

# Trabajo Práctico: Helicóptero vertical de un solo eje.

Elías Álvarez

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción  
Asunción, Paraguay

Email: elias.alvarez@universidadcatolica.edu.py

Tania Romero

Carrera de Ing. Electrónica

Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción  
Asunción, Paraguay

Email: tania.romero@universidadcatolica.edu.py

**Resumen**—En este trabajo práctico se estudia el control de altura de una planta experimental basada en un sistema de propulsión vertical mediante un motor brushless controlado electrónicamente. La planta consiste en un cuerpo móvil guiado mecánicamente en el eje vertical, cuya posición es medida mediante un sensor de distancia láser y regulada a través de una señal PWM aplicada a un controlador electrónico de velocidad (ESC).

A partir del modelado físico y matemático del sistema, se desarrollan e implementan distintas estrategias de control vistas a lo largo de la materia Automatizaciones. Se analizan controladores clásicos, tales como el PID y métodos de diseño basados en el lugar de las raíces, diagramas de Bode, síntesis directa y ubicación arbitraria de polos. Asimismo, se aborda el control en el espacio de estados, incorporando control integral para sistemas de seguimiento y el uso de estimadores de estado tanto de predicción como de actualización.

Finalmente, se diseñan y evalúan controladores óptimos que incluyen integrador y estimadores basados en el filtro de Kalman, culminando en la implementación de un regulador LQG. Los distintos enfoques de control son comparados en términos de desempeño dinámico, estabilidad y robustez frente a perturbaciones y variaciones paramétricas, utilizando resultados obtenidos mediante ensayos experimentales sobre la planta real.

**Index Terms**—control de altura, sistemas dinámicos, identificación de sistemas, control PID, control en espacio de estados, LQG, PSOC, TFMiNi, ESC, PWM

## I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas propulsados verticalmente constituye un problema clásico dentro de la ingeniería de control, particularmente cuando la dinámica presenta inestabilidad inherente, no linealidades y limitaciones físicas severas. En este trabajo se aborda la regulación y seguimiento de referencia de una planta experimental de tercer orden, caracterizada por un comportamiento inestable en lazo abierto, presencia de polos complejos dominantes, un integrador y ceros que afectan significativamente la respuesta dinámica del sistema.

Más allá del modelo teórico, la planta real introduce múltiples no idealidades: saturaciones estrictas del actuador (1100–1700  $\mu$ s por razones de seguridad térmica y estructural), fricción variable debida a imperfecciones mecánicas en los rieles de guiado, variación del punto de operación asociada a la descarga progresiva de la batería, dinámica propia del motor y del ESC, y ruido de medición proveniente del sensor láser utilizado. Estas condiciones convierten el problema en un banco de pruebas exigente para evaluar la robustez y aplicabilidad práctica de distintas estrategias de control.

Un aspecto central del trabajo fue la obtención de un modelo lineal representativo del sistema alrededor del punto de operación de hover, incluyendo la identificación experimental del esfuerzo de equilibrio y la caracterización del ruido de medición y proceso. La calidad de este modelo resultó determinante para el desempeño de los métodos de control modernos, particularmente aquellos basados en espacio de estados y estimación óptima.

Sobre esta misma planta se implementaron y compararon distintas filosofías de diseño, desde enfoques clásicos hasta control óptimo con estimación de estados, evaluando su desempeño no sólo en simulación sino también mediante validación experimental directa. Esta comparación permite analizar en condiciones reales las ventajas, limitaciones y requerimientos de modelado de cada metodología.

El objetivo del trabajo no se limita a la obtención de un regulador funcional, sino a estudiar la relación entre complejidad del método, dependencia del modelo y desempeño obtenido en un sistema físico con restricciones reales.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los sistemas de regulación de altura basados en propulsión vertical constituyen un problema particularmente exigente desde el punto de vista del control automático, debido a la combinación de inestabilidad inherente, dinámica no lineal y restricciones físicas severas del actuador. La planta experimental considerada en este trabajo presenta comportamiento inestable en lazo abierto, dinámica de tercer orden con integrador y ceros que condicionan la respuesta transitoria, incluyendo la presencia de un cero en el semiplano derecho que impone limitaciones fundamentales en el desempeño alcanzable.

