

Trabajo Práctico: Helicóptero vertical de un solo eje.

Elías Álvarez

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción
Asunción, Paraguay

Email: elias.alvarez@universidadcatolica.edu.py

Tania Romero

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción
Asunción, Paraguay

Email: tania.romero@universidadcatolica.edu.py

Resumen—En este trabajo práctico se estudia el control de altura de una planta experimental basada en un sistema de propulsión vertical mediante un motor brushless controlado electrónicamente. La planta consiste en un cuerpo móvil guiado mecánicamente en el eje vertical, cuya posición es medida mediante un sensor de distancia láser y regulada a través de una señal PWM aplicada a un controlador electrónico de velocidad (ESC).

A partir del modelado físico y matemático del sistema, se desarrollan e implementan distintas estrategias de control vistas a lo largo de la materia Automatizaciones. Se analizan controladores clásicos, tales como el PID y métodos de diseño basados en el lugar de las raíces, diagramas de Bode, síntesis directa y ubicación arbitraria de polos. Asimismo, se aborda el control en el espacio de estados, incorporando control integral para sistemas de seguimiento y el uso de estimadores de estado tanto de predicción como de actualización.

Finalmente, se diseñan y evalúan controladores óptimos que incluyen integrador y estimadores basados en el filtro de Kalman, culminando en la implementación de un regulador LQG. Los distintos enfoques de control son comparados en términos de desempeño dinámico, estabilidad y robustez frente a perturbaciones y variaciones paramétricas, utilizando resultados obtenidos mediante ensayos experimentales sobre la planta real.

Index Terms—control de altura, sistemas dinámicos, identificación de sistemas, control PID, control en espacio de estados, LQG, PSOC, TFMiNi, ESC, PWM

I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas propulsados verticalmente constituye un problema clásico dentro de la ingeniería de control, particularmente cuando la dinámica presenta inestabilidad inherente, no linealidades y limitaciones físicas severas. En este trabajo se aborda la regulación y seguimiento de referencia de una planta experimental de tercer orden, caracterizada por un comportamiento inestable en lazo abierto, presencia de polos complejos dominantes, un integrador y ceros que afectan significativamente la respuesta dinámica del sistema.

Más allá del modelo teórico, la planta real introduce múltiples no idealidades: saturaciones estrictas del actuador (1100–1700 μ s por razones de seguridad térmica y estructural), fricción variable debida a imperfecciones mecánicas en los rieles de guiado, variación del punto de operación asociada a la descarga progresiva de la batería, dinámica propia del motor y del ESC, y ruido de medición proveniente del sensor láser utilizado. Estas condiciones convierten el problema en un banco de pruebas exigente para evaluar la robustez y aplicabilidad práctica de distintas estrategias de control.

Un aspecto central del trabajo fue la obtención de un modelo lineal representativo del sistema alrededor del punto de operación de hover, incluyendo la identificación experimental del esfuerzo de equilibrio y la caracterización del ruido de medición y proceso. La calidad de este modelo resultó determinante para el desempeño de los métodos de control modernos, particularmente aquellos basados en espacio de estados y estimación óptima.

Sobre esta misma planta se implementaron y compararon distintas filosofías de diseño, desde enfoques clásicos hasta control óptimo con estimación de estados, evaluando su desempeño no sólo en simulación sino también mediante validación experimental directa. Esta comparación permite analizar en condiciones reales las ventajas, limitaciones y requerimientos de modelado de cada metodología.

El objetivo del trabajo no se limita a la obtención de un regulador funcional, sino a estudiar la relación entre complejidad del método, dependencia del modelo y desempeño obtenido en un sistema físico con restricciones reales.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los sistemas de regulación de altura basados en propulsión vertical constituyen un problema particularmente exigente desde el punto de vista del control automático, debido a la combinación de inestabilidad inherente, dinámica no lineal y restricciones físicas severas del actuador. La planta experimental considerada en este trabajo presenta comportamiento inestable en lazo abierto, dinámica de tercer orden con integrador y ceros que condicionan la respuesta transitoria, incluyendo la presencia de un cero en el semiplano derecho que impone limitaciones fundamentales en el desempeño alcanzable.

Desde el punto de vista físico, el sistema consiste en un cuerpo móvil guiado en el eje vertical cuyo equilibrio depende del balance entre la fuerza gravitatoria y el empuje generado por un motor brushless accionado mediante un ESC. Sin embargo, el comportamiento real se ve influenciado por múltiples no idealidades: saturaciones estrictas del esfuerzo de control por razones de seguridad térmica (1100–1700 μ s), variaciones del punto de operación asociadas a la descarga de la batería, fricción no uniforme en los rieles de guiado, dinámica propia del conjunto motor–ESC y ruido de medición proveniente del sensor láser de distancia.

Se realizaron desarrollos físico-matemáticos iniciales con el objetivo de modelar el sistema a partir de principios dinámicos

fundamentales. No obstante, la complejidad aerodinámica del empuje, junto con la dinámica interna del motor y del ESC, dificultaron la obtención de un modelo analítico suficientemente representativo, lo que motivó la adopción de técnicas de identificación experimental alrededor del punto de operación de hover.

El desafío central radica entonces en obtener un modelo lineal que capture adecuadamente la dinámica dominante del sistema y permita diseñar controladores implementables en tiempo real sobre hardware embebido. El firmware desarrollado integra múltiples estrategias de control dentro del mismo sistema, permitiendo la modificación dinámica de coeficientes, la adquisición de datos en lazo abierto y cerrado, y la transmisión en tiempo real de las señales de esfuerzo y altura mediante comunicación UART para su análisis posterior.

En este contexto, el problema abordado no se limita a la estabilización del sistema, sino que implica analizar la relación entre calidad del modelado, complejidad de la estrategia de control y desempeño experimental obtenido sobre una planta física con restricciones reales.

III. OBJETIVOS

III-A. *Objetivo general*

Desarrollar, analizar e implementar un sistema de control de altura para una planta experimental basada en un motor brushless, aplicando y comparando distintas estrategias de control automático estudiadas en la materia Automatizaciones, a partir del modelado físico y matemático del sistema y su validación experimental sobre la planta real.

III-B. *Objetivos específicos*

- Caracterizar físicamente la planta experimental y describir su comportamiento dinámico a partir de sus componentes mecánicos, eléctricos y de sensado.
- Desarrollar un modelo físico y matemático del sistema que represente adecuadamente la dinámica vertical de la planta y sirva como base para el diseño de controladores.
- Identificar experimentalmente los parámetros relevantes del modelo, considerando las no idealidades propias del sistema real.
- Diseñar e implementar controladores clásicos de altura, incluyendo el controlador PID y métodos de diseño basados en el lugar de las raíces, diagramas de Bode, síntesis directa y ubicación arbitraria de polos.
- Diseñar controladores en el espacio de estados para sistemas de seguimiento, incorporando control integral para la eliminación del error estacionario.
- Implementar y evaluar estimadores de estado tanto de tipo predictivo como de actualización, analizando su influencia en el desempeño del sistema.
- Diseñar y aplicar estrategias de control óptimo, incluyendo el uso de integrador y estimadores basados en el filtro de Kalman, culminando en la implementación de un regulador LQG.

- Comparar el desempeño de las distintas estrategias de control implementadas en términos de estabilidad, respuesta transitoria, error en régimen permanente y robustez frente a perturbaciones y variaciones paramétricas.
- Validar experimentalmente los resultados obtenidos mediante ensayos sobre la planta real, contrastando el comportamiento observado con las predicciones del modelo.

IV. CARACTERIZACIÓN FÍSICA DE LA PLANTA

IV-A. *Descripción general de la planta*

La planta desarrollada corresponde a un sistema mecatrónico de **un grado de libertad**, cuyo movimiento está restringido a la **dirección vertical**. El principio de funcionamiento se basa en la generación de empuje aerodinámico mediante un **motor brushless con hélice**, controlado electrónicamente, que permite regular la altura de un cuerpo móvil guiado mecánicamente.

El sistema fue concebido como una planta experimental para el análisis y diseño de estrategias de control en altura, incorporando sensado directo de posición y actuadores eléctricos de rápida respuesta.

IV-B. *Estructura física de la planta*

La planta experimental fue diseñada y construida específicamente para el desarrollo de las prácticas de control de altura previstas en el presente trabajo. El diseño de la estructura respondió a la necesidad de disponer de una altura útil suficiente para la correcta evaluación de las distintas estrategias de control, manteniendo al mismo tiempo un esquema constructivo simple, robusto y de fácil implementación. Durante el desarrollo del proyecto se atravesaron distintas etapas de diseño, las cuales se describen con mayor detalle en el Apéndice D.

Inicialmente, la planta fue concebida con una altura total de aproximadamente 80 cm. Sin embargo, dicha dimensión resultó insuficiente para la realización de todas las prácticas propuestas. En consecuencia, y por recomendación del profesor, se decidió extender la estructura hasta alcanzar una altura total de 165 cm, permitiendo una altura útil de movimiento del cuerpo móvil de aproximadamente 134 cm.

La estructura se apoya sobre una base de madera de dimensiones 50×45 cm y un espesor aproximado de 2 cm, la cual proporciona estabilidad al conjunto. En la parte superior se dispone de un techo de madera de 50×50 cm y un espesor de 0,6 cm, que actúa como elemento de cierre y soporte estructural. La base y el techo se encuentran unidos mediante tres columnas verticales de madera, cuya función principal es aportar rigidez al conjunto y limitar las deformaciones de la estructura.

El **movimiento vertical** del sistema se guía mediante tres rieles metálicos dispuestos en paralelo, construidos a partir de vigas de metal de aproximadamente 0,6 cm de diámetro. Estas vigas presentan deformaciones inherentes al material y a su longitud, por lo que las columnas de madera cumplen un rol fundamental en evitar que dichas deformaciones se acentúen durante el funcionamiento del sistema.

El **cuerpo móvil** se desplaza a lo largo de los rieles mediante piezas impresas en 3D de tipo abrazadera. Estas abrazaderas poseen un diámetro aproximado de 1,5 cm, superior al de las



Figura 1. Vista general de la planta física.

vigas, con el objetivo de permitir cierto grado de libertad angular y evitar perturbaciones en el movimiento vertical causadas por las deformaciones de los rieles. Las abrazaderas se unen al cuerpo móvil mediante un sistema de tornillos, arandelas y tuercas, funcionando como articulaciones tipo “muñeca”, que facilitan el guiado sin generar atascamientos.



Figura 2. Diseño 3D final de la abrazadera con agarre tipo “muñeca”.

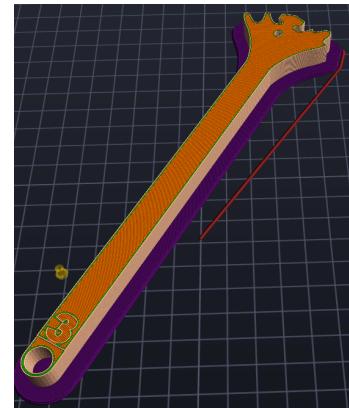


Figura 3. Diseño 3D final del brazo de unión del cuerpo móvil.

