

# Práctica de Laboratorio 9: Filtro de Kalman y Regulador LQG

Elias Álvarez

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción

Asunción, Paraguay

Email: elias.alvarez@universidadcatolica.edu.py

Tania Romero

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción

Asunción, Paraguay

Email: tania.romero@universidadcatolica.edu.py

## I. OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica consisten en aplicar las técnicas de control óptimo y estimación estocástica para el diseño de un controlador LQG implementado sobre la planta analógica utilizada en laboratorios anteriores. En particular, se busca:

- Comprender el funcionamiento y la formulación del regulador óptimo LQR, así como su relación con el criterio cuadrático.
- Diseñar un controlador por realimentación de estados que permita obtener respuestas rápidas y estables, considerando diferentes elecciones de matrices de peso.
- Comprender el funcionamiento del filtro de Kalman y su rol como estimador óptimo en presencia de ruido de proceso y de medición.
- Implementar dos estimadores: uno obtenido mediante el cálculo del valor óptimo de la ganancia de Kalman a partir de relaciones S/R conocidas, y otro cuya dinámica sea cinco veces más rápida que la del sistema en lazo cerrado.
- Integrar el controlador LQR y el filtro de Kalman para conformar un esquema LQG completo, evaluando su desempeño.
- Comparar los resultados obtenidos mediante simulación con los resultados experimentales obtenidos a través del PSoC.
- Analizar ventajas, limitaciones y sensibilidad del controlador LQG frente al ruido y variaciones de la planta.

## II. MATERIALES

Para el desarrollo de esta práctica se utilizaron los siguientes materiales y herramientas:

- Computadora personal con MATLAB.
- Planta analógica utilizada en los laboratorios anteriores (sistema de dos etapas RC con amplificadores operacionales).
- Sistema de adquisición e implementación digital basado en PSoC.
- Osciloscopio y generador de señales para la inyección de señales y verificación de comportamiento real.

## III. MODELO DE LA PLANTA

En este laboratorio se continúa utilizando el modelo dinámico obtenido y validado experimentalmente en los Laboratorios

7 y 8. Dicho modelo corresponde a la planta analógica compuesta por dos etapas RC en cascada, implementadas con amplificadores operacionales en configuración no inversora.

El sistema se modeló previamente mediante las ecuaciones en espacio de estados, considerando como variables de estado los voltajes en los capacitores de cada etapa. El análisis mediante leyes de Kirchhoff permitió obtener las ecuaciones diferenciales del sistema continuo, cuya forma general es:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t), \quad (2)$$

donde las matrices  $F$ ,  $G$ ,  $H$  y  $J$  ya fueron derivadas, verificadas y utilizadas exitosamente en laboratorios anteriores.

En este laboratorio no se repite el proceso completo de modelado, ya que la planta real no sufrió modificaciones y el modelo fue validado tanto analíticamente como experimentalmente. Por lo tanto, se toma como punto de partida el modelo continuo ya establecido, y su correspondiente versión discretizada, añadiendo únicamente el integrador que ya venía siendo utilizado en prácticas previas para garantizar error estacionario nulo ante entradas de referencia escalón.

Este modelo, junto con su versión digital, será utilizado para el diseño del LQR, del filtro de Kalman y, en consecuencia, del regulador LQG.

## IV. SELECCIÓN DEL TIEMPO DE MUESTREO

El tiempo de muestreo utilizado en esta práctica es  $T_s = 1$  ms, correspondiente a una frecuencia de muestreo de 1 kHz. Esta elección no se realizó de manera arbitraria, sino que fue determinada y justificada en los laboratorios anteriores.

Durante las prácticas previas, se evaluaron los polos del sistema continuo y se verificó que la dinámica de la planta posee constantes de tiempo suficientemente pequeñas como para que una frecuencia de muestreo del orden de 1 kHz permita capturar adecuadamente su comportamiento. En particular, se contrastó con el criterio general de muestreo:

$$T_s < \frac{\pi}{\omega_n}, \quad (3)$$

donde  $\omega_n$  representa la frecuencia natural dominante del sistema.