Desde el punto de vista físico, el sistema consiste en un cuerpo móvil guiado en el eje vertical cuyo equilibrio depende del balance entre la fuerza gravitatoria y el empuje generado por un motor brushless accionado mediante un ESC. Sin embargo, el comportamiento real se ve influenciado por múltiples no idealidades: saturaciones estrictas del esfuerzo de control por razones de seguridad térmica (1100–1700  $\mu$ s), variaciones del punto de operación asociadas a la descarga de la batería, fricción no uniforme en los rieles de guiado, dinámica propia del conjunto motor–ESC y ruido de medición proveniente del sensor láser de distancia.

Se realizaron desarrollos físico-matemáticos iniciales con el objetivo de modelar el sistema a partir de principios dinámicos

fundamentales. No obstante, la complejidad aerodinámica del empuje, junto con la dinámica interna del motor y del ESC, dificultaron la obtención de un modelo analítico suficientemente representativo, lo que motivó la adopción de técnicas de identificación experimental alrededor del punto de operación de hover.

El desafío central radica entonces en obtener un modelo lineal que capture adecuadamente la dinámica dominante del sistema y permita diseñar controladores implementables en tiempo real sobre hardware embebido. El firmware desarrollado integra múltiples estrategias de control dentro del mismo sistema, permitiendo la modificación dinámica de coeficientes, la adquisición de datos en lazo abierto y cerrado, y la transmisión en tiempo real de las señales de esfuerzo y altura mediante comunicación UART para su análisis posterior.

En este contexto, el problema abordado no se limita a la estabilización del sistema, sino que implica analizar la relación entre calidad del modelado, complejidad de la estrategia de control y desempeño experimental obtenido sobre una planta física con restricciones reales.

### III. OBJETIVOS

#### III-A. *Objetivo general*

Desarrollar, analizar e implementar un sistema de control de altura para una planta experimental basada en un motor brushless, aplicando y comparando distintas estrategias de control automático estudiadas en la materia Automatizaciones, a partir del modelado físico y matemático del sistema y su validación experimental sobre la planta real.

#### III-B. *Objetivos específicos*

- Caracterizar físicamente la planta experimental y describir su comportamiento dinámico a partir de sus componentes mecánicos, eléctricos y de sensado.
- Desarrollar un modelo físico y matemático del sistema que represente adecuadamente la dinámica vertical de la planta y sirva como base para el diseño de controladores.
- Identificar experimentalmente los parámetros relevantes del modelo, considerando las no idealidades propias del sistema real.
- Diseñar e implementar controladores clásicos de altura, incluyendo el controlador PID y métodos de diseño basados en el lugar de las raíces, diagramas de Bode, síntesis directa y ubicación arbitraria de polos.
- Diseñar controladores en el espacio de estados para sistemas de seguimiento, incorporando control integral para la eliminación del error estacionario.
- Implementar y evaluar estimadores de estado tanto de tipo predictivo como de actualización, analizando su influencia en el desempeño del sistema.
- Diseñar y aplicar estrategias de control óptimo, incluyendo el uso de integrador y estimadores basados en el filtro de Kalman, culminando en la implementación de un regulador LQG.

- Comparar el desempeño de las distintas estrategias de control implementadas en términos de estabilidad, respuesta transitoria, error en régimen permanente y robustez frente a perturbaciones y variaciones paramétricas.
- Validar experimentalmente los resultados obtenidos mediante ensayos sobre la planta real, contrastando el comportamiento observado con las predicciones del modelo.

## IV. CARACTERIZACIÓN FÍSICA DE LA PLANTA

#### IV-A. *Descripción general de la planta*

La planta desarrollada corresponde a un sistema mecatrónico de **un grado de libertad**, cuyo movimiento está restringido a la **dirección vertical**. El principio de funcionamiento se basa en la generación de empuje aerodinámico mediante un **motor brushless con hélice**, controlado electrónicamente, que permite regular la altura de un cuerpo móvil guiado mecánicamente.

El sistema fue concebido como una planta experimental para el análisis y diseño de estrategias de control en altura, incorporando sensado directo de posición y actuadores eléctricos de rápida respuesta.