El cuerpo móvil está compuesto por dos **soportes principales**: un soporte superior que constituye la base de montaje del motor brushless y un soporte inferior que sostiene el conjunto estructural. Ambos soportes se encuentran unidos mediante tres brazos impresos en 3D, de aproximadamente 1 cm de altura, 1,3 cm de ancho y 23 cm de longitud. La unión de los distintos componentes del cuerpo móvil se realiza mediante roscas de aproximadamente 3 cm de diámetro y tuercas, evitando el uso de tornillería adicional. El conjunto incluye además un soporte para la batería, en cuya base se encuentra montado el ESC, equipado con dos disipadores térmicos laterales. La masa total del cuerpo móvil es de aproximadamente 360 g.

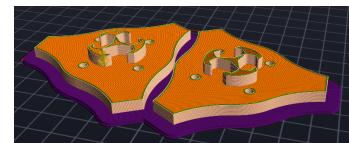


Figura 4. Diseño 3D final del soporte principal del cuerpo móvil (soporte superior e inferior).

Con el fin de proteger el sistema ante caídas y movimientos bruscos, se incorporaron **elementos de seguridad adicionales**. En la parte inferior de la estructura se dispuso papel burbuja enrollado alrededor de los rieles, actuando como amortiguación ante impactos. Asimismo, se añadieron tubos de PVC tanto en la base como en la parte superior de la estructura, los cuales funcionan como topes mecánicos que limitan el recorrido del cuerpo móvil y evitan colisiones con la base o el techo. Adicionalmente, se incorporó una cuerda de seguridad destinada a restringir levantamientos excesivos durante las prácticas, reduciendo el riesgo de movimientos abruptos.

Finalmente, se añadió una cinta métrica a lo largo de la estructura con el objetivo de **facilitar la visualización** del desplazamiento vertical y permitir una referencia directa de la altura durante el funcionamiento del sistema.

El diseño de la estructura **priorizó** la rigidez del cuerpo móvil, de modo que pueda soportar tanto su propio peso como eventuales caídas desde alturas cercanas a un metro. Asimismo, se buscó una solución de fácil construcción, utilizando materia-

les de adquisición accesible en el contexto local y adaptándose a los recursos disponibles y al tiempo de desarrollo del trabajo. La visibilidad del movimiento y el correcto funcionamiento mecánico del sistema fueron considerados aspectos clave para su utilización como planta experimental en este trabajo práctico.

IV-C. Cuerpo móvil

- **Masa total móvil:**

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

(incluye motor, hélice, soporte, cableado y elementos solidos al movimiento).

- **Tipo de movimiento:** traslación puramente vertical.
- **Altura inicial típica:** aproximadamente 12.5 cm.
- **Altura máxima disponible en la estructura:** aproximadamente 134 cm.

La ausencia de contrapesos implica que el sistema depende exclusivamente del empuje generado por la hélice para vencer la fuerza gravitatoria y los efectos de rozamiento.

IV-D. Sistema de actuación (propulsión)

El sistema de actuación está compuesto por:

- **Motor:** brushless A2212/5T, 2450 KV [1].



Figura 5. Motor

- **Hélice:**

- Diámetro: 25 cm.



Figura 6. Hélice

- **Controlador electrónico (ESC) [2]:**

- Corriente continua: 40 A.
- Corriente máxima de corta duración: 55 A.

- **Batería:** LiPo 3S, [3].



Figura 7. ESC 40A

- Tensión inicial típica: 12.5 V.
- La tensión disminuye de forma apreciable durante la operación, dependiendo del régimen de empuje y la duración de la práctica.



Figura 8. Bateria LiPo 3S Ovonic

El empuje generado por el sistema depende fuertemente del comando aplicado, de la hélice y del voltaje instantáneo de la batería, lo que introduce una **no linealidad significativa** en la planta.

IV-E. Señal de control

- **Tipo de señal:** PWM tipo servo.
- **Frecuencia:** 50 Hz.
- **Rango:** $1000 \mu\text{s} - 2000 \mu\text{s}$.

Esta señal actúa como la **entrada manipulada** del sistema, regulando indirectamente el empuje generado por el motor y la hélice a través del ESC.

IV-F. Sistema de sensado

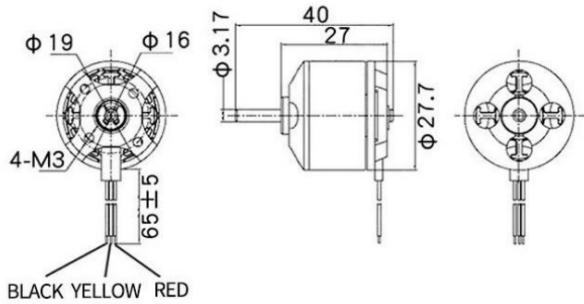
- **Sensor de altura:** TFMini Plus [4].
- **Variable medida:** posición vertical del cuerpo móvil $z(t)$.
- **Frecuencia de lectura:** configurable, típicamente en el rango de 50 Hz, 300 Hz y hasta 1000 Hz, según la configuración utilizada durante las distintas prácticas.

La señal de medición presenta efectos de **ruido, cuantización y latencia**, propios del sistema de sensado y del procesamiento digital, los cuales deben ser considerados tanto en el diseño del sistema de control como en el tratamiento de la señal medida.

IV-G. Variables del sistema

- **Entrada del sistema:**

$$u(t) = \text{PWM} \in [1000, 2000] \mu\text{s}$$



MOTOR PERFORMANCE DATA (性能参数) :

MODEL	KV (rpm/V)	Voltage (V)	Prop	Load Current (A)	Pull (g)	Power (W)	Efficiency (g/W)	Lipo Cell	Weight (g) Approx
	930	1060		9.8	660	109	6.1		60
	1000	1047		15.6	885	173	5.1	3S	61
A2212	1400	11.1	9050	19.0	910	210	4.3		61
	2200	6030		21.5	732	239	3.1	2-3S	62
	2450	6.3		25.2	815	280	2.9		62

Figura 9. Características del motor A2212/5T, 2450KV [1]



Figura 10. Sensor óptico de distancia TFMini Plus.

■ Salida del sistema:

$$y(t) = z(t)$$

■ Disturbios principales:

- Variaciones del voltaje de la batería durante la operación.
- Rozamiento mecánico en las guías.
- Perturbaciones aerodinámicas externas.
- Vibraciones estructurales.

IV-H. Limitaciones físicas y no idealidades

La planta presenta las siguientes características no ideales:

- **Saturación del actuador**, limitada por el rango de PWM y la corriente máxima del ESC.
- **Dinámica no instantánea del empuje**, asociada a la respuesta del ESC, del motor y de la hélice.
- **Variabilidad paramétrica**, principalmente debida a la caída de tensión de la batería bajo carga.

V. DIAGRAMA DEL SISTEMA

La **Figura 11** muestra el diagrama de bloques del sistema de control de altura en lazo cerrado. La referencia de altura z_{ref} es comparada con la señal de salida medida $z(t)$, generando el error $e(t)$, el cual es procesado por el controlador.

El controlador representa el algoritmo de control implementado, pudiendo corresponder a un controlador estudiado en el semestre. A partir del error, el controlador genera la señal de control $u(t)$, que constituye el esfuerzo aplicado al sistema.

La señal $u(t)$ actúa sobre el actuador, conformado por el motor brushless y la hélice, el cual convierte la señal de control en empuje mecánico. Dicho empuje excita la planta física, cuya dinámica vertical determina la altura real del sistema $y(t)$.

La altura es medida mediante un sensor TFMini Plus, que proporciona la señal $z(t)$ utilizada para cerrar el lazo de control. En el diagrama se indican explícitamente las fuentes de ruido asociadas tanto al controlador como al sensor, reflejando las perturbaciones y no idealidades presentes en el sistema real.

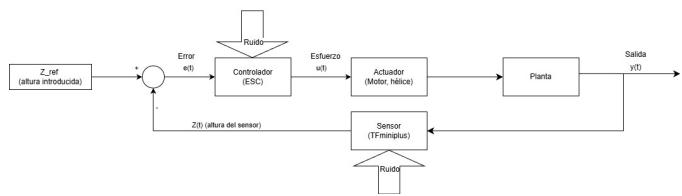


Figura 11. Diagrama de bloques de Control.

La **Figura 12** muestra un diagrama de bloques que representa la implementación física y funcional completa del sistema de control de altura. En dicho diagrama se identifican claramente los siguientes subsistemas:

- la cadena de energía (batería → ESC → motor),
- la cadena de control (MATLAB → PSOC → PWM),
- la planta física correspondiente al sistema bajo control,
- y la cadena de medición y realimentación (planta → sensor → PSOC → MATLAB).

V-A. Flujo de energía (parte electro-energética)

La batería LiPo de tres celdas (3S), con una tensión nominal de aproximadamente 11,1 V, constituye la fuente principal de energía del sistema. Esta batería alimenta directamente al controlador electrónico de velocidad (ESC) de 40 A, el cual se encarga de convertir la energía eléctrica continua proveniente de la batería en señales trifásicas adecuadas para el accionamiento del motor brushless.

El ESC regula la velocidad del motor en función de la señal PWM recibida, lo que permite controlar el empuje generado

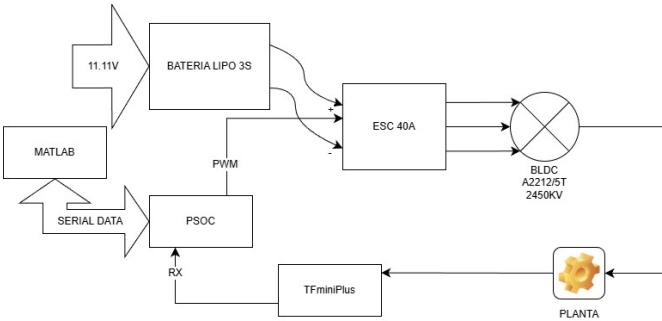


Figura 12. Diagrama de bloques, implementación física.

por la hélice. Dicho empuje es el responsable del movimiento vertical de la planta, que constituye el sistema físico bajo control. En esta parte del sistema no se realiza ninguna acción de control, sino únicamente la conversión y entrega de potencia hacia el actuador.

V-B. Flujo de control (parte de mando)

El PSoC actúa como el controlador embebido del sistema. A partir de los algoritmos de control implementados (PID, control en espacio de estados, LQG, entre otros), el PSoC genera una señal PWM de tipo servo que es enviada al ESC.

Esta señal PWM representa la variable de control $u(t)$ del sistema y determina el nivel de empuje aplicado al motor. Para asegurar una correcta referencia eléctrica y el funcionamiento adecuado del sistema, el PSoC y el ESC comparten una conexión de tierra común (GND).

