

Trabajo Práctico: Helicóptero vertical de un solo eje.

Elías Álvarez

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción
Asunción, Paraguay

Email: elias.alvarez@universidadcatolica.edu.py

Tania Romero

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción
Asunción, Paraguay

Email: tania.romero@universidadcatolica.edu.py

Resumen—En este trabajo práctico se estudia el control de altura de una planta experimental basada en un sistema de propulsión vertical mediante un motor brushless controlado electrónicamente. La planta consiste en un cuerpo móvil guiado mecánicamente en el eje vertical, cuya posición es medida mediante un sensor de distancia láser y regulada a través de una señal PWM aplicada a un controlador electrónico de velocidad (ESC).

Index Terms—control de altura, sistemas dinámicos, identificación de sistemas, control PID, Lugar de raíces, Diagrama de Bode, control en espacio de estados, LQG, PSoC, TFMini, ESC, PWM

I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas propulsados verticalmente constituye un problema clásico dentro de la ingeniería de control, particularmente cuando la dinámica presenta inestabilidad inherente, no linealidades y limitaciones físicas severas. En este trabajo se aborda la regulación y seguimiento de referencia de una planta experimental de tercer orden, caracterizada por un comportamiento inestable en lazo abierto, presencia de polos complejos dominantes, un integrador y ceros que afectan significativamente la respuesta dinámica del sistema.

Más allá del modelo teórico, la planta real introduce múltiples no idealidades: saturaciones estrictas del actuador, fricción variable debida a imperfecciones mecánicas en los rieles de guiado, variación del punto de operación asociada a la descarga progresiva de la batería, dinámica propia del motor y del ESC, y ruido de medición proveniente del sensor láser utilizado. Estas condiciones convierten el problema en un banco de pruebas exigente para evaluar la robustez y aplicabilidad práctica de distintas estrategias de control.

Un aspecto central del trabajo fue la obtención de un modelo lineal representativo del sistema alrededor del punto de operación de hover, incluyendo la identificación experimental del esfuerzo de equilibrio y la caracterización del ruido de medición y proceso. La calidad de este modelo resultó determinante para el desempeño de los métodos de control modernos, particularmente aquellos basados en espacio de estados y estimación óptima.

Sobre esta misma planta se implementaron y compararon distintas filosofías de diseño, desde enfoques clásicos hasta control óptimo con estimación de estados, evaluando su desempeño no sólo en simulación sino también mediante validación experimental directa. Esta comparación permite analizar en condiciones reales las ventajas, limitaciones y requerimientos de modelado de cada metodología.

El objetivo del trabajo no se limita a la obtención de un regulador funcional, sino a estudiar la relación entre complejidad del método, dependencia del modelo y desempeño obtenido en un sistema físico con restricciones reales.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los sistemas de regulación de altura basados en propulsión vertical constituyen un caso particularmente exigente dentro del control automático, debido a la interacción entre dinámica inestable, restricciones físicas del actuador y presencia de no idealidades significativas.

La planta considerada consiste en un cuerpo móvil guiado en el eje vertical, cuya posición depende del equilibrio entre la fuerza gravitatoria y el empuje generado por un motor brushless accionado mediante un controlador electrónico de velocidad (ESC). En lazo abierto, el sistema presenta comportamiento inestable, dinámica de orden superior con integrador y características no mínimas que condicionan la respuesta transitoria.

Adicionalmente, el sistema físico opera bajo restricciones reales, entre ellas saturaciones estrictas del esfuerzo de control, variaciones del punto de operación asociadas a la descarga de la batería, fricción no uniforme en los rieles de guiado, dinámica propia del conjunto motor-ESC y ruido de medición proveniente del sensor de distancia.

Estas características introducen limitaciones estructurales en el desempeño alcanzable y dificultan la obtención de un modelo lineal simple que represente adecuadamente la dinámica dominante alrededor del punto de operación.

En consecuencia, el problema central consiste en modelar y controlar un sistema vertical inherentemente inestable, sujeto a restricciones físicas y perturbaciones reales, garantizando estabilidad, seguimiento de referencia y desempeño transitorio aceptable en condiciones experimentales.

III. OBJETIVOS

III-A. Objetivo general

Modelar y controlar la altura de una planta experimental basada en propulsión vertical, mediante la aplicación y comparación de técnicas clásicas y modernas de control automático, evaluando su desempeño teórico y experimental sobre el sistema físico real.

III-B. Objetivos específicos

- Obtener un modelo dinámico representativo de la planta a partir del análisis físico y la identificación experimental alrededor del punto de operación.
- Diseñar e implementar técnicas clásicas de control discreto, incluyendo:
 - Control PID.
 - Diseño mediante lugar de las raíces.
 - Diseño basado en diagramas de Bode.
 - Síntesis directa (Truxal–Ragazzini), considerando el efecto de oscilaciones intramuestra.
- Diseñar e implementar técnicas modernas de control, tales como:
 - Ubicación arbitraria de polos en espacio de estados.
 - Control con acción integral.
 - Regulador cuadrático lineal (LQR).
 - Estimación de estados mediante filtro de Kalman.
- Comparar las distintas estrategias de control en términos de estabilidad, respuesta transitoria, error en régimen permanente, esfuerzo de control y robustez frente a perturbaciones y restricciones físicas del sistema.
- Analizar las diferencias entre el comportamiento teórico predicho por los modelos y el desempeño experimental observado en la planta real.

IV. CARACTERIZACIÓN FÍSICA DE LA PLANTA

IV-A. Descripción general de la planta

La planta desarrollada corresponde a un sistema mecatrónico cuyo movimiento dominante es una **traslación vertical**. El empuje aerodinámico generado por un motor brushless con hélice, accionado mediante un ESC, permite regular la altura de un cuerpo móvil guiado mecánicamente a lo largo de una estructura vertical.

Si bien el movimiento principal es unidimensional, la configuración mecánica admite **pequeños desplazamientos angulares y laterales**. Las abrazaderas que vinculan el cuerpo móvil con las guías poseen cierta holgura deliberada, con el objetivo de evitar atascamientos debido a las deformaciones inherentes de las vigas metálicas. Esta holgura permite rotaciones del orden de algunos grados, generalmente inferiores a 10°.

Estas rotaciones se ven favorecidas por una distribución de masas no perfectamente simétrica, producto de la incorporación tardía de disipadores térmicos en el ESC, junto con el cableado y la cuerda de seguridad. Aunque estos movimientos no alteran significativamente la medición directa de altura, sí influyen en la dinámica global del sistema, dificultando su representación mediante modelos simplificados de cuerpo libre ideal.

IV-B. Estructura física de la planta

La estructura fue diseñada específicamente para el desarrollo experimental de estrategias de control en altura. La versión



Figura 1. Vista general de la planta física.

inicial poseía aproximadamente 80 cm de altura total; posteriormente se extendió hasta 165 cm, obteniéndose una altura útil de movimiento cercana a 134 cm.

La base consiste en una placa de madera de 50 × 45 cm y aproximadamente 2 cm de espesor. En la parte superior se dispone un techo de 50 × 50 cm y 0,6 cm de espesor. Ambas superficies se encuentran unidas mediante tres columnas verticales de madera.

El guiado vertical se realiza mediante tres vigas metálicas paralelas de aproximadamente 0,6 cm de diámetro. Estas presentan deformaciones inherentes asociadas a su longitud y material. Se diseñaron soportes impresos en 3D para fijarlas a la base y al techo, ajustándose empíricamente para asegurar una separación uniforme.

IV-C. Cuerpo móvil y rediseño estructural

El cuerpo móvil se desplaza mediante abrazaderas impresas en 3D cuyo diámetro interno es superior al de las vigas, permitiendo libertad angular controlada.

En la primera versión del sistema, uno de los brazos estructurales se fracturó en la zona de unión con los soportes principales debido a un impacto. Las uniones presentaban transiciones geométricas abruptas que concentraban esfuerzos.

En el rediseño se incorporaron **curvaturas suaves y transiciones tangenciales** entre elementos estructurales, mejorando la distribución de cargas. Asimismo, se implementó un esquema de acople tipo “rompecabezas” entre brazos y soportes, permitiendo apoyo mutuo antes de la fijación mediante tornillos y tuercas.

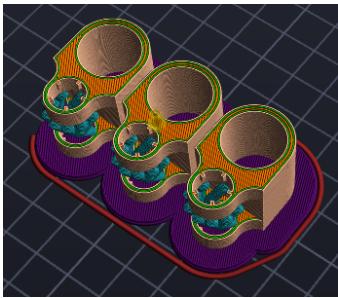


Figura 2. Diseño 3D final de la abrazadera con agarre tipo “muñeca”.

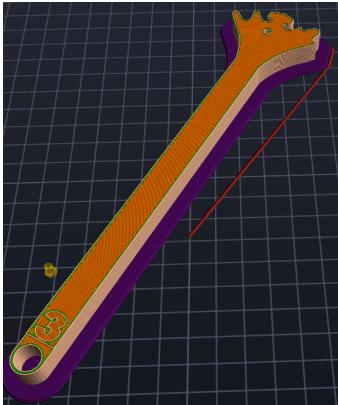


Figura 3. Diseño 3D final del brazo estructural.

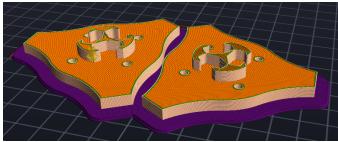


Figura 4. Diseño 3D final de los soportes principales del cuerpo móvil (superior e inferior).

La masa total del conjunto móvil, incluyendo motor, hélice, batería, ESC, cableado y elementos solidarios al movimiento, es aproximadamente:

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

IV-D. Sistema de actuación

El sistema de propulsión está compuesto por:

- Motor brushless A2212/5T, 2450 KV [1].
- Hélice bipala de 25 cm de diámetro.
- ESC de 40 A [2].
- Batería LiPo 3S [3], utilizada entre 12.55 V y 11.55 V.

El empuje generado depende fuertemente del comando PWM aplicado y del voltaje instantáneo de la batería. Experimentalmente, alrededor del punto de hover y con batería completamente cargada, el empuje incremental puede aproximarse linealmente en un rango reducido, con una variación



Figura 5. Motor brushless A2212/5T.



Figura 6. Hélice utilizada en la planta.



Figura 7. Controlador electrónico de velocidad (ESC) de 40A.



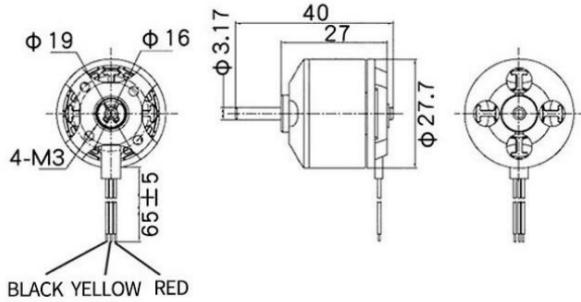
Figura 8. Batería LiPo 3S utilizada.

aproximada de $1.2 g_f$ por microsegundo de PWM. Fuera de dicho rango el comportamiento presenta saturaciones y marcada no linealidad.

IV-E. Sistema de sensado

La medición de altura se realiza mediante un sensor óptico TFMini Plus [4].

La señal presenta resolución del orden del centímetro en el rango utilizado. Experimentalmente se observó una latencia global aproximada de 200 ms entre la aplicación de un cambio abrupto en la señal de control y la detección de una variación



MOTOR PERFORMANCE DATA (性能参数) :

MODEL	KV (rpm/V)	Voltage (V)	Prop	Load Current (A)	Pull (g)	Power (W)	Efficiency (g/W)	Lipo Cell	Weight (g) Approx
	930		1060	9.8	660	109	6.1		60
	1000		1047	15.6	885	173	5.1		61
A2212	1400	11.1	9050	19.0	910	210	4.3		61
	2200		6030	21.5	732	239	3.1	2-3S	62
	2450		6.3	25.2	815	280	2.9		62

Figura 9. Características del motor A2212/5T [1].



Figura 10. Sensor óptico de distancia TFmini Plus.

apreciable en la medición, resultado combinado de la dinámica mecánica, respuesta del actuador y características del sensado.

IV-F. Variables y no idealidades

- Entrada: $u(t) = \text{PWM} \in [1000, 2000] \mu\text{s}$
- Salida: $y(t) = z(t)$

Principales no idealidades:

- Saturación del actuador.
- Dinámica no instantánea del conjunto motor-ESC-hélice.

- Variabilidad paramétrica asociada a la caída de tensión de la batería.
- Fricción no uniforme en las guías.
- Vibraciones y pequeñas rotaciones inducidas por holguras estructurales y desbalance de masas.

V. DIAGRAMA DEL SISTEMA

La Figura 11 representa la arquitectura real del sistema de control implementado. El esquema refleja el flujo físico y computacional efectivo del sistema, integrando diseño en MATLAB, ejecución embebida en el PSoC, cadena de potencia y sensado.

En operación normal en lazo cerrado, el flujo es:

MATLAB → PSoC → ESC → Motor → Planta → Sensor → PSoC → MATLAB

La referencia de altura es generada en MATLAB y transmitida al PSoC mediante el protocolo UARTRP. Simultáneamente, el microcontrolador recibe la medición de altura proveniente del sensor TFMini Plus. Con esta información, el firmware ejecuta el algoritmo de control seleccionado y calcula el esfuerzo requerido.

La señal de control se expresa como una variación relativa respecto al punto de hover estimado, generándose un comando PWM enviado al ESC. En esta etapa intervienen errores numéricos asociados a operaciones en punto flotante de 32 bits y su posterior conversión a formato entero para la generación del PWM.

El ESC introduce su propia dinámica interna —no completamente modelada— asociada a la conmutación del puente trifásico, tiempos muertos y estrategias internas de protección. Esta etapa incorpora ruido de proceso eléctrico y dinámicas adicionales no ideales.

El motor brushless convierte la excitación trifásica en velocidad angular, la cual genera empuje aerodinámico mediante la hélice. Esta conversión introduce dinámica electromecánica adicional y no linealidades dependientes del voltaje instantáneo de la batería.

La planta impone su dinámica inercial vertical junto con efectos no modelados tales como:

- pequeñas rotaciones y vibraciones transversales,
- fricción no uniforme en las guías,
- variaciones paramétricas asociadas a la descarga de batería,
- saturaciones del actuador.

El sensor TFMini mide la altura real incorporando ruido de medición, cuantización y latencia. La señal es enviada nuevamente al PSoC, cerrando el lazo.

Adicionalmente, el sistema implementa un canal de **telemetría en tiempo real**. El PSoC transmite a MATLAB el par de variables:

$$[u_k, y_k]$$

permitiendo visualizar en tiempo real tanto el esfuerzo aplicado como la altura medida, así como almacenar el historial para análisis posterior.

Para evitar saturación del canal UART, se introduce un parámetro N configurable desde MATLAB que actúa como divisor de muestreo. Si la frecuencia de control es F_s , la frecuencia efectiva de transmisión es:

$$F_{\text{stream}} = \frac{F_s}{N}$$

En caso de llenado del buffer UART, las muestras se descartan deliberadamente, priorizando la ejecución determinística del algoritmo de control por sobre la integridad del registro de datos.

En el diagrama se indican explícitamente las fuentes de ruido tanto en la cadena de potencia como en la cadena de medición, reflejando las no idealidades presentes en el sistema físico real.