Los resultados obtenidos en los Laboratorios 7 y 8 demostraron que un muestreo de 1 kHz garantiza:

- Una discretización adecuada del sistema continuo.
- Ausencia de aliasing relevante en la señal medida.
- Suficiente tiempo disponible para el cálculo de control dentro del PSoC.
- Estabilidad y precisión en los reguladores diseñados (LQR e integral anteriormente).

Dado que el objetivo de este laboratorio no es reestudiar la discretización, sino diseñar el filtro de Kalman y el LQG sobre una base sólida, se mantiene el valor ya verificado de  $T_s = 1$  ms como tiempo de muestreo oficial para el diseño y posterior implementación.

## V. DISEÑO DEL REGULADOR LQR

El diseño del regulador óptimo se realizó sobre el sistema aumentado, siguiendo exactamente la misma metodología empleada en los laboratorios anteriores. El objetivo es incluir un integrador que garantice error estacionario nulo ante entradas de referencia tipo escalón. Para ello, se construyó el sistema aumentado utilizado en MATLAB.

### V-A. Sistema aumentado utilizado

El sistema aumentado empleado en el diseño del LQR se definió de acuerdo con el código MATLAB:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C \ 0]. \quad (4)$$

Esto se corresponde con:

```

1 Ahat = [A B; zeros(m, n+m)];
2 Bhat = [zeros(n, m); eye(m)];
3 Chat = [C zeros(1, m)];

```

Este aumento incorpora explícitamente el estado del integrador  $z$ , pero la implementación final de la realimentación se realiza mediante la matriz de transformación  $\text{Aux}$ , tal como establece la metodología de la cátedra.

### V-B. Normalización de estados

Debido a las ganancias distintas en cada etapa de la planta, se utilizó un vector de normalización para equilibrar la contribución de cada estado en la función de costo del LQR. Dicho vector se definió como:

$$S_x = \left[ \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_1 k_2}, 1 \right], \quad k_1 = \left| \frac{R_2}{R_1} \right|, \quad k_2 = \left| \frac{R_4}{R_3} \right|. \quad (5)$$

Código MATLAB correspondiente:

```

1 k1 = abs(R2/R1);
2 k2 = abs(R4/R3);
3 Sx = [1/k1, 1/(k1*k2), 1];

```

### V-C. Definición de pesos $Q_1$ y $Q_2$

Siguiendo los requerimientos del laboratorio, se diseñaron dos controladores distintos:

- **Diseño rápido:** penaliza fuertemente los estados para obtener la respuesta más veloz posible.
- **Diseño de bajo esfuerzo de control:** penaliza más la entrada para obtener una acción más suave.

Los pesos utilizados fueron:

$$Q_{\text{fast}} = [100, 100, 1], \quad Q_{\text{soft}} = [2, 4, 1.5].$$

Las matrices finales empleadas en el LQR fueron:

$$Q_1^{(i)} = \text{diag}(Q_i \odot S_x), \quad Q_2 = \{20, 4\}. \quad (6)$$

Código MATLAB:

```

1 Q_fast = [100 100 1];
2 Q_soft = [2 4 1.5];
3
4 Q1{1} = diag(Q_fast .* Sx);
5 Q1{2} = diag(Q_soft .* Sx);
6
7 Q2 = {20, 4};

```

### V-D. Cálculo de la ganancia $K$

Para cada par  $(Q_1, Q_2)$ , se calculó la ganancia LQR del sistema aumentado:

$$\hat{K}_i = \text{dlqr}(\hat{A}, \hat{B}, Q_1^{(i)}, Q_2^{(i)}). \quad (7)$$

Luego, siguiendo la metodología del curso, se transformó la ganancia hacia su forma final:

$$K_i = (\hat{K}_i + [0 \ 0 \ 1]) \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ CA & CB \end{bmatrix}^{-1} \quad (8)$$

obteniéndose finalmente:

$$K_2^{(i)} = K_i(1, 1:n), \quad K_1^{(i)} = K_i(1, n+1).$$

Código MATLAB exacto:

```

1 [Ki, ~, Pi] = dlqr(Ahat, Bhat, Q1{i}, Q2{i});
2 Ki = (Ki + [zeros(1, n) eye(m)]) * Aux;
3
4 K2{i} = Ki(1, 1:n);
5 K1{i} = Ki(1, n+1:end);