El sistema MATLAB se comunica con el PSoC mediante una interfaz de datos seriales, lo que permite:

- enviar referencias de altura,
- modificar parámetros de control,
- recibir y visualizar datos del sistema en tiempo real.

En este esquema, MATLAB cumple una función de supervisión, ajuste y análisis experimental, mientras que el PSoC ejecuta el control en tiempo real.

V-C. Medición y realimentación (cierre del lazo)

La planta física, al desplazarse verticalmente, genera una altura real que es medida mediante el sensor de distancia láser TFMini Plus. Este sensor entrega la medición de altura al PSoC a través de su interfaz de recepción (RX).

La señal medida es utilizada por el PSoC para calcular el error entre la referencia y la salida real del sistema, cerrando de esta manera el lazo de control de altura. Adicionalmente, los datos medidos pueden ser enviados a MATLAB para su visualización, almacenamiento y análisis experimental.

VI. MODELADO FÍSICO DEL SISTEMA

VI-A. Variables y convenciones

Se definen a continuación las variables y convenciones utilizadas para el modelado del sistema:

- Eje vertical z [m], definido positivo hacia arriba.

- Masa móvil:

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

- Aceleración de la gravedad:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

- Peso del cuerpo móvil:

$$mg = 3.924 \text{ N}$$

- Entrada del sistema: señal PWM tipo servo a 50 Hz,

$$u \in [1000, 2000] \mu\text{s}$$

- Normalización de la entrada:

$$\hat{u} = \text{sat}\left(\frac{u - 1300}{1000}, 0, 1\right)$$

- Salida medida:

$$y = z$$

correspondiente a la altura del cuerpo móvil medida mediante el sensor TFMini Plus.

VI-A1. Modelo físico simplificado: Desde un punto de vista físico, el movimiento vertical del cuerpo móvil puede describirse, en primera aproximación, mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{z} = v$$

$$m\dot{v} = T - mg$$

donde T representa el empuje efectivo generado por el conjunto ESC-motor-hélice. Este modelo corresponde a una descripción idealizada del sistema y no contempla efectos tales como fricción, aerodinámica ni la dinámica interna del actuador.

Si bien este modelo permite capturar la estructura básica del sistema, resulta insuficiente para reproducir con precisión las dinámicas observadas durante las pruebas experimentales. Las principales fuentes de discrepancia se asocian a:

- variaciones de masa efectiva y efectos de fricción mecánica,
- fenómenos aerodinámicos no lineales asociados al empuje generado por la hélice,
- dinámica propia del sistema de actuación, compuesta por el controlador ESC y el motor brushless.

VI-A2. Identificación experimental del sistema: Con el objetivo de obtener un modelo más representativo del comportamiento real de la planta, se recurrió a técnicas de identificación de sistemas utilizando la *System Identification Toolbox* de MATLAB. A partir de datos experimentales de entrada-salida, se identificó un modelo discreto basado en estructuras polinomiales del tipo *Box-Jenkins / Polynomial Function*, seleccionadas por su capacidad para capturar dinámicas de mayor orden y retardos efectivos.

Durante el proceso de identificación se aplicaron escalones de amplitud suficiente en la señal PWM, con el fin de excitar los modos dominantes del sistema. Para el procesamiento de los datos se seleccionaron intervalos de operación aproximadamente lineales, evitando regiones dominadas por saturaciones, fricción

estática u otros efectos fuertemente no lineales. Asimismo, se aplicaron técnicas de filtrado para reducir la influencia del ruido de medición, sin alterar la dinámica dominante.

VI-A3. Función de transferencia identificada: El modelo discreto resultante, que recuerda la relación entre la entrada u_1 y la salida y_1 , queda expresado en términos de potencias de z^{-1} como:

$$G(z) = \frac{Y_1(z)}{U_1(z)} = \frac{-1.205 \times 10^{-4} z^{-1} + 2.415 \times 10^{-4} z^{-2} - 1.209 \times 10^{-4} z^{-3}}{1 - 2.994 z^{-1} + 2.989 z^{-2} - 0.9944 z^{-3}} \quad (1)$$

Este modelo presenta un retardo de una muestra, evidenciado por el término dominante z^{-1} en el numerador, así como una dinámica de tercer orden en el denominador. La presencia de polos cercanos a $z = 1$ es consistente con el carácter integrador del sistema de altura, donde la posición resulta de la doble integración de la aceleración.

El polo adicional identificado respecto del modelo físico ideal puede asociarse a la dinámica electromecánica del conjunto motor-ESC-hélice, mientras que los ceros del sistema no pudieron ser vinculados de manera concluyente a un único fenómeno físico. No obstante, su presencia resulta compatible con efectos aerodinámicos y con la dinámica interna del sistema de actuación.

VI-A4. Validez del modelo: El modelo identificado constituye una aproximación válida del comportamiento del sistema en el rango de operación considerado y resulta adecuado para el diseño y la evaluación de las estrategias de control implementadas en este trabajo. Sin embargo, fuera de dicho rango, el sistema presenta comportamientos no lineales y efectos dependientes del punto de operación que no son capturados por el modelo lineal identificado.

VII. MÉTODOS CLÁSICOS DE CONTROL

VII-A. Introducción

Los métodos clásicos de control se fundamentan en el análisis de sistemas lineales mediante funciones de transferencia y herramientas del dominio de la frecuencia y del plano complejo.

En este enfoque, la dinámica del sistema se describe como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{o en tiempo discreto} \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

El diseño del controlador se realiza modificando la función de transferencia del lazo abierto:

$$L(s) = C(s)G(s) \quad \text{o} \quad L(z) = C(z)G(z)$$

con el objetivo de garantizar:

- Estabilidad en lazo cerrado.
- Desempeño transitorio adecuado.
- Error estacionario reducido.
- Robustez frente a incertidumbre.

Los métodos clásicos utilizados en este trabajo incluyen:

- Controlador PID.
- Diseño por Lugar de Raíces.
- Diseño mediante Respuesta en Frecuencia (Bode).
- Síntesis Directa (Truxal-Ragazzini).

VII-B. Modelo de la Planta

El diseño clásico parte de la función de transferencia identificada:

$$G(z) = [\text{Completar}]$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = [\text{Completar}]$$

Polos de la planta:

$$\{z_i\} = [\text{Completar}]$$

Ceros de la planta:

$$\{z_j\} = [\text{Completar}]$$

Observaciones:

- Estabilidad en lazo abierto: **[Completar]**
- Orden del sistema: **[Completar]**
- Presencia de retardo efectivo: **[Completar]**

VII-C. Fundamentos Matemáticos del Control Clásico

VII-C1. Estabilidad en Lazo Cerrado: El sistema en lazo cerrado se expresa como:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

La estabilidad discreta requiere que:

$$|z_i| < 1 \quad \forall i$$

donde z_i son los polos de $G_{cl}(z)$.

VII-C2. Lugar de Raíces: Los polos del lazo cerrado satisfacen:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

El Lugar de Raíces describe la trayectoria de estos polos al variar la ganancia del controlador.

VII-C3. Márgenes de Estabilidad: A partir del diagrama de Bode del lazo abierto $L(z)$ se definen:

- Margen de ganancia.
- Margen de fase.
- Frecuencia de cruce de ganancia.

Estos parámetros cuantifican la estabilidad relativa y robustez del sistema.

VII-D. Controlador PID

Durante las etapas iniciales de diseño se intentó sintonizar un controlador PID utilizando la herramienta PID Tuner de MATLAB. Sin embargo, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios para la planta bajo estudio, principalmente debido a la complejidad de la dinámica identificada, la presencia de retardos efectivos asociados al sistema de actuación (ESC-motor) y las limitaciones físicas del actuador. En particular, el desempeño obtenido presentaba respuestas lentas o esfuerzos de control excesivos, incompatibles con la implementación experimental.

Ante esta situación, se optó por utilizar una formulación de controlador PID basada en el método propuesto por Åström, el cual permite un mayor control sobre la estructura del controlador y sobre el compromiso entre rapidez, amortiguamiento y esfuerzo de control. Este enfoque resultó más adecuado para la planta identificada y permitió obtener respuestas dinámicas satisfactorias en simulación y en la práctica.

VII-D1. Formulación del PID de Åström: La estructura del controlador PID de Åström se implementa en forma discreta y separa explícitamente las acciones proporcional, integral y derivativa. El término proporcional se define como:

$$P(t) = K(b u_c(t) - y(t))$$

donde K es la ganancia proporcional y b es un parámetro que determina qué fracción de la referencia se introduce en la acción proporcional, permitiendo reducir el sobreimpulso ante cambios bruscos de referencia.

La acción derivativa se implementa mediante un filtro de primer orden, cuya ecuación en tiempo discreto es:

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(kh-h) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} (y(kh) - y(kh-h))$$

donde T_d es la constante de tiempo derivativa, N es el parámetro que limita el ancho de banda del término derivativo, y es el período de muestreo.

La acción integral se describe mediante:

$$I(kh + h) = I(kh) + \frac{K_h}{T_i} e(kh)$$

donde T_i es la constante de tiempo integral y $e(kh) = u_c(kh) - y(kh)$ es el error de control.

La señal de control total se obtiene como la suma de los tres términos:

$$u(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh)$$

VII-D2. Criterios de sintonización: La sintonización de los parámetros del controlador se realizó de forma iterativa, utilizando simulaciones y observando tanto la respuesta del sistema como el esfuerzo de control. Los criterios adoptados fueron los siguientes:

- **Ganancia proporcional K :** se incrementó progresivamente hasta aproximar el sistema al umbral de inestabilidad, con el objetivo de obtener un transitorio rápido y una respuesta ágil.

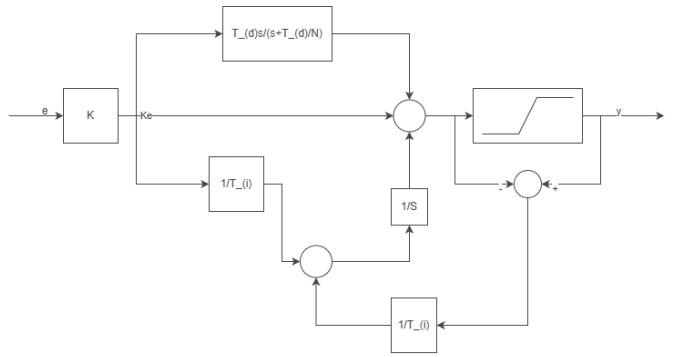


Figura 13. Diagrama de bloques, Astrom - Antiwindup [5]. Aplicada a la planta.

- **Acción integral T_i :** se incorporó posteriormente para eliminar el error en régimen permanente, ajustando su valor de manera que el tiempo de establecimiento resultara razonable sin introducir oscilaciones significativas.
- **Acción derivativa T_d :** se añadió con el fin de reducir el sobreimpulso y mejorar el amortiguamiento del sistema.
- **Parámetro N :** se ajustó para limitar la amplificación de ruido del término derivativo, probando distintos valores hasta observar una señal excesivamente sensible al ruido de medición.

