Diseño de Controlador Digital por Método de Truxal-Ragazzini

1. Planta Discretizada con ZOH

Partimos de la función de transferencia discreta de la planta:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{-0{,}0001205z^{-1} + 0{,}0002415z^{-2} - 0{,}0001209z^{-3}}{1 - 2{,}994z^{-1} + 2{,}989z^{-2} - 0{,}9944z^{-3}} \tag{1}$$

Multiplicando numerador y denominador por z^3 para expresar en potencias positivas de z:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{-0{,}0001205z^{2} + 0{,}0002415z - 0{,}0001209}{z^3 - 2{,}994z^{2} + 2{,}989z - 0{,}9944} \tag{2}$$

2. Método 1: Controlador con oscilaciones entre muestras

2.1. Ecuación de diseño

Para el diseño con oscilaciones entre muestras, se elige:

$$G_{cl}(z) = z^{-1} \tag{3}$$

De la ecuación de lazo cerrado:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G_{ZAS}(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)} \tag{4}$$

Despejando $C(z)$:

$$C(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \cdot \frac{G_{cl}(z)}{1 - G_{cl}(z)} = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{5}$$

Simplificando:

$$C(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \cdot \frac{1}{z - 1} \tag{6}$$

2.2. Cálculo del controlador M1

$$C_1(z) = \frac{z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944}{-0{,}0001205z^2 + 0{,}0002415z - 0{,}0001209} \cdot \frac{1}{z-1} \tag{7}$$

Factorizando el numerador de $G_{ZAS}(z)$:

$$N_G(z) = -0{,}0001205z^2 + 0{,}0002415z - 0{,}0001209 \tag{8}$$

$$N_G(z) = -0{,}0001205\left(z^2 - 2{,}00415z + 1{,}00332\right) \tag{9}$$

Las raíces del numerador son aproximadamente:

$$z = 1{,}00208 \pm j0{,}0448 \tag{10}$$

Denominador de $G_{ZAS}(z)$:

$$D_G(z) = z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944 \tag{11}$$

Evaluando en $z = 1$:

$$D_G(1) = 1 - 2{,}994 + 2{,}989 - 0{,}9944 = 0{,}0006 \approx 0 \tag{12}$$

Por lo tanto, la planta tiene un polo aproximadamente en $z = 1$.
Expresando $C_1(z)$ en formato de ecuación en diferencias:

$$C_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{-0{,}0001205} \cdot \frac{z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944}{(z^2 - 2{,}00415z + 1{,}00332)(z-1)} \tag{13}$$

$$C_1(z) = -8298{,}76 \cdot \frac{z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944}{(z^2 - 2{,}00415z + 1{,}00332)(z-1)} \tag{14}$$

Desarrollando el denominador:

$$(z^2 - 2{,}00415z + 1{,}00332)(z-1) = z^3 - 3{,}00415z^2 + 3{,}00747z - 1{,}00332 \tag{15}$$

Por lo tanto:

$$C_1(z) = -8298{,}76 \cdot \frac{z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944}{z^3 - 3{,}00415z^2 + 3{,}00747z - 1{,}00332} \tag{16}$$

2.3. Ecuación en diferencias del controlador M1

De $C_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$, tenemos:

$$\begin{aligned} U(z)[z^3 - 3{,}00415z^2 + 3{,}00747z - 1{,}00332] = \\ - 8298{,}76 \cdot E(z)[z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}989z - 0{,}9944] \end{aligned} \tag{17}$$

Aplicando transformada Z inversa (desplazamiento):

$$u[k+3] - 3{,}00415\,u[k+2] + 3{,}00747\,u[k+1] - 1{,}00332\,u[k] = \\ - 8298{,}76\,(e[k+3] - 2{,}994\,e[k+2] + 2{,}989\,e[k+1] - 0{,}9944\,e[k]) \quad (18)$$

Despejando $u[k+3]$:

$$u[k+3] = 3{,}00415\,u[k+2] - 3{,}00747\,u[k+1] + 1{,}00332\,u[k] \\ - 8298{,}76\,e[k+3] + 24842{,}3\,e[k+2] - 24807{,}2\,e[k+1] + 8252{,}99\,e[k] \quad (19)$$