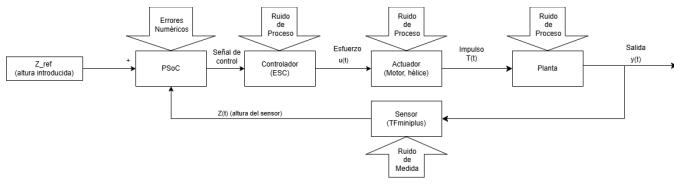


Figura 11. Diagrama de bloques del sistema de control implementado.

V-A. Rutina automática de estimación de hover

Antes de iniciar cualquier sesión de control en lazo cerrado, el sistema ejecuta automáticamente una rutina de estimación del punto de hover.

Este procedimiento se diseñó para independizar el funcionamiento del controlador respecto al voltaje instantáneo de la batería, evitando la necesidad de medirla o modelar su descarga.

La secuencia es la siguiente:

1. Se fija temporalmente la frecuencia de muestreo en 1000 Hz.
2. Se aplica una rampa creciente de PWM.
3. Se detectan vibraciones o desplazamientos mínimos sostenidos en la medición.
4. Se identifica el valor de PWM correspondiente al inicio de sustentación.

Una vez detectado el hover, el sistema permite que el cuerpo móvil experimente el transitorio inicial de subida (del orden de 30 a 50 cm). Luego de que este transitorio se amortigua, se modifica la frecuencia de muestreo del sensor al valor previamente configurado y recién entonces comienza la ejecución del algoritmo de control seleccionado.

Este mecanismo constituye una estrategia adicional para garantizar funcionamiento robusto frente a variaciones de batería y condiciones mecánicas sin necesidad de modelado explícito de dichos efectos.

V-B. Modos de operación

El firmware permite operar el sistema en seis modos diferenciados:

1. Lazo abierto: MATLAB envía directamente un valor de PWM relativo al hover estimado. No se ejecuta ningún algoritmo de realimentación. Se utiliza para caracterización y validación experimental.

2. Control por función de transferencia discreta (TF): Se reciben coeficientes del numerador y denominador y se calcula el esfuerzo a partir del error interno.

3. Espacio de estados con observador predictor: Estimación de estados mediante observador predictor, pues sólo se mide la altura.

4. Espacio de estados con observador predictor e integrador: Extiende el modo anterior incorporando integración del error con el fin de eliminar el error en régimen permanente y mejorar la robustez frente a perturbaciones y variaciones paramétricas.

5. Espacio de estados con observador actual: Estimación de estados mediante esquema actual con predicción y corrección de la misma.

6. Espacio de estados con observador actual e integrador: Combina estimación actual con integración del error con el mismo objetivo que el modo 4.

En todos los modos en espacio de estados se utiliza observador, dado que únicamente se dispone de medición directa de altura, no pudiendo implementar control sin Observadores.

V-C. Gestión de parada y seguridad

Cuando se recibe el comando STOP desde MATLAB, el sistema no se detiene abruptamente. Se ejecuta una rampa descendente de la señal relativa Δu hasta un valor fijo por debajo del hover, dependiente del valor estimado en esa sesión.

Este valor se mantiene durante un tiempo predeterminado, calculado a partir del tiempo estimado de caída libre desde la altura máxima del sistema multiplicado por un factor de seguridad. De esta manera se garantiza un descenso suave y controlado.

Adicionalmente, el sistema incorpora un botón físico conectado al PSoC que deshabilita directamente el módulo PWM por hardware, cortando completamente la señal enviada al ESC. Este mecanismo actúa como freno de emergencia independiente del software.

V-D. Flujo de energía

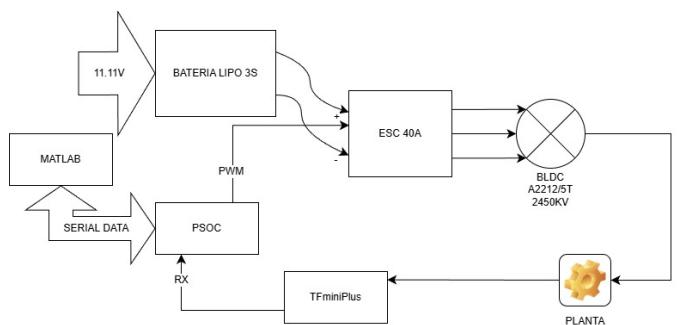


Figura 12. Diagrama de implementación física y flujo energético.

La batería LiPo 3S constituye la fuente de energía primaria. Se opera en el rango aproximado:

$$V \in [11,5, 12,5] \text{ V}$$

para preservar la integridad química de las celdas.

El ESC de 40 A convierte la tensión continua en señales trifásicas moduladas. Incorpora disipadores térmicos sobre los dispositivos de potencia, necesarios debido al régimen elevado de corriente.

El tiempo de operación continua se limita típicamente a 2–3 minutos para evitar descargas profundas y sobrecalentamiento. El tiempo de recarga es aproximadamente 1,5 h, lo que introduce restricciones prácticas en la repetición de ensayos.

En esta etapa no se realiza acción de control, sino conversión y transferencia de energía hacia el actuador.

VI. MODELADO FÍSICO DEL SISTEMA

VI-A. Variables y convenciones

Se definen a continuación las variables y convenciones empleadas en el modelado del sistema:

- Eje vertical z , definido positivo hacia arriba.
- Masa móvil:

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

- Aceleración de la gravedad:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

- Peso del cuerpo móvil:

$$mg = 3.924 \text{ N}$$

- Entrada del sistema: señal PWM tipo servo a 50 Hz,

$$u \in [1000, 2000] \mu\text{s}$$

Durante la operación experimental, la señal se restringe intencionalmente al intervalo:

$$u \in [1100, 1700] \mu\text{s}$$

Esta limitación surge de criterios de seguridad térmica y confiabilidad. En ensayos previos se observaron riesgos térmicos al operar sostenidamente en valores elevados bajo carga.

Asimismo, el límite inferior evita regiones cercanas a la detención del motor, donde aparecen comportamientos fuertemente no lineales y pérdida abrupta de sustentación. En consecuencia, el modelo identificado y las estrategias de control desarrolladas se consideran válidos únicamente dentro de este rango operativo seguro.

- Trabajo en coordenadas relativas respecto al punto de hover:

$$\Delta u = u - u_0$$

donde u_0 es el PWM necesario para generar un empuje equivalente al peso del sistema.

- Salida medida:

$$y = z$$

correspondiente a la altura medida mediante el sensor TFMini Plus.

VI-A0a. Consideración sobre las unidades utilizadas:

La identificación y el diseño de control se realizaron utilizando directamente las unidades nativas del sistema físico: centímetros para la altura y microsegundos para el PWM.

Si bien el uso de unidades del Sistema Internacional podría facilitar la interpretación física directa de algunos parámetros, se optó por trabajar en las unidades reales de operación debido a que:

- el sensor entrega la medición en centímetros,
- el actuador es comandado mediante pulsos PWM en microsegundos,
- el firmware del PSoC opera naturalmente en dichas magnitudes.

Trabajar en las unidades operativas evitó conversiones intermedias innecesarias, reduciendo complejidad y posibles errores de escala en la implementación embebida.

Desde el punto de vista del modelado lineal, el cambio de unidades sólo afecta la escala de ganancia del sistema, sin modificar polos, ceros ni estructura dinámica.

VI-A1. Modelo físico simplificado: En una primera aproximación ideal, el movimiento vertical puede describirse como:

$$\dot{z} = v$$

$$m\dot{v} = T - mg$$

lo que conduce a una estructura de doble integración entre empuje y posición.

Incorporando pérdidas mecánicas equivalentes, puede agregarse un término viscoso:

$$m\ddot{v} = T - mg - bv$$

donde b representa fricción equivalente.

Sin embargo, los ensayos experimentales muestran comportamientos que no pueden ser capturados adecuadamente por un modelo puramente integrador o de segundo orden simple.

VI-A2. Evidencia experimental de comportamiento no mínimo-fase: Durante la identificación experimental se observaron respuestas repetibles en las cuales, ante escalones pequeños alrededor del punto de operación ($\Delta u \approx 100 \mu\text{s}$ por encima del hover, siendo estas lo suficientemente grandes como para excitar todos los modos del sistema), la altura presenta inicialmente una leve disminución antes de iniciar el ascenso.

Estos ensayos:

- se realizaron lejos de saturación,
- utilizaron amplitudes similares,
- fueron repetidos múltiples veces,
- arrojaron consistentemente el mismo patrón cualitativo.

Esta respuesta inversa es característica de sistemas no mínimo-fase. Los modelos sin cero en el semiplano derecho

no lograron reproducir esta inversión inicial ni la curvatura transitoria observada.

Por lo tanto, desde el punto de vista de modelado lineal equivalente alrededor del hover, la inclusión de un cero no mínimo-fase resulta necesaria para capturar la dinámica dominante observada experimentalmente.

VI-A3. Justificación del orden del modelo: Se ensayaron modelos continuos de segundo a quinto orden utilizando herramientas de identificación.

Los modelos de menor orden no lograron reproducir simultáneamente:

- la inversión inicial observada,
- la curvatura transitoria,
- la pendiente dinámica correcta.

El modelo de tercer orden fue el mínimo orden capaz de capturar estas características sin introducir complejidad innecesaria.

VI-A4. Identificación experimental: El modelo fue obtenido mediante la *System Identification Toolbox* de MATLAB.

Se utilizaron registros experimentales en lazo abierto en coordenadas relativas, eliminando offsets de esfuerzo y altura para linealizar alrededor del punto de operación.

Las excitaciones consistieron en escalones pequeños aplicados sobre el hover, limitando el rango de entrada a regiones aproximadamente lineales.

Se ensayaron distintas estructuras paramétricas, seleccionándose aquella que mejor reprodujo los datos experimentales bajo validación cruzada y análisis de residuales.

VI-A5. Función de transferencia continua equivalente: El modelo continuo identificado puede expresarse como:

$$G(s) = \frac{-0.12107(s - 14)(s + 10.62)}{(s + 0.0002797)(s^2 + 5.61s + 14.02)}$$

El polo en $s = -0.0002797$ posee una constante de tiempo extremadamente lenta respecto de la duración típica de los experimentos (del orden de segundos).

La eliminación de dicho polo produce diferencias menores que el nivel de ruido del sensor y no altera de manera apreciable la dinámica relevante para el diseño de control.

En consecuencia, se adopta la forma simplificada:

$$G(s) = \frac{-0.12107(s - 14)(s + 10.62)}{s(s^2 + 5.61s + 14.02)}$$

En esta representación:

- El polo en el origen representa el carácter integrador dominante de la posición vertical.
- El término de segundo orden modela la dinámica agregada del actuador y la estructura.
- El cero en el semiplano derecho es consistente con la respuesta inversa observada experimentalmente.

VI-A6. Validez del modelo: El modelo adoptado constituye una aproximación coherente con la física del sistema y adecuada para el diseño de control dentro del rango operativo:

$$u \in [1100, 1700] \mu\text{s}$$

Fuera de dicho intervalo, el sistema presenta no linealidades aerodinámicas, fricción no lineal, saturaciones y posibles limitaciones térmicas que no son capturadas por el modelo lineal simplificado.

VII. MÉTODOS CLÁSICOS DE CONTROL

VII-A. Introducción

Los métodos clásicos de control se fundamentan en el análisis de sistemas lineales mediante funciones de transferencia y herramientas del dominio de la frecuencia y del plano complejo.

En este enfoque, la dinámica del sistema se representa como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{o en tiempo discreto} \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

El objetivo del diseño consiste en definir un controlador C tal que el lazo cerrado:

$$G_{cl} = \frac{CG}{1 + CG}$$

cumpla simultáneamente:

- Estabilidad.
- Respuesta transitoria adecuada.
- Error estacionario reducido.
- Robustez frente a incertidumbres.

En este trabajo se implementaron y evaluaron las siguientes técnicas clásicas:

- Controlador PID.
- Diseño por Lugar de Raíces.
- Diseño mediante Respuesta en Frecuencia (Bode).
- Síntesis Directa (Truxal–Ragazzini).

VII-B. Modelo de la Planta

El diseño clásico parte de la función de transferencia discreta identificada:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

El tiempo de muestreo utilizado depende de la experiencia considerada, ya que los distintos controladores fueron desarrollados en paralelo por los miembros del grupo con diferentes enfoques de diseño.

VII-C. Criterio general de estabilidad

Para sistemas discretos, la estabilidad en lazo cerrado requiere que todos los polos satisfagan:

$$|z_i| < 1$$

Este criterio será verificado en cada uno de los métodos desarrollados.

VII-D. Controlador PID

Durante las etapas iniciales de diseño se intentó sintonizar un controlador PID utilizando la herramienta PID Tuner de MATLAB. Sin embargo, el desempeño obtenido no resultó adecuado para la planta bajo estudio, por lo que se decidió adoptar una formulación alternativa que permitiera un mayor control estructural sobre el comportamiento dinámico del sistema.

En consecuencia, se implementó un controlador PID basado en la formulación propuesta por Åström, directamente en su versión discreta. Esta decisión permitió diseñar el controlador coherentemente con el tiempo de muestreo del sistema, evitando discretizaciones posteriores y manteniendo consistencia entre simulación e implementación embebida.

El controlador opera en coordenadas relativas al punto de hover previamente estimado, es decir, la señal de control generada corresponde a una variación Δu respecto del equilibrio.

VII-D1. Formulación del PID de Åström [5]: La estructura implementada separa explícitamente las acciones proporcional, integral y derivativa.

La acción proporcional se define como:

$$P(k) = K(b r(k) - y(k))$$

donde K es la ganancia proporcional y b pondera la contribución de la referencia en la acción proporcional. En este trabajo se adoptó deliberadamente $b = 1$ por simplicidad estructural, evitando introducir grados adicionales de libertad innecesarios.

La acción derivativa se implementa mediante un filtro de primer orden:

$$D(k) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(k-1) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} (y(k) - y(k-1))$$

donde T_d es la constante derivativa, N limita el ancho de banda del término derivativo y h es el período de muestreo.

La inclusión del parámetro N resulta fundamental para evitar la amplificación excesiva del ruido de medición en altas frecuencias, fenómeno relevante dado que el sensor TFMini presenta cuantización del orden de centímetros.

La acción integral se describe como:

$$I(k) = I(k-1) + \frac{Kh}{T_i} e(k)$$

donde T_i es la constante integral y $e(k) = r(k) - y(k)$ es el error de control.

La señal de control total es:

$$u(k) = P(k) + I(k) + D(k)$$

VII-D2. Antiwindup: La acción integral se encuentra condicionada mediante un esquema de antiwindup por integración condicional. El término integral se actualiza únicamente cuando la señal de control no se encuentra saturada, o cuando el error contribuye a desaturar el actuador.

Este mecanismo evita acumulación indebida del estado integral y previene comportamientos abruptos ante saturaciones del PWM, mejorando la estabilidad práctica del sistema.

VII-D3. Criterios de sintonización: La sintonización se realizó de forma iterativa directamente sobre la estructura discreta del controlador, variando los parámetros en el siguiente orden:

1. Ajuste de la ganancia proporcional K hasta aproximar el sistema al límite de estabilidad para obtener una respuesta rápida.
2. Incorporación y ajuste del término integral T_i para eliminar error estacionario sin introducir oscilaciones excesivas.
3. Incorporación del término derivativo T_d para mejorar amortiguamiento y reducir sobreimpulso.
4. Ajuste del parámetro N como compromiso entre efectividad de la acción derivativa y rechazo de ruido.