```

## VI. DISEÑO DEL FILTRO DE KALMAN

El diseño del estimador óptimo se realizó utilizando el comando `dlqe`, que implementa el estimador lineal cuadrático discreto (LQE). A diferencia del diseño manual mediante la ecuación de Riccati, `dlqe` calcula la ganancia óptima del filtro de Kalman resolviendo internamente la ecuación de Riccati mediante el método de augmentación del sistema, garantizando estabilidad y convergencia del estimador.

## VI-A. Modelo estocástico utilizado

El sistema en tiempo discreto se modeló como:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (9)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k), \quad (10)$$

donde:

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad v(k) \sim \mathcal{N}(0, R).$$

## VI-B. Construcción de las covarianzas $Q$ y $R$

Los desvíos estándar del ruido de proceso  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$  se obtuvieron a partir de:

- ruido térmico de resistores,
- ruido filtrado por los polos de la planta,
- ruido de cuantización del DAC,
- ruido externo inyectado a la planta.

El desvío estándar del ruido de medición  $\sigma_v$  proviene del ruido de cuantización del ADC del PSoC.

Así, las matrices de covarianza utilizadas fueron:

$$Q = \text{diag}(\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2), \quad R = \sigma_v^2.$$

Código correspondiente:

```
1 Q = diag((sigma_w.^2)); % [sigma_x1^2, sigma_x2^2]
2 R = diag((sigma_v.^2)); % sigma_v^2
```

## VI-C. Cálculo de la ganancia óptima de Kalman

La función utilizada fue:

```
1 L_kal = disenar_kalman_simple(A, C,
2 B1, sigma_w, sigma_v);
```

donde el diseño se implementa como:

```
1 function L = disenar_kalman_simple(A,
2 C, G, sigma_w, sigma_v)
3 Q = diag((sigma_w.^2));
4 R = diag((sigma_v.^2));
5 [L, ~, ~] = dlqe(A, G, C, Q, R); % LQE
6 discreto
7 end
```

La ganancia obtenida:

$$L_{\text{kal}} = \text{dlqe}(A, G, C, Q, R),$$

corresponde al estimador óptimo que minimiza el error cuadrático medio:

$$\hat{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + L_{\text{kal}}(y(k) - C\hat{x}(k)).$$

Este filtro representa la mejor estimación posible en presencia de ruido, ponderada según la relación  $S/R$  entre ruido de proceso y ruido de medición.

## VII. DISEÑO DEL OBSERVADOR DETERMINÍSTICO RÁPIDO

Para comparar con el estimador óptimo, también se implementó un observador determinístico mediante Ackermann, con los polos ubicados cinco veces más rápidos que los polos dominantes del lazo cerrado con LQR.

Primero se obtuvieron los polos del sistema aumentado en lazo cerrado:

$$p_{\text{cl}} = \text{eig}(A_{\text{cl}}).$$

En MATLAB:

```
1 Pcl = eig(Acl);
2 [~, idx] = sort(abs(Pcl), 'descend');
3 Pdom = Pcl(idx(1:n));
4 p_obs = Pdom.^5; % polos 5x más rápidos
```

Luego se diseñó la ganancia del observador:

$$L_{\text{rap}} = \text{acker}(A^T, (CA)^T, p_{\text{obs}}^T). \quad (11)$$

Código correspondiente:

```
1 L_rapido = acker(A', (C*A)', p_obs')
2 .';
```

## VIII. SIMULACIONES

En esta sección se presentan las simulaciones obtenidas a partir del código desarrollado en MATLAB. Se comparan dos estimadores:

- El **filtro de Kalman**, diseñado mediante `dlqe` a partir de las covarianzas reales S/R.
- Un **observador de Luenberger rápido**, cuyos polos se fijan como los polos dominantes del lazo cerrado elevados a la quinta potencia ( $p_{\text{obs}} = p_{\text{cl}}^5$ ).