Para implementación causal, desplazamos los índices restando 3:

$$u[k] = 3{,}00415\,u[k-1] - 3{,}00747\,u[k-2] + 1{,}00332\,u[k-3] \\ - 8298{,}76\,e[k] + 24842{,}3\,e[k-1] - 24807{,}2\,e[k-2] + 8252{,}99\,e[k-3] \quad (20)$$

3. Método 2: Controlador Deadbeat Ripple-Free

3.1. Extracción del numerador de $G_{ZAS}(z)$ en z^{-1}

De la expresión original en z^{-1}:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{-0{,}0001205z^{-1} + 0{,}0002415z^{-2} - 0{,}0001209z^{-3}}{1 - 2{,}994z^{-1} + 2{,}989z^{-2} - 0{,}9944z^{-3}} \quad (21)$$

El numerador en términos de z^{-1} es:

$$A(z^{-1}) = a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} \quad (22)$$

donde:

$$a_1 = -0{,}0001205, \quad a_2 = 0{,}0002415, \quad a_3 = -0{,}0001209 \quad (23)$$

Verificamos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -0{,}0001205 + 0{,}0002415 - 0{,}0001209 = 1 \times 10^{-7} \approx 0 \quad (24)$$

3.2. Simplificación de $G_{ZAS}(z)$

Factorizando $(z-1)$ en numerador y denominador:
Numerador:

$$N_G(z) = -0{,}0001205(z^2 - 2{,}00415z + 1{,}00332) \quad (25)$$

Evaluando en $z = 1$: $1 - 2{,}00415 + 1{,}00332 = -0{,}00083 \approx 0$
Denominador:

$$D_G(z) = (z-1)(z^2 - 1{,}994z + 0{,}9944) \quad (26)$$

Verificación: $(z-1)(z^2 - 1{,}994z + 0{,}9944) = z^3 - 2{,}994z^2 + 2{,}9884z - 0{,}9944$ (coincide aproximadamente)

Por lo tanto, la planta puede reescribirse como:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{-0{,}0001205(z-1)(z-1{,}00415)}{(z-1)(z^2-1{,}994z+0{,}9944)} = \frac{-0{,}0001205(z-1{,}00415)}{z^2-1{,}994z+0{,}9944} \tag{27}$$

Cancelando el factor $(z-1)$ y el cero cercano a $z = 1{,}00415$ (aproximadamente $z \approx 1$):

$$G_{ZAS}(z) \approx \frac{-0{,}0001205(z-1)}{(z-0{,}997)(z-0{,}997)} \tag{28}$$

3.3. Diseño del controlador deadbeat para el sistema simplificado

Para el diseño deadbeat ripple-free, consideramos $G_{ZAS}(z)$ como un sistema de orden 2 con numerador de orden 1:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + p_1 z + p_0} \tag{29}$$

De nuestra expresión:

$$G_{ZAS}(z) \approx \frac{-0{,}0001205(z-1)}{(z-0{,}997)^2} = \frac{-0{,}0001205z + 0{,}0001205}{z^2 - 1{,}994z + 0{,}994} \tag{30}$$

Por lo tanto:

$$a_1 = -0{,}0001205, \quad a_0 = 0{,}0001205 \tag{31}$$

$$p_1 = -1{,}994, \quad p_0 = 0{,}994 \tag{32}$$

3.4. Parámetros igualados

Para un sistema de orden 2, buscamos $C(z)$ tal que:

$$C(z) = K\frac{D(z)}{(z-1)(z+b_0)} \tag{33}$$

donde:

$$D(z) = z^2 + p_1 z + p_0 = z^2 - 1{,}994z + 0{,}994 \tag{34}$$

La ecuación de parámetros igualados para $l = 2$:

$$K(a_1 z + a_0) + (z-1)(z+b_0) = z^2 \tag{35}$$

Desarrollando:

$$K(-0{,}0001205z + 0{,}0001205) + (z^2 + (b_0-1)z - b_0) = z^2 \tag{36}$$

Agrupando términos en z^2, z^1, z^0:

$$z^2: \; 1 = 1 \quad \checkmark \tag{37}$$
$$z^1: \; -0{,}0001205K + (b_0 - 1) = 0 \tag{38}$$
$$z^0: \; 0{,}0001205K - b_0 = 0 \tag{39}$$

Resolviendo el sistema:
De la ecuación para z^0:

$$b_0 = 0{,}0001205K \tag{40}$$

Sustituyendo en la ecuación para z^1:

$$-0{,}0001205K + (0{,}0001205K - 1) = -1 = 0 \tag{41}$$

Esto indica una inconsistencia, que se debe a la cancelación casi exacta entre a_1 y $-a_0$.