Durante todo el proceso se monitoreó cuidadosamente el esfuerzo de control. Como restricción experimental de diseño se impuso que la variación de la señal PWM no excediera aproximadamente $10\ \mu\text{s}$ por centímetro de incremento en la altura, garantizando que el actuador no ingresara en saturación ni se expusiera la planta a condiciones potencialmente dañinas.

VII-D4. Resultados: Los parámetros implementados fueron:

$$K_p = 2.5, \quad T_i = 5, \quad T_d = 0.1, \quad N = 3$$

Con un tiempo de muestreo $T_s = 1\text{ms}$.

En la simulación del modelo lineal se obtuvo:

$$\%OS_{\text{sim}} \approx 46\%, \quad t_r^{\text{sim}} = 0.397 \text{ s}$$

En la implementación experimental se observaron los siguientes valores de sobreimpulso según la altura de referencia:

- Para 57 cm: $\%OS = 28.07\%$
- Para 78 cm: $\%OS = 11.54\%$
- Para 90 cm: $\%OS \approx 0\%$

El tiempo de subida experimental fue:

$$t_r^{\text{exp}} = 0.393 \text{ s}$$

Se observa una coincidencia prácticamente exacta entre el tiempo de subida simulado y el experimental, lo cual valida la capacidad del modelo lineal para capturar la dinámica dominante del sistema.

Por otra parte, el sobreimpulso experimental disminuye progresivamente a medida que aumenta la altura de operación. Este comportamiento se asocia a variaciones del punto de operación y a no linealidades no completamente capturadas por el modelo lineal identificado.

VII-D5. Conclusiones sobre el método: Desde el punto de vista práctico, el controlador PID basado en la formulación de Åström demostró ser una herramienta sumamente eficaz para el control de la planta.

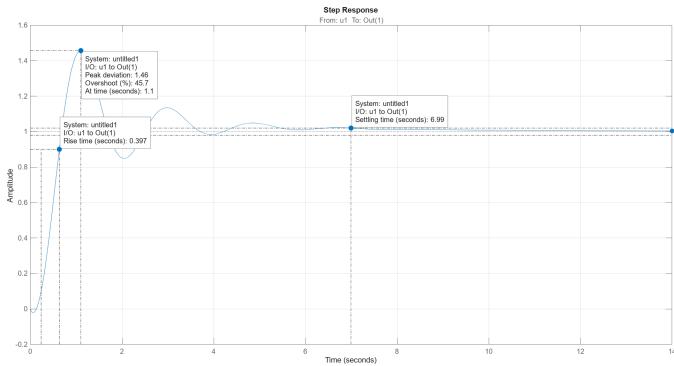


Figura 13. Respuesta al escalón con el controlador PID.

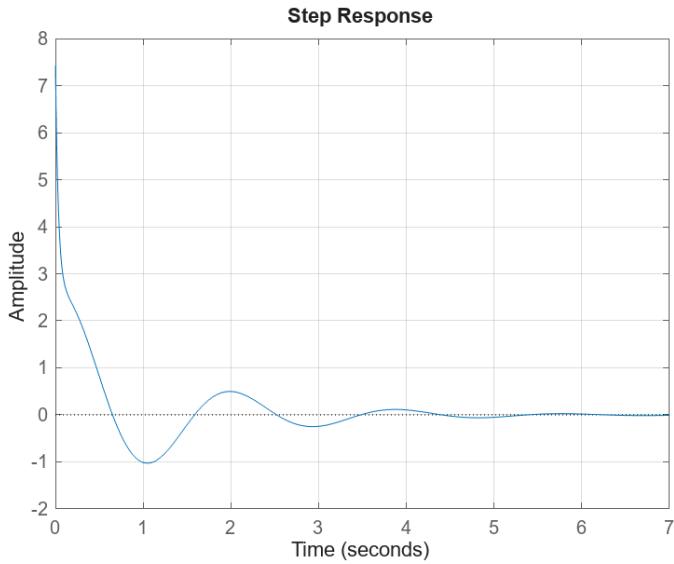


Figura 14. Esfuerzo de control con el PID implementado.

Uno de los aspectos más destacables es la relativa simplicidad con la que puede obtenerse una respuesta dinámica deseada. A diferencia de otros enfoques que requieren un conocimiento detallado de la estructura interna del sistema, el PID permite alcanzar un comportamiento satisfactorio mediante ajuste iterativo de un número reducido de parámetros, sin necesidad de un modelado exhaustivo ni de una comprensión profunda de todos los fenómenos físicos involucrados.

En este trabajo, aun considerando la presencia de dinámicas no modeladas, el PID logró reproducir con notable precisión el tiempo de subida predicho por el modelo y mantener estabilidad robusta en la implementación experimental.

Las diferencias observadas en el sobreimpulso entre simulación y práctica pueden atribuirse principalmente a características no modeladas ya mencionadas con anterioridad. Sin embargo, incluso bajo estas condiciones, el comportamiento general del sistema se mantuvo cercano al previsto teóricamente.

Asimismo, la inclusión del parámetro N en la acción deriva-

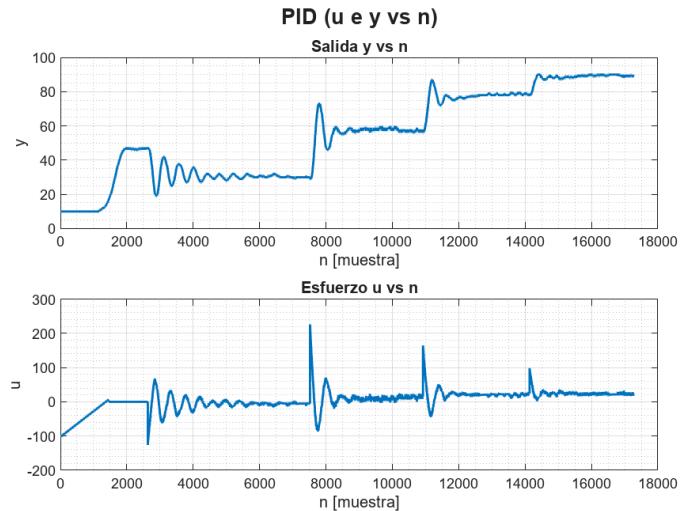


Figura 15. Implementación práctica del controlador PID.

tiva permitió limitar la amplificación de ruido de alta frecuencia, resultando en un esfuerzo de control significativamente más limpio que el obtenido mediante otras metodologías analizadas más adelante. Este aspecto resulta particularmente atractivo en una gran variedad de casos reales.

En síntesis, el controlador PID demostró ofrecer una solución de alta relación beneficio-complejidad: requiere bajo conocimiento estructural del sistema, es sencillo de implementar en hardware embebido y permite obtener un desempeño dinámico competitivo dentro del rango operativo seguro de la planta.

VII-E. Diseño por Lugar de Raíces

El método de Lugar de Raíces se fundamenta en el análisis directo de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

Las raíces de esta ecuación determinan los polos del sistema compensado. En el dominio discreto, la condición de estabilidad interna exige que:

$$|z_i| < 1 \quad \forall i$$

es decir, que todos los polos del lazo cerrado se encuentren estrictamente dentro del círculo unitario.

VII-E1. Inestabilidad discreta de la planta: La planta identificada presenta polos ubicados sobre el perímetro del círculo unitario, lo que implica que el sistema en lazo abierto es criticamente inestable tanto en el dominio continuo como discreto.

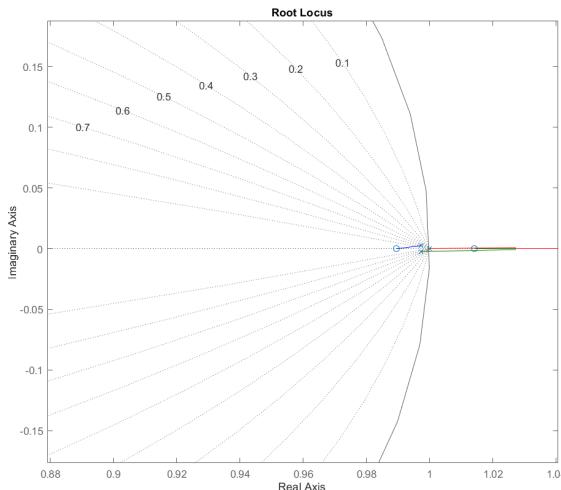


Figura 16. Ubicación de los polos de la planta sin compensar en el plano z . Se observa la presencia de polos sobre o fuera del círculo unitario, indicando inestabilidad discreta.

En consecuencia, el objetivo del diseño no consistió únicamente en mejorar el desempeño dinámico, sino en estabilizar activamente la planta mediante la adecuada selección de un compensador.

Los criterios de diseño adoptados fueron:

- Desplazar todos los polos del lazo cerrado dentro del círculo unitario.
- Obtener una respuesta sobreamortiguada, sin sobreimpulso.
- Mantener el esfuerzo de control dentro de límites físicamente realizable.

VII-E2. Frecuencia de muestreo: Para este método en particular se determinó utilizar una frecuencia de muestreo de:

$$F_s = 1000 \text{ Hz}$$

Esta decisión se tomó inicialmente con el objetivo de capturar adecuadamente la dinámica identificada y aproximar el comportamiento discreto al continuo.

Sin embargo, la elección de una frecuencia de muestreo elevada produjo que los polos discretos asociados a las dinámicas relevantes quedaran extremadamente próximos a $z = 1$. Esto generó un fenómeno que puede interpretarse como un **desaprovechamiento geométrico del plano Z**, ya que la región efectiva donde se desarrollaba la dinámica quedó concentrada en un sector muy reducido cercano al borde del círculo unitario.

En estas condiciones, pequeñas variaciones en la ganancia del compensador producían desplazamientos significativos de los polos en el plano discreto, aumentando la sensibilidad numérica del diseño.

Posteriormente se verificó que el controlador también hubiese funcionado correctamente para frecuencias menores (200 Hz o 100 Hz), donde el plano Z resulta mejor aprovechado geométricamente y la sensibilidad disminuye. No obstante, el diseño a 1000 Hz permitió experimentar de manera directa los efectos teóricos asociados a la selección del período de muestreo.

VII-E3. Elección de la estructura del compensador: Para estabilizar el sistema se adoptó una estructura de tipo **lag-lead** (atraso–adelanto).

El término *lead* permitió:

- Incrementar el margen de fase.
- Desplazar los polos dominantes hacia regiones asociadas a mayor amortiguamiento.
- Mejorar el desempeño transitorio.

El término *lag* permitió:

- Ajustar la ganancia en bajas frecuencias.
- Mejorar el comportamiento estacionario.
- Reducir la sensibilidad global del sistema.

La adecuada ubicación de ceros modificó la geometría del lugar de raíces, atrayendo las trayectorias hacia el interior del círculo unitario.

VII-E4. Determinación de la ganancia: Una vez definida la estructura del compensador, se analizó el lugar de raíces del sistema compensado.

Se observó una elevada sensibilidad respecto a la ganancia K . Pequeños incrementos en su valor provocaban que las trayectorias abandonaran la región estable antes de satisfacer las especificaciones dinámicas deseadas.

Esta sensibilidad se atribuye a:

- La naturaleza originalmente inestable de la planta.
- La proximidad de los polos discretos a $z = 1$.
- La frecuencia de muestreo elevada.

El compensador finalmente adoptado fue:

$$C(z) = -0.0173 \frac{(z - 1.0140)(z - 0.5)}{(z - 0.9522)(z - 0.9894)} \quad (1)$$

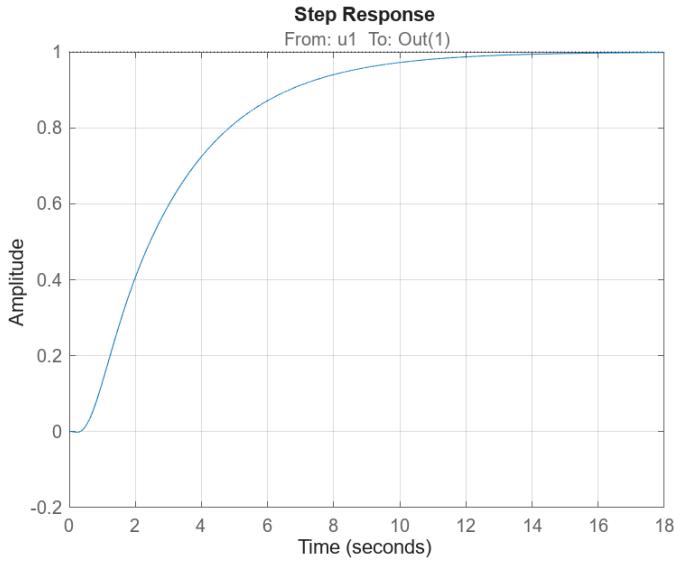


Figura 18. Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado con el compensador diseñado.

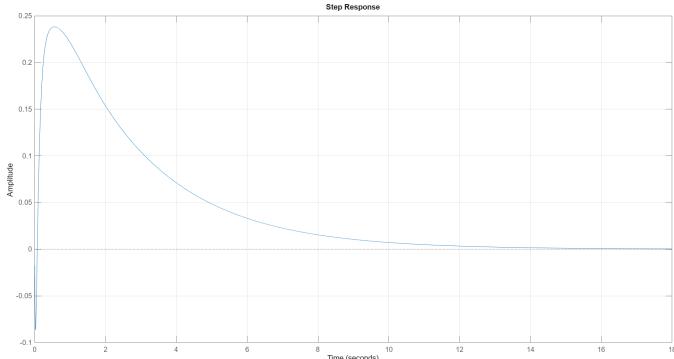


Figura 19. Esfuerzo de control en lazo cerrado con el compensador diseñado.

VII-E5. Optimización basada en especificaciones: Con el fin de sistematizar el ajuste y evitar la extrema sensibilidad manual, se utilizó la herramienta Optimization-Based Tuning de MATLAB.

Este enfoque permitió:

- Definir especificaciones temporales deseadas.
- Ajustar automáticamente los parámetros del compensador.
- Verificar estabilidad discreta.

El resultado fue un compensador cuyos polos en lazo cerrado

se ubican completamente dentro del círculo unitario.

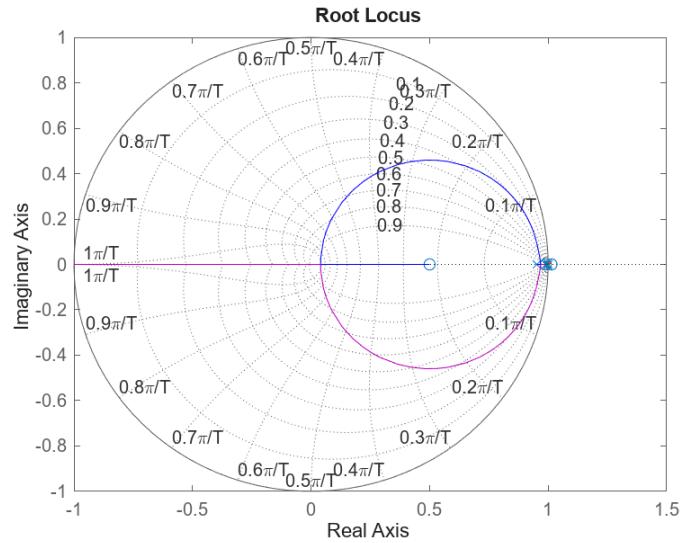


Figura 17. Ubicación de los polos del sistema compensado en el plano z . Se verifica estabilidad discreta.