Durante todo el proceso de sintonización se monitoreó cuidadosamente el esfuerzo de control. Como condición de diseño, se impuso que la variación de la señal PWM no superara aproximadamente $10\mu s$ por centímetro de incremento en la altura, garantizando de esta manera que el actuador no entrara en saturación ni se expusiera la planta a condiciones potencialmente dañinas.

VII-D3. Resultados: El controlador PID basado en el método de Åström permitió obtener un comportamiento dinámico estable, con un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta, amortiguamiento y esfuerzo de control. En comparación con los resultados obtenidos mediante el PID Tuner, esta metodología ofreció mayor flexibilidad y un mejor ajuste a las particularidades de la planta identificada, resultando adecuada para su implementación experimental (Figuras 14 y 15).

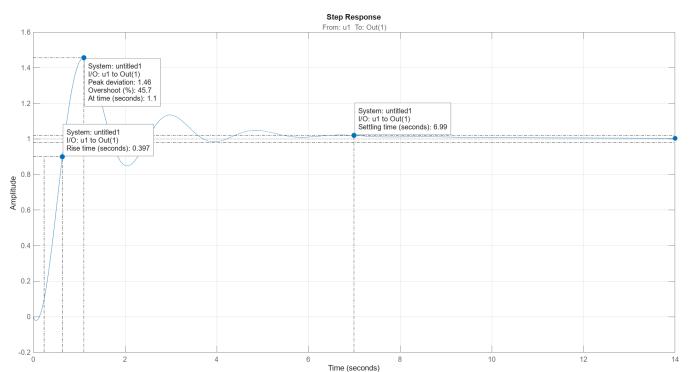


Figura 14. La respuesta al escalón con el controlador PID.

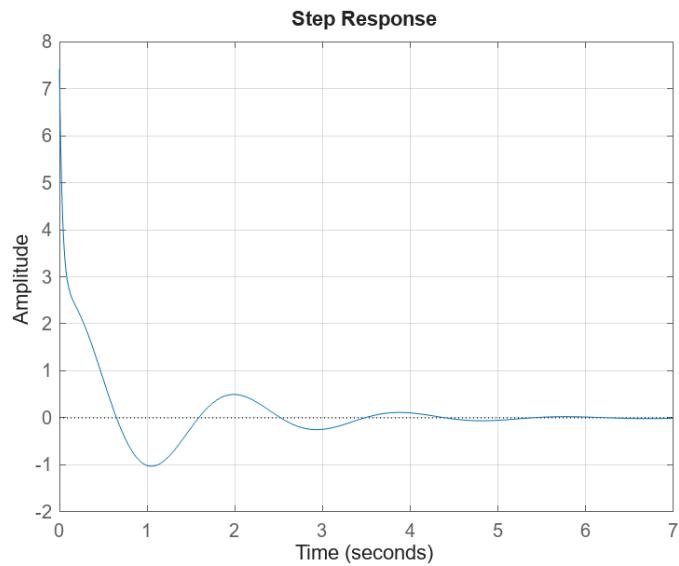


Figura 15. El esfuerzo del con el controlador PID.

VII-D4. *Práctica:* a completar lo que sale en la práctica



img/PID/RstaPIDPractica.png

Figura 16. La respuesta con el controlador PID.



img/PID/EsfuerzoPIDPractica.png

Figura 17. El esfuerzo del con el controlador PID.

$$K_p = \textbf{[Completar]}, \quad T_i = \textbf{[Completar]}, \quad T_d = \textbf{[Completar]}, \quad N = \textbf{[Completar]}$$

VII-E. Diseño por Lugar de Raíces

Se analiza la ecuación característica:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

Dado que la planta identificada (ecuación 1) presenta polos ubicados fuera del círculo unitario, el sistema en lazo abierto resulta inestable en el dominio discreto. En consecuencia, cualquier diseño de control debe garantizar que los polos del lazo cerrado queden estrictamente dentro del círculo unitario para asegurar estabilidad interna.



Figura 18. Ubicación de los polos de la planta sin compensar en el plano z . Se observa que al menos uno de ellos se encuentra fuera del círculo unitario, lo que implica inestabilidad discreta.

El objetivo del diseño consistió en modificar la dinámica del sistema mediante compensación, de modo que:

- todos los polos del lazo cerrado queden dentro del círculo unitario,
- se logre un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta y amortiguamiento,
- el esfuerzo de control permanezca dentro de límites físicamente realizable.

VII-E1. Elección de la estructura del compensador:

Para estabilizar el sistema se adoptó una estructura de tipo **lag-lead** (atraso–adelanto). Esta configuración permite actuar simultáneamente sobre la estabilidad relativa y el desempeño en régimen permanente.

El término *lead* (adelanto) se empleó para aumentar el margen de fase y desplazar los polos dominantes del lazo cerrado hacia regiones del plano z asociadas con mayor amortiguamiento y mejor desempeño transitorio. Por otro lado, el término *lag* (atraso) permitió ajustar la ganancia en bajas frecuencias, mejorando el comportamiento estacionario sin comprometer significativamente la estabilidad.

La adecuada ubicación de ceros permitió modificar la geometría del lugar de raíces, atrayendo las ramas hacia

la región estable del plano discreto, mientras que los polos adicionales modelaron el compromiso dinámico requerido.

VII-E2. Determinación de la ganancia K : Una vez definida la estructura del compensador, se analizó el lugar de raíces del sistema compensado. La determinación manual de la ganancia K resultó particularmente sensible, ya que pequeños incrementos en su valor provocaban que las trayectorias de los polos abandonaran el círculo unitario antes de satisfacer las especificaciones dinámicas deseadas.

Esta sensibilidad está directamente relacionada con la naturaleza inestable de la planta y con la fuerte dependencia de la ubicación de los polos del lazo cerrado respecto a la ganancia del compensador.

El compensador finalmente adoptado fue:

$$C(z) = -0.0173 \frac{(z - 1.0140)(z - 0.5)}{(z - 0.9522)(z - 0.9894)} \quad (2)$$

VII-E3. Ajuste mediante Optimization-Based Tuning: Con el fin de sistematizar el proceso de ajuste y garantizar el cumplimiento simultáneo de múltiples especificaciones (estabilidad, rapidez y esfuerzo de control), se utilizó la herramienta Optimization-Based Tuning de MATLAB.

Este enfoque permitió:

- definir directamente especificaciones temporales (tiempo de establecimiento, sobreimpulso, etc.),
- ajustar automáticamente los parámetros del compensador,
- verificar la estabilidad del sistema en el dominio discreto.

El resultado fue un compensador lag–lead cuyos parámetros fueron obtenidos mediante optimización numérica, asegurando que los polos del lazo cerrado se mantengan dentro del círculo unitario y que el desempeño temporal cumpla con los objetivos establecidos para la planta experimental.

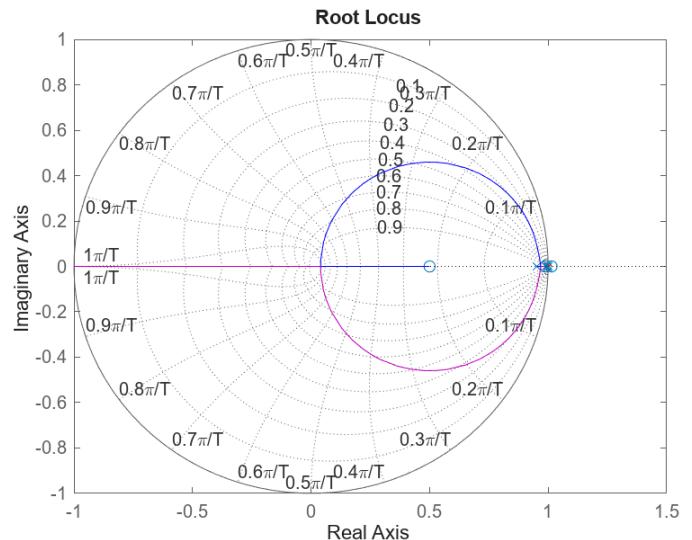


Figura 19. Ubicación de los polos del sistema compensado en el plano z . Se verifica que todos ellos se encuentran dentro del círculo unitario, garantizando estabilidad discreta.

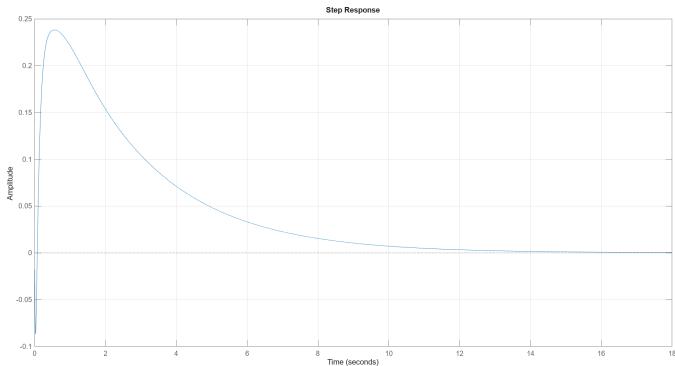


Figura 20. Esfuerzo de control en lazo cerrado con el compensador diseñado mediante Lugar de Raíces.

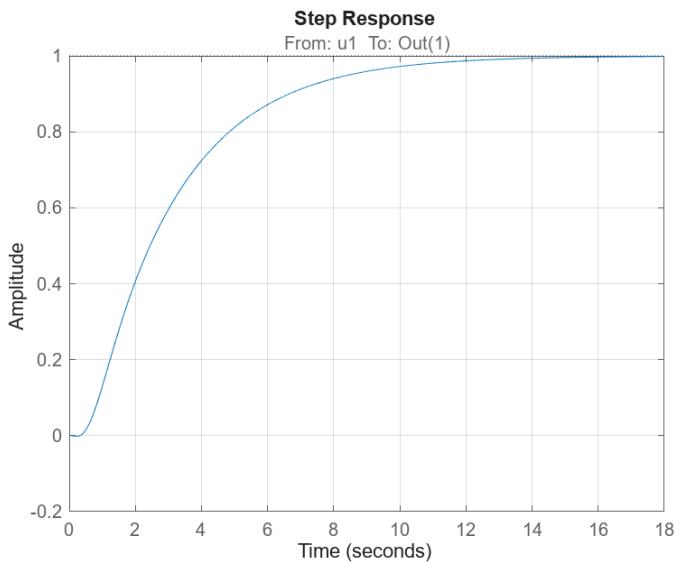


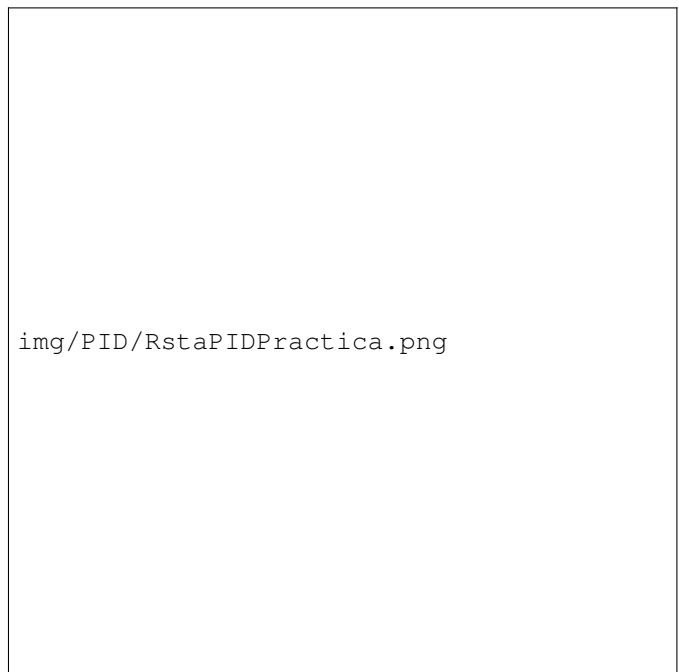
Figura 21. Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado con el compensador diseñado.