#### IV-B. *Estructura física de la planta*

La planta experimental fue diseñada y construida específicamente para el desarrollo de las prácticas de control de altura previstas en el presente trabajo. El diseño de la estructura respondió a la necesidad de disponer de una altura útil suficiente para la correcta evaluación de las distintas estrategias de control, manteniendo al mismo tiempo un esquema constructivo simple, robusto y de fácil implementación. Durante el desarrollo del proyecto se atravesaron distintas etapas de diseño, las cuales se describen con mayor detalle en el Apéndice D.

Inicialmente, la planta fue concebida con una altura total de aproximadamente 80 cm. Sin embargo, dicha dimensión resultó insuficiente para la realización de todas las prácticas propuestas. En consecuencia, y por recomendación del profesor, se decidió extender la estructura hasta alcanzar una altura total de 165 cm, permitiendo una altura útil de movimiento del cuerpo móvil de aproximadamente 134 cm.

La estructura se apoya sobre una base de madera de dimensiones  $50 \times 45$  cm y un espesor aproximado de 2 cm, la cual proporciona estabilidad al conjunto. En la parte superior se dispone de un techo de madera de  $50 \times 50$  cm y un espesor de 0,6 cm, que actúa como elemento de cierre y soporte estructural. La base y el techo se encuentran unidos mediante tres columnas verticales de madera, cuya función principal es aportar rigidez al conjunto y limitar las deformaciones de la estructura.

El **movimiento vertical** del sistema se guía mediante tres rieles metálicos dispuestos en paralelo, construidos a partir de vigas de metal de aproximadamente 0,6 cm de diámetro. Estas vigas presentan deformaciones inherentes al material y a su longitud, por lo que las columnas de madera cumplen un rol fundamental en evitar que dichas deformaciones se acentúen durante el funcionamiento del sistema.

El **cuerpo móvil** se desplaza a lo largo de los rieles mediante piezas impresas en 3D de tipo abrazadera. Estas abrazaderas poseen un diámetro aproximado de 1,5 cm, superior al de las



Figura 1. Vista general de la planta física.

vigas, con el objetivo de permitir cierto grado de libertad angular y evitar perturbaciones en el movimiento vertical causadas por las deformaciones de los rieles. Las abrazaderas se unen al cuerpo móvil mediante un sistema de tornillos, arandelas y tuercas, funcionando como articulaciones tipo “muñeca”, que facilitan el guiado sin generar atascamientos.



Figura 2. Diseño 3D final de la abrazadera con agarre tipo “muñeca”.

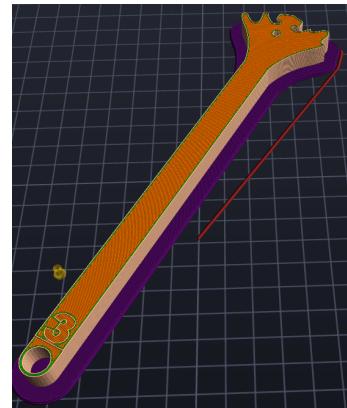


Figura 3. Diseño 3D final del brazo de unión del cuerpo móvil.

El cuerpo móvil está compuesto por dos **soportes principales**: un soporte superior que constituye la base de montaje del motor brushless y un soporte inferior que sostiene el conjunto estructural. Ambos soportes se encuentran unidos mediante tres brazos impresos en 3D, de aproximadamente 1 cm de altura, 1,3 cm de ancho y 23 cm de longitud. La unión de los distintos componentes del cuerpo móvil se realiza mediante roscas de aproximadamente 3 cm de diámetro y tuercas, evitando el uso de tornillería adicional. El conjunto incluye además un soporte para la batería, en cuya base se encuentra montado el ESC, equipado con dos disipadores térmicos laterales. La masa total del cuerpo móvil es de aproximadamente 360 g.

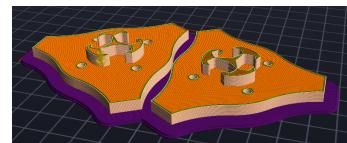


Figura 4. Diseño 3D final del soporte principal del cuerpo móvil (soporte superior e inferior).

Con el fin de proteger el sistema ante caídas y movimientos bruscos, se incorporaron **elementos de seguridad adicionales**. En