VII-E6. Resultados en simulación: La respuesta temporal simulada del modelo lineal mostró:

- Comportamiento sobreamortiguado.
- Ausencia de sobreimpulso.
- Tiempo de subida aproximado de 5 s.

El esfuerzo de control obtenido en simulación se mantuvo dentro de límites aceptables:

VII-E7. Resultados experimentales: En la implementación práctica se obtuvo:

$$t_r^{\text{exp}} = 1.068 \text{ s a } 2.3 \text{ s}$$

sin presencia de sobreimpulso.

Se observa que el sistema real resulta considerablemente más rápido que el modelo simulado. Esta discrepancia puede atribuirse a:

- Simplificaciones del modelo lineal.
- Dinámicas no modeladas.
- Sensibilidad numérica asociada al uso de un período de muestreo no adecuado.

No obstante, el esfuerzo aplicado en la práctica resultó visualmente muy similar al predicho por simulación, validando parcialmente la estructura del compensador adoptado.

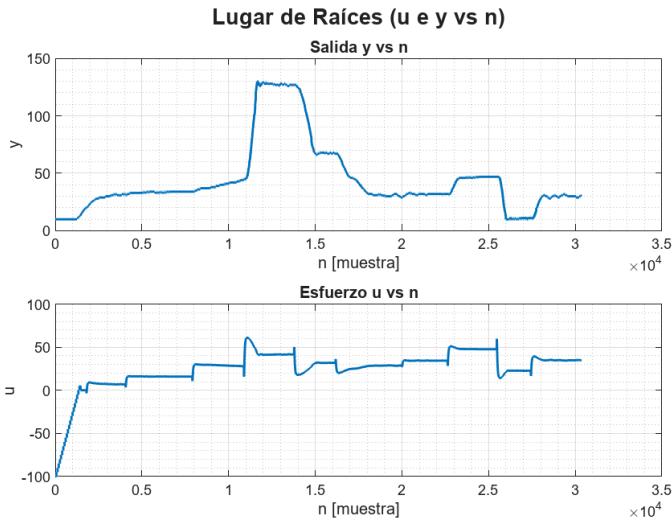


Figura 20. Implementación práctica del controlador diseñado por Lugar de Raíces.

VII-E8. Conclusión del método: El diseño por Lugar de Raíces permitió estabilizar una planta originalmente inestable

en el dominio discreto, garantizando que los polos del lazo cerrado se ubiquen dentro del círculo unitario. El método demostró ser geométricamente intuitivo y conceptualmente potente, ya que permite visualizar directamente la relación entre ganancia, ubicación de polos y desempeño dinámico.

En esta aplicación particular se evidenció:

- Alta sensibilidad paramétrica.
- Fuerte dependencia de la frecuencia de muestreo.
- Reducción efectiva del espacio geométrico utilizable en el plano Z al emplear una frecuencia de muestreo elevada.

No obstante, el controlador diseñado logró un comportamiento sobreamortiguado sin sobreimpulso y con esfuerzo físicamente realizable.

Una ventaja significativa del método es que, mediante los parámetros clásicos de segundo orden (ζ y ω_n), puede anticiparse de manera intuitiva el comportamiento del lazo cerrado sin necesidad inmediata de herramientas de simulación. La comprensión profunda de la relación entre el plano Z y la respuesta transitoria resultó especialmente enriquecedora en la práctica, permitiendo interpretar directamente los efectos de la ubicación de polos en el desempeño observado.

VII-F. Diseño por Respuesta en Frecuencia

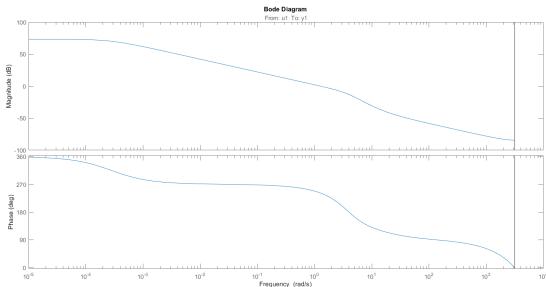


Figura 21. Respuesta en frecuencia del lazo abierto del sistema identificado sin compensación.

Para el diseño del controlador basado en el método de respuesta en frecuencia se utilizó directamente el modelo discreto identificado de la planta $G(z)$, obtenido mediante identificación experimental y presentado en secciones anteriores.

El modelo fue incorporado al entorno `controlSystemDesigner` de MATLAB, lo que permitió analizar la respuesta en frecuencia del lazo abierto y ajustar el compensador de manera interactiva a partir de los diagramas de Bode.

VII-F1. Análisis del sistema sin compensar: En la Fig. 22 se presenta el diagrama de Bode correspondiente al lazo abierto conformado únicamente por la planta identificada.

A partir del análisis en frecuencia se obtuvieron los siguientes márgenes iniciales:

- Margen de ganancia: 13 dB,
- Margen de fase: 61,700°.

Si bien el sistema presenta margen de fase positivo, lo que implica estabilidad para ganancias moderadas, la frecuencia de cruce se encuentra relativamente baja, lo que se traduce en una respuesta temporal lenta.

La pendiente del módulo en la región de cruce evidencia la influencia de múltiples polos dominantes, coherentes con la dinámica de orden superior asociada al conjunto motor-ESC-hélice.

VII-F2. Diseño del compensador proporcional: En este caso particular se optó por implementar un compensador puramente proporcional:

$$C(z) = K_p, \quad K_p = 1.308$$

Por lo tanto, el lazo abierto queda:

$$L(z) = K_p G(z)$$

La acción del controlador proporcional consiste exclusivamente en escalar la magnitud del lazo abierto sin introducir polos ni ceros adicionales. Desde el punto de vista del diagrama de Bode, esto implica un desplazamiento vertical del módulo, modificando la frecuencia de cruce y, en consecuencia, los márgenes de estabilidad.

El aumento de K_p incrementa la frecuencia de cruce, lo que produce:

- Mayor ancho de banda del sistema.
- Reducción del tiempo de subida.
- Respuesta temporal más rápida.

Si bien no se introduce compensación dinámica de fase, el incremento de ganancia resulta suficiente para mejorar significativamente la rapidez de respuesta manteniendo márgenes aceptables.

VII-F3. Análisis del sistema compensado: En la Fig. 23 se presenta el diagrama de Bode del sistema compensado.

Los márgenes obtenidos fueron:

■ **Sistema sin compensación:**

- Margen de ganancia: 13 dB,
- Margen de fase: 61,700°.

■ **Sistema compensado:**

- Margen de ganancia: 10.6 dB,
- Margen de fase: 52,900°.

Se observa una reducción controlada del margen de fase como consecuencia del aumento de la frecuencia de cruce. No obstante, el sistema mantiene estabilidad relativa adecuada.

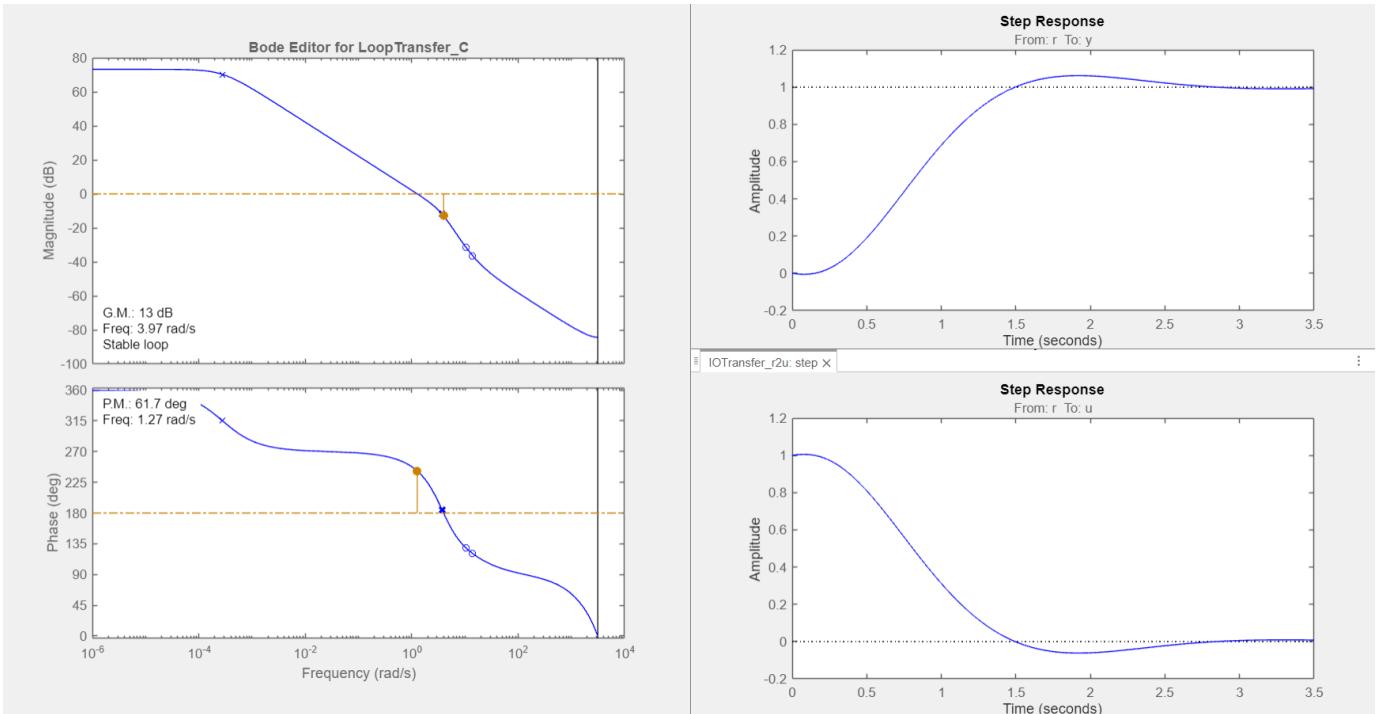


Figura 22. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

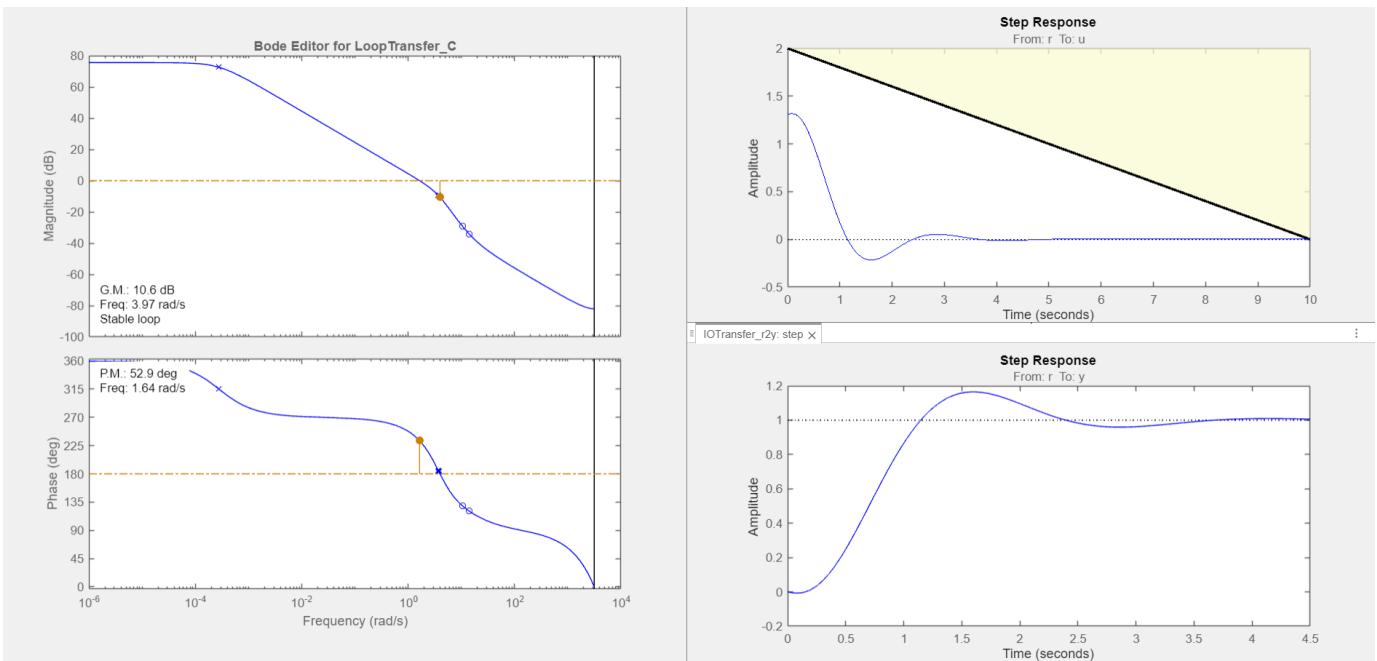


Figura 23. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

La validación del diseño se realizó mediante la respuesta temporal en lazo cerrado. El sistema compensado presentó:

- Reducción significativa del tiempo de subida.
- Sobreimpulso moderado.
- Esfuerzo dentro de límites aceptables.

VII-G. Práctica

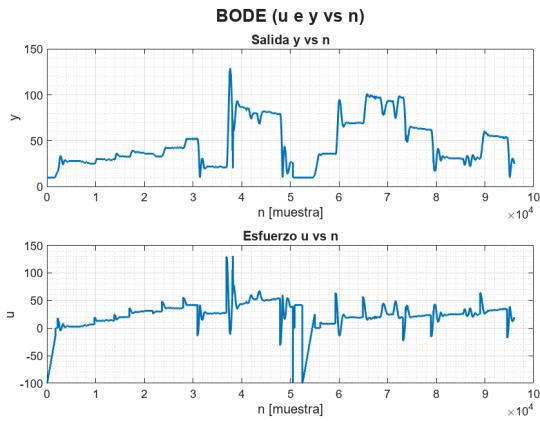


Figura 24. Respuesta experimental: altura y esfuerzo con el compensador proporcional.

Compensador utilizado:

$$C_{Bode} = 1.3082$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = 0.0001 \text{ s}$$

El sobreimpulso simulado fue aproximadamente 20 %. En la implementación experimental se observó:

- Primer levantamiento: $\%OS = 55.55\%$,

- Levantamiento posterior: $\%OS \approx 37\%$,
- Tendencia decreciente al aumentar la altura.

Esta variabilidad sugiere dependencia del punto de operación, condiciones iniciales y no linealidades del empuje.

Se observa además que durante el primer levantamiento el esfuerzo aplicado es mayor al inicio, disminuyendo a medida que el sistema se approxima al equilibrio dinámico.

VII-G1. Conclusión del método: El método basado en respuesta en frecuencia permitió evaluar de manera directa y sencilla la estabilidad relativa del sistema mediante los márgenes de fase y ganancia.

A diferencia del Lugar de Raíces, donde la estabilidad se interpreta geométricamente en el plano Z, el método de Bode permite cuantificar cuánto margen de estabilidad se posee y cuánto puede sacrificarse en favor de mayor rapidez.

El ajuste mediante un simple controlador proporcional demostró que, en este sistema particular, el aumento controlado de ganancia resulta suficiente para mejorar significativamente la respuesta temporal, incrementando el ancho de banda sin comprometer la estabilidad global.