VII-E4. Práctica: a completar lo que sale en la práctica
Objetivos:

- Ubicar polos dentro del círculo unitario.
- Controlar amortiguamiento.
- Ajustar velocidad de respuesta.

Compensador adoptado:

$$C(z) = [\text{Completar}]$$



img/PID/RstaPIDPractica.png

Figura 22. La respuesta con el controlador PID.



img/PID/EsfuerzoPIDPractica.png

Figura 23. El esfuerzo del con el controlador PID.

VII-F. Diseño por Respuesta en Frecuencia

Se analiza el lazo abierto:

$$L(z) = C(z)G(z)$$

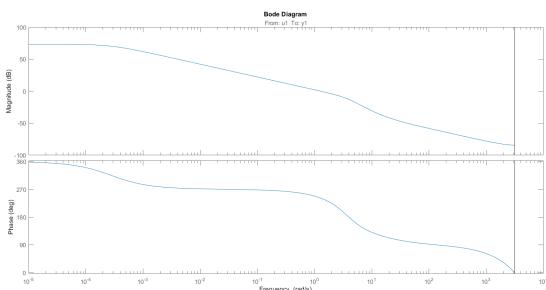


Figura 24. Respuesta en frecuencia del lazo abierto del sistema identificado sin compensación.

Para el diseño del controlador basado en el método de respuesta en frecuencia se utilizó directamente el modelo discreto de la planta obtenido mediante identificación experimental, mostrado en la Fig. 24. En particular, se trabajó con la función de transferencia discreta $G(z)$ dada en (1), la cual representa el comportamiento dinámico del sistema en el rango de operación considerado.

El modelo identificado fue introducido en el entorno de diseño de MATLAB mediante la herramienta `controlSystemDesigner`, lo que permitió analizar la respuesta en frecuencia del sistema y realizar el diseño del controlador de manera interactiva. A partir de esta herramienta se obtuvieron los diagramas de Bode del lazo abierto, así como los márgenes de ganancia y de fase asociados.

VII-F1. Análisis del sistema sin compensar: En la Fig. 25, correspondiente al sistema sin compensación, se observa el diagrama de Bode del lazo abierto conformado únicamente por la planta identificada. A partir de dicho análisis se determinan los márgenes de estabilidad iniciales, los cuales permiten evaluar la estabilidad relativa y la robustez del sistema frente a variaciones paramétricas.

El sistema presenta un margen de fase positivo, lo que indica estabilidad en lazo cerrado para valores reducidos de ganancia, aunque con un compromiso limitado en términos de rapidez de respuesta y amortiguamiento. Asimismo, la pendiente del módulo en la región de cruce de ganancia evidencia la presencia de múltiples polos dominantes, coherentes con la dinámica de orden superior identificada y asociada al conjunto motor-ESC-hélice.

VII-F2. Diseño del compensador: Con base en el análisis previo, se procedió al diseño de un compensador con el objetivo de mejorar el desempeño dinámico del sistema, manteniendo márgenes de estabilidad adecuados. El diseño se realizó ajustando la estructura y los parámetros del controlador directamente sobre el diagrama de Bode del lazo abierto, utilizando la herramienta gráfica provista por MATLAB.

Los criterios de diseño considerados fueron:

- incrementar el margen de fase para mejorar el amortiguamiento del sistema,
- fijar una frecuencia de cruce que permita un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta y robustez,
- limitar la amplificación de ruido a altas frecuencias y el esfuerzo de control.

VII-F3. Análisis del sistema compensado: La Fig. 26 muestra el diagrama de Bode del lazo abierto una vez incorporado el controlador diseñado. Se observa un aumento del margen de fase y un ajuste controlado del margen de ganancia, lo cual indica una mejora en la estabilidad relativa del sistema.

Los valores obtenidos a partir de los diagramas de Bode son los siguientes:

■ Sistema sin compensación (Fig. 25):

- Margen de ganancia: 13 dB,
- Margen de fase: 61,700°.

■ Sistema compensado (Fig. 26):

- Margen de ganancia: 10.6 dB,
- Margen de fase: 52,900°.

La validación del diseño se realizó mediante el análisis de la respuesta temporal en lazo cerrado. La respuesta al escalón del sistema compensado presenta un comportamiento estable, con un sobreimpulso moderado y un tiempo de establecimiento acorde a los objetivos del trabajo. Asimismo, la señal de control se mantiene dentro de valores aceptables, evitando saturaciones prolongadas del actuador.

En este caso, la compensación se realizó mediante un controlador puramente proporcional, definido como:

$$C(z) = K_p, \quad K_p = 1.308$$

Por lo tanto, el lazo abierto queda dado por $L(z) = K_p G(z)$. La acción del controlador proporcional consiste en escalar la magnitud de la respuesta en frecuencia del lazo abierto, desplazando la frecuencia de cruce y, en consecuencia, modificando los márgenes de ganancia y de fase observados. No se introducen polos ni ceros adicionales, por lo que no se realiza una compensación dinámica de fase; la mejora del desempeño se logra exclusivamente mediante el ajuste de la ganancia.

La incorporación de polos adicionales introduciría retardos en la respuesta y una reducción del margen de fase, mientras que la adición de ceros podría generar un adelanto de fase a costa de un incremento significativo del esfuerzo de control. Dado que en la simulación no se dispone de una estimación fiable del esfuerzo del actuador, no resulta posible ponderar adecuadamente estos efectos. Por este motivo, se descartó la inclusión de polos, ceros o acción integral en esta etapa, con el fin de preservar la integridad del sistema físico durante la implementación experimental.