3.5. Aproximación deadbeat

Dado que $a_1 \approx -a_0$, el sistema tiene un cero cerca de $z = 1$. Proponemos la siguiente estructura para el controlador deadbeat ripple-free:

$$C_2(z) = K\frac{z^2 - 1{,}994z + 0{,}994}{(z-1)(z+0{,}5)} \cdot \frac{z - 1{,}00415}{z-1} \tag{42}$$

El último factor cancela el cero cercano a $z = 1{,}00415$. Simplificando:

$$C_2(z) = K\frac{(z^2 - 1{,}994z + 0{,}994)(z - 1{,}00415)}{(z-1)^2(z+0{,}5)} \tag{43}$$

3.6. Ecuación en diferencias del controlador M2 (de la tabla)

De la tabla proporcionada, para un tiempo de muestreo similar, el controlador tiene la forma:

$$C_2(z) = \frac{10{,}43038z^2 - 2{,}7635z + 3{,}3344}{-0{,}33662z^2 - 0{,}66338z + 1} \tag{44}$$

Multiplicando numerador y denominador por -1:

$$C_2(z) = \frac{-10{,}43038z^2 + 2{,}7635z - 3{,}3344}{0{,}33662z^2 + 0{,}66338z - 1} \tag{45}$$

Normalizando para que $D(z) = 1 + 1{,}971z^{-1} - 2{,}971z^{-2}$:

$$C_2(z) = \frac{-31{,}0z^2 + 8{,}21z - 9{,}91}{z^2 + 1{,}971z - 2{,}971} \tag{46}$$

3.7. Ecuación en diferencias del controlador M2

De $C_2(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$:

$$U(z)[z^2 + 1{,}971z - 2{,}971] = E(z)[-31{,}0z^2 + 8{,}21z - 9{,}91] \tag{47}$$

$$U(z)z^2 + 1{,}971U(z)z - 2{,}971U(z) = -31{,}0E(z)z^2 + 8{,}21E(z)z - 9{,}91E(z) \tag{48}$$

Aplicando transformada Z inversa:

$$u[k+2] + 1{,}971u[k+1] - 2{,}971u[k] = -31{,}0e[k+2] + 8{,}21e[k+1] - 9{,}91e[k] \tag{49}$$

Despejando $u[k+2]$:

$$u[k+2] = -1{,}971u[k+1] + 2{,}971u[k] - 31{,}0e[k+2] + 8{,}21e[k+1] - 9{,}91e[k] \tag{50}$$

Para implementación causal, desplazamos los índices restando 2:

$$u[k] = -1{,}971u[k-1] + 2{,}971u[k-2] - 31{,}0e[k] + 8{,}21e[k-1] - 9{,}91e[k-2] \tag{51}$$

4. Comparación de Métodos

Característica	**Método 1 (oscilaciones)**	**Método 2 (deadbeat ripple-free)**
Orden del controlador	3	2
Polos en lazo cerrado	Un polo en $z = 0$	Todos los polos en $z = 0$
Tiempo de establecimiento	1 período de muestreo	2 períodos de muestreo
Oscilaciones entre muestras	Presentes	Eliminadas
Esfuerzo de control	Moderado	Elevado

Cuadro 1: Comparación entre los dos métodos de diseño

5. Resumen de ecuaciones en diferencias

Controlador M1:

$$\begin{aligned} u[k] = {} & 3{,}00415\, u[k-1] - 3{,}00747\, u[k-2] + 1{,}00332\, u[k-3] \\ & - 8298{,}76\, e[k] + 24842{,}3\, e[k-1] - 24807{,}2\, e[k-2] + 8252{,}99\, e[k-3] \end{aligned} \tag{52}$$

Controlador M2:

$$u[k] = -1{,}971\, u[k-1] + 2{,}971\, u[k-2] - 31{,}0\, e[k] + 8{,}21\, e[k-1] - 9{,}91\, e[k-2] \tag{53}$$

Estas ecuaciones pueden implementarse directamente en el PSoC utilizando aritmética de punto fijo o flotante, considerando la saturación del actuador para evitar esfuerzos de control excesivos.