Sin embargo, el método presenta una limitación conceptual: al trabajar exclusivamente en el dominio de la frecuencia se pierde información geométrica directa sobre la ubicación de polos y su relación exacta con parámetros transitorios como ζ y ω_n . Si bien existen aproximaciones que relacionan margen de fase y amortiguamiento, estas no son exactas.

En la práctica, esta desventaja se ve mitigada por herramientas de simulación que permiten validar la respuesta temporal rápidamente, situando al método al mismo nivel práctico que los demás enfoques analizados.

En síntesis, el diseño por respuesta en frecuencia resultó sencillo, intuitivo y efectivo, permitiendo mejorar la rapidez del sistema mediante un ajuste mínimo del controlador y manteniendo márgenes de estabilidad adecuados para la planta experimental desarrollada.

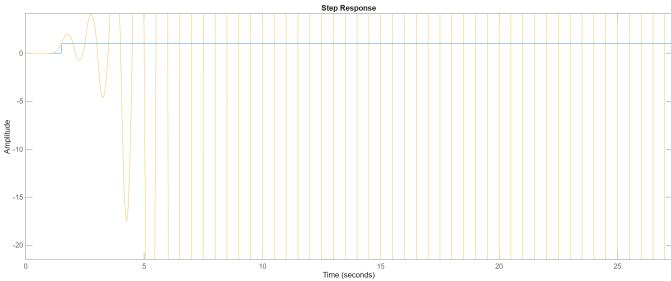


Figura 25. Respuesta al escalón con oscilaciones intramuestra.

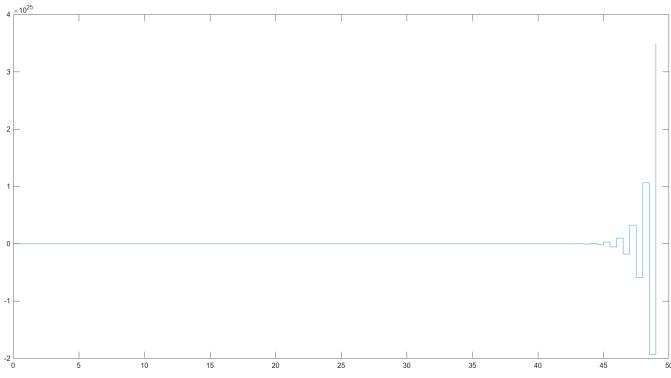


Figura 26. Esfuerzo de control asociado a $C_2(z)$.

VII-H. Síntesis Directa [6]

VII-H1. *Síntesis directa (Truxal–Ragazzini) y evaluación intramuestra:* El método de Síntesis Directa (Truxal–Ragazzini) se basa en el análisis analítico del modelo identificado de la planta para obtener explícitamente el compensador que produzca una respuesta deseada frente a una entrada particular.

A diferencia de los métodos geométricos (Lugar de Raíces) o frecuenciales (Bode), aquí se impone algebraicamente la dinámica deseada en lazo cerrado a partir del modelo $G_{ZAS}(z)$. El controlador surge de resolver directamente la ecuación:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G_{ZAS}(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)}.$$

Este enfoque es extremadamente dependiente del modelo, ya que implica esencialmente su inversión parcial o total.

VII-H1a. Frecuencia de muestreo: Se parte del modelo continuo previamente identificado, cuyos polos dominantes son:

$$p_{1,2} = -2.805 \pm j 2.4804, \quad p_3 = -0.0003.$$

Para el par complejo dominante:

$$\omega_n = \sqrt{(-2.805)^2 + (2.4804)^2} \approx 3.745 \text{ rad/s},$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \approx 0.596 \text{ Hz}.$$

Siguiendo el criterio de Nyquist, la frecuencia mínima de muestreo debería ser superior a $2f_n \approx 1.19 \text{ Hz}$.

Sin embargo, experimentalmente se observó que al aumentar la frecuencia de muestreo el esfuerzo de control crece de manera extremadamente elevada, producto de la inversión explícita del modelo y la agresividad dinámica que introduce el diseño.

Por esta razón se adoptó:

$$F_s = 2 \text{ Hz} \quad (T_s = 0.5 \text{ s}),$$

como compromiso entre rapidez y esfuerzo físicamente realizable.

El procedimiento completo se detalla en el Apéndice C.

VII-H2. Controlador con oscilaciones intramuestra: Si se resuelve directamente:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G_{ZAS}(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

para una referencia escalón con salida deseada retardada, sin imponer condiciones estructurales adicionales, se obtiene:

$$C_2(z) = \frac{z^3 - 1.16z^2 + 0.2202z - 0.0605}{0.1917z^5 + 0.3612z^4 + 0.02515z^3 - 0.1917z^2 - 0.3612z - 0.02515}.$$

En este caso se observan claramente **oscilaciones intramuestra**, es decir, variaciones significativas entre instantes de muestreo.

El esfuerzo de control resulta además de amplitud elevada, mostrando alta sensibilidad frente a pequeñas variaciones del modelo.

VII-H3. Sin oscilaciones intramuestra (Ripple-Free): Sea la función de lazo:

$$L(z) = C(z)G_{ZAS}(z) = \frac{N_L(z)}{D_L(z)}.$$

Para eliminar oscilaciones intramuestra (*ripple-free response*) deben cumplirse simultáneamente:

1. $N_L(z) + D_L(z) = z^l, \quad l \geq n$.
2. $D_L(z)$ debe poseer una raíz en $z = 1$ (sistema tipo 1).
3. No deben existir cancelaciones inestables.

Resolviendo el sistema polinómico correspondiente se obtiene:

$$C_1(z) = \frac{1.73z^2 - 0.2763z + 0.1047}{z^2 + 0.6683z + 0.04352}.$$

En este caso las oscilaciones intramuestra desaparecen, pero el esfuerzo de control continúa siendo considerablemente elevado.

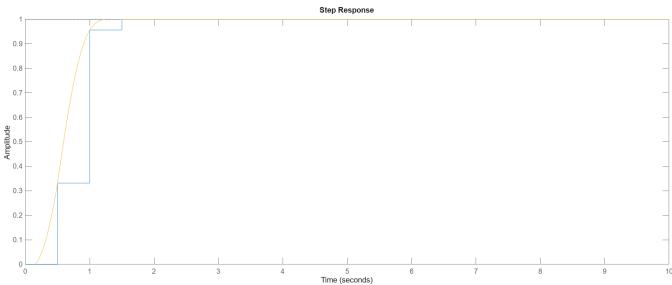


Figura 27. Respuesta al escalón sin oscilaciones intramuestra.

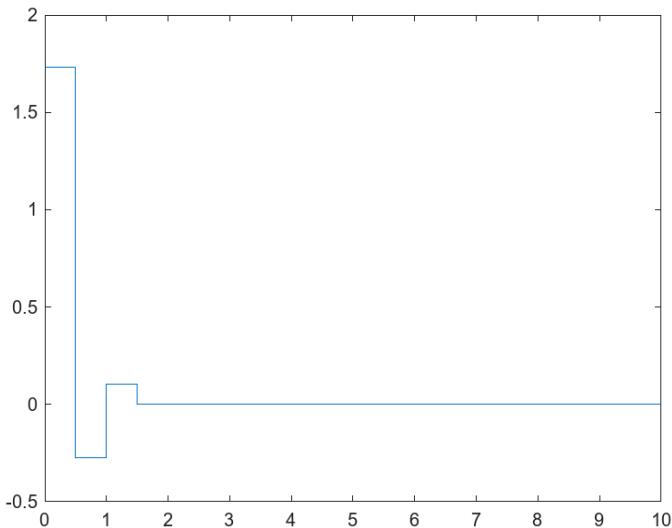


Figura 28. Esfuerzo de control asociado a $C_1(z)$.

VII-H4. Discusión y decisión experimental: Ambos controladores presentan una dinámica extremadamente agresiva.

El método, si bien matemáticamente elegante, resulta excesivamente dependiente del modelo. La inversión explícita amplifica errores de identificación, no linealidades y saturaciones del actuador.

Si se reduce el tiempo de muestreo el problema se mitiga parcialmente, pero el esfuerzo tiende rápidamente a volverse físicamente irrealizable.

Por esta razón, ninguno de los dos controladores fue implementado experimentalmente.

Estos diseños deben considerarse controladores teóricos de alta sensibilidad, útiles desde el punto de vista académico, pero no apropiados para la planta real.

Paradójicamente, el método que parece más “óptimo” desde el punto de vista algebraico resulta ser el menos robusto en la práctica.

VII-I. Comparación entre Métodos Clásicos

La aplicación de distintos métodos clásicos sobre la misma planta permitió comparar directamente su aplicabilidad práctica, su dependencia del modelo y la información que aportan para el diseño.

Desde el punto de vista de simplicidad y rapidez de implementación, el **PID** resultó claramente el método más eficiente. Permitió obtener una respuesta satisfactoria con escasa dependencia del modelo y con un proceso de ajuste directo e intuitivo. En términos puramente ingenieriles, si el objetivo es lograr funcionamiento estable con el menor esfuerzo analítico posible, el PID se posiciona como la alternativa más práctica.

El **Lugar de Raíces**, en cambio, aportó mayor profundidad conceptual. Permite visualizar explícitamente la estabilidad en el plano z , relacionar polos con desempeño transitorio y comprender geométricamente el efecto de la ganancia. Si bien exige mayor comprensión del modelo y es más sensible a la elección del período de muestreo, proporciona una cantidad de información estructural superior a la del PID.

El método basado en **Bode** resultó adecuado para analizar márgenes de estabilidad y robustez, pero menos intuitivo en relación con el comportamiento temporal. Sin herramientas de simulación, su aplicación manual se vuelve considerablemente más compleja. En esta experiencia no ofreció ventajas decisivas respecto a los métodos anteriores.

Por su parte, la **Síntesis Directa (Truxal–Ragazzini)** mostró gran elegancia analítica y rigor matemático, pero evidenció una dependencia extrema del modelo y una tendencia a generar esfuerzos de control elevados. En una planta física con saturaciones y no linealidades, esta sensibilidad la vuelve riesgosa para implementación real, quedando principalmente como herramienta académica.

En conclusión, los métodos que demostraron mayor aplicabilidad práctica en la planta experimental fueron el PID y el Lugar de Raíces: el primero por su simplicidad y robustez, el segundo por la riqueza de información que aporta. Los demás métodos resultaron valiosos conceptualmente, pero menos determinantes en la implementación experimental concreta.

VIII. MÉTODOS MODERNOS DE CONTROL

VIII-A. Introducción

A diferencia de los métodos clásicos, que se apoyan en funciones de transferencia y análisis en el dominio de la frecuencia, los métodos modernos de control se fundamentan en la **representación en espacio de estados** del sistema dinámico.

En este enfoque, la dinámica del sistema discreto se describe como:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (3)$$

donde:

- $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados,
- u_k es la entrada de control,
- y_k es la salida medida.

Este formalismo presenta ventajas estructurales relevantes respecto al enfoque clásico:

- Permite diseñar realimentación directa de estados.
- Facilita la ubicación sistemática de polos.
- Habilita la formulación de problemas de control óptimo.
- Permite incorporar estimadores de estado cuando no todos los estados son medibles.

En el sistema desarrollado, únicamente se dispone de medición directa de la altura, por lo que la reconstrucción de los estados internos mediante observadores resulta un elemento central del diseño.

VIII-A1. Modelo continuo en espacio de estados: Las matrices del modelo continuo identificado son:

$$F = \begin{bmatrix} -5.6102 & -3.5055 & -0.0314 \\ 4.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0312 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [-0.0076 \quad 0.0064 \quad 8.9975]$$

$$J = [0]$$

Este modelo representa la dinámica linealizada del sistema alrededor del punto de operación (hover), en coordenadas relativas.

VIII-A2. Modelo discreto: Para implementación digital en el PSoC, el modelo continuo se discretiza con período de muestreo T_s :

$$A = e^{FT_s}, \quad B = F^{-1}(e^{FT_s} - I)G, \quad C = H, \quad D = J.$$

El valor de T_s depende del método de diseño y de la práctica experimental, ya que diferentes estrategias de control requieren distintos compromisos entre velocidad de respuesta y sensibilidad numérica.

VIII-A3. Análisis de controlabilidad y observabilidad:

Matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = 3$$

Matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 3$$

Dado que ambos rangos coinciden con el orden del sistema, el modelo es **completamente controlable y observable**.

Esto implica que:

- Existe una señal de control capaz de influenciar todos los estados.
- La medición disponible contiene información suficiente para reconstruir el vector de estados mediante un observador.

Por lo tanto, el modelo es estructuralmente apto para diseño mediante realimentación de estados, ubicación arbitraria de polos, control óptimo LQR y estimación mediante observador de Luenberger o filtro de Kalman.

No obstante, la validez práctica en tiempo discreto depende de la adecuada elección del período de muestreo T_s , de modo que la dinámica relevante del sistema quede correctamente representada y no se introduzcan efectos de aliasing ni problemas numéricos asociados a discretizaciones excesivamente finas.

VIII-B. Ubicación Arbitraria de Polos

A partir del modelo discreto identificado (orden $n = 3$) y operando en coordenadas relativas al punto de hover, se adopta la representación:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k$$

donde la única salida medida es la altura y_k .

El objetivo del diseño por realimentación de estados consiste en definir una ganancia K tal que la dinámica en lazo cerrado:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k$$

presente polos ubicados en posiciones deseadas p_i dentro del círculo unitario:

$$\lambda(A - BK) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad |p_i| < 1.$$

La ganancia K se obtuvo mediante la función `place()` de MATLAB, aprovechando que el sistema es completamente controlable.

Para la práctica presentada se utilizó:

$$T_s = 0.02 \text{ s}, \quad F_s = 50 \text{ Hz}, \quad n = 3$$

con polos deseados del lazo cerrado:

$$p_{\text{ctrl}} = \{0.95 \pm j 0.15, 0.95\}$$

obteniéndose:

$$K = [0.6169 \quad -0.4194 \quad 0.2418].$$

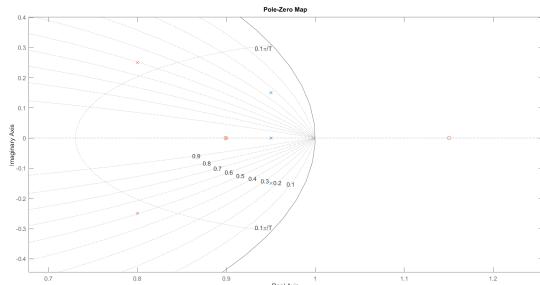


Figura 29. Mapa de polos y ceros en el plano- z : polos de la planta discreta, polos del lazo cerrado ($A - BK$) y polos de los observadores.

La Fig. 29 permite verificar que todos los polos del lazo cerrado se ubican estrictamente dentro del círculo unitario, garantizando estabilidad interna discreta.

VIII-B1. Seguimiento de referencia: Como el objetivo del sistema es seguir una referencia de altura (y no regular a cero), se incorporó un precompensador discreto N_{bar} para asegurar ganancia unitaria en régimen permanente bajo el modelo lineal:

$$u_k = N_{\text{bar}} r_k - K \hat{x}_k.$$

Para el caso de estudio se obtuvo:

$$N_{\text{bar}} = 9.1835.$$

VIII-B2. Estimación de estados: Dado que únicamente se mide la altura, el resto de estados debe estimarse. Se implementó un observador de orden completo en dos variantes.