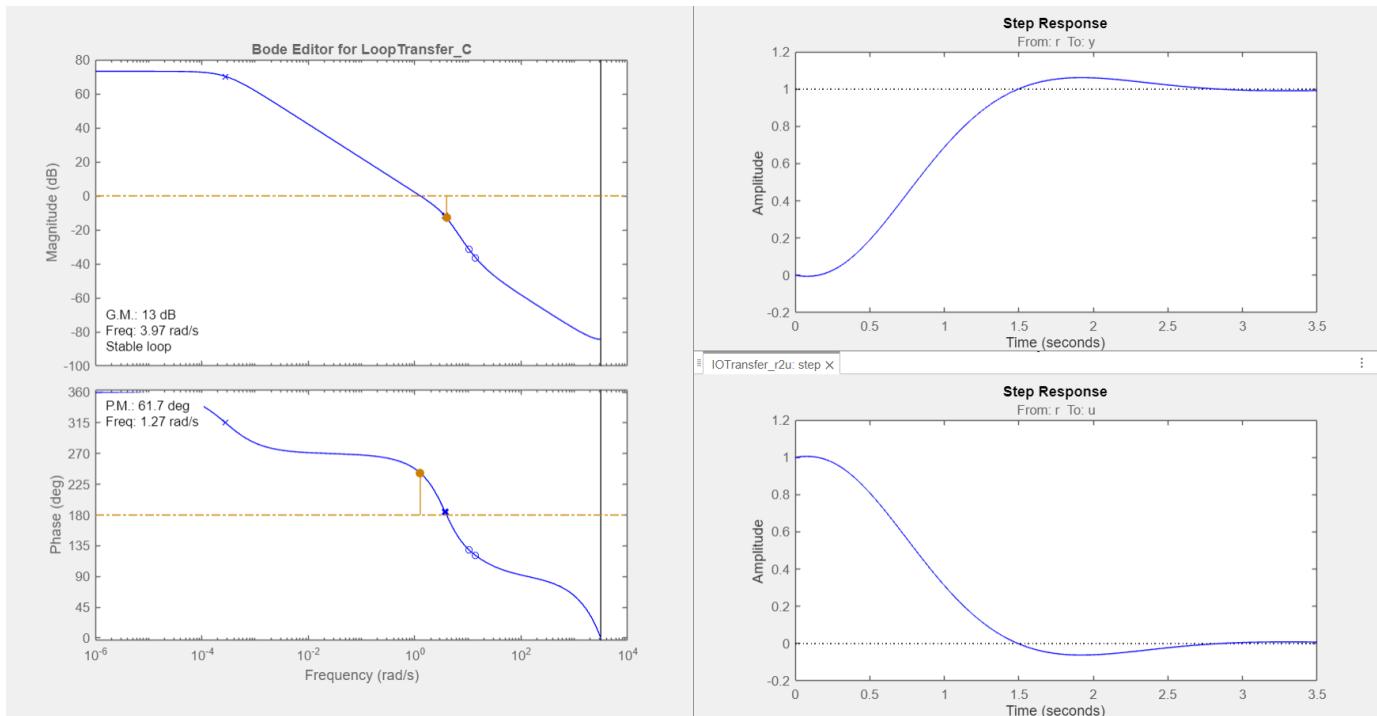


Figura 25. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

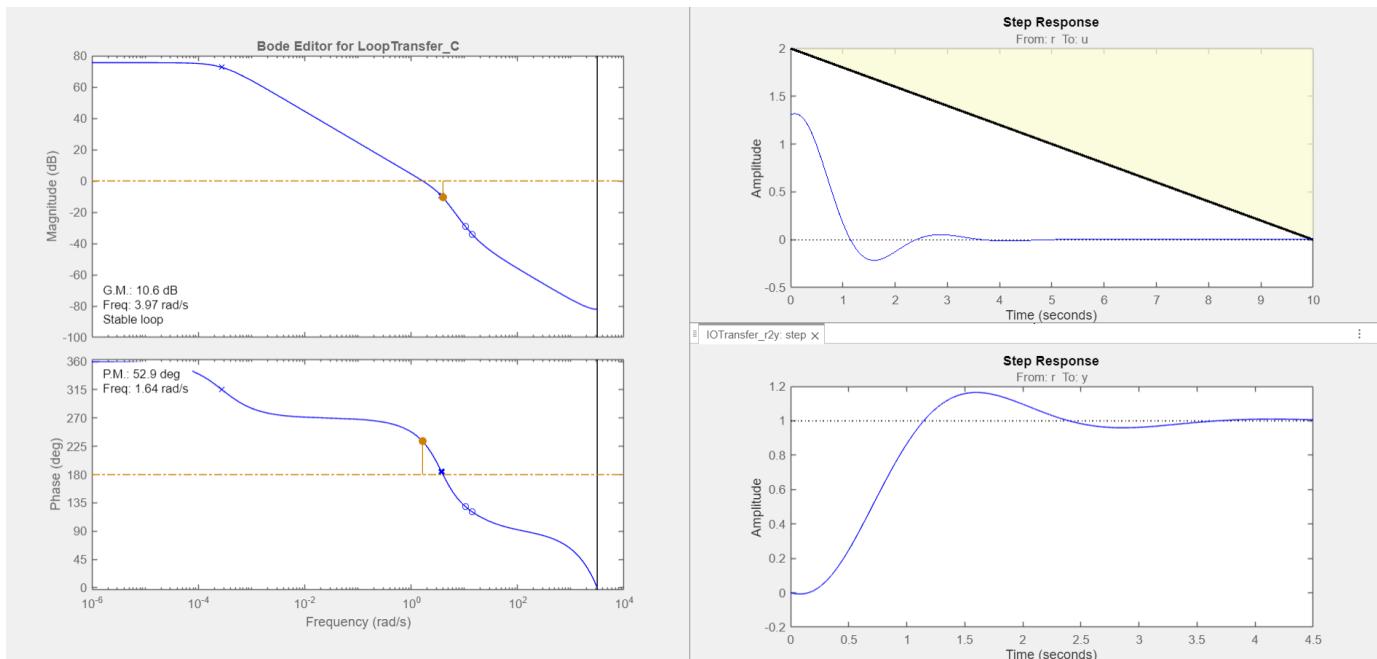


Figura 26. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

VII-G. Práctica

a completar lo que sale en la práctica



img/PID/RstaPIDPractica.png

Figura 27. La respuesta con el controlador PID.



img/PID/EsfuerzoPIDPractica.png

Figura 28. El esfuerzo del con el controlador PID.

VII-G1. Modelo Utilizado: Para el diseño se empleó el modelo discreto identificado previamente:

$$G(z) = [\text{Completar}]$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = [\text{Completar}]$$

El análisis se realizó utilizando la herramienta `controlSystemDesigner` de MATLAB, permitiendo examinar los diagramas de Bode del lazo abierto $L(z) = G(z)$.

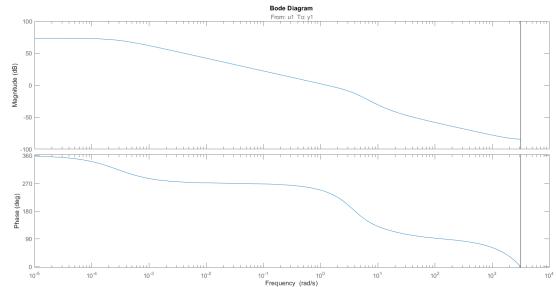


Figura 29. Respuesta en frecuencia del lazo abierto sin compensación.

Parámetros clave:

- Margen de fase: **[Completar]**
- Margen de ganancia: **[Completar]**
- Frecuencia de cruce: **[Completar]**

Controlador adoptado:

$$C(z) = [\text{Completar}]$$

VII-H. Síntesis Directa

VII-H1. *Síntesis directa (Truxal–Ragazzini)*: Se parte del modelo discreto identificado de la planta, ecuación 1:

$$G_{ZAS}(z) = G(z) \quad (3)$$

El método de Truxal–Ragazzini propone especificar una dinámica deseada en lazo cerrado $G_{cl}(z)$ y obtener el controlador a partir de:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z) G_{ZAS}(z)}{1 + C(z) G_{ZAS}(z)} \implies C(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{G_{cl}}{1 - G} \quad (4)$$

VII-H1a. *Método 1: respuesta “deadbeat”*: Para el caso de oscilaciones entre muestras se adoptó:

$$G_{cl}(z) = z^{-1}. \quad (5)$$

Reemplazando en (4) se obtiene:

$$C_1(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{1}{z - 1}. \quad (6)$$

VII-H2. *Resultado del Método 2 (Deadbeat ripple-free)*: El controlador obtenido para el Método 2 se expresa como:

$$C_2(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{10.43038 z^2 - 2.7635 z + 3.3344}{-0.33662 z^2 - 0.66338 z + 1}. \quad (7)$$

Multiplicando numerador y denominador por (-1) y normalizando para que el coeficiente líder del denominador sea 1, resulta:

$$C_2(z) = \frac{-30.9856 z^2 + 8.2096 z - 9.9055}{z^2 + 1.9707 z - 2.9707}. \quad (8)$$

En forma de z^{-1} (conveniente para implementación digital):

$$C_2(z) = \frac{-30.9856 + 8.2096 z^{-1} - 9.9055 z^{-2}}{1 + 1.9707 z^{-1} - 2.9707 z^{-2}}. \quad (9)$$

VII-H3. *Resultados y limitaciones prácticas*: Si bien la síntesis directa es útil para comprender la relación entre la respuesta deseada y la estructura del controlador, en esta planta el resultado no es implementable: los controladores obtenidos (M_1 y M_2) demandaron esfuerzos máximos del orden de 10^{29} en simulación. Esto es incompatible con el actuador real, cuya acción de control se implementa como una señal PWM tipo servo a 50 Hz limitada a:

$$u \in [1000, 2000] \text{ } \mu\text{s}. \quad (10)$$

La magnitud extrema del esfuerzo se atribuye a la inversión explícita de $G_{ZAS}(z)$ y a la presencia de dinámica cercana a $z = 1$, lo que vuelve al diseño altamente sensible a cancelaciones y a incertidumbres del modelo (tensión de batería, fricción, aerodinámica y dinámica no modelada del conjunto ESC–motor–hélice). En consecuencia, para implementación experimental se priorizan controladores de menor orden y mayor robustez, considerando explícitamente saturación y limitaciones del esfuerzo.

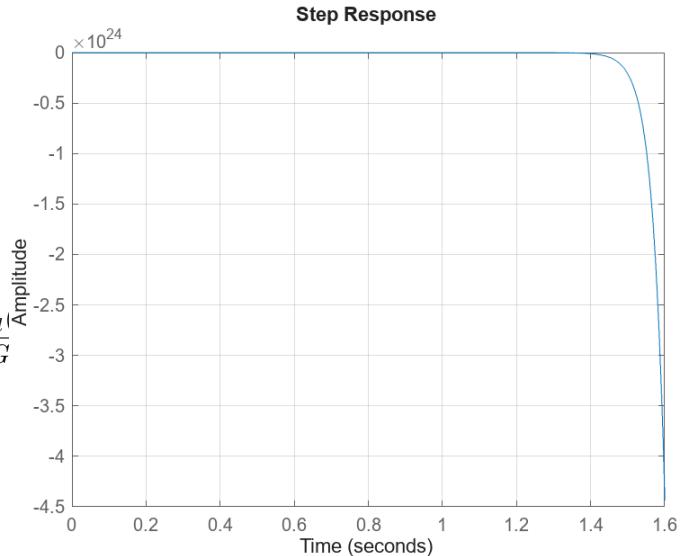


Figura 30. Respuesta temporal del esfuerzo de control para ambos métodos de síntesis.

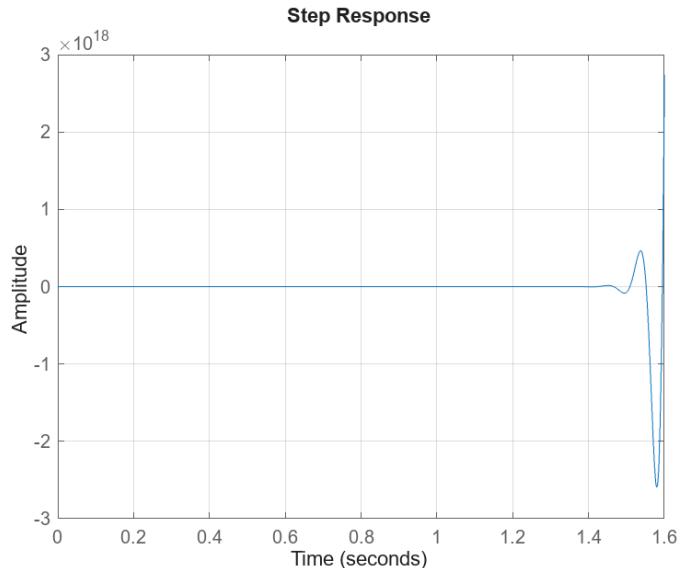


Figura 31. Respuesta temporal de la salida en lazo cerrado para ambos métodos de síntesis.

VII-I. Simulaciones

VII-II. *Modelo de la Planta*: Se parte del modelo discreto identificado:

$$G(z) = [\text{Completar}] \quad (11)$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = [\text{Completar}]$$

Polos de la planta:

$$\{z_i\} = [\text{Completar}]$$

Observaciones relevantes:

- Presencia de polos cercanos a $z = 1$: **[Completar]**
- Naturaleza inestable / marginalmente estable: **[Completar]**

VII-I2. *Formulación General*: La síntesis directa propone especificar una dinámica deseada en lazo cerrado:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (12)$$

Despejando el controlador:

$$C(z) = Ecuacion general :$$

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{cl}(z)}{1 - G_{cl}(z)}$$

Dinámica deseada:

$$G_{cl}(z) = \text{[Completar]}$$

Observaciones:

- Sensibilidad al modelo.
- Elevado esfuerzo de control.
- Limitaciones prácticas.

VII-J. *Comparación entre Métodos Clásicos*

- PID: **[Completar fortalezas y debilidades]**
- Lugar de Raíces: **[Completar]**
- Bode: **[Completar]**
- Síntesis Directa: **[Completar]**

Observación general:

[Completar: limitaciones estructurales del enfoque clásico]

VIII. MÉTODOS MODERNOS DE CONTROL

VIII-A. Introducción

A diferencia de los métodos clásicos basados en funciones de transferencia y análisis en frecuencia, los métodos modernos de control se fundamentan en la representación en espacio de estados del sistema dinámico.

En este enfoque, la dinámica se describe mediante:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, u_k la entrada de control y y_k la salida medida.

Este formalismo permite:

- Diseñar realimentación directa de estados.
- Ubicar polos del sistema de manera sistemática.
- Formular problemas de control óptimo.
- Incorporar estimadores de estado.