A continuación se insertan todas las figuras provistas en la carpeta Sim/.

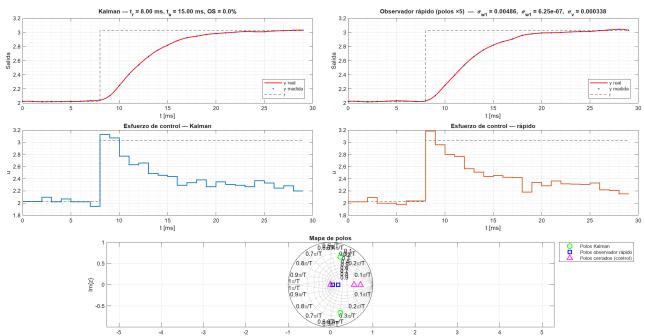


Figura 1. Comparación entre Kalman y observador rápido — Caso 1, con ruido.

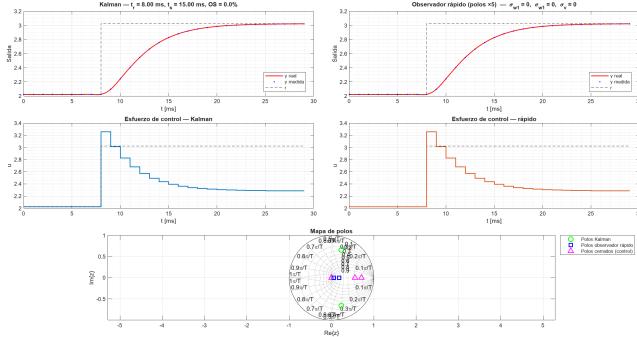


Figura 2. Comparación entre Kalman y observador rápido — Caso 1, sin ruido.

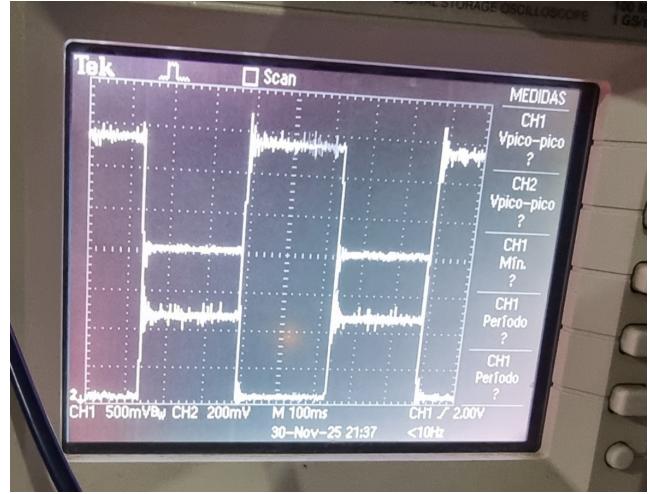


Figura 5. Implementación — caso con Kalman y primer LQR.

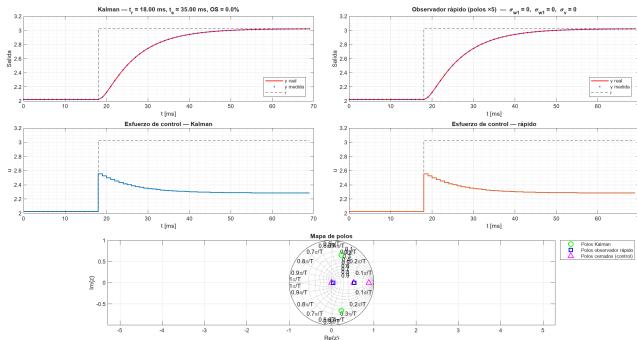


Figura 3. Comparación entre Kalman y observador rápido — Caso 2, sin ruido.