VIII-B2a. 1) Observador predictor:

$$\hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k + L_{\text{pred}}(y_k - \hat{y}_k), \quad \hat{y}_k = C \hat{x}_k.$$

La dinámica del error queda gobernada por:

$$e_{k+1} = (A - L_{\text{pred}}C)e_k,$$

por lo que los polos del estimador se fijan mediante:

$$\lambda(A - L_{\text{pred}}C) = p_{\text{obs}}.$$

VIII-B2b. 2) Observador actual:

$$z_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k, \quad \hat{y}_{k+1}^- = C z_{k+1},$$

$$\hat{x}_{k+1} = z_{k+1} + L_{\text{act}}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^-).$$

En este caso la dinámica del error resulta:

$$e_{k+1} = (A - L_{\text{act}}CA)e_k,$$

por lo que explícitamente:

$$\lambda(A - L_{\text{act}}CA) = p_{\text{obs}}.$$

VIII-B2c. Polos seleccionados y criterio numérico: En ambos casos se utilizaron:

$$p_{\text{obs}} = \{0.8 \pm j 0.25, 0.9\}.$$

Las ganancias obtenidas fueron:

$$L_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 167.3535 \\ 253.6822 \\ 86.0310 \end{bmatrix}, \quad L_{\text{act}} = \begin{bmatrix} 126.8411 \\ 172.0621 \\ 45.1301 \end{bmatrix}.$$

La selección de p_{ctrl} y p_{obs} no fue arbitraria. Se buscó que la función `place()` reportara precisiones numéricas superiores a 10 dígitos significativos en su segundo argumento (indicador de condición numérica). En la práctica, elecciones con menor precisión comportaron imprevistos por la simulación.

Asimismo, la elección de polos excesivamente rápidos generaba ganancias de magnitud muy elevada, resultando en esfuerzos de control desmedidos y físicamente no implementables en la planta real.

VIII-B3. Principio de Separación: El principio de separación establece que la dinámica del controlador ($A - BK$) y la del observador son estructuralmente ortogonales. Esto significa que el diseño del control y el diseño del estimador pueden realizarse de manera independiente, ya que la matriz del sistema aumentado es triangular por bloques.

En consecuencia, los autovalores del sistema completo resultan de la unión:

$$\lambda_{\text{total}} = \lambda(A - BK) \cup \begin{cases} \lambda(A - L_{\text{pred}}C), & (\text{predictor}) \\ \lambda(A - L_{\text{act}}CA), & (\text{actual}). \end{cases}$$

Esto permitió ajustar separadamente la rapidez del lazo de control y la convergencia del observador.

VIII-B4. Resultados en simulación: En simulación, bajo el modelo lineal ideal, la respuesta resulta suavemente oscillatoria y con esfuerzo acotado. No se observa sobreimpulso significativo en el modelo nominal.

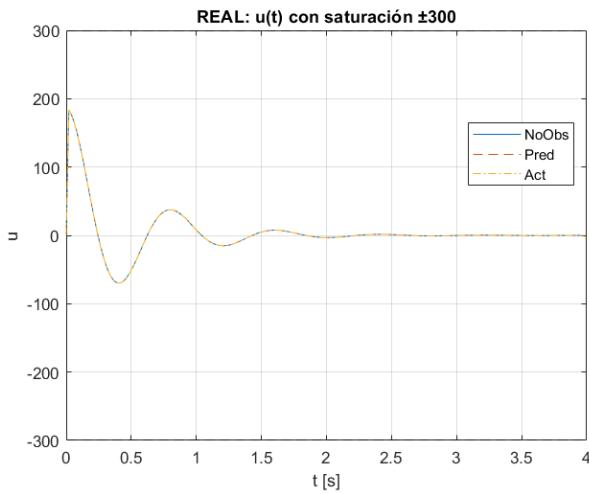


Figura 32. Esfuerzo de control con saturación.

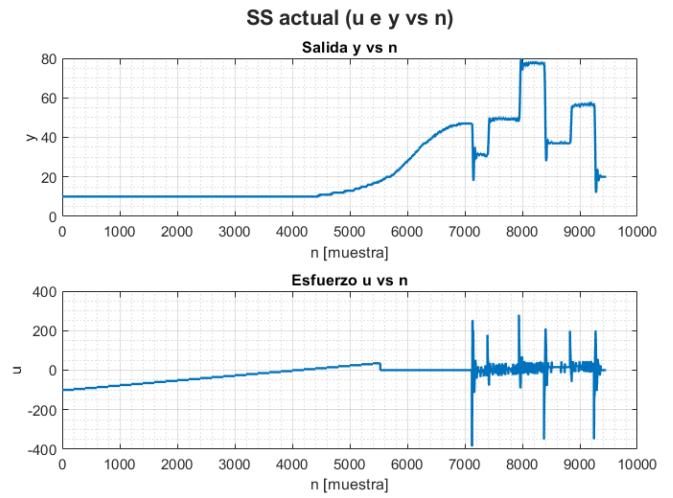


Figura 35. Implementación práctica con observador actual.

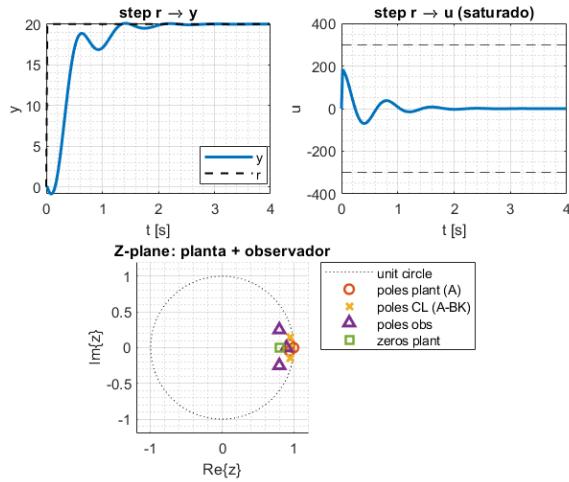


Figura 33. Resumen: respuesta, esfuerzo y círculo unitario.

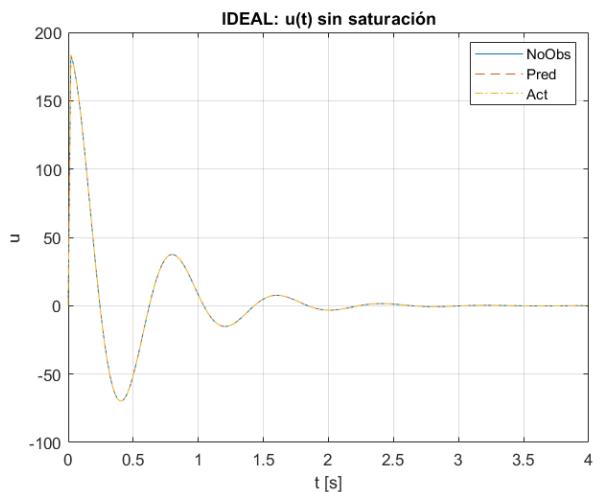


Figura 30. Respuesta temporal sin saturación.

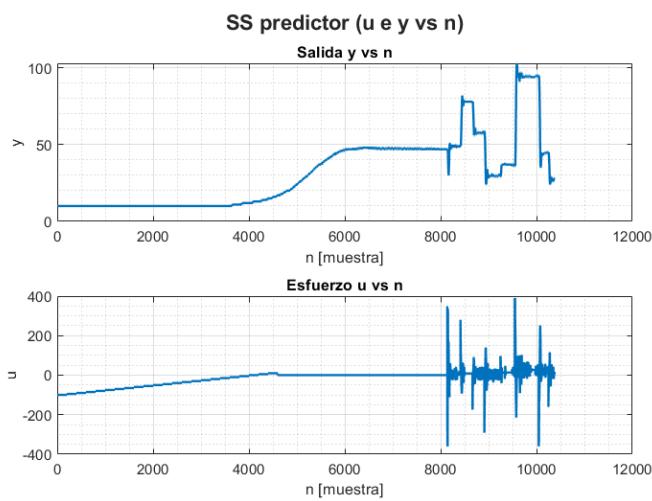


Figura 34. Implementación práctica con observador predictor.

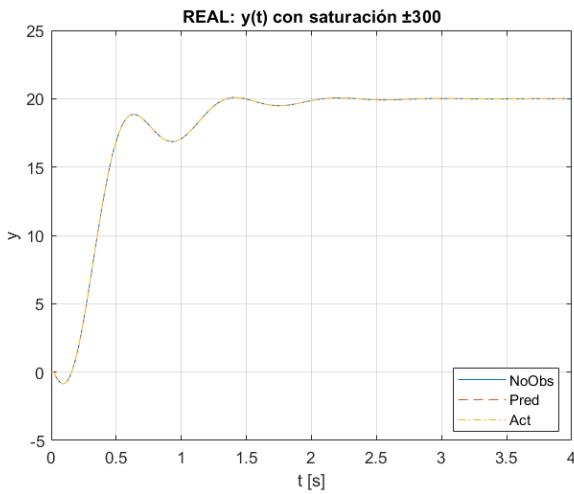


Figura 31. Respuesta temporal con saturación.

VIII-B5. Resultados experimentales: Para el observador predictor se obtuvo:

$$t_r \approx 520 \text{ ms}, \%OS \approx 13.79\%.$$

En un segundo levantamiento:

$$\%OS \approx 11.864\%.$$

La variación entre ensayos se atribuye principalmente a descarga de batería y a dinámicas no modeladas.

En la práctica, el predictor mostró un esfuerzo más errático que en simulación. Esto se interpreta como amplificación del ruido de medición por parte del observador, generando un comportamiento aparentemente derivativo y picos cercanos a saturación.

En el caso del observador actual, la respuesta en altura fue similar, pero los picos de esfuerzo fueron menos frecuentes. La corrección con y_{k+1} introduce un efecto de filtrado natural debido a la dinámica de la planta entre u_k y la medición siguiente.

VIII-B6. Conclusión: El control por realimentación de estados permitió seguimiento estable y rápido de la referencia.

No obstante, este enfoque mostró una dependencia mucho mayor del modelo que los métodos clásicos. Pequeñas discrepancias entre planta real e identificada se reflejan directamente en el transitorio.

Comparativamente:

- El predictor es más simple computacionalmente, pero más sensible al ruido.
- El observador actual mostró mejor comportamiento práctico al filtrar parcialmente el ruido.

Siempre que el tiempo de cálculo sea despreciable frente al período de muestreo, el observador actual resulta preferible para esta planta.

VIII-C. Ubicación Arbitraria de Polos con Integrador de error

En esta sección se implementa el procedimiento propuesto en Ogata (Ec. 6.19) [7] para incorporar acción integral al sistema en espacio de estados, utilizando únicamente un integrador externo y realimentación de estados estimados.

La planta discreta utilizada (orden $n = 3$) se obtuvo mediante discretización por ZOH con período de muestreo:

$$T_s = 0.02 \text{ s} \quad (50 \text{ Hz})$$

VIII-C0a. Sistema aumentado con integrador: Para eliminar el error en régimen permanente frente a referencias constantes, se define el estado integral:

$$v_{k+1} = v_k + (r_k - y_k)$$

donde $y_k = Cx_k$.

Siguiendo el desarrollo de Ogata, se construye el sistema aumentado (planta + integrador) en forma estructural:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se seleccionaron los polos deseados del sistema aumentado como:

$$p_{\text{ctrl}} = \{0.95 \pm 0.15j, 0.98\}, \quad p_i = 0.96$$

La determinación de las ganancias se realizó a partir de la relación:

$$\text{Aux} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ CA & CB \end{bmatrix}$$

$$K_{2,1} = \frac{K_{\text{hat}} + [0 \ 0 \ 0 \ 1]}{\text{Aux}}$$

obteniéndose las ganancias equivalentes:

$$K_2 = [0.7820721 \ -0.5678709 \ 0.3779423]$$

$$K_1 = 0.1469358$$

donde:

- K_2 actúa sobre el estado estimado \hat{x}_k .
- K_1 actúa sobre el estado integral v_k .

La ley de control implementada es:

$$u_k = K_1 v_k - K_2 \hat{x}_k$$

VIII-C0b. Diseño del observador: Dado que únicamente se mide la altura, el resto de estados debe estimarse. Se diseñaron dos variantes de observador con los mismos polos deseados:

$$p_{\text{obs}} = \{0.8 \pm 0.25j, 0.9\}$$

VIII-C0c. Observador predictor:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L_{\text{pred}}(y_k - C\hat{x}_k)$$

Dinámica del error:

$$e_{k+1} = (A - L_{\text{pred}}C)e_k$$

Ganancia obtenida:

$$L_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 167.3535 \\ 253.6822 \\ 86.0310 \end{bmatrix}$$

VIII-C0d. Observador actual:

$$z_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = z_{k+1} + L_{\text{act}}(y_{k+1} - Cz_{k+1})$$

Dinámica del error:

$$e_{k+1} = (A - L_{\text{act}}CA)e_k$$

Ganancia obtenida:

$$L_{\text{act}} = \begin{bmatrix} 126.8411 \\ 172.0621 \\ 45.1301 \end{bmatrix}$$

VIII-C0e. Sistema aumentado cerrado: Para analizar explícitamente la dinámica cerrada (planta + integrador), se construyó el sistema aumentado:

$$A_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_2 - K_2A - K_1CA & 1 - K_2B - K_1CB \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{aug}} = [C \ 0]$$

lo que permite visualizar el mapa polo–cero del sistema completo.

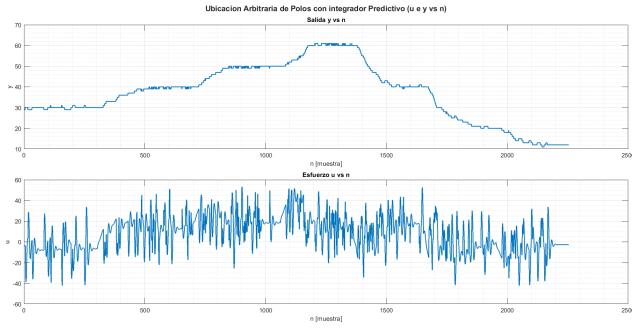


Figura 39. Resultado experimental con observador predictor.

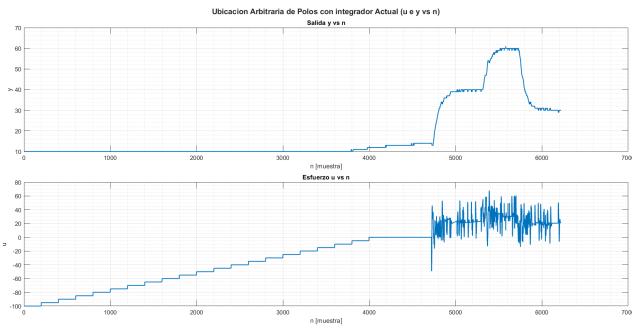


Figura 40. Resultado experimental con observador actual.