VIII-B. Modelo en Espacio de Estados

El modelo discreto obtenido a partir de la identificación es:

$$A = [\text{Completar}]$$

$$B = [\text{Completar}]$$

$$C = [\text{Completar}]$$

$$D = [\text{Completar}]$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = [\text{Completar}]$$

VIII-C. Análisis de Controlabilidad y Observabilidad

Matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = [\text{Completar}]$$

Matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = [\text{Completar}]$$

Conclusión estructural:

[Completar: sistema controlable/observable]

VIII-D. Realimentación de Estados

Se plantea la ley de control:

$$u_k = -Kx_k$$

Los polos del sistema en lazo cerrado quedan dados por:

$$\lambda(A - BK)$$

Objetivo:

- Ubicación deseada de polos: **[Completar]**

Ganancia obtenida:

$$K = [\text{Completar}]$$

VIII-E. Ubicación Arbitraria de Polos

VIII-E1. Fundamento: Se propone la ley de control:

$$u_k = -Kx_k$$

lo que conduce a:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k$$

El objetivo es imponer:

$$\lambda(A - BK) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

- **VIII-E2. Selección de Polos Deseados:** Polos seleccionados:

$$\{p_i\} = [\text{Completar}]$$

Criterios:

- Rapidez deseada.
- Amortiguamiento.
- Estabilidad discreta ($|p_i| < 1$).

VIII-E3. Cálculo de la Ganancia: La ganancia se obtuvo mediante:

- Método de Ackermann.
- Función `place()`.

$$K = [\text{Completar}]$$

Polos resultantes:

$$\lambda(A - BK) = [\text{Completar}]$$

VIII-E4. Resultados:

- Sobreimpulso: **[Completar]**
- Tiempo de establecimiento: **[Completar]**
- Pico de esfuerzo: **[Completar]**

VIII-F. Estimación de Estados

Dado que no todos los estados son medibles, se implementa un observador:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k)$$

Ganancia del observador:

$$L = \boxed{\text{Completar}}$$

Polos del observador:

$$\lambda(A - LC) = \boxed{\text{Completar}}$$

VIII-G. Control Óptimo (LQR)

Se define el funcional de costo:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

Matrices de ponderación:

$$Q = [\text{Completar}]$$

$$R = [\text{Completar}]$$

La solución se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati discreta:

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

Ganancia óptima:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

Polos obtenidos:

$$\lambda(A - BK) = [\text{Completar}]$$

VIII-H. Control Óptimo con Integrador

VIII-I. Control Óptimo con Integrador (LQI)

VIII-II. Motivación: El regulador cuadrático lineal (LQR) permite optimizar el compromiso entre desempeño y esfuerzo de control. Sin embargo, no garantiza error estacionario nulo ante referencias constantes.

Para eliminar el error permanente, se introduce un integrador del error de seguimiento, ampliando el modelo del sistema.

VIII-I2. Modelo Aumentado: Sistema original:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k$$

Se define el estado integrador:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + (r_k - y_k)$$

Definiendo el estado aumentado:

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

el sistema aumentado queda:

$$x_{a,k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A_a} x_{a,k} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_k$$

VIII-I3. Diseño LQR sobre el Sistema Aumentado: Se define el funcional de costo:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_a^T Q_a x_a + u_k^T R u_k)$$

Matrices de ponderación:

$$Q_a = \text{[Completar]}$$

$$R = \text{[Completar]}$$

La solución se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati discreta para el sistema aumentado.

Ganancia obtenida:

$$K_a = [K_x \ K_i]$$

donde:

- K_x actúa sobre los estados originales.
- K_i actúa sobre el estado integrador.

Ley de control final:

$$u_k = -K_x x_k - K_i \xi_k$$

VIII-I4. Polos del Sistema Aumentado: Los polos del lazo cerrado resultan de:

$$\lambda(A_a - B_a K_a) = \text{[Completar]}$$

Se verifica estabilidad discreta:

$$|p_i| < 1$$

VIII-I5. Resultados:

- Error estacionario: **[Completar]**
- Sobreimpulso: **[Completar]**
- Tiempo de establecimiento: **[Completar]**
- Pico de esfuerzo de control: **[Completar]**

VIII-I6. Discusión: La incorporación del integrador permite eliminar el error estacionario frente a referencias constantes.

En comparación con:

- Ubicación arbitraria de polos: el método LQI introduce un criterio explícito de optimización.
- LQR sin integrador: se logra seguimiento exacto de referencia.

Limitaciones:

- Incremento del orden del sistema.
- Mayor sensibilidad a saturación si K_i es elevado.
- Dependencia del modelo identificado.

VIII-J. Filtro de Kalman

VIII-J1. Modelo con Ruido: Para incorporar incertidumbre en el modelo, se considera la siguiente representación estocástica:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

donde:

- $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ es el ruido de proceso.
- $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ es el ruido de medición.

Las matrices de covarianza utilizadas fueron:

$$Q = [\text{Completar}]$$

$$R = [\text{Completar}]$$

VIII-J2. Ecuaciones del Filtro de Kalman: El filtro consta de dos etapas:

VIII-J2a. Predicción:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1}A^T + Q$$

VIII-J2b. Actualización:

$$L_k = P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + L_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_k = (I - L_kC)P_{k|k-1}$$

VIII-J3. Ganancia en Régimen Permanente: En régimen estacionario, la ganancia converge a:

$$L = APC^T(CPC^T + R)^{-1}$$

donde P satisface la ecuación de Riccati discreta:

$$P = APA^T - APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA^T + Q$$

Ganancia obtenida:

$$L = [\text{Completar}]$$

VIII-J4. Resultados de Estimación: Se evaluó la calidad de estimación comparando:

- Estados reales vs estados estimados.
- Error cuadrático medio.
- Respuesta frente a ruido.

VIII-J5. Discusión: El filtro de Kalman presenta las siguientes ventajas:

- Minimiza la varianza del error de estimación.
- Permite modelar explícitamente ruido de proceso y medición.
- Se integra naturalmente con LQR formando el esquema LQG.

Limitaciones:

- Dependencia de una correcta elección de Q y R .
- Sensibilidad a errores estructurales del modelo.
- Supone ruido blanco gaussiano.

IX. CONCLUSIONES

APÉNDICE A

PARÁMETROS DEL CONTROLADOR

APÉNDICE B

CÓDIGO MATLAB

Aquí va el contenido del Apéndice B.

APÉNDICE C

EVOLUCIÓN DEL DISEÑO ESTRUCTURAL DE LA PLANTA

Durante el desarrollo del trabajo práctico, la estructura física de la planta atravesó distintas etapas de diseño, las cuales permitieron identificar limitaciones mecánicas y realizar mejoras progresivas hasta alcanzar la configuración final utilizada en las prácticas experimentales. En este apéndice se describe la primera etapa de diseño de la estructura y se destacan las principales diferencias respecto de la versión final.

C-A. Primera etapa de diseño

La primera versión de la estructura fue concebida con una altura total aproximada de 80 cm, utilizando la misma base y el mismo techo de madera que se mantienen en el diseño final. Debido a las dimensiones de estos elementos, la altura útil de movimiento del cuerpo móvil en esta etapa era de aproximadamente 72 cm.

En esta configuración inicial, el diseño mecánico del cuerpo móvil era diferente al actual, presentando dimensiones ligeramente mayores. El sistema no contaba con elementos de seguridad adicionales, tales como topes mecánicos, amortiguación ante caídas ni cuerda de seguridad, dado que el recorrido vertical era considerablemente menor y el riesgo asociado a caídas desde grandes alturas resultaba limitado.

El guiado del cuerpo móvil se realizaba mediante vigas metálicas rectas y rígidas, las cuales no presentaban deformaciones apreciables. Debido a esta rigidez estructural, no fue necesario incorporar articulaciones pasivas tipo “muñeca” en las abrazaderas, ni estructuras auxiliares de madera para limitar deformaciones. En esta etapa, el contacto entre el cuerpo móvil y los rieles generaba fricción apreciable, la cual se manifestaba de forma consistente durante el movimiento vertical.

Cabe destacar que este comportamiento friccional, observable en la primera versión de la estructura, no se presenta de la misma manera en el diseño final. La incorporación de vigas metálicas de mayor longitud, junto con las deformaciones

inherentes a las mismas y la inclusión de articulaciones pasivas en las abrazaderas, redujo significativamente la fricción directa entre el cuerpo móvil y los rieles, modificando así las características mecánicas del sistema.

En las figuras siguientes se presentan imágenes correspondientes a las primeras versiones de las piezas impresas en 3D utilizadas en esta etapa inicial del diseño, las cuales difieren de las empleadas en la configuración final de la planta.

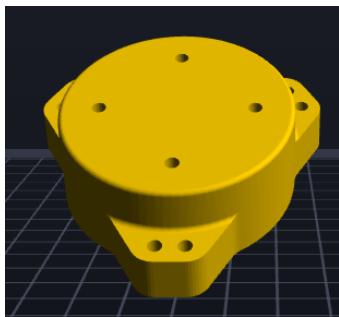


Figura 32. Primer diseño del soporte superior del motor.

En la primera etapa de diseño, el soporte superior del cuerpo móvil presentaba una altura aproximada de 3 cm y un diámetro de 4 cm. Las secciones sobresalientes destinadas al acople de los brazos contaban con una altura de aproximadamente 1,5 cm. Dicho soporte incluía orificios dimensionados específicamente para el montaje del motor brushless, con un diámetro de 3 mm, acorde al patrón de fijación del mismo.

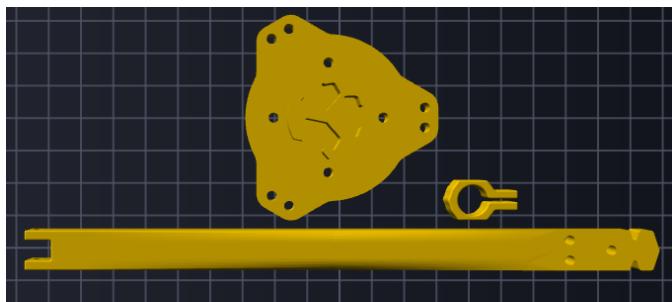


Figura 33. Primeros diseños del soporte inferior y de los brazos estructurales.

El soporte inferior del cuerpo móvil correspondía a una geometría espejo del soporte superior. En este componente se realizaba el encastre de los brazos estructurales, los cuales, en esta etapa inicial, presentaban dimensiones menores en comparación con el diseño final. Cada brazo tenía dimensiones aproximadas de 1 cm × 1 cm × 20 cm.

El sistema de agarre de los brazos difería del implementado en la versión final de la planta. Inicialmente, el agarre no contaba con movilidad angular, aunque permitía un ajuste manual respecto a la posición de la viga metálica, lo que condicionaba el guiado del cuerpo móvil y su interacción con los rieles.

C-B. Segunda etapa de diseño

En la segunda etapa de diseño, el componente que presentó mayores modificaciones fue el brazo estructural. A partir de

la experiencia obtenida en la etapa inicial, se introdujeron variaciones geométricas en el diseño del brazo, incorporando curvaturas con el objetivo de mejorar el encastre y la interacción con la estructura de guiado.