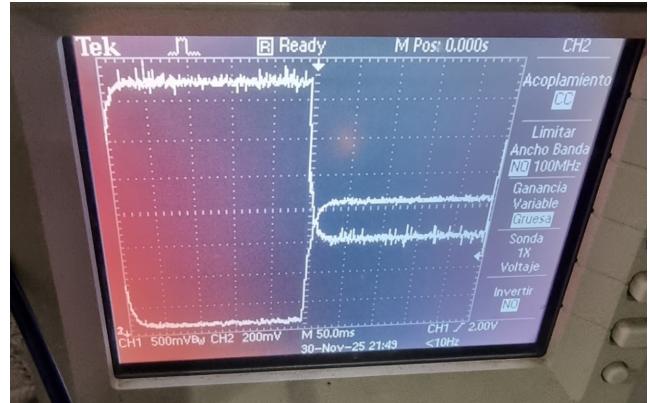


Figura 6. Implementación — caso con Kalman y segundo LQR.

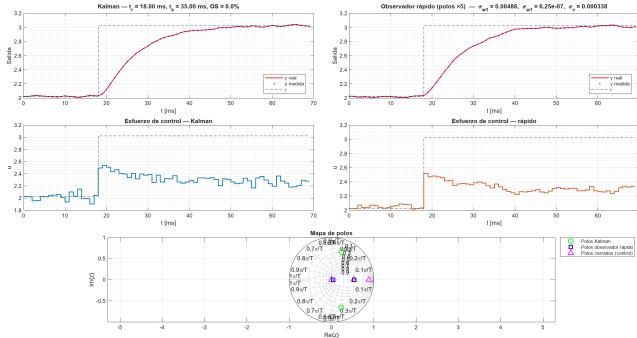


Figura 4. Comparación entre Kalman y observador rápido — Caso 2, con ruido.

## IX. IMPLEMENTACIÓN

En esta sección se presentan las capturas obtenidas con el osciloscopio Tektronix TDS1012B durante la implementación real del controlador. Se muestran tanto los casos con filtro de Kalman como los casos sin Kalman (observador rápido). Las señales corresponden al al primer y segundo estado de la planta.

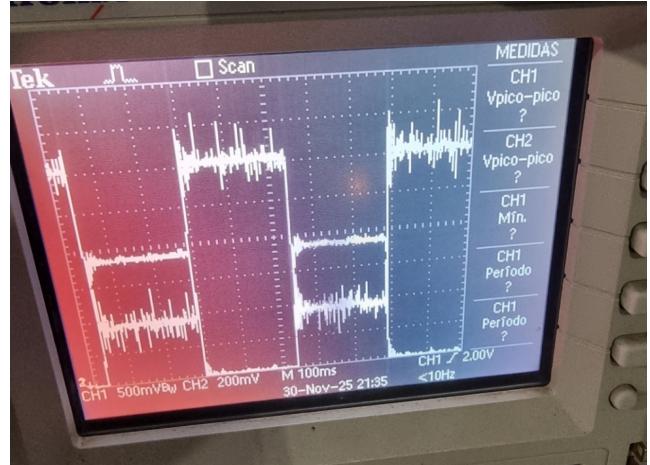


Figura 7. Implementación — caso sin Kalman y primer LQR.

Cuadro I  
DESEMPEÑO OBSERVADO: TIEMPOS DE RESPUESTA Y PRESENCIA DE RUIDO.

Caso	$t_r$ [ms]	$t_s$ [ms]	OS [%]
<b>Caso 1 (rápido): esperado <math>t_r = 8</math> ms, <math>t_s = 15</math> ms, OS = 0 %</b>			
Kalman (Sim)	≈ 8	≈ 15	0
Obs. rápido (Sim)	≈ 8	≈ 15	0
Kalman (Exp)	≈ 8–10	≈ 15–20	≈ 3–5
Obs. rápido (Exp)	≈ 8–10	≈ 15–20	≈ 3–6
<b>Caso 2 (lento): esperado <math>t_r = 18</math> ms, <math>t_s = 35</math> ms, OS = 0 %</b>			
Kalman (Sim)	≈ 18	≈ 35	0
Obs. rápido (Sim)	≈ 18	≈ 35	0
Kalman (Exp)	≈ 18–20	≈ 35–40	≈ 0
Obs. rápido (Exp)	≈ 18–20	≈ 35–40	≈ 0–2