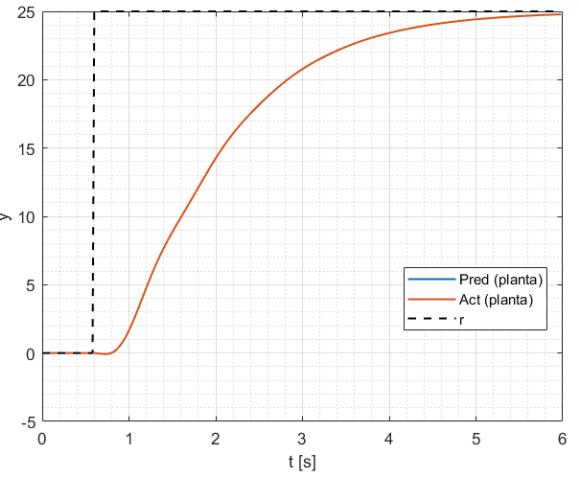


Figura 36. Respuesta temporal $y(t)$ con integrador — comparación predictor vs actual.

VIII-C1. Resultados de simulación: En simulación se observa ausencia de sobreimpulso y un tiempo de subida aproximado de:

$$t_r^{\text{sim}} \approx 2.6 \text{ s}$$

tanto para el observador predictor como para el actual.

VIII-C2. Resultados experimentales: Experimentalmente se obtuvo:

$$t_r^{\text{exp}} = 2.02 \text{ s} \quad (\text{predictor})$$

$$t_r^{\text{exp}} = 2.36 \text{ s} \quad (\text{actual})$$

Se observa buena concordancia cualitativa con la simulación, aunque el sistema real presenta mayor rapidez que la predicha por el modelo lineal.

A diferencia de implementaciones sin acción integral, no se observaron derivas estacionarias sostenidas. El sistema converge naturalmente a la referencia.

El predictor mostró picos de esfuerzo más continuos, consistentes con mayor sensibilidad al ruido de medición. El observador actual presentó un esfuerzo más progresivo y menos errático, atribuido al filtrado implícito de la planta entre u_k y y_{k+1} .

VIII-C3. Discusión: La incorporación de acción integral permitió eliminar el error en régimen permanente de forma estructural, superando limitaciones observadas cuando se utilizaba únicamente N_{bar} .

En particular:

- El sistema alcanza la referencia incluso ante variaciones de batería o pequeñas perturbaciones constantes.
- La respuesta práctica se aproxima notablemente a la simulada.

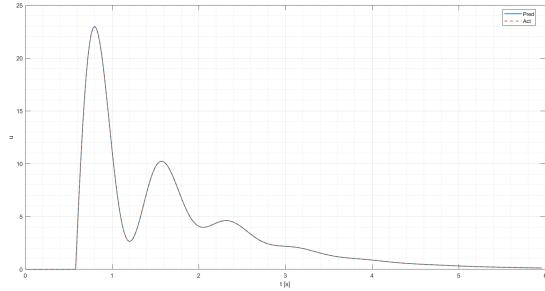


Figura 37. Esfuerzo de control $u(t)$ con integrador.

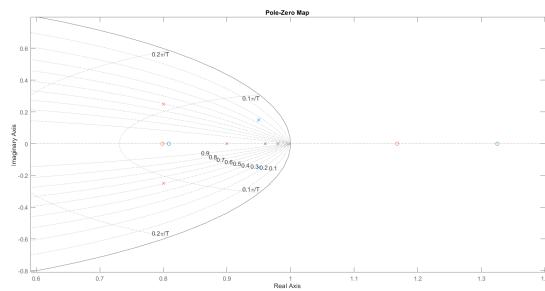


Figura 38. Mapa de polos: planta, sistema aumentado y dinámica del observador.

- La estabilidad discreta se mantiene, con polos dentro del círculo unitario.

Persisten efectos tipo derivativos asociados al observador, producto de una ubicación de polos subóptima que amplifica ruido. Este aspecto constituye un punto claro de mejora futura.

VIII-C4. Conclusión: El método de Ogata con acción integral demostró ser estructuralmente más robusto frente a variaciones reales de la planta que los enfoques sin integración.

Si bien depende del modelo identificado, la inclusión del estado integral introduce una propiedad correctiva que compensa desajustes moderados y elimina el error estacionario sin necesidad de correcciones adicionales por software.

En conjunto, la realimentación de estados con acción integral proporcionó el mejor compromiso entre estabilidad, eliminación de error permanente y coherencia entre simulación y práctica dentro de los métodos en espacio de estados evaluados.

VIII-D. Control Óptimo (LQR)

Se diseñó un regulador óptimo discreto de tipo LQR a partir del modelo en espacio de estados discretizado mediante retención de orden cero (ZOH) con tiempo de muestreo:

$$T_s = 0.01 \text{ s}$$

El objetivo del diseño es minimizar el funcional de costo cuadrático infinito:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

donde $Q \succeq 0$ penaliza la energía de los estados y $R \succ 0$ penaliza el esfuerzo de control.

VIII-D0a. Matrices de ponderación: Se adoptó una sintonización práctica basada en escalas típicas del experimento: un cambio de referencia del orden de $\Delta y \approx 20$ y una restricción del mando aproximadamente $|u| \lesssim 300$ (en unidades del actuador).

El diseño penaliza principalmente la salida mediante $C^T C$, agregando un término pequeño para asegurar buena condición numérica:

$$Q = w_y (C^T C) + 10^{-8} I_n, \quad R = \frac{w_u}{u_{\max}}$$

con $w_y = 20$, $w_u = 500$ y $u_{\max} = 300$.

Para el modelo discretizado utilizado, las matrices resultantes fueron:

$$Q = \begin{bmatrix} 6.8188 \times 10^{-3} & -6.9883 \times 10^{-3} & 7.0544 \times 10^{-3} \\ -6.9883 \times 10^{-3} & 7.1620 \times 10^{-3} & -7.2298 \times 10^{-3} \\ 7.0544 \times 10^{-3} & -7.2298 \times 10^{-3} & 7.2982 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$R = 1.6667$$

VIII-D0b. Ecuación de Riccati discreta y ganancia óptima: La solución del problema se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati discreta:

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

La ganancia óptima resulta:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

Para el modelo discretizado se obtuvo:

$$K = [0.5119095 \quad -0.4937470 \quad 0.4765571]$$

VIII-D0c. Polos del sistema en lazo cerrado: La estabilidad se verifica mediante los polos del sistema:

$$A_{cl} = A - BK$$

Los polos obtenidos fueron:

$$0.9728458 + 0.0327300 j$$

$$\lambda(A - BK) = 0.9728458 - 0.0327300 j$$

$$0.9663930$$

Se observa que todos los polos se encuentran dentro del círculo unitario, garantizando estabilidad discreta.

VIII-D1. Simulación del LQR con observador, saturación y ruido: Con el fin de aproximar el comportamiento del sistema real y evitar conclusiones optimistas, se implementó un entorno de simulación que contempla:

- Observador de estados en dos variantes:
 - Predictor: corrige usando y_k .
 - Actual: corrige usando y_{k+1} .
- Prefiltro de referencia N_{bar} .
- Saturación del actuador con límite $\pm u_{\max}$.
- Ruido de medición, ruido de actuador y ruido de proceso configurables.
- Comparación doble precisión vs float32.

Los observadores se diseñaron mediante ubicación de polos:

$$p_{obs} = \{0.8 \pm 0.25j, 0.9\}$$

$$K_{e,pred} = \text{place}(A^T, C^T, p_{obs})^T \quad K_{e,act} = \text{place}(A^T, (CA)^T, p_{obs})^T$$

La estructura implementada fue:

$$u_k = N_{bar} r_k - K \hat{x}_k$$

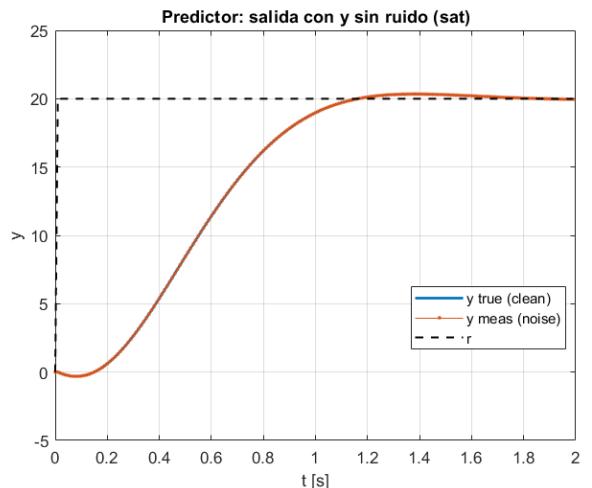


Figura 41. Respuesta temporal simulada del sistema con regulador LQR y observador.

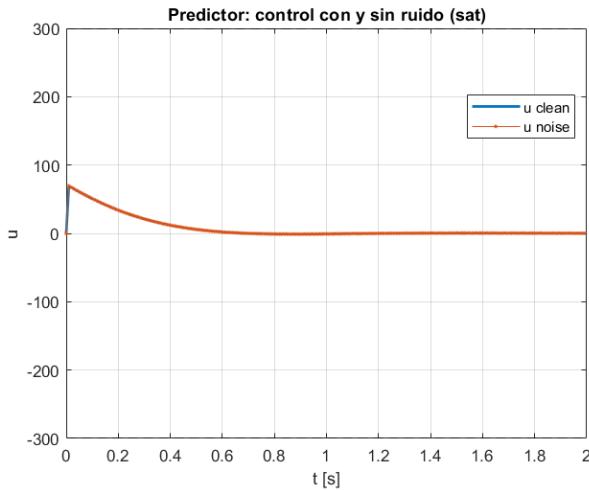


Figura 42. Esfuerzo de control simulado $u(k)$.

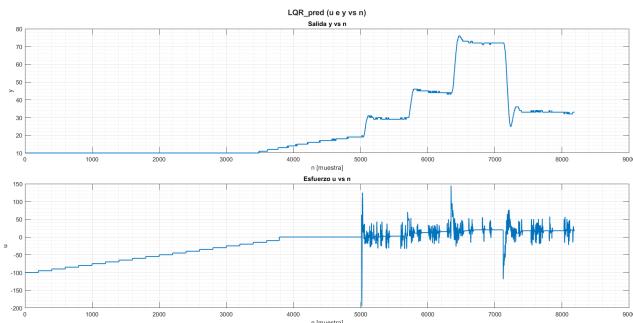


Figura 43. Respuesta experimental con observador predictor.

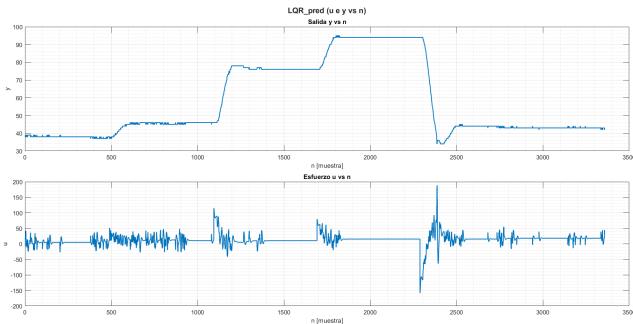


Figura 44. Respuesta experimental con observador actual.

VIII-D2. Implementación experimental: En simulación el tiempo de subida fue aproximadamente:

$$t_r^{\text{sim}} \approx 0.75 \text{ s}$$

sin sobreimpulso apreciable.

Experimentalmente se observaron tiempos de subida del orden de 0.55 s a 0.69 s dependiendo del punto de operación, con error estacionario inferior a 1 cm.

Se evidenció nuevamente la presencia de ruido significativo en el esfuerzo, más marcado en el observador predictor que en el actual.

VIII-D3. Conclusión: A diferencia del método de ubicación arbitraria de polos, el regulador LQR no fija directamente las raíces del sistema en lazo cerrado, sino que determina la ganancia óptima a partir de la minimización explícita de un funcional de costo que pondera la energía de los estados y el esfuerzo de control.

En este enfoque, los polos resultan consecuencia de los pesos definidos en Q y R . Esto introduce un criterio sistemático basado en la relación esfuerzo–desempeño.

En este trabajo, al utilizar un modelo identificado sin interpretación física directa de los estados, no fue posible penalizar estados individuales (como velocidad o inercia del motor). Por ello se penalizó la salida mediante $C^T C$.

En modelos físicos estructurados, el LQR permitiría penalizar estados específicos según objetivos de desempeño, lo que constituye una ventaja conceptual importante frente a la ubicación arbitraria de polos.

La selección de Q y R requiere criterio ingenieril y ajustes iterativos. Sin embargo, una vez definidos adecuadamente, el método proporciona resultados consistentes y estructurados.

Persiste la sensibilidad al ruido de medición introducida por el observador. Polos de estimación agresivos amplifican ruido; polos más lentos reducen este efecto pero enlentecen la convergencia.

En conjunto, el regulador LQR mostró un desempeño experimental sólido, con seguimiento estable y transitorios coherentes con la simulación, constituyendo un enfoque más fundamentado que la simple ubicación arbitraria de polos.

VIII-E. Control Óptimo con Filtro de Kalman e Integrador de Error (LQGi)

VIII-E1. Modelo con Ruido: Para incorporar incertidumbre y modelar explícitamente la presencia de perturbaciones no modeladas y ruido del sensor, se adopta la siguiente representación estocástica discreta:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

donde:

- $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ representa el ruido de proceso, asociado a una dinámica no modelada, perturbaciones aerodinámicas y simplificaciones del modelo identificado.
- $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ representa el ruido de medición, proveniente del sensor láser de distancia.

VIII-E1a. Estimación de R (ruido de medición): La varianza del ruido de medición se obtuvo mediante ensayos empíricos, midiendo la dispersión de la señal del sensor con la planta en reposo. Siendo σ_v la desviación estándar medida (en cm), se adopta:

$$R = \sigma_v^2$$

En los ensayos realizados se obtuvo:

$$\sigma_v = 2.043 \text{ cm} \implies R = 4.174 \text{ cm}^2$$

VIII-E1b. Parametrización y sintonización de Q (ruido de proceso): La matriz de covarianza del ruido de proceso se parametrizó como:

$$Q = q I_n$$

donde q es un escalar positivo ajustable e I_n es la matriz identidad de dimensión n . El valor de q se determinó mediante consistencia estadística de la innovación normalizada (ver Apéndice F).

El valor óptimo obtenido fue:

$$q = 50.8022 \times 10^{-3} \implies Q = q I_n$$

VIII-E2. Filtro de Kalman en régimen permanente: Se utilizó un estimador de Kalman discreto en su variante *current estimator* (`kalman(..., 'current')`). La ganancia en régimen permanente L se obtiene a partir de la solución estacionaria P de la ecuación de Riccati discreta:

$$P = APA^T - APC^T (CPC^T + R)^{-1} CPA^T + Q$$

y la ganancia queda:

$$L = APC^T (CPC^T + R)^{-1}$$

La ganancia obtenida en MATLAB para el modelo discretizado fue:

$$L = \begin{bmatrix} 97.4968 \\ 192.3014 \\ 94.7820 \end{bmatrix}$$

VIII-E2a. Polos del observador: Para el *current estimator*, la dinámica del error queda determinada por $A - LCA$. Los polos obtenidos fueron:

$$\begin{aligned} &0.9730274 + 0.0308455 j \\ \lambda(A - LCA) = &0.9730274 - 0.0308455 j \\ &0.9694430 \end{aligned}$$

Todos los polos se ubican dentro del círculo unitario, garantizando estabilidad del estimador.