En esta versión, el brazo y el sistema de agarre fueron integrados en una única pieza impresa en 3D, eliminando la separación entre ambos componentes. Dado que en esta etapa las vigas metálicas utilizadas como rieles presentaban una geometría recta y una rigidez suficiente, no fue necesaria la incorporación de articulaciones pasivas tipo “muñeca”. En consecuencia, el guiado del cuerpo móvil se realizaba mediante un agarre rígido, sin movilidad angular.

Cabe destacar que, durante esta etapa, el diseño del cuerpo móvil se mantuvo sin modificaciones significativas respecto a la versión anterior. Las mejoras se concentraron exclusivamente en el diseño de los brazos y del sistema de agarre, manteniendo constante la geometría general del conjunto móvil.



Figura 34. Segundo diseño de brazo.

C-C. Tercera etapa de diseño

En la tercera etapa de diseño se introdujo una modificación significativa en la estructura general de la planta, extendiendo su altura máxima hasta aproximadamente 160 cm. Esta ampliación respondió a la necesidad de disponer de un mayor recorrido vertical para la realización de las prácticas de control, lo cual implicó nuevas exigencias mecánicas sobre el conjunto estructural y el cuerpo móvil.

Como consecuencia del aumento de altura de la estructura, el diseño de los brazos del cuerpo móvil volvió a ser modificado. En esta etapa, los brazos fueron rediseñados con mayor grosor y mayor altura, con el objetivo de incrementar su rigidez y capacidad de carga. Asimismo, se incorporaron aberturas longitudinales en los brazos, destinadas a permitir la inserción de elementos metálicos, con el fin de reforzar la estructura y mejorar su resistencia mecánica frente a esfuerzos y vibraciones.

El cuerpo móvil mantuvo su configuración general respecto a las etapas anteriores; sin embargo, el rediseño de los brazos resultó fundamental para adaptar el conjunto a las nuevas condiciones estructurales impuestas por la mayor altura de la planta.

C-D. Cuarta etapa de diseño: configuración final

La cuarta etapa de diseño corresponde a la configuración final de la estructura y del cuerpo móvil utilizada en las prácticas experimentales del trabajo. En esta etapa se introdujeron modificaciones orientadas principalmente a mejorar el guiado mecánico del cuerpo móvil y a reducir la masa total del conjunto.



Figura 35. Tercer diseño de brazos.



Figura 36. Tercer diseño de brazos.

Debido a que las vigas metálicas empleadas como rieles presentan deformaciones asociadas a su longitud, se incorporaron articulaciones pasivas tipo “muñeca” en el sistema de guiado. Estas articulaciones permiten un movimiento angular relativo entre el cuerpo móvil y los rieles, mejorando el desplazamiento vertical y evitando atascamientos o esfuerzos indeseados durante el recorrido.

Con el objetivo de reducir la masa del cuerpo móvil, se redimensionaron los soportes principales. El soporte superior, que en versiones anteriores presentaba una altura de 3 cm, fue reducido a aproximadamente 1,5 cm, mientras que el soporte inferior pasó de 2 cm a 0,5 cm. A pesar de esta reducción dimensional, se conservó el sistema de encastre tanto en el soporte superior como en el inferior, asegurando la rigidez estructural del conjunto.

Adicionalmente, se incorporó un soporte específico para la batería, integrado al cuerpo móvil. En dicho soporte se colocaron almohadillas internas con el fin de proteger la batería frente a vibraciones e impactos durante el funcionamiento del sistema.

Estas modificaciones permitieron obtener un diseño final más liviano, adaptable a las deformaciones estructurales de los rieles y adecuado para la implementación de las distintas estrategias de control desarrolladas en el presente trabajo.

APÉNDICE D INCIDENTES EXPERIMENTALES Y FALLAS EN LOS CONTROLADORES ESC

Durante el desarrollo experimental del trabajo se presentaron fallas en los controladores electrónicos de velocidad (ESC) utilizados en las primeras etapas de prueba del sistema. En este apéndice se describen los incidentes observados, junto con el análisis de las posibles causas y las medidas adoptadas posteriormente.

D-A. Primer incidente: ESC de 30 A con alimentación externa

En una primera instancia, se utilizó un ESC de 30 A alimentado mediante una batería para automóviles, con el objetivo de verificar el funcionamiento básico del sistema de propulsión. La conexión entre la fuente de alimentación y el ESC se realizó utilizando un cable unifilar de cobre de considerable longitud.

Durante las pruebas iniciales, el sistema logró generar empuje y el cuerpo móvil llegó a elevarse. Sin embargo, tras un período de funcionamiento, el ESC comenzó a emitir una secuencia de señales acústicas consistente en cuatro pitidos cortos seguidos de un pitido largo. En ese momento no se contaba con una interpretación clara del significado de dicha señalización.

Posteriormente, mediante la consulta de documentación y experiencias previas, se determinó que dicha secuencia de pitidos está asociada a condiciones de protección del ESC, tales como sobrecorriente o sobretemperatura. Esta hipótesis se vio reforzada por el hecho de que los cables unifilares utilizados para la alimentación se calentaron excesivamente y

llegaron a derretirse, indicando una circulación de corriente elevada y pérdidas resistivas significativas.

D-B. Segundo incidente: reinicios y falla del ESC de 30A

En una segunda etapa de pruebas con el mismo ESC de 30 A, se reemplazaron los cables de alimentación por conductores adecuados para altas corrientes, conectando el ESC directamente a la batería utilizada en la planta. En esta configuración, el sistema no lograba elevarse de forma sostenida y el ESC emitía una secuencia de sonidos correspondiente a un reinicio del controlador.

Con el fin de descartar un problema en la señal de control, se analizó la señal PWM generada por el PSoC mediante un osciloscopio, verificándose que la misma presentaba una forma adecuada y estable, sin perturbaciones significativas. En consecuencia, se descartó que la falla estuviera asociada a errores en la generación de la señal de control.

Ante la hipótesis de una posible caída de tensión en la alimentación del ESC durante los transitorios de corriente, se incorporaron capacitores de desacople en la línea de alimentación. Tras esta modificación, el sistema logró generar empuje y elevarse durante breves instantes. No obstante, luego de un corto período de funcionamiento, se produjo la falla definitiva del ESC, observándose la quema de un MOSFET correspondiente a una de las fases del motor.

D-C. Análisis y consideraciones

A partir de los incidentes descritos, se identificaron como causas probables la combinación de sobrecorriente, exigencias térmicas elevadas y condiciones de alimentación no ideales durante las primeras pruebas. La utilización de una fuente de alimentación inadecuada, conductores con alta resistencia y la ausencia inicial de medidas de protección contribuyeron a someter al ESC a esfuerzos superiores a sus límites operativos.

Estos eventos pusieron de manifiesto la importancia de considerar cuidadosamente los aspectos de potencia, disipación térmica y protección eléctrica en sistemas de propulsión basados en motores brushless, incluso en etapas preliminares de prueba.

Las lecciones aprendidas a partir de estas fallas motivaron la adopción de controladores de mayor capacidad de corriente, mejoras en el cableado de alimentación y la implementación de estrategias de operación más conservadoras, las cuales permitieron continuar con el desarrollo experimental del trabajo de manera segura y confiable.

D-D. Tercer incidente: falla del ESC de 30 A durante operación con batería LiPo

En un tercer incidente, se utilizó un ESC de 30 A alimentado mediante una batería LiPo para drones. Durante esta prueba, se incrementó la señal PWM hasta aproximadamente $1500 \mu s$, logrando que el sistema generara empuje suficiente para elevar el cuerpo móvil hasta la parte superior de la estructura.

Al intentar detener el movimiento, se adoptó un procedimiento no óptimo, consistente en bloquear mecánicamente la hélice con el fin de evitar una colisión con el techo de la estructura. Esta acción provocó el trabado de la hélice durante el

funcionamiento del motor, lo cual generó un incremento abrupto de la corriente demandada. Como consecuencia, el ESC sufrió una falla catastrófica, produciéndose la quema de múltiples componentes internos y la pérdida total del controlador.

Este incidente permitió identificar el riesgo asociado al bloqueo mecánico del rotor en sistemas de propulsión brushless, dado que dicha condición conduce a corrientes elevadas que superan rápidamente la capacidad de los dispositivos de conmutación del ESC.

D-E. Cuarto incidente: falla del ESC de 30A por sobrecorriente

En un cuarto incidente, se realizaron pruebas controladas con un nuevo ESC de 30 A, con el objetivo de determinar el valor máximo de PWM que el sistema podía soportar de manera segura. Durante esta prueba, el valor de PWM se incrementó progresivamente hasta alcanzar aproximadamente $1600 \mu s$.

En estas condiciones, el ESC volvió a presentar una falla similar a la observada en el segundo incidente, registrándose la quema de un MOSFET correspondiente a una de las fases del motor. Este comportamiento reforzó la hipótesis de que el controlador se encontraba operando cerca de sus límites de corriente, incluso sin que se produjera un bloqueo mecánico del rotor.

D-F. Medidas adoptadas

La repetición de fallas en controladores de 30 A, tanto bajo condiciones transitorias como en operación sostenida, llevó a concluir que dicho margen de corriente resultaba insuficiente para el motor utilizado y las exigencias mecánicas de la planta. Asimismo, se consideró la posible influencia de algoritmos internos del ESC y de su calidad de construcción, los cuales podrían limitar su capacidad de manejo de sobrecorrientes.

En función de estas observaciones, se decidió sobredimensionar el sistema de actuación mediante la adquisición de un ESC de 40 A. Esta decisión permitió operar el motor con un mayor margen de seguridad, evitando la necesidad de reducir aún más la masa del cuerpo móvil y mejorando la confiabilidad del sistema durante las prácticas experimentales.

REFERENCIAS

- [1] Dongguan E-S Motor Co., Ltd., “E-s motor oficial website,” <https://cdn.robotshop.com/rbm/a00a7635-653b-4220-aac9-b0c23c5c5e2c/5f520795f9-301f-4e66-a0a3-019811d1f78b/222c434ca2212-brushless-motor.pdf>, 2026, accessed: Feb. 2026.
- [2] NEX Robotics Pvt, Ltd, “40a bldc esc,” <https://www.scribd.com/document/280924512/ESC-Datasheet>, 2015, accessed: Feb. 2026.
- [3] AMAZON, “Lipo 3s ovonic air,” <https://www.amazon.com/-/es/OVONIC-3s-Conector-Helic%C3%B3-B3ptero-Quadcopter/dp/B07MS8QF3K>, 1996-2026, accessed: Feb. 2026.
- [4] Benewake Co., Ltd., *TFmini Plus Single-Point LiDAR Range Sensor Datasheet*, 2019, rev. A02.

- [Online]. Available: https://cdn.sparkfun.com/assets/2/b/0/3/8/TFmini_Plus-01-A02-Datasheet_EN.pdf
- [5] Lic. Piero Codas Morselli, *Evaluación de Algoritmos de Control Digital Industrial*, 2005.
[Online]. Available: <https://drive.google.com/file/d/1TIa3A4172OXRvjMa7e-VbKXvCpIqimyW/view>