tilde{\sigma}},\ \boldsymbol{\Delta}_k^{\sigma^0}=\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{0}-\Delta\boldsymbol{\sigma}_k^{0},\\&\Delta_k^{\varepsilon}=\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}_k^{\text{p}}}{{}^{(t)}\tilde{\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Если после завершения итераций оказалось, что активное нагружение не произошло (например, $\Delta W\le 0$ и произошла разгрузка или нейтральное нагружение), то на следующем шаге матрица $\tilde{\mathbf{D}}_{E^*}$ становится упругой, т.е. задаётся

$$\tilde{\mathbf{D}}_{E^*}=\mathbf{D}. \tag{2.25}$$

Поскольку в случае разгрузки итерации иногда не сходятся, то замена (2.25) производится сразу, в процессе итераций. СЛАУ решается при помощи $\mathbf{LDL}^{\text{T}}$ разложения, поэтому если разгрузка происходит хотя бы в одном конечном элементе, то замена (2.25) производится сразу для всех конечных элементах (тогда на одном шаге по времени разложение матрицы СЛАУ потребуется делать не более 2-х раз, а количество итераций возрастает обычно всего в пару раз).

Уравнениям равновесия (1.1) с определяющими соотношениями (2.14)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1}=\tilde{\mathbf{D}}_{E^*}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}+\Delta\boldsymbol{\sigma}_k^{0}-\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} \tag{2.26}$$

соответствуют уравнения Галёркина [8]

$$\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial\left(\Delta u_k\right)}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int\limits_{^{(t)}S_2}\Delta P_i v dS+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}}\right)\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega-\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\Delta\sigma_{ij}^{0}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega,\ i=\overline{1,3} \tag{2.27}$$

с параметрами E^* и $\Delta\boldsymbol{\sigma}^0$, где компоненты приращений температурных деформаций $\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}}$ определяются соотношением (1.10). В результате решения (2.27) находятся приращения наблюдаемых деформаций

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\Delta u_i\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\Delta u_j\right)}{\partial x_i}\right), \tag{2.28}$$

по которым определяются остальные приращения: (2.14), (2.16) и (2.17).

В варианте с "коррекцией" в правую часть уравнений (2.27) добавляется невязка R_i, рассчитанная на предыдущем шаге по времени [9]:

$$\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(\tilde{C}_{ijkl}\frac{\partial\left(\Delta u_k\right)}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)d\Omega=\int\limits_{^{(t)}S_2}\Delta P_i v dS+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^{\mathrm{th}}\right)\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega-\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}\Delta\sigma_{ij}^{0}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega+R_i,\ i=\overline{1,3} \tag{2.29}$$

где

$$R_i\equiv\gamma\left(\int\limits_{^{(t-\Delta t)}S_2}{}^{(t)}P_i v dS-\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t-\Delta t)}\Omega}{}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega\right), \tag{2.30}$$

коэффициент γ подбирается экспериментально для каждого шага по времени.

(Ранее использовал безумство:

$$R_i\equiv\int\limits_{^{(t)}S_2}{}^{(t)}P_i v dS-\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{^{(t)}\Omega}{}^{(t)}\sigma_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}d\Omega.) \tag{2.31}$$

3. Механический контакт с жёсткой поверхностью

Контактное взаимодействие с жёсткой поверхностью можно учесть методом штрафа [5, 10].

Для каждого узла, для которого возможен контакт с опорой, введём характеристики (по умолчанию подразумевается временной слой $(t+\Delta t)$):

$Contact$ = узел находится в состоянии контакта,

$Separation$ = происходит «отлипание» на текущей итерации,

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор узла,

$\mathbf{u} \equiv \mathbf{r} - {}^{(t)}\mathbf{r}$ – перемещение узла,

κ – коэффициент контактной жёсткости,

$\mathbf{F}$ – действующая на узел сила реакции опоры,

$\mathbf{r}^*$ – радиус-вектор точки контакта,

$\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{r}^* - {}^{(t)}\mathbf{r}$,

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности опоры в точке $\mathbf{r}^*$.

Также обозначим функции, характеризующие поверхность опоры:

$nearestPoint(\mathbf{r})$ – ближайшая к точке $\mathbf{r}$ точка поверхности опоры

$intersectionPoint(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – точка пересечения отрезка $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ с поверхностью

$side(\mathbf{r}) = -1$, если точка $\mathbf{r}$ находится с внутренней стороны поверхности или $side(\mathbf{r}) = +1$, если точка $\mathbf{r}$ находится с внешней стороны поверхности.

Алгоритм учёта контакта для некоторого узла.

0. Инициализируется начальное приближение для временного слоя $t + \Delta t$:

$$
\begin{aligned}
&Contact_0 \leftarrow {}^{(t)}Contact, Separation_0 \leftarrow {}^{(t)}Separation, \\
&\mathbf{F}_0 \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{F}, \mathbf{r}_0^* \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{r}^*, \mathbf{n}_0 \leftarrow {}^{(t)}\mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Если поверхность подвижна, то значения $\mathbf{r}_0^*$ и $\mathbf{n}_0$ обновляются:

$$
\mathbf{r}_0^* \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r}\right). \tag{3.2}
$$

1.1. Собирается матрица жёсткости механической задачи (без учёта контактных добавок) и рассчитывается коэффициент контактной жёсткости по локальной матрице жёсткости $\hat{\mathbf{G}}_k$ (локальной для заданного узла, т.е. с размерами 3×3; диагональ локальной узловой матрицы принадлежит диагонали глобальной матрицы):

$$
\kappa_k = 1 \cdot \sum_{i=1}^{3} \left| \left(\hat{\mathbf{G}}_k\right)_{ii} \cdot \left(\mathbf{n}_k\right)_i \right|, \tag{3.3}
$$

тогда после дробления сетки или изменения упругих параметров материала скорость сходимости остаётся примерно одинаковой. Вместо единицы можно подставлять другие коэффициенты.

1.2. Рассчитываются локальная узловая матрица $\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}}$ и локальный узловой вектор $\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}}$ (т.е. вектор размера 3).

Если $Contact_k = true$, то

$$
\begin{aligned}
&\left[\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} = \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k \left(\mathbf{u}_k^* \underline{\underline{-\mathbf{u}_k}}\right)\right) \cdot \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k - {}^{(t)}\mathbf{F}\right] \\
&\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}} \leftarrow \kappa_k \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^{\mathrm{T}} \\
&\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} \leftarrow \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k \mathbf{u}_k^*\right) \cdot \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k - {}^{(t)}\mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Если $Separation_k = true$, то

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{G}}_k^{\text{contact}} \leftarrow 0\\&\hat{\mathbf{b}}_k^{\text{contact}} \leftarrow 0 - {}^{(t)}\mathbf{F}\end{aligned} \tag{3.5}$$

2.1. Из решения СЛАУ получается перемещение $\mathbf{u}_k$ и рассчитывается новое приближение силы реакции опоры.

Если $Contact_k = true$, то

$$\mathbf{F}_{k+1} \leftarrow \left(\mathbf{F}_k + \kappa_k \left(\mathbf{u}_k^* - \mathbf{u}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k \tag{3.6}$$

Если $Separation_k = true$, то

$$\mathbf{F}_{k+1} \leftarrow 0 \tag{3.7}$$

2.2. Обновляется состояние узла, находится новое приближение точки контакта:

if $Contact_k = true$ **then**
  if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right) = -1$ **then**
    $Contact_{k+1} \leftarrow true$
    $Separation_{k+1} \leftarrow false$
    $\mathbf{r}_{k+1}^* \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right)$
  if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right) = +1$ **then**
    if $\mathbf{F}_{k+1} \cdot \mathbf{n} < 0$ **then**
      $Contact_{k+1} \leftarrow false$
      $Separation_{k+1} \leftarrow {}^{(t)}Contact$
    else
      $Contact_{k+1} \leftarrow true$
      $Separation_{k+1} \leftarrow false$
      $\mathbf{r}_{k+1}^* \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right)$
else
  if ${}^{(t)}Contact = true$ **then**
    if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right) = -1$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^*_{k+1} \leftarrow nearestPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r}\right)$

if $side\left({}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right) = +1$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow false$

$Separation_{k+1} \leftarrow true$

else

if $\exists intersectionPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r},\ {}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right)$ **then**

$Contact_{k+1} \leftarrow true$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

$\mathbf{r}^*_{k+1} \leftarrow intersectionPoint\left({}^{(t)}\mathbf{r},\ {}^{(t)}\mathbf{r} + \mathbf{u}_k\right)$

else

$Contact_{k+1} \leftarrow false$

$Separation_{k+1} \leftarrow false$

Нормаль $\mathbf{n}_{k+1}$ задаётся как внешняя единичная нормаль к поверхности в точке $\mathbf{r}^*_{k+1}$. Если какие-то координаты контактного узла зафиксированы первыми краевыми условиями, то соответствующие компоненты нормали тоже зануляются.

3. Если выполняются условия завершения итераций

$$\begin{aligned} &\left|\Delta\mathbf{F}_{k+1} - \Delta\mathbf{F}_k\right| / \left|\mathbf{F}\right| < \Delta^F, \\ &\left|\mathbf{r}^*_{k+1} - \mathbf{r}^*_k\right| < \Delta^r, \end{aligned} \tag{3.8}$$

то итерации для данного узла можно завершать, иначе переход к пункту 1.

4. После завершения итераций по всем нелинейностям

$$\begin{aligned} &{}^{(t+\Delta t)}Contact \leftarrow Contact_{k+1},\ {}^{(t+\Delta t)}Separation \leftarrow Separation_{k+1}, \\ &{}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F}_{k+1},\ {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{r}^* \leftarrow \mathbf{r}^*_{k+1},\ {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n}_{k+1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

С учётом дополнительных узловых сил контакта, в схеме с коррекцией к глобальному вектору невязок $\mathbf{R}$, соответствующему (2.30), добавляются узловые локальные векторы

$$\hat{\mathbf{R}}^{contact} = {}^{(t)}\mathbf{F}, \tag{3.10}$$

котороые рассчитываются в конце предыдущего шага.

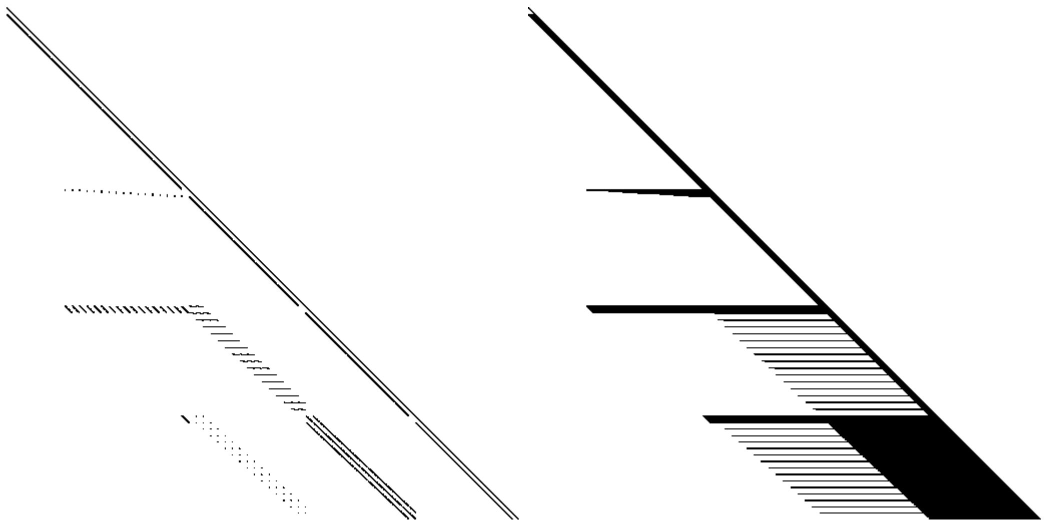
4. Решение СЛАУ (не получилось)

Чтобы подробить сетку, необходим эффективный решатель СЛАУ.

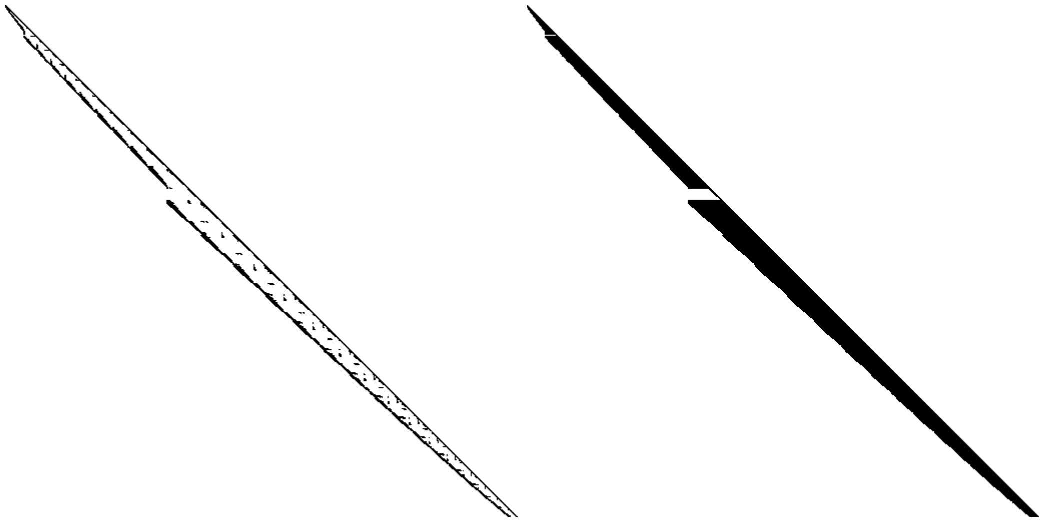
Реализовано разложение симметричной матрицы в профильном и разреженном строчно-столбцовом, блочном и не блочном форматах. Реализовано переупорядочение узлов сетки методом вложенных сечений [11] и Катхилла – Макки [11].