VIII-E3. Control integral y realimentación de estados (LQGI): Con el objetivo de eliminar el error en régimen permanente ante referencias tipo escalón, se incorporó un integrador de error. Definiendo el estado integral ξ_k :

$$\xi_{k+1} = \xi_k + (r_k - y_k)$$

Se diseñó una ley de control tipo LQI:

$$u_k = -K_x \hat{x}_k + K_i \xi_k$$

donde \hat{x}_k proviene del estimador de Kalman. Los valores obtenidos mediante `dlqr` fueron:

$$K_x = [16.5343 \quad -15.8046 \quad 15.1271]$$

$$K_i = 3.2067$$

VIII-E3a. Polos de la planta y del lazo cerrado: Los polos de la planta discretizada (sin control) fueron:

$$\begin{aligned} &0.9999972 \\ \lambda(A) = &0.9720409 + 0.0241158 j \\ &0.9720409 - 0.0241158 j \end{aligned}$$

Los polos del lazo cerrado del sistema aumentado (planta + integrador + control) fueron:

$$\begin{aligned} &0.9735939 + 0.0318308 j \\ \lambda(A_{cl}) = &0.9735939 - 0.0318308 j \\ &0.9671966 \\ &0 \end{aligned}$$

Se verifica estabilidad discreta y presencia del polo en cero asociado a la acción integral.

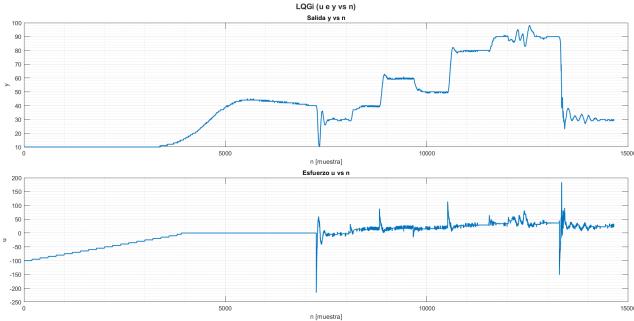


Figura 47. Resultado experimental sobre la planta real.

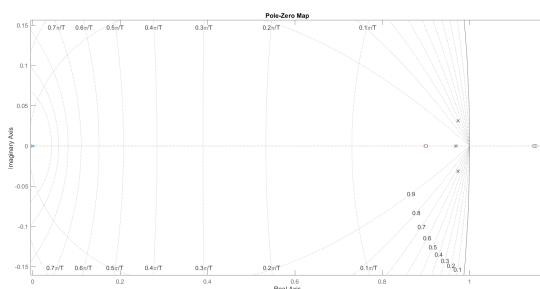


Figura 48. Mapa de polos: observador (naranja) y sistema (azul).

VIII-E4. Sistema aumentado usado para *pzmap*: En el script de validación se construyó explícitamente el sistema aumentado:

$$A_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_x - K_x A - K_i C A & 1 - K_x B - K_i C B \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_i \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{aug}} = [C \quad 0] \quad D_{\text{aug}} = 0$$

Construyéndose el modelo:

`sysDaug = ss(Aaug, Baug, Caug, 0, Ts)`

y visualizando los polos mediante `pzmap(sysDaug)`.

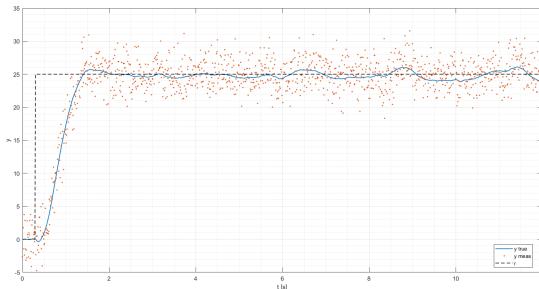


Figura 45. Respuesta temporal en presencia de ruido.

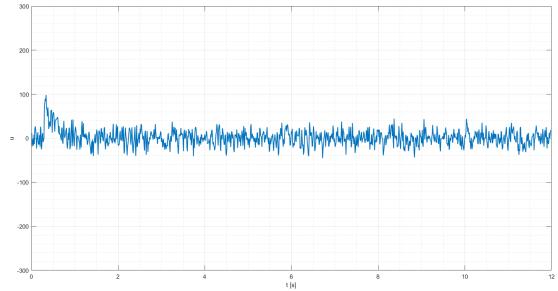


Figura 46. Esfuerzo de control en presencia de ruido.

VIII-E5. Discusión: En régimen dinámico, el tiempo de subida experimental fue aproximadamente $t_r^{\text{exp}} \approx 0.65$ s, con sobreimpulso reducido (del orden del 10 % o menor en la mayoría de los ensayos). La simulación con ruido predijo $t_r^{\text{sim}} \approx 0.5$ s y sobreimpulso cercano al 8 %, mostrando buena concordancia.

El esfuerzo de control en simulación presenta ciertos picos, producto de la inyección explícita de ruido gaussiano. En la práctica, los picos resultaron más consistentes y de menor amplitud relativa, especialmente en comparación con implementaciones anteriores sin Kalman, cumpliendo de muy buena manera su objetivo.

Un aspecto destacable es que, gracias a la acción integral, el error en régimen permanente converge sistemáticamente a cero, a diferencia de prácticas previas donde persistían derivas incluso utilizando prefiltros o compensaciones adicionales.

VIII-E6. Conclusión: El esquema LQGI (LQR + Kalman + Integrador) constituye la síntesis más completa implementada en este trabajo.

A diferencia de la simple ubicación arbitraria de polos, aquí los polos del lazo cerrado resultan de una optimización basada en criterios energéticos bien definidos por el ingeniero.

Aunque la selección de Q y R no es intuitiva y requiere criterio y ajuste iterativo, una vez correctamente definidos, el método produce resultados consistentes, robustos y coherentes con el modelo.

La incorporación del filtro de Kalman permitió seleccionar las ganancias del observador de forma óptima en presencia de ruido, reduciendo la amplificación observada en enfoques anteriores.

Finalmente, la inclusión del integrador garantizó eliminación del error estacionario y otorgó el mejor desempeño global entre todas las técnicas implementadas, tanto en simulación como en la planta real.

VIII-F. Comparación entre Métodos Modernos

Los métodos modernos implementados (ubicación arbitraria de polos, LQR, observadores por ubicación de polos y filtro de Kalman, con y sin acción integral) demostraron en general un desempeño satisfactorio y consistente sobre la planta real.

Sin embargo, la combinación de:

- Regulador óptimo LQR,
- Observador basado en Filtro de Kalman,
- Acción integral (LQI),

representa una mejora sustancial respecto a las variantes sin optimización explícita o sin estimación estocástica.

VIII-F0a. Ubicación arbitraria vs. LQR: Desde el punto de vista computacional e implementativo, no existe diferencia entre utilizar una ganancia obtenida por `place()` o por `d1qr()`. Ambos producen una matriz K que se implementa exactamente de la misma forma en firmware y no implican mayor carga de cálculo en tiempo real ni similares.

La diferencia radica exclusivamente en el criterio de diseño:

- En ubicación arbitraria, los polos se eligen manualmente.
- En LQR, los polos resultan de minimizar un funcional cuadrático que pondera explícitamente estados y esfuerzo.

Si bien la definición adecuada de las matrices Q y R requiere mayor reflexión y criterio ingenieril, el resultado es un compromiso óptimo entre desempeño y esfuerzo de control.

En sistemas donde los estados poseen interpretación física clara, el LQR permite penalizar selectivamente variables, algo que no puede hacerse directamente con ubicación arbitraria de polos.

VIII-F0b. Observador predictor vs. observador actual:

Dentro de los esquemas de estimación determinística (ubicación de polos), se evaluaron las variantes *predictor* y *actual*.

El observador predictor corrige utilizando la medición y_k , lo que implica una estructura ligeramente más simple a nivel algorítmico.

El observador actual, en cambio, corrige con y_{k+1} , incorporando implícitamente la dinámica de la planta entre la predicción y la corrección.

En la práctica se observó que:

- El predictor tiende a amplificar más el ruido de medición.
- El actual presenta un esfuerzo de control más limpio.
- La diferencia se vuelve más evidente cuando la señal medida presenta ruido significativo.

El costo computacional adicional del observador actual es despreciable frente al período de muestreo utilizado en este trabajo. Por lo tanto, siempre que el tiempo de cálculo sea pequeño en comparación con T_s , el **observador actual** resulta preferible debido a su efecto de filtrado natural y mejor comportamiento práctico.

VIII-F0c. Observador por polos vs. Filtro de Kalman:

En cuanto a estimación de estados, el Filtro de Kalman mostró una ventaja clara respecto a la simple ubicación arbitraria de polos del observador.

Mientras que en el diseño por polos la selección de ganancias es esencialmente heurística, en Kalman las ganancias resultan de una optimización basada en la relación estadística entre ruido de proceso (Q) y ruido de medición (R).

En la práctica, esto se tradujo en:

- Menor amplificación del ruido en el esfuerzo de control.
- Respuestas más limpias.
- Menor presencia de picos erráticos.

El principal inconveniente del Filtro de Kalman es la necesidad de estimar adecuadamente las covarianzas Q y R , lo cual demanda experimentación adicional. No obstante, una vez ajustadas, el desempeño mejora de manera significativa.

VIII-F0d. Acción integral vs. Prefiltro N_{bar} :

La incorporación del integrador constituye, probablemente, el cambio más relevante desde el punto de vista práctico.

El prefiltro N_{bar} garantiza seguimiento perfecto únicamente bajo el modelo ideal. En presencia de:

- Derivas paramétricas,
- Descarga de batería,
- No linealidades del empuje,
- Envejecimiento del sistema,

la salida puede desviarse progresivamente de la referencia.

La acción integral, en cambio, corrige sistemáticamente el error estacionario, independientemente de pequeñas discrepancias del modelo, siempre que el lazo permanezca estable y no exista saturación prolongada.

Aunque el integrador incrementa el orden del sistema y agrega un estado adicional, su impacto en recursos computacionales es despreciable frente al beneficio obtenido en robustez de seguimiento.

VIII-F0e. Conclusión comparativa:

Todos los métodos modernos evaluados son funcionales y técnicamente correctos. Sin embargo, la combinación:

LQR + Kalman + Integrador

representa un salto cualitativo significativo.

- LQR aporta un criterio óptimo explícito.
- Kalman reduce la contaminación del esfuerzo por ruido.
- El integrador elimina derivas en régimen permanente.
- El observador actual mejora la calidad del esfuerzo sin penalización práctica en recursos.

En conjunto, esta arquitectura ofrece el mejor equilibrio entre desempeño dinámico, robustez frente a incertidumbre y calidad del esfuerzo de control, constituyendo la solución más sólida entre las implementadas en este trabajo.

IX. CONCLUSIONES

La implementación de métodos clásicos y modernos sobre una misma planta física permitió contrastar dos filosofías de diseño claramente diferenciadas: una basada en aproximaciones entrada-salida y otra basada en modelado estructural completo en espacio de estados.

Los **métodos clásicos** demostraron ser progresivamente más sofisticados en análisis, pero mantienen una característica común: son esencialmente aproximativos y heurísticos. El PID ajusta directamente la respuesta observable; Lugar de Raíces y Bode aportan mayor estructura, pero continúan trabajando sobre simplificaciones (dinámicas dominantes, márgenes, aproximaciones de segundo orden). Incluso la Síntesis Directa, aunque analíticamente rigurosa, termina siendo extremadamente dependiente del modelo ideal.

Su principal fortaleza es la robustez práctica: al no apoyarse completamente en la estructura interna del sistema, toleran mejor imprecisiones del modelo y variaciones paramétricas. Son, en esencia, más “plug and play” y requieren menor conocimiento profundo de la planta.

En contraste, los **métodos modernos** trasladan el núcleo del diseño al modelo en espacio de estados. Aquí ya no se moldea únicamente la salida, sino la dinámica interna completa del sistema. Esto implica una dependencia mucho mayor del modelo: cualquier error de identificación se refleja directamente en el desempeño del lazo cerrado.

Sin embargo, cuando el modelo es representativo, el salto cualitativo es evidente. La realimentación de estados permite ubicar dinámicas internas; el LQR elimina la arbitrariedad en la selección de polos, basando el diseño en un criterio óptimo explícito; y el Filtro de Kalman reduce sistemáticamente la contaminación del esfuerzo por ruido.

La combinación:

LQR + Kalman + Integrador

representó el mejor desempeño global obtenido en el trabajo. Este salto no provino de “hacer más cálculos por hacerlos”, sino de incorporar estructura explícita (óptimo + estimación + rechazo de perturbaciones). Aun así, el costo computacional **sí cambia** respecto a los métodos clásicos: mientras un PID o un compensador discreto típico se implementan con unas pocas operaciones (una ecuación en diferencias de bajo orden), los métodos modernos requieren, por muestra, **propagación de estados ($A\hat{x}$)**, **actualización del observador** (términos con L y mediciones), y en el caso del integrador una **acumulación adicional**.

En este trabajo, con $n = 3$ y frecuencias de muestreo moderadas, esa carga adicional resultó completamente abordable, pero la comparación deja una lección general: en sistemas con estados grandes (n alto), muestreos muy rápidos o microcontroladores muy limitados, este incremento puede volverse un *dealbreaker* y empujar a soluciones clásicas más simples, aunque menos potentes.

La diferencia fundamental entre ambas vertientes no es de implementación, sino de filosofía: los métodos clásicos aceptan la incertidumbre y compensan mediante ajustes progresivos; los métodos modernos intentan modelar y optimizar explícitamente la dinámica interna completa.

El aprendizaje central radica en comprender que ningún método es universalmente superior. Los enfoques clásicos ofrecen rapidez y tolerancia a la imprecisión. Los enfoques modernos ofrecen mayor grado de libertad, mejor desempeño potencial y control explícito sobre ruido, esfuerzo y error estacionario, a costa de mayor dependencia del modelo y criterio en su formulación.

En esta planta experimental, la arquitectura moderna completa mostró una ventaja clara, pero también evidenció que el éxito del diseño depende tanto de la calidad del modelo como del criterio ingenieril aplicado en su utilización.

REFERENCIAS

- [1] Dongguan E-S Motor Co., Ltd., “E-s motor oficial website,” <https://cdn.robotshop.com/rbm/a00a7635-653b-4220-aac9-b0c23c5c5e2c/5/520795f9-301f-4e66-a0a3-019811d1f78b/222c434ca2212-brushless-motor.pdf>, 2026, accessed: Feb. 2026.
- [2] NEX Robotics Pvt, Ltd, “40a bldc esc,” <https://www.scribd.com/document/280924512/ESC-Datasheet>, 2015, accessed: Feb. 2026.
- [3] AMAZON, “Lipo 3s ovonic air,” <https://www.amazon.com/-/es/OVONIC-3s-Conector-Helic%C3%BCB3ptero-Quadcopter/dp/B07MS8QF3K>, 1996-2026, accessed: Feb. 2026.
- [4] Benewake Co., Ltd., *TFmini Plus Single-Point LiDAR Range Sensor Datasheet*, 2019, rev. A02. [Online]. Available: https://cdn.sparkfun.com/assets/2/b/0/3/8/TFmini_Plus-01-A02-Datasheet_EN.pdf
- [5] L. P. C. Morselli, *Evaluación de Algoritmos de Control Digital Industrial*, 1st ed. Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, 2005.
- [6] A. V. M. Sami Fadali, *Digital Control Engineering: Analysis and Design*, 3rd ed. Elsevier, 2020.
- [7] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, 2nd ed. Prentice Hall, 1996.