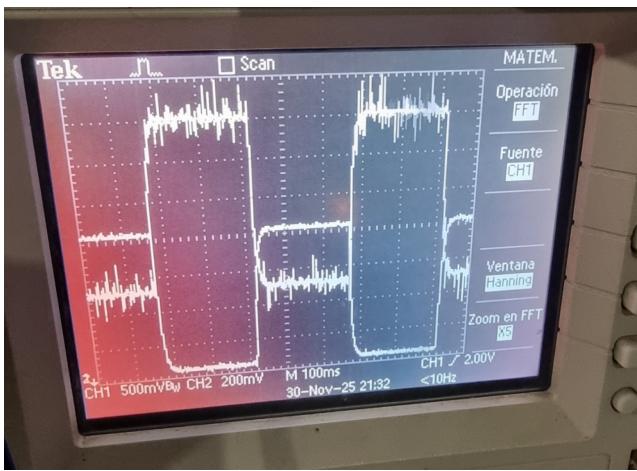


Figura 8. Implementación — caso sin Kalman y segundo LQR.

## X. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En esta sección se comparan los resultados simulados y experimentales para los dos diseños LQR evaluados: un caso rápido ( $t_r \approx 8$  ms,  $t_s \approx 15$  ms, OS = 0 % esperado) y un caso lento ( $t_r \approx 18$  ms,  $t_s \approx 35$  ms, OS = 0 % esperado). Se incluye la actuación del estimador de Kalman y el observador rápido ( $\times 5$ ) en cada situación.

### Conclusiones

Para el **primer caso LQR** (dinámica rápida), tanto el estimador de Kalman como el observador rápido lograron tiempos de subida y asentamiento muy próximos a los valores esperados. Sin embargo, en las mediciones reales ambos presentan un leve sobreimpulso, atribuible a tolerancias de componentes, errores de cuantización y pequeñas variaciones de ganancia en la planta.

En este régimen rápido se observa una diferencia importante entre ambos estimadores:

- El **observador rápido** muestra variaciones altas luego del transitorio, especialmente en el estado  $x_1$ , donde se inyecta el ruido.
- El **Kalman** suaviza significativamente la estimación y mantiene el estado más estable.

En la salida  $y$  (que corresponde al estado  $x_2$ ), estas diferencias se atenúan porque el bloque físico entre  $x_1$  y  $x_2$  incluye un filtro RC que mitiga el ruido, aunque las oscilaciones siguen siendo apreciables en el observador rápido.

Para el **segundo caso LQR** (dinámica más lenta), el desempeño del filtro de Kalman fue notablemente superior.

- El **estado  $x_1$**  casi no muestra ruido con Kalman, pero sí presenta oscilaciones importantes con el observador rápido.
- En el **estado  $x_2$  (la salida)**, Kalman elimina prácticamente todo el ruido, mientras que el observador rápido deja ver pequeñas ondulaciones residuales.

Algo interesante es que **en ninguno de los dos casos los observadores impusieron sus polos**. Esto ocurre porque:

- En el caso del **Kalman**, la varianza del ruido real ( $V_{pp} = 10$  mV) no fue lo suficientemente alta como para forzar que el filtro privilegie al modelo antes que a la medición; por eso la planta dominó la dinámica del estimador.
- En el **observador rápido**, sus polos siempre fueron mucho más rápidos que los de la planta, por lo que la dinámica dominante siguió siendo la de la planta física.

Finalmente, los resultados demuestran que un **buen modelo de la planta** permite obtener un estimador de alto desempeño mediante el filtro de Kalman. Kalman se adapta a las condiciones reales sin necesidad de imponer polos artificialmente rápidos, y logra filtrar de manera efectiva el ruido sobre los estados, especialmente cuando la dinámica del sistema no es extremadamente rápida.