Портреты исходной матрицы жёсткости, которая получается при решении задачи вдавливания жёсткого шара в полупространство, после переупорядочений и после разложения изображены на рисунке 1. Характеристики переупорядочивания отображены в таблице 1. Время переупорядочивания, построения портрета и разложения отображено в таблице 2. Контактные узлы сетки во всех случаях помещаются в конец матрицы.

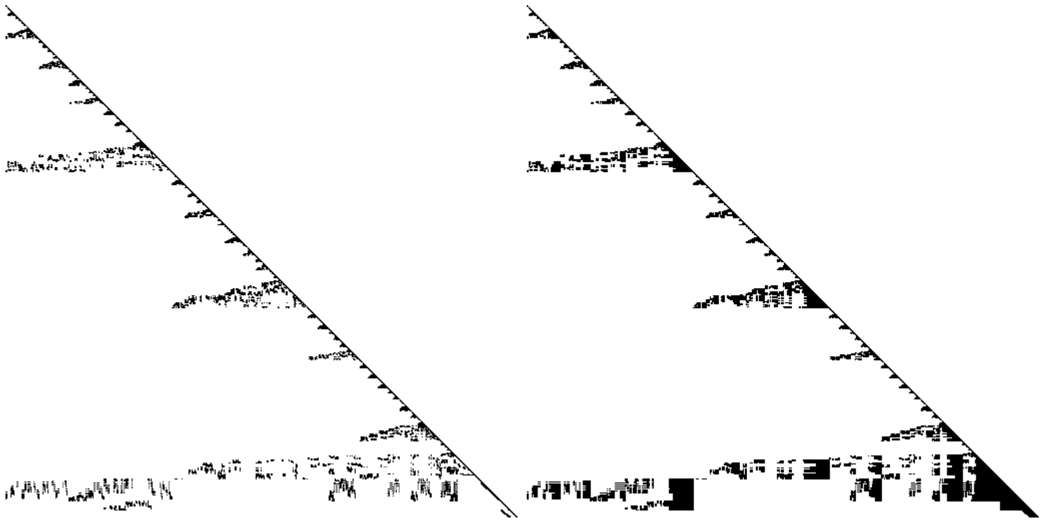
Вычисления производились на компьютере с процессором Intel Core2 Duo E7200 @ 2.53GHz и памятью DDR2 800MHz.



без переупорядочивания



алгоритм Катхилла – Макки



метод вложенных сечений

Рисунок 1. Портреты матрицы жёсткости (слева) и множителя предобусловливания (справа) с различной нумерацией узлов сетки.

Таблица 1 – Характеристики переупорядочивания матрицы $\mathbf{G}$ с размерностью 60891x60891.

способ переупорядочивания	$\lvert\mathbf{G}\rvert$	заполненность $\mathbf{G}$, %	$\lvert\mathbf{L}\rvert$	заполненность $\mathbf{L}$, %
–	2282595	0.0616	135594339	3.6571
Катхилла – Макки			150101160	4.0483
метод вложенных сечений			69654039	1.8786

Таблица 2 – Время переупорядочивания, построения портрета и разложения.

способ переупорядочивания	переупоряд очивание, с	формат, метод разложения	построение портрета, с	разложение, с
–	0	профильный, $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$	$2.86\cdot10^{-3}$	275
		блочный профильный, $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$	$8.22\cdot10^{-4}$	188
Катхилла – Макки	$6.56\cdot10^{-2}$	профильный, $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$	$1.86\cdot10^{-3}$	336
		блочный профильный, $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$	$6.80\cdot10^{-4}$	222
метод вложенных сечений	0.151	CSR, $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$	9.89	452
		блочный CSR, $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$	0.446	116

Блочное $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ разложение производилось по формулам [12]:

$$L_{ij} = \left(G_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} D_k L_{jk}^T \right) D_j^{-1},$$
$$D_i = G_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_k L_{ik}^T, \tag{4.1}$$

где матричное произведение $L_{ik} D_k$ запоминается для ускорения разложения и для решения треугольной СЛАУ. Чтобы тратить меньше ресурсов на определение ненулевых блоков строки i, при скалярном произведении i-й строки на j-е строки составлялся плотный целочисленный вектор $\mathbf{s}$ индексов ненулевых блоков i-й строки либо индексов -1 для нулевых блоков строки i.

В процессе не блочного $\mathbf{LL}^{\mathrm{T}}$ разложения, чтобы тратить меньше ресурсов на определение ненулевых блоков строки i, при скалярном произведении i-й строки на j-е строки составлялся плотный вещественный вектор $\mathbf{s}$ элементов i-й строки.

Таким образом, простейшие способы не работают: разделитель в реализованном варианте метода вложенных сечений получается плохого качества; улучшение локальности по памяти блочного формата не даёт существенного выигрыша времени разложения.

5. Тестирование

5.1. Вдавливание жёсткого шара в упругое полупространство

Абсолютно жёсткий шар вдавливается в упругое полупространство (рисунок 2).

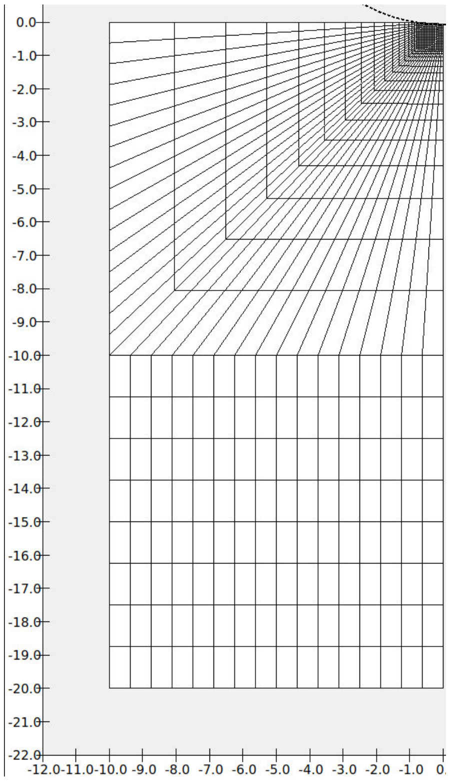


Рисунок 2. Сетка в сечении $y = 0$.

Пусть E – модуль упругости полупространства, ν – коэффициент Пуассона полупространства, R – радиус шара, d – сближение удалённых точек шара и полупространства. При малой величине d, по сравнению R, эта задача имеет точное аналитическое решение [15, с. 108-109]:

$$a = \left(\frac{3R^*}{4E^*} P \right)^{1/3} \tag{5.1}$$

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} \tag{5.2}$$

$$p_0 = p(0) = \frac{3P}{2\pi a^2} \tag{5.3}$$

$$d = \left(\frac{3}{4E^*}P\right)^{2/3} / \left(R^*\right)^{1/3} \tag{5.4}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\mu^2}, R^* = R, \tag{5.5}$$

где a – радиус области контакта, P – общая сила контактного взаимодействия, $p(r)$ – контактное давление на поверхности полупространства, p_0 – максимальное контактное давление (в центре зоны контакта), E^* – приведённый модуль упругости, R^* – относительная кривизна. В данном тесте параметром является d, поэтому P определяется соотношением (5.4).

Напряжения в циллиндрической системе координат, по отношению к среднему давлению

$$p_m = \frac{P}{\pi a^2} \tag{5.6}$$

определяются соотношениями [13, 14]:

$$\frac{\sigma_\varphi}{p_m} = -\left\{\frac{1-2\nu}{2}\frac{a^2}{r^2}\left(1-\frac{z^3}{w^3}\right) + \frac{3z}{2w}\left[2\nu + (1-\nu)\frac{w^2}{a^2+w^2} - (1+\nu)\frac{w}{a}\arctan\left(\frac{a}{w}\right)\right]\right\}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\sigma_z}{p_m} = -\frac{3}{2}\frac{z^3}{w^3}\frac{a^2w^2}{w^4+a^2z^2}, \tag{5.8}$$

$$\frac{\sigma_r}{p_m} = -\left(\frac{\sigma_\varphi}{p_m} + \frac{\sigma_z}{p_m}\right) - 3\frac{z}{w}(1+\nu)\left[1-\frac{w}{a}\arctan\left(\frac{a}{w}\right)\right], \tag{5.9}$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{p_m} = -\frac{3}{2}\frac{rwz^2}{w^4+a^2z^2}\frac{a^2}{a^2+w^2}, \tag{5.10}$$

где

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(r^2 + z^2 - a^2\right) + \sqrt{\left(r^2 + z^2 - a^2\right)^2 + 4a^2 z^2}\,\right]} \qquad (5.11)$$

и подразумевается $z > 0$.

Главные напряжения определяются соотношениями

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \sigma_{rz}^2\right]^{1/2} \qquad (5.12)$$

$$\sigma_2 = \sigma_\varphi \qquad (5.13)$$

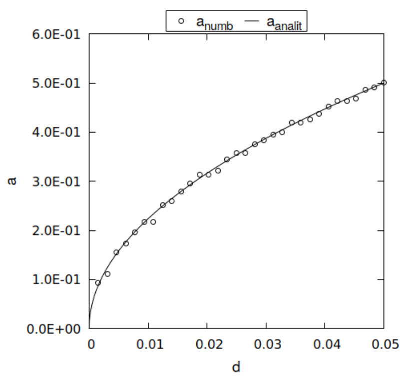
Сравнение численного и аналитического решения для параметров из таблиц 3, 4 приведено на рисунках 3–6, на которых изолинии гравных напряжений, разделенных на среднее давление, строятся при помощи gnuplot. Значение p_m вычисляется аналитически. Сетка строится для четвертинки параллелепипеда со сгущением к центру области контакта, как показано на рисунке 4. В плоскостях $x = 0$ и $y = 0$ задаются однородные краевые условия первого рода $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ соответственно. В плоскости $z = -20$ задаётся краевое условие $u_3 = 0$.

Таблица 3 – Параметры задачи.

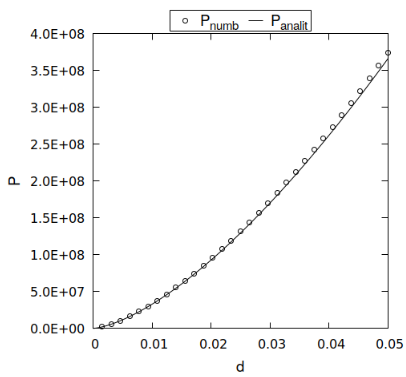
E	модуль Юнга	10^{10} Па
R	радиус шара	5
ν	коэффициент Пуассона	0.3, 0.45
d	сближение шара и полупространства	0.05
$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$20 \times 20 \times 20$

Таблица 4 – Параметры численного решения.

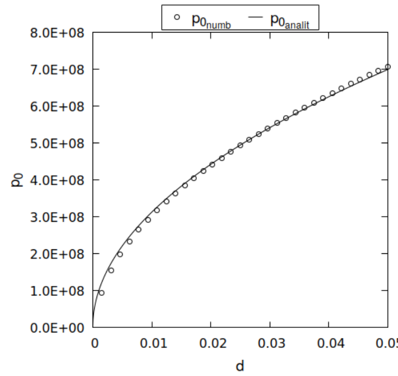
количество конечных элементов		18432
steps	количество шагов	32
условия завершения итераций (контакт)		$\left\|\Delta\mathbf{F}_{k+1} - \Delta\mathbf{F}_k\right\| / \left\|\mathbf{F}\right\| < 10^{-10}$, $\left\|\mathbf{r}_{k+1}^* - \mathbf{r}_k^*\right\| < 10^{-14}$



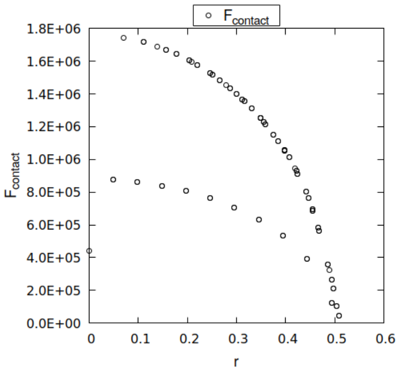
радиус области контакта



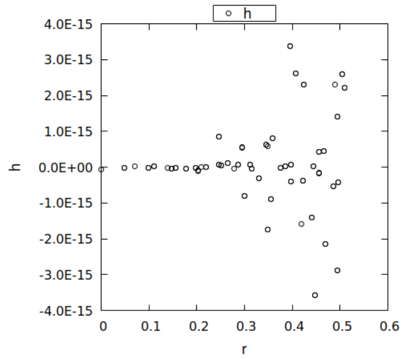
сила контактного взаимодействия



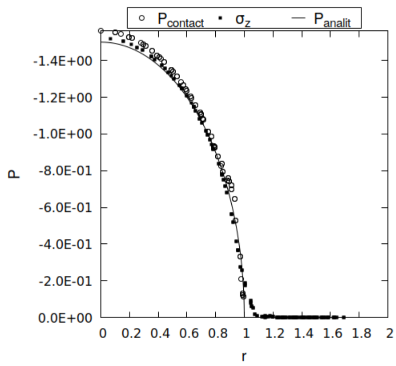
максимальное контактное давление, строится по σ_z



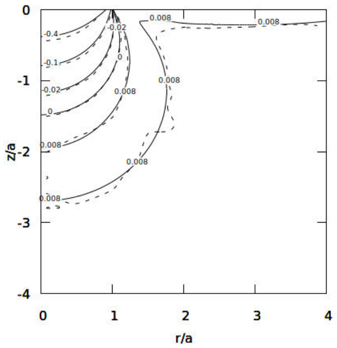
силы в контактных узлах



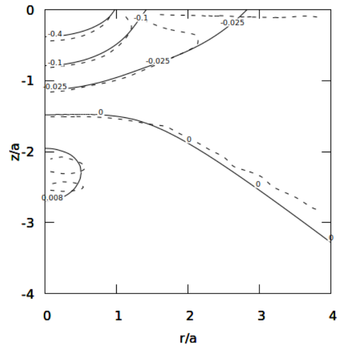
расстояния от контактных узлов до поверхности



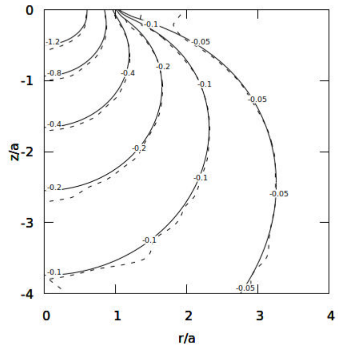
p_{contact} / p_m – давление на поверхности, рассчитанное по силам в контактных узлах, σ_z / p_m – напряжение в центрах ближайших к поверхности КЭ



σ_1 / p_m



σ_2 / p_m



σ_3 / p_m

сплошная линия – аналитическое решение (5.12), (5.13), пунктирная линия – численное решение (построено gnuplot)

Рисунок 3. $\nu = 0.3$, без "коррекции"

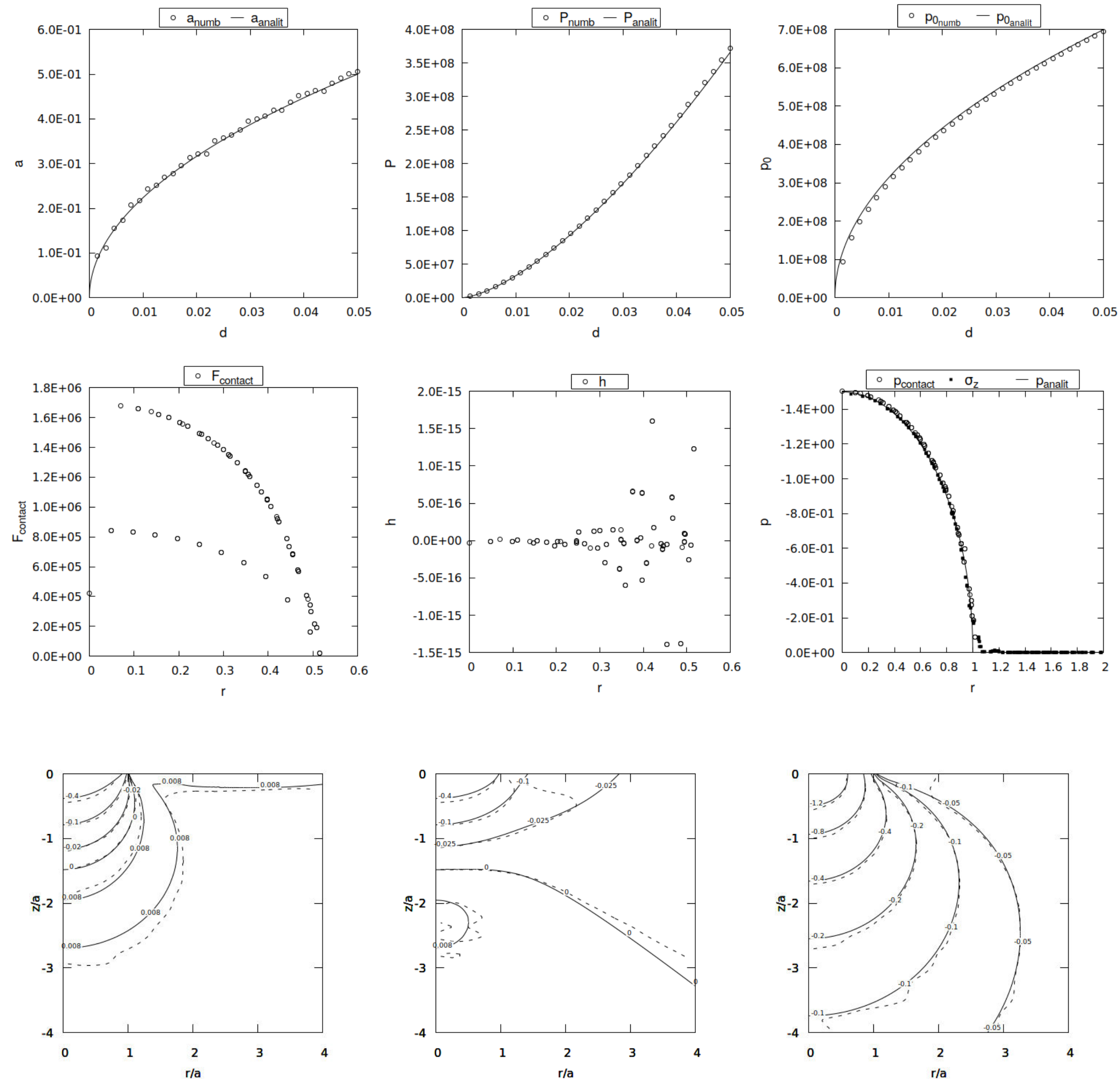


Рисунок 4. $\nu = 0.3$, с "коррекцией"

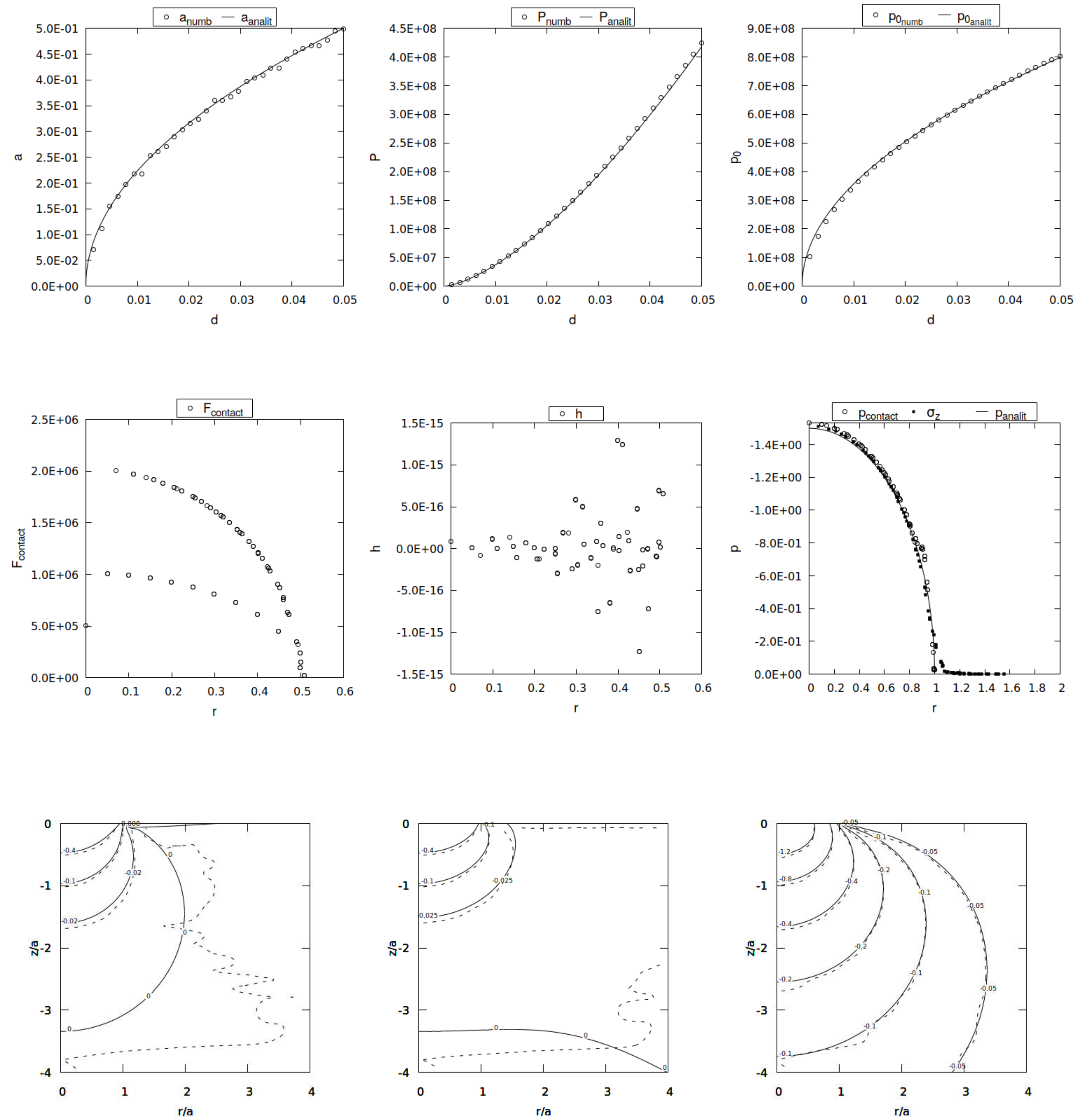


Рисунок 5. $\nu = 0.45$, без "коррекции"

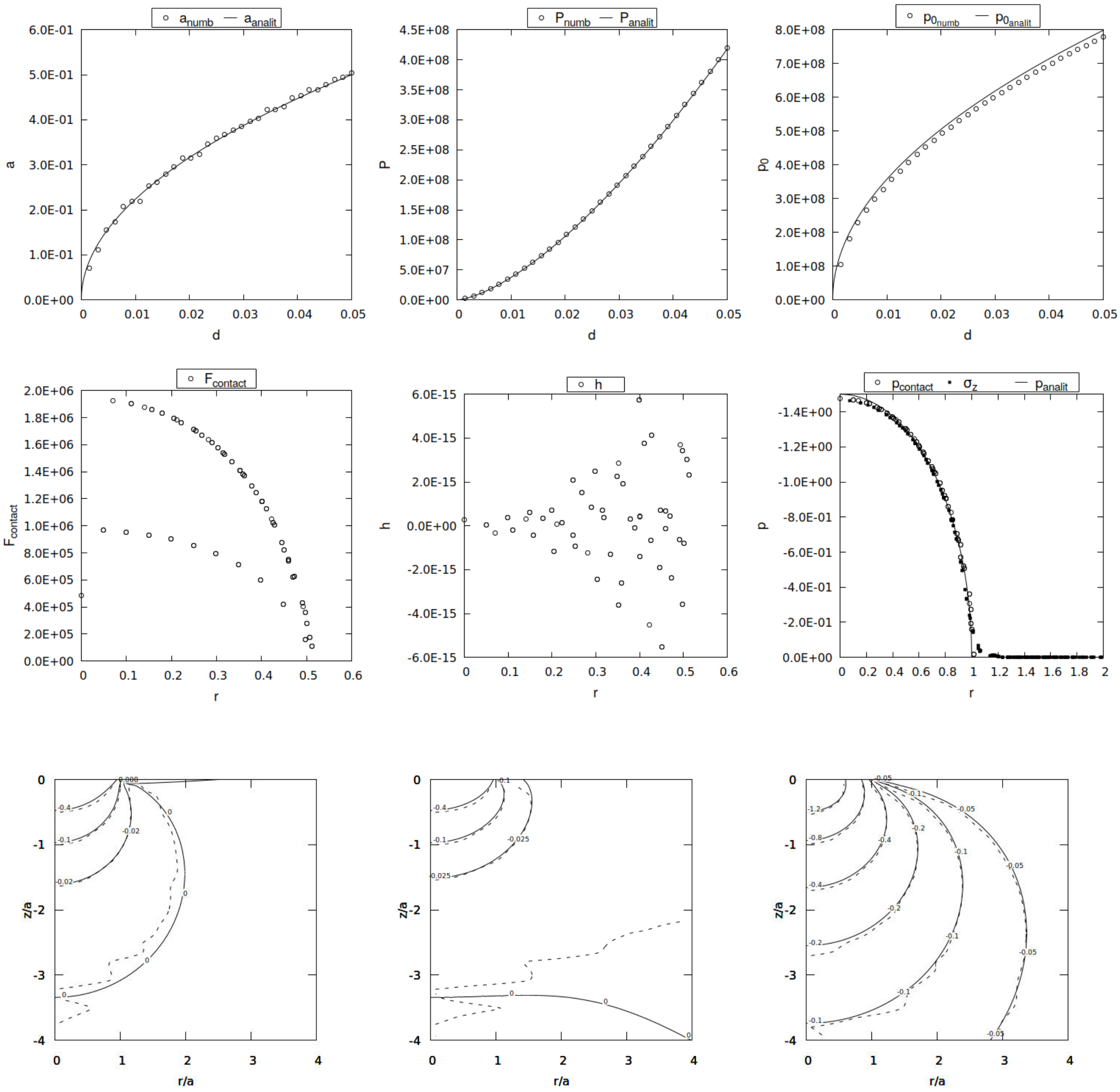


Рисунок 6. $\nu = 0.45$, с "коррекцией"

Таким образом, численное решение имеет большую погрешность, p_{contact} не совпадает с σ_z в области контакта.

5.2. Вдавливание жёсткого шара в упруго-пластичное полупространство

Абсолютно жёсткий шар вдавливается в идеально пластичное полупространство (нагружение), затем возвращается обратно (разгрузка). К параметрам из таблиц 3, 4 добавляется предел текучести σ^Y и условия завершения итераций для учёта пластичности, приведённые в таблицах 5, 6. Пластичность задана идеальная, без наклона, т.е.

$$\Phi(q) = \sigma^Y = \text{const}. \tag{5.14}$$

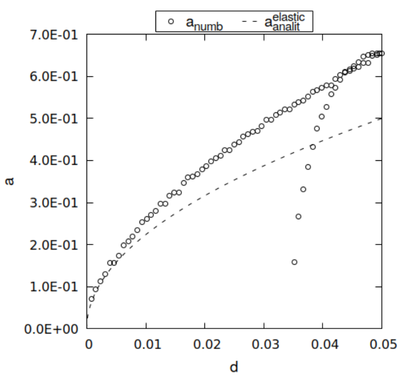
Таблица 5 – Параметры задачи.

E	модуль Юнга	10^{10} Па
R	радиус шара	5
ν	коэффициент Пуассона	0.3
σ^Y	предел текучести	$5 \cdot 10^7$
d	сближение шара и полупространства	0.05
$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$20 \times 20 \times 20$

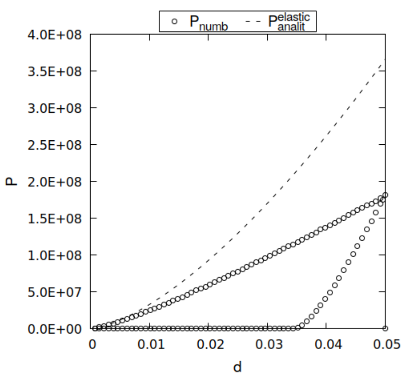
Таблица 6 – Параметры численного решения.

количество конечных элементов		18432
$steps_{\text{load}}$, $steps_{\text{unload}}$	количества шагов нагружения и разгрузка	$steps_{\text{load}} = 64$ $steps_{\text{unload}} = 65$
условия завершения итераций (контакт)		$\lvert \Delta\mathbf{F}_{k+1} - \Delta\mathbf{F}_k \rvert / \lvert \mathbf{F} \rvert < 10^{-10}$, $\lvert \mathbf{r}^*_{k+1} - \mathbf{r}^*_k \rvert < 10^{-14}$
условия завершения итераций (пластичность)		$\Delta^\sigma_k = 10^{-10}$, $\Delta^\varepsilon_k = 10^{-10}$.

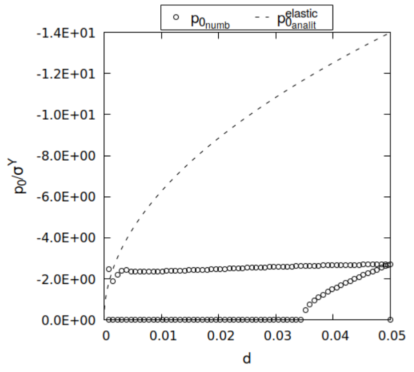
Численное решение изображено на рисунке 7. Характеристики итерационного процесса изображены на рисунке 8. Итерации по контакту и пластичности происходят параллельно. Существенная разгрузка КЭ, в которых задана идеально пластичная матрица $\tilde{\mathbf{D}}$, приводит к плохой сходимости итераций или расходимости, что зависит от величины шага и коэффициента ω_{elastic} (из (2.23)). В случае, когда разгрузка с матрицей $\tilde{\mathbf{D}} \neq \mathbf{D}$ снова приводит к активному нагружению, реализованный итерационный процесс в любом случае не сходится. В связи с этим, чтобы избежать возможных перезапусков теста, на первом шаге разгрузки матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$ для всех конечных элементов принудительно заданы упругие ($\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$). При этом точно так же происходит итерационный процесс для учёта пластичности, но с упругими матрицами. (временный костыль, можно сделать чтобы шаг перерешивался занова с упругими матрицами в случае расходимости и/или чтобы с учётом разгрузок перестраивалась матрица $\tilde{\mathbf{D}}$ после 0-й итерации; с упругими матрицами всегда сходится).



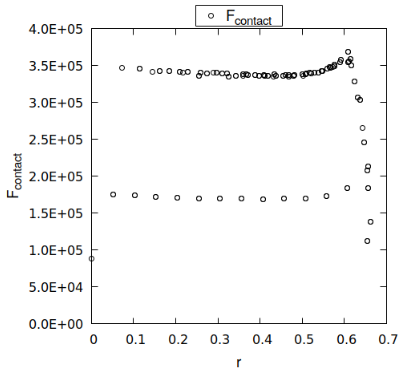
радиус области контакта



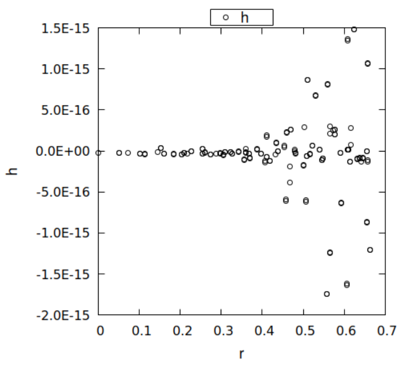
сила контактного взаимодействия



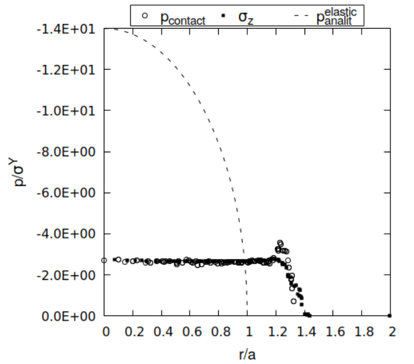
σ_z / σ^Y в центре области контакта



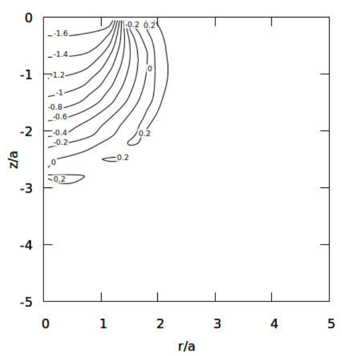
силы в контактных узлах после нагружения

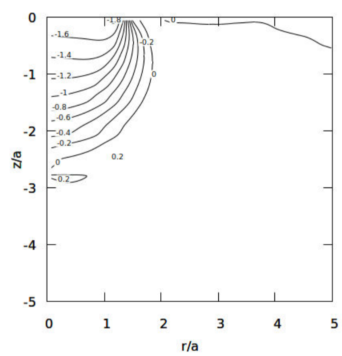


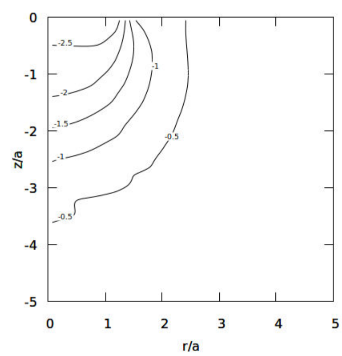
расстояния от контактных узлов до поверхности после нагружения

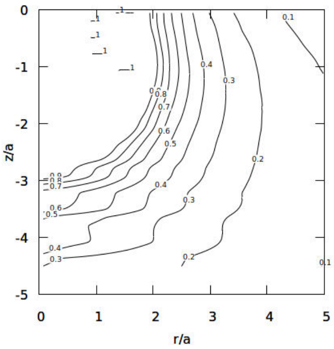


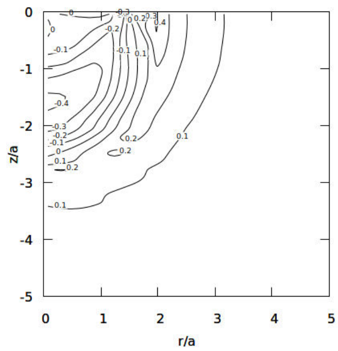
$p_{\mathrm{contact}} / \sigma^Y$ – давление в контактных узлах,
σ_z / σ^Y – напряжения в центрах КЭ

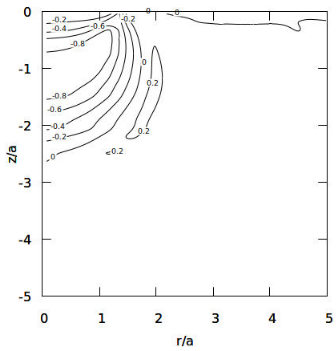


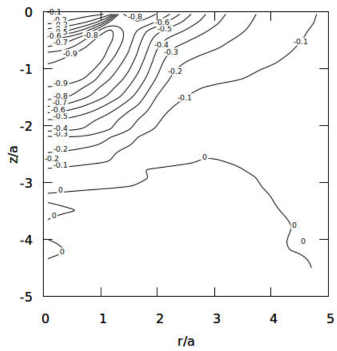


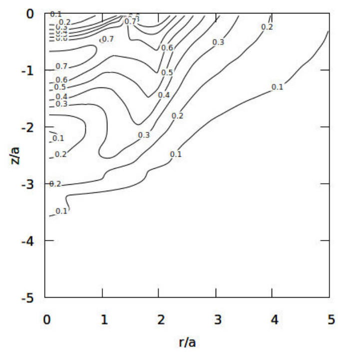


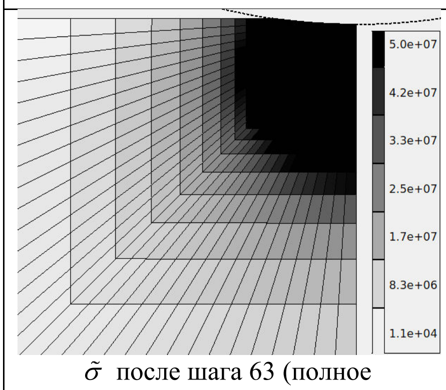
<table>
<tr><td>σ_1 / σ^Y</td><td>σ_2 / σ^Y</td><td>σ_3 / σ^Y</td></tr>
<tr><td colspan="3">

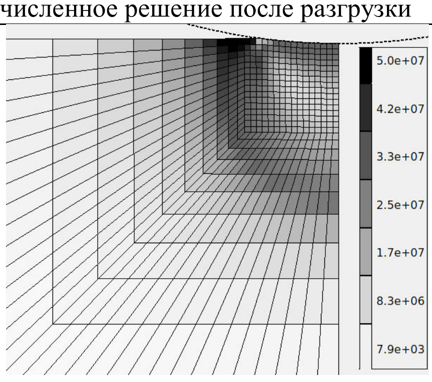
$\tilde{\sigma} / \sigma^Y$</td></tr>
<tr><td colspan="3">численное решение после нагружения</td></tr>
<tr><td>

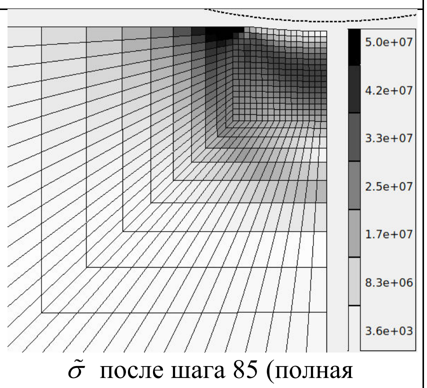
σ_1 / σ^Y</td><td>

σ_2 / σ^Y</td><td>

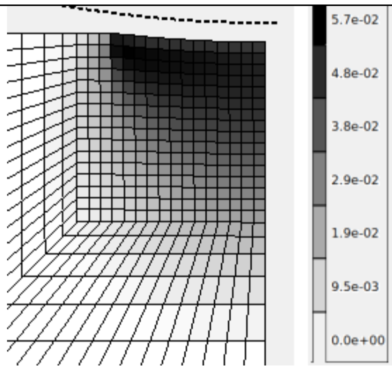
σ_3 / σ^Y</td></tr>
<tr><td colspan="3">

$\tilde{\sigma} / \sigma^Y$</td></tr>
<tr><td colspan="3">численное решение после разгрузки</td></tr>
<tr><td>

$\tilde{\sigma}$ после шага 63 (полное нагружение)</td><td>

$\tilde{\sigma}$ после шага 75 (частичная разгрузка)</td><td>

$\tilde{\sigma}$ после шага 85 (полная разгрузка)</td></tr>
</table>



эквивалентные пластические деформации, рассчитаные по вектору $\sum \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ после разгрузки (лучше строить $\sum dq$)

Рисунок 7. Численное решение без "коррекции"

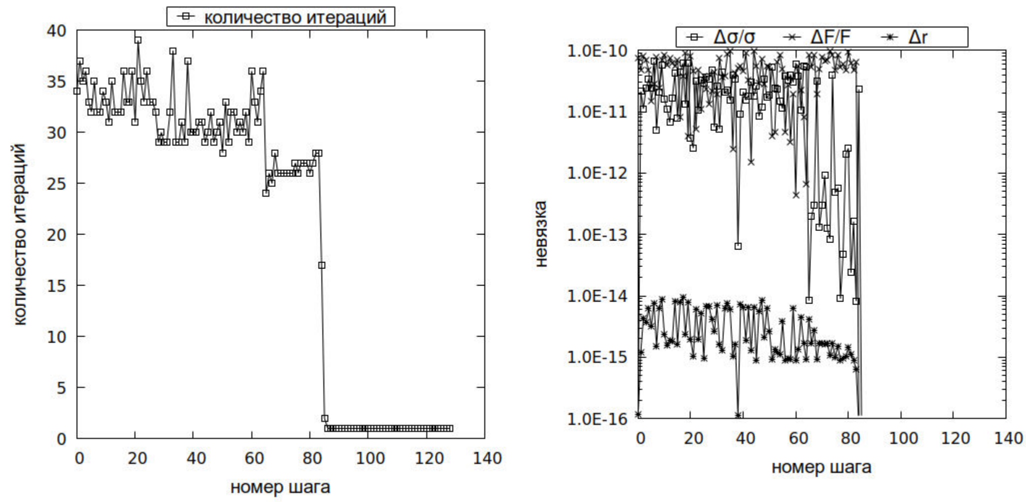
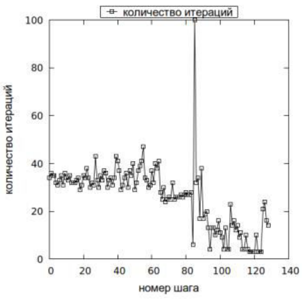


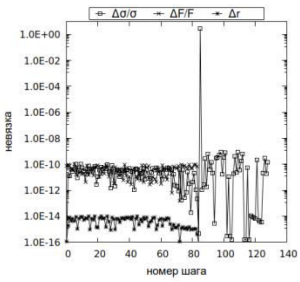
Рисунок 8. Характеристики итерационного процесса.

В полученном численном решении значение $p_{\text{contact}} / \sigma^{Y}$ в центре области контакта близко к значению 3, что соответствует соотношению Табора, которое определяет верхнюю границу давления внедрения, достигаемую, когда на всей области контакта происходит пластическое течение (в случае "полностью" пластичного состояния) [15, с. 202]. На границе области контакта возникает скачёк значений p_{contact}, но нет скачка значений σ_z. Численное решение в работе [13] (геометрическая нелинейность updated Lagrangian method, деформационная теория пластичности? с поверхностью текучести Треска) содержит скачёк значений σ_z.

В численном решении из работы [14] (ABAQUS, поверхность текучести Мизеса) после разгрузки, в некоторых случаях, есть зоны пластичности вблизи центра и рядом с границей области контакта. В данном случае получается зона пластичности только рядом с границей, а в центре остаточные напряжения близки к нулю.

Решение "с коррекцией" не сошлось на первом шаге после отлипания, т.е. там какие-то проблемы.





5.3. Вдавливание жёсткого цилиндра в упругое полупространство

Абсолютно жёсткий цилиндр вдавливается в упругое полупространство (рисунок 9).

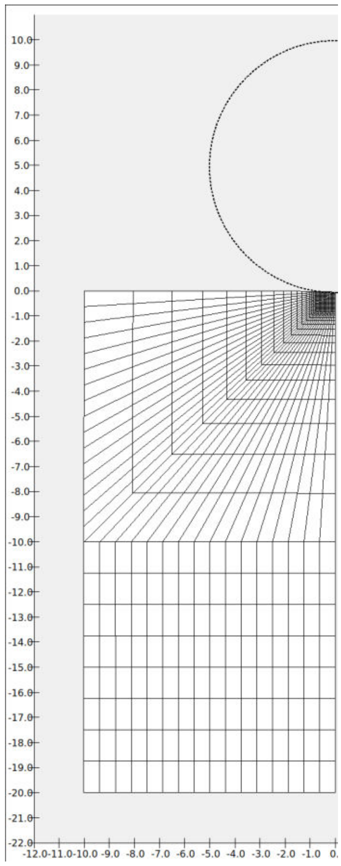


Рисунок 9. Сетка.

Пусть E – модуль упругости полупространства, ν – коэффициент Пуассона полупространства, R – радиус цилиндра, d – сближение удалённых точек цилиндра и полупространства. При малой величине d, по сравнению R, эта задача имеет точное аналитическое решение [15, с. 119-121; 16, с. 56]:

$$a=\sqrt{\frac{4R^*}{\pi E^*}P}, \tag{5.15}$$

$$p(x)=\frac{2P}{\pi a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{E^*}{\pi R^*}P}\sqrt{1-\frac{\pi E^*}{4PR^*}x^2}, \tag{5.16}$$

$$p_0 = p(0) = \sqrt{\frac{E^*}{\pi R^*} P}, \tag{5.17}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\mu^2}, R^* = R, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{P\left(1-\mu^2\right)}{\pi E}\left(2\ln\frac{4L_y}{a} - \frac{\mu}{1-\mu}\right) = \\ &= \frac{P\left(1-\mu^2\right)}{\pi E}\left(\ln\left(\left(2L_y\right)^2 \frac{\pi E^*}{R^* P}\right) - \frac{\mu}{1-\mu}\right), \end{aligned} \tag{5.19}$$

где a – полуширина области контакта, P – общая сила контактного взаимодействия, разделенная на длину цилиндра, $p(x)$ – контактное давление на поверхности полупространства, p_0 – максимальное контактное давление (в центре зоны контакта), E^* – приведённый модуль упругости, R^* – относительная кривизна, L_y – длина цилиндра. В данном тесте параметром является d, поэтому P определяется соотношением (5.19) [16, с. 56]. Это соотношение является точным, в отличие от приведённого в [15, с. 152].

Напряжения на участке контакта (в [15] опечатка)

$$\sigma_x = \sigma_z = -p(x) \tag{5.20}$$

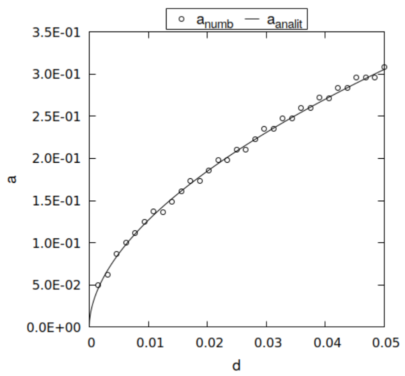
Напряжения на оси y

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{p_0}{a}\left(\left(a^2+2z^2\right)\left(a^2+z^2\right)^{-0.5} - 2z\right) \\ \sigma_y &= -p_0 a\left(a^2+z^2\right)^{-0.5} \\ \sigma_z &= \mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

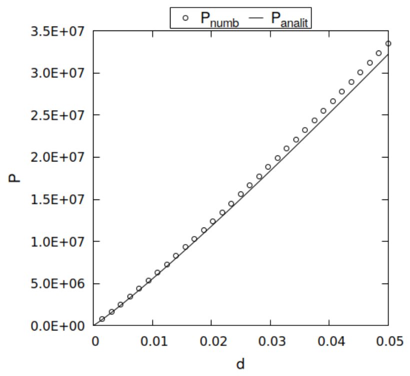
Сравнение численного и аналитического решения для параметров из таблицы 7 приведено на рисунках 10–13.

Таблица 7 – Параметры.

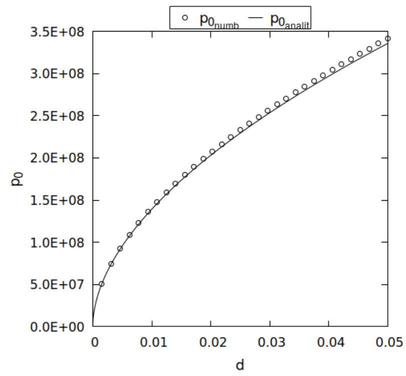
$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$20 \times 1 \times 20$
R	радиус цилиндра	5
$L(=L_y)$	длина цилиндра	1
d	сближение шара и полупространства	0.05
E	модуль Юнга	10^{10} Па
μ	коэффициент Пуассона	0.3, 0.45
количество конечных элементов		14336
steps	количество шагов	32
условия завершения итераций (контакт)		$\lvert \Delta \mathbf{F}_{k+1} - \Delta \mathbf{F}_k \rvert / \lvert \mathbf{F} \rvert < 10^{-10}$, $\lvert \mathbf{r}^*_{k+1} - \mathbf{r}^*_k \rvert < 10^{-14}$



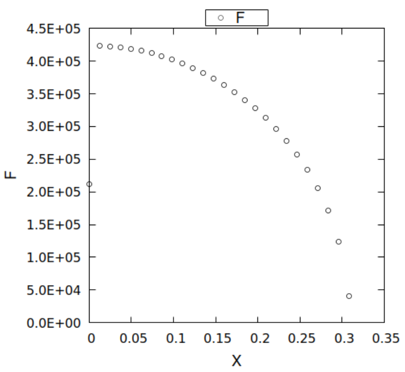
полуширина области контакта



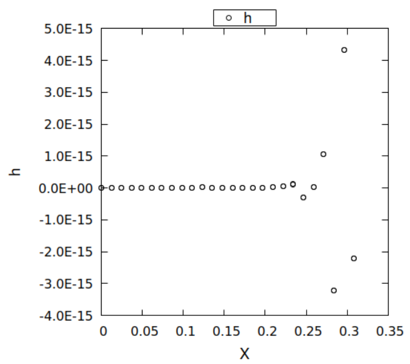
сила контактного взаимодействия, разделенная на длину цилиндра



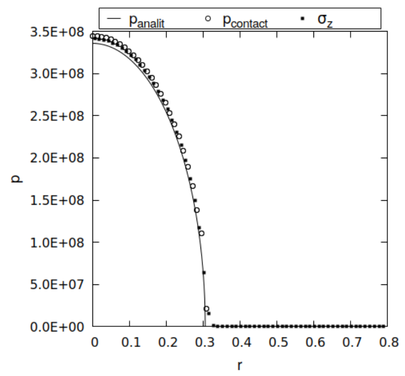
максимальное контактное давление, строится по σ_z



силы в контактных узлах



расстояния от контактных узлов до поверхности



$p_{contact}$ – давление на поверхности, рассчитанное по силам в контактных узлах,
σ_z – напряжения в центрах ближайших к поверхности КЭ

Рисунок 10. $\nu = 0.3$, без "коррекции"

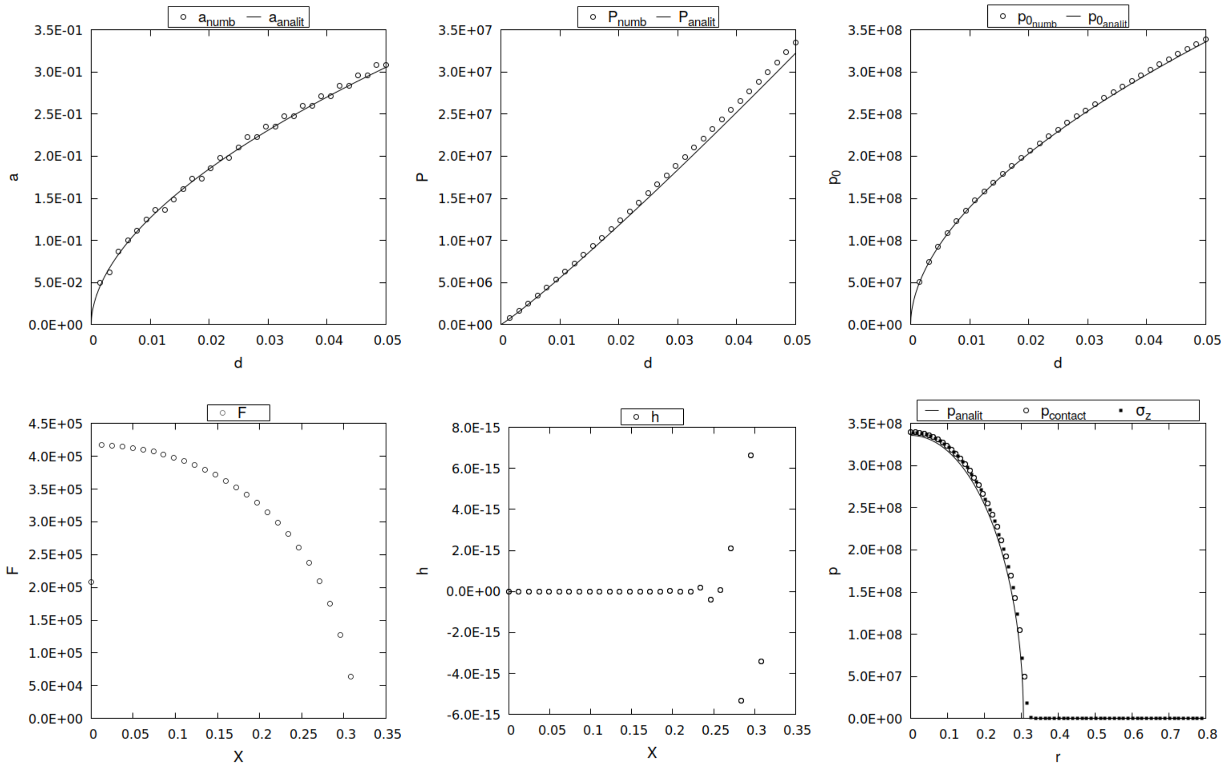


Рисунок 11. $\nu = 0.3$, с "коррекцией"

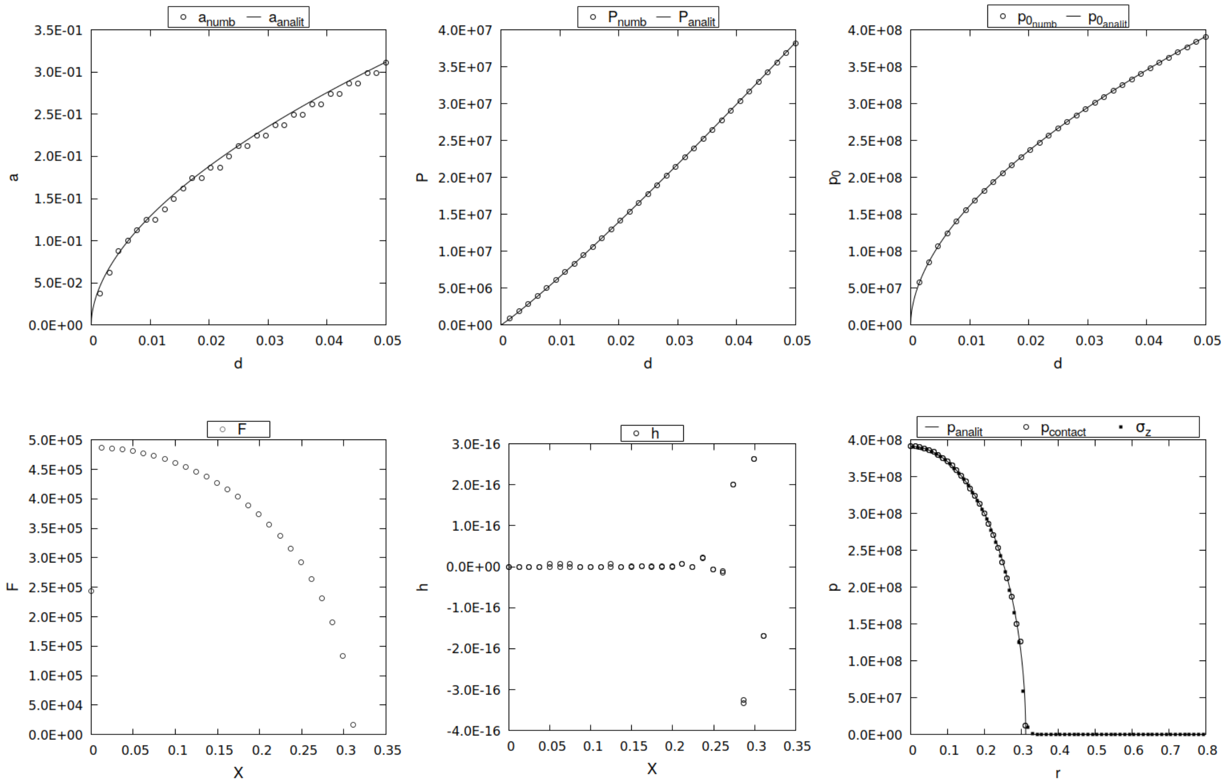


Рисунок 12. $\nu = 0.45$, без "коррекции"

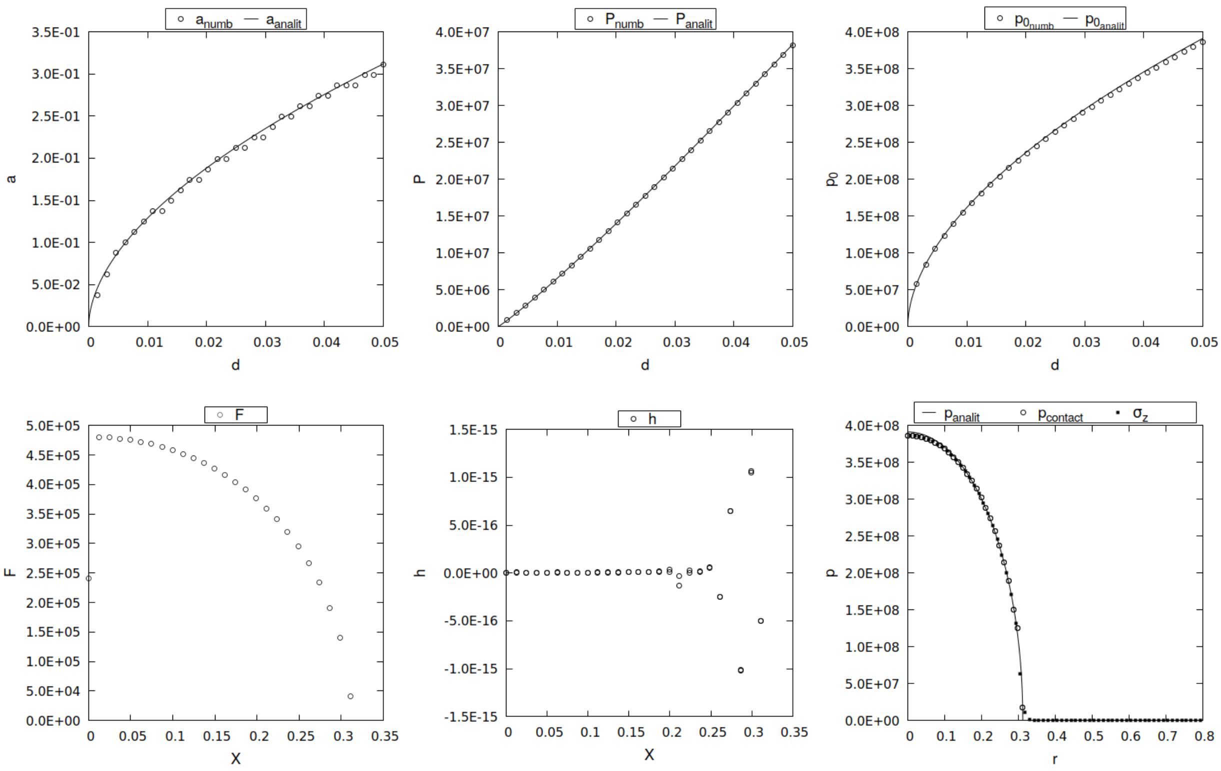


Рисунок 13. $\nu = 0.45$, с "коррекцией"

Напряжения в произвольной точке [15, с. 121] можно сравнить, но не сравнивал.

Для случая плоско-деформированного состояния (в отличие от плоско-напряжённого) требуется значительно переделывать решатель (поэтому задача вдавливания цилиндра в упруго-пластичное полупространство не решена, плюс она менее популярна и трудно будет проверить правильность решения).

5.4. Вдавливание жёсткого шара в упруго-пластичное полупространство: степенное упрочнение

Абсолютно жёсткий шар вдавливается в упруго-пластичное полупространство (нагружение), затем возвращается обратно (разгрузка).

Общую силу контактного взаимодействия P, величину сближения удалённых точек δ (глубину инденсации) и площадь контактной поверхности A можно представить в безразмерном виде [1]:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= P / P_Y \\ \overline{A} &= A / A_Y \\ \overline{\delta} &= \delta / \delta_Y \end{aligned} \tag{5.22}$$

где P_Y, A_Y, δ_Y – значения, при которых начинается пластическое течение:

$$\begin{aligned} P_Y &= \frac{9\pi^3}{16} c^3 Y R^2 \left(\frac{E^*}{Y} \right)^{-2}, \\ A_Y &= \frac{9\pi^3}{16} c^2 R^2 \left(\frac{E^*}{Y} \right)^{-2}, \\ \delta_Y &= \frac{9\pi^2}{16} c^2 R \left(\frac{E^*}{Y} \right)^{-2}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} c &= 1.08 \\ E^* &= \frac{E}{1-\nu^2} \end{aligned} \tag{5.24}$$

c – константа для случая критерия пластического течения Мизеса, E^* – приведённый модуль упругости, R – радиус шара, E – модуль упругости полупространства, ν – коэффициент Пуассона полупространства, Y – предел текучести полупространства.

В [1] приведена аппроксимация численного значения величины остаточного сближения удалённых точек в случае идеально пластичного материала (т.е. при $n = 0$, без упрочнения)

$$\bar{\delta}_{\mathrm{res}} = \bar{\delta}_{\max} \cdot \left(1 - \bar{\delta}_{\max}^{-1/3}\right)\left(1 - \bar{\delta}_{\max}^{-2/3}\right) \tag{5.25}$$

и аппроксимация зависимости значений

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P / P_{\max}, \\ \tilde{A} &= A / A_{\max}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

от значения

$$\tilde{\delta} = \left(\bar{\delta} - \bar{\delta}_{\mathrm{res}}\right)\left(\bar{\delta}_{\max} - \bar{\delta}_{\mathrm{res}}\right), \tag{5.27}$$

в процессе разгрузки, вида

$$\tilde{P} = \tilde{\delta}^{\alpha}, \tag{5.28}$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\beta}\left(1 - (1-\beta)^{\tilde{\delta}}\right), \tag{5.29}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2}\bar{\delta}_{\max}^{-0.036}, \\ \beta &= 0.9\left(1 - \bar{\delta}_{\max}^{-0.036}\right). \end{aligned} \tag{5.30}$$

В случае изотропно-упрочняющегося материала со степенным упрочнением с показателем n в [1] приведена аппроксимация (вместо (5.25))

$$\bar{\delta}_{\mathrm{res}} = \bar{\delta}_{\max} \cdot \left(1 - \left[\xi^2 \left(\frac{\delta_{\max}}{2R}\right)^{n-1} \left(\frac{E^*}{Y}\right)^{2(n-1)}\right]^{1/3}\right)\left(1 - \left[\xi^2 \left(\frac{\delta_{\max}}{2R}\right)^{n-1} \left(\frac{E^*}{Y}\right)^{2(n-1)}\right]^{2/3}\right) \tag{5.31}$$

где

$$\xi = \frac{3\pi c}{4\sqrt{2}} 0.3^n. \tag{5.32}$$

Материал с изотропным упрочнением задаётся диаграммой *одноосного* растяжения вида

$$\sigma = F(\varepsilon) = E\varepsilon, \sigma < Y,$$
$$\sigma = F(\varepsilon) = Y \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y}\right)^n, \sigma \geq Y \tag{5.33}$$

где $\varepsilon_Y = Y / E$. Соответствующая кривая деформирования $\tilde{\sigma} = \Phi(q)$ строится из соотношений

$$\Phi(q) = F(\varepsilon), \varepsilon - \frac{1}{E}F(\varepsilon) = q \tag{5.34}$$

т.к. $\int d\varepsilon^{\text{p}} = \int d\tilde{\varepsilon}^{\text{p}}, (q \equiv \int d\tilde{\varepsilon}^{\text{p}})$.

(В [3, с. 100] приведён другой способ, при котором строится просто аналогичная (5.33) диаграмма деформирования вида

$$\tilde{\sigma} = F(\tilde{\varepsilon}) = 3G\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma} < Y,$$
$$\tilde{\sigma} = F(\tilde{\varepsilon}) = Y \cdot \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_Y}\right)^n, \tilde{\sigma} \geq Y \tag{5.35}$$

где $\varepsilon_Y = Y / 3G$. Этот способ задаёт отличное от (5.33) поведение материала, т.к. подстановка [3, с. 64]

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1-2\nu}{3E}\sigma \tag{5.36}$$

в уравнения (5.33) приводит к соотношениям, отличным от (5.35) на участке $\tilde{\sigma} \geq Y$. Если пластичность в [1] реализована соотношениями (5.35), то этим можно объяснить расхождение результатов на рисунке 5 (ввиду отличия (5.35) от (5.34)). Ещё не проверено.)

Параметры задачи приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Параметры задачи и сетки.

E	модуль Юнга	10^{10} Па
ν	коэффициент Пуассона	0.3
$\frac{E^*}{Y}$		110, 220, 550, 1100
$\bar{\delta}_{\max}$		1, 3, 6, 10, 15, 20, 30, 50, 70, 90, 110
n	коэффициент степенного упрочнения	0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5
R	радиус шара	1
d	сближение шара и полупространства	$\bar{\delta}_{\max} \cdot \delta_Y$
$L_x \times L_y \times L_z$	размеры параллелепипеда	$\frac{L_x}{2} = \frac{L_y}{2} = \frac{L_z}{2} = 15 \cdot \sqrt{2Rd - d^2}$
$L1_x \times L1_y \times L1_z$	размеры подробного параллелепипеда, в котором сетка более подробная	$\frac{L1_x}{2} = \frac{L1_y}{2} = \frac{L1_z}{2} = 1.5 \cdot \sqrt{2Rd - d^2}$
$N \times N \times N$	разбиение подробного параллелепипеда	$N = 12$
q	коэффициент сгущения к подробному параллелепипеду	находится из уравнения $\frac{1-q^{N-1}}{1-q^N} = \frac{\frac{L_x}{2} - \frac{L1_x}{2}}{\frac{L_x}{2}}$
количество конечных элементов	7776	
$steps_{\text{load}}$, $steps_{\text{unload}}$	количества шагов нагружения и разгрузка	$steps_{\text{load}} = 110$ $steps_{\text{unload}} = 111$
условия завершения итераций (контакт)	$\Delta^F = 10^{-10}$ $\Delta^r = 10^{-14}$	
условия завершения итераций (пластичность)	$\Delta^\sigma = 10^{-10}$ $\Delta^\varepsilon = 10^{-10}$	

Сетка при $\frac{E^*}{Y} = 550, \bar{\delta}_{\max} = 110$ изображена на рисунке 14. Общее количество элементов сетки выбиралось из условия: время расчёта меньше 2 часов. Размер подробного параллелепипеда (в котором наиболее подробная сетка, в центре образца рядом с контактом), выбирался так, чтобы пластичная область находилась примерно в этом параллелепипеде. Общий размер образца выбирался в 10 раз больше, чем подробный параллелепипед. Коэффициент разрядки выбирался из условия плавного перехода размеров конечных элементов из разреженных параллелепипедов в подробный параллелепипед.

При малых значениях $\frac{E^*}{Y}$ и $\overline{\delta}_{\max}$ общий размер образца становится гораздо меньше, чем R, ввиду малости d по сравнению с R в этом случае.

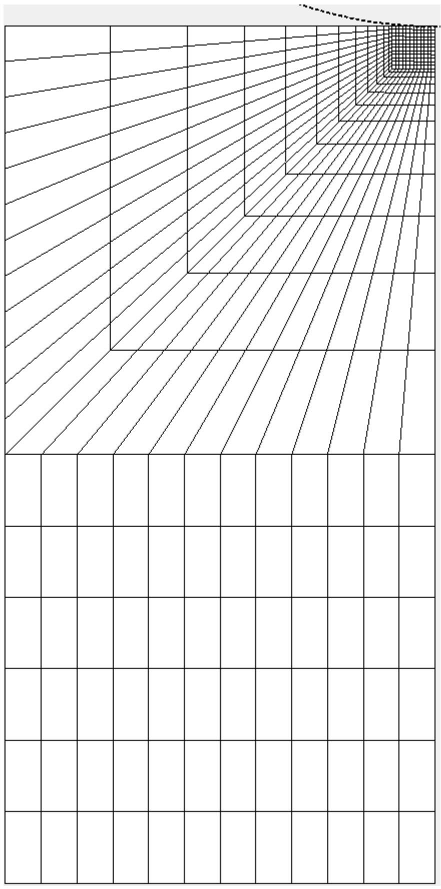


Рисунок 14. Сетка в сечении $y = 0$ при $\frac{E^*}{Y} = 550, \overline{\delta}_{\max} = 110$.

1. Сравнение численного решения с [1] при

$$n = 0, \overline{\delta}_{\max} = 110, \frac{E^*}{Y} = 110, 220, 550, 1100 \tag{5.37}$$

приведено на рисунке 15. Площадь поверхности контакта в процессе разгрузки рассчитывается как $A = \pi a^2$, т.е. предполагается, что область контакта – сплошная поверхность(ошибка?). Площадь поверхности контакта меняется скачками, так как количество точек с целочисленными координатами в круге с центром $(0,0)$ меняется скачками с ростом радиуса. Это заметно ввиду грубости сетки.

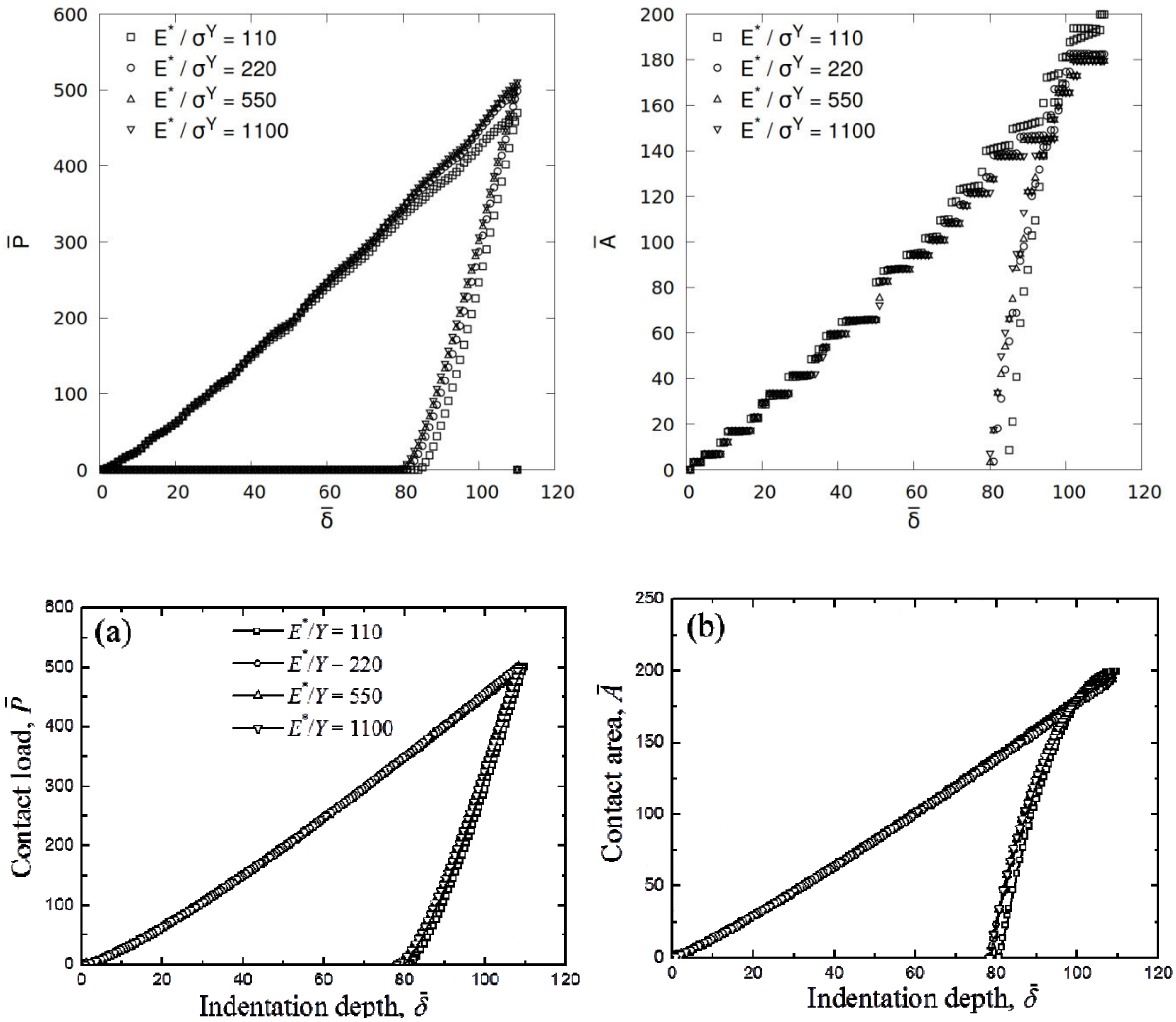


Рисунок 15. Зависимости общей силы контакта и площади контактной поверхности от сближения удалённых точек при $n = 0, \bar{\delta}_{\max} = 110, \dfrac{E^*}{Y} = 110, 220, 550, 1100$. Сверху численное решение, снизу численное решение [1, Fig. 2]

Сравнение численных решений при различной подробности сетки N и при различных размерах образца $L_x \times L_y \times L_z$ изображено на рисунке 16.

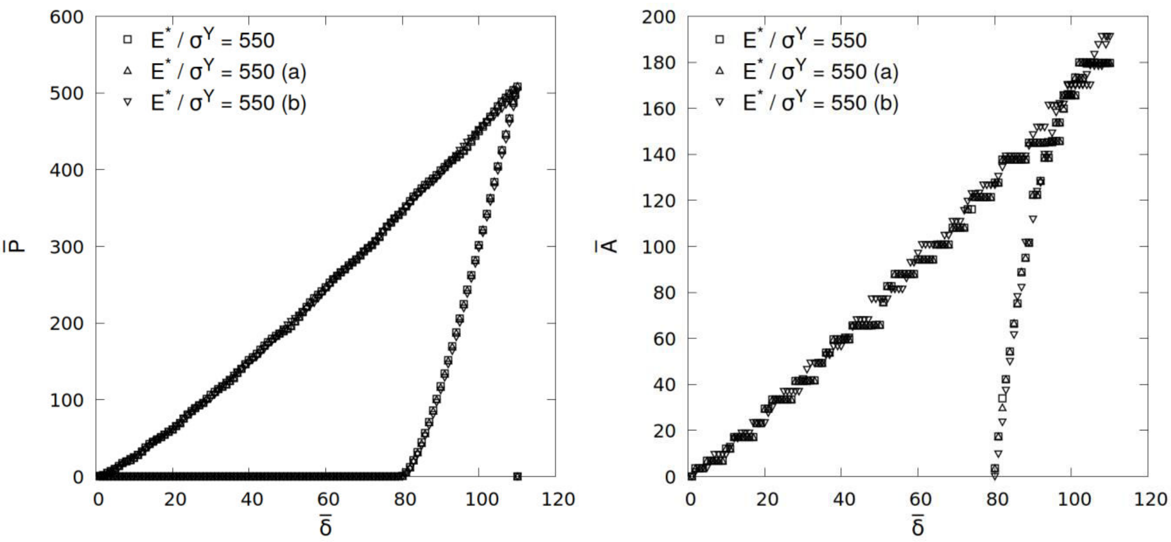


Рисунок 16. Решение при $n=0,\ \bar{\delta}_{\max}=110,\ \dfrac{E^*}{Y}=550$: (a) – увеличение образца ($\dfrac{L_x}{2}=\dfrac{L_y}{2}=\dfrac{L_z}{2}=30\cdot\sqrt{2Rd-d^2}$), (b) – более подробная сетка ($N=16$)

2. Сравнение численного решения с [1] при

$$n=0,\ \bar{\delta}_{\max}=1,3,6,10,15,20,30,50,70,90,110,\ \frac{E^*}{Y}=550 \qquad (5.38)$$

приведено на рисунке 17.

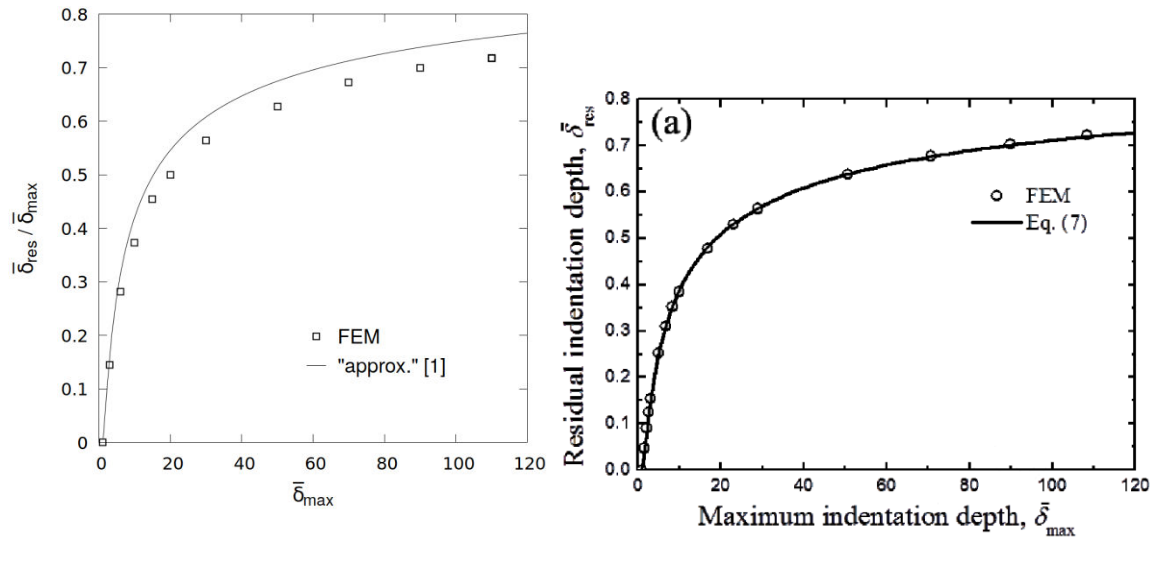


Рисунок 17. Зависимость остаточного сближения удалённых точек (по отношению к $\bar{\delta}_{\max}$) от максимального сближения удалённых точек при $n=0,\ \bar{\delta}_{\max}=1,3,6,10,15,20,30,50,70,90,110,\ \dfrac{E^*}{Y}=550$. Слева численное решение и линия (5.25), справа численное решение [1, Fig. 3(a)].

Численные решения мало отличаются, но линия, построенная по формуле (5.25) ([1, Eq. 7]), не соответствует линии, нарисованной на [1, Fig. 3(a)], то есть в [1] приведены не точные коэффициенты аппроксимации.

3. Сравнение численного решения с [1] при

$$n = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \bar{\delta}_{\max} = 110, \frac{E^*}{Y} = 550 \tag{5.39}$$

приведено на рисунках 18, 19.

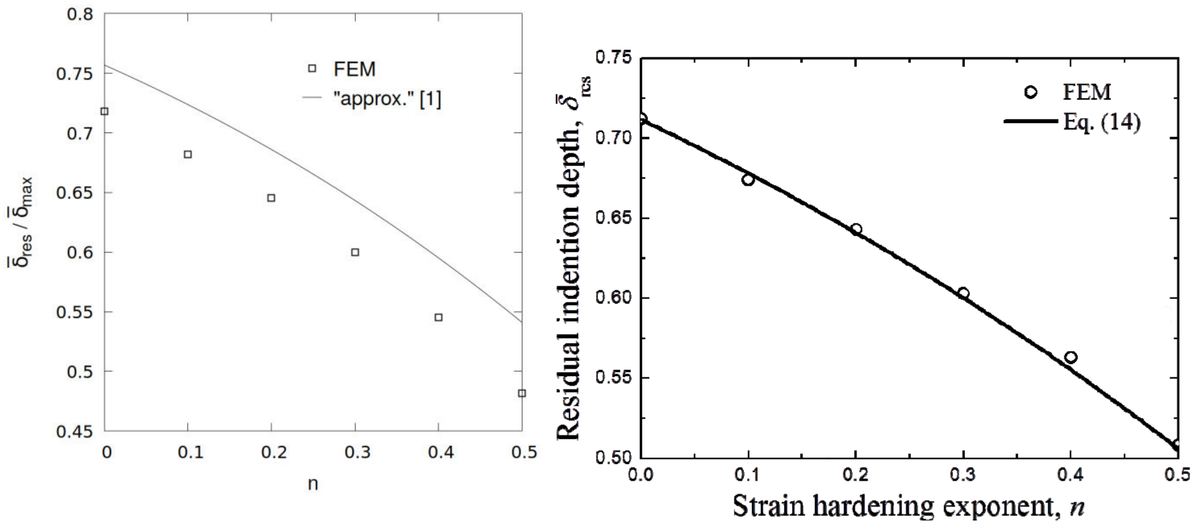


Рисунок 18. Зависимость остаточного сближения удалённых точек (по отношению к $\bar{\delta}_{\max}$) от коэффициента степенного упрочнения при $n = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \bar{\delta}_{\max} = 110, \frac{E^*}{Y} = 550$. Слева численное решение и линия (5.31), справа численное решение [1, Fig. 5].

Линия, построенная по формуле (5.31) ([1, Eq. 14]), не соответствует линии, нарисованной на [1, Fig. 5], то есть в [1] приведены не точные коэффициенты аппроксимации. Различие между численными решениями возрастает с увеличением n, остаточное сближение удалённых точек получается чуть меньше, чем в [1].

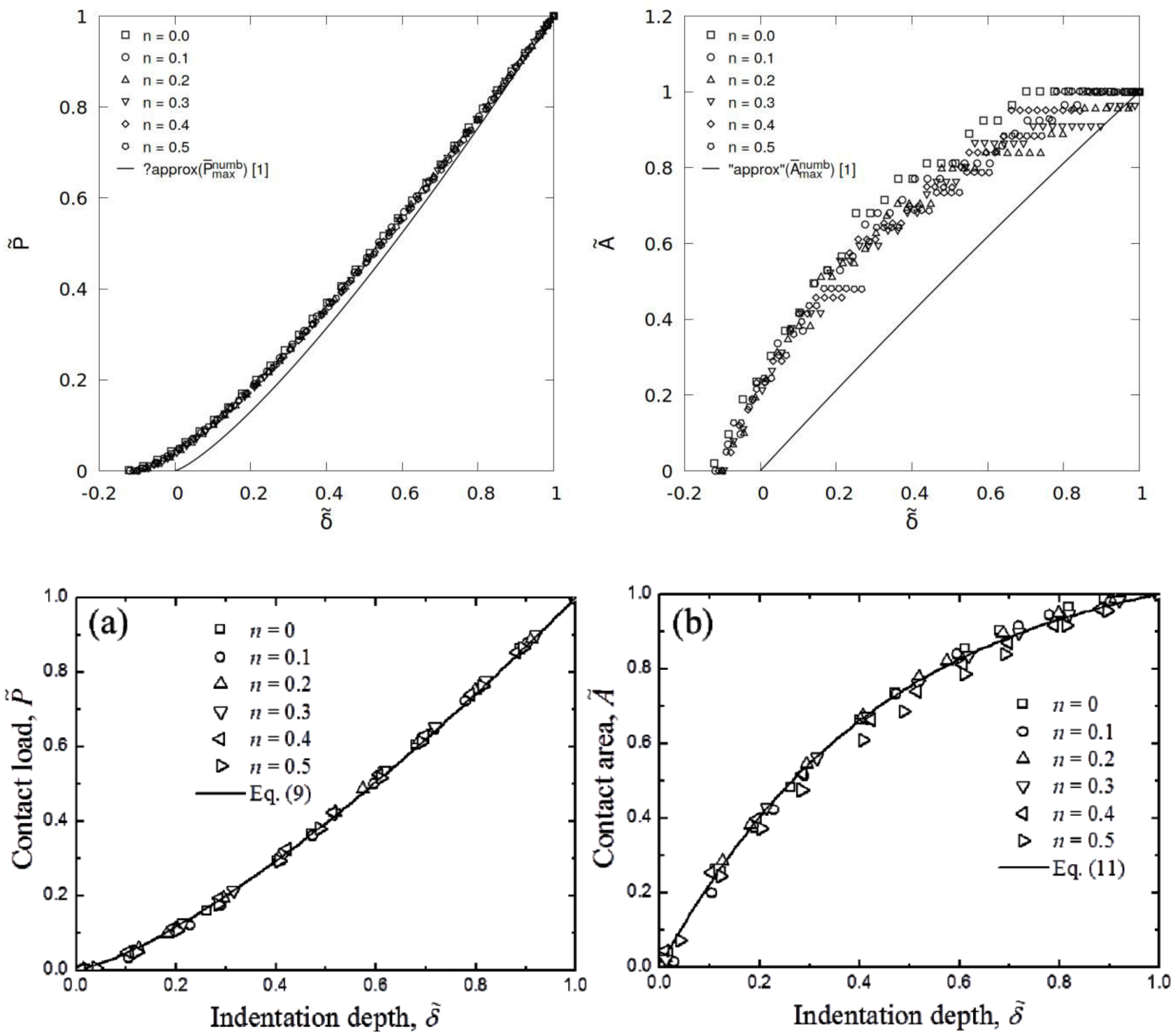


Рисунок 19. Зависимости общей силы контакта и площади контактной поверхности от сближения удалённых точек в процессе разгрузки при $n = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \bar{\delta}_{\max} = 110, \frac{E^*}{Y} = 550$. Сверху численное решение, обезразмеренное формулами (5.26), (5.27) и линии (5.28), (5.29), снизу численное решение [1, Fig. 4]. В формулу обезразмеривания δ (5.27) подставлялись значения $\bar{\delta}_{\mathrm{res}}$, рассчитанные по формуле аппроксимации (5.31), а не численные, поэтому при $\tilde{P} = 0$ или $\tilde{A} = 0$ значение $\tilde{\delta}$ не равно 0.

Линии, построенные по формулам (5.28), (5.29) ([1, Eq. 9, 11]), не соответствует линиям, нарисованным на [1, Fig. 4], то есть в [1] приведены не точные коэффициенты аппроксимации. Сравнение теряет смысл.

Список литературы к разделу 5.4

1) Song Z., Komvopoulos K. An elastic–plastic analysis of spherical indentation: Constitutive equations for single-indentation unloading and development of plasticity due to repeated indentation //Mechanics of Materials. – 2014. – Т. 76. – С. 93-101.
2) Asiri S., Wagih A., Eltaher M. A. Predictive model for spherical indentation on elastoplastic nanocomposites: Loading and unloading behavior //Ceramics International. – 2019. – Т. 45. – №. 3. – С. 3088-3100.
3) Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Издание второе, переработанное и дополненное, Москва: "Машиностроение", 1975г. – 400 с.

Приложение к разделу 5.4

Не понятые странности в [1]

1) Eq. 3a: $\sigma = E^* \varepsilon$

2) все использованные аппроксимации оказались не точными

Не понятые странности в [2]

1) Figure 3(a) не соответствует Figure 17. При $\bar{\alpha}_{\max} \approx 90$ значение $\bar{\alpha}_{\text{res}} / \bar{\alpha}_{\max}$ явно больше, чем 0.7, т.к. $90 \cdot 0.7 = 63$, а не 80, как изображено на Figure 3(a). При этом Figure 17 совпадает с [1, Fig. 3(a)] (рисунок 4).

Заключение

- СЛАУ решается медленно, нужен нормальный разделитель или использование эффективных итерационных методов, OpenCL, распараллеливание и т.д.
- Итерационный процесс по пластичности плохо сходится в случае разгрузки, если оставлять не упругую матрицу определяющих соотношений. Это вызывает неудобства в случае решения СЛАУ прямыми методами.
- Решения в случае упругости близки к аналитическим. Погрешность могла возникнуть из-за отсутствия учёта геометрической нелинейности, грубости сетки, не достаточного размера образца для заданных параметров вдавливания и коэффициента Пуассона
- Протестирован решатель с идеальной и не идеальной пластичностью и контактом, при сложном нагружении (т.е. напряжения увеличиваются не пропорционально), но при малых деформациях. Решения близки к численным решениям из [17], но часть результатов не удалось сравнить ввиду не точности аппроксимаций в [17]

Не хватает ползучести по наследственной теории и геометрической нелинейности.

Список литературы

1) Филиппов А. С. Численные методы в механике деформируемого твердого тела //Москва. – 2016.
2) Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Термопрочность деталей машин //М.: Машиностроение. – 1975. – Т. 455.
3) Колесников К. С., Александров Д. А., Асташев В. К. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. Кн. 1 //М.: Машиностроение. – 1994. – Т. 1.
4) Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести //Киев: Наукова думка. – 1981. – Т. 496. – С. 1.
5) Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния Рос. АН, 2000.
6) Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с
7) Отчет о ПНИ по теме: "Разработка программно-технических решений в области промышленного программного обеспечения для моделирования поведения элементов конструкций из современных материалов в экстремальных условиях при механических и немеханических воздействиях для решения задач проектирования авиакосмической техники" (№ гос. регистрации: 114112440083)
8) Соловейчик Ю. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
9) Станкевич И. В. Численное решение контактных задач с учетом деформации ползучести //Вестник МГТУ им. НЭ Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – №. 4. – С. 145-153.
10) Wriggers P., Zavarise G. Computational contact mechanics //Encyclopedia of computational mechanics. – 2004.

11) Джордж А. Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – 1984.
12) Fang H. Analysis of Block LDL^ T Factorizations for Symmetric Indefinite Matrices. – 2007.
13) Care G., Fischer-Cripps A. C. Elastic-plastic indentation stress fieldsusing the finite-element method //Journal of materials science. – 1997. – Т. 32. – №. 21. – С. 5653-5659.
14) Feng G. et al. An analytical expression for the stress field around an elastoplastic indentation/contact //Acta Materialia. – 2007. – Т. 55. – №. 9. – С. 2929-2938.
15) Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – мир, 1989.
16) Нахатакян Ф. Г. Напряженно-деформированное состояние упругих элементов зубчатых механизмов и сооружений при их линейном и кромочном контакте //М.: ИМАШ РАН. – 2014.
17) Song Z., Komvopoulos K. An elastic–plastic analysis of spherical indentation: Constitutive equations for single-indentation unloading and development of plasticity due to repeated indentation //Mechanics of Materials. – 2014. – Т. 76. – С. 93-101.
18) Asiri S., Wagih A., Eltaher M. A. Predictive model for spherical indentation on elastoplastic nanocomposites: Loading and unloading behavior //Ceramics International. – 2019. – Т. 45. – №. 3. – С. 3088-3100.
19) Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Издание второе, переработанное и дополненное, Москва: "Машиностроение", 1975г. – 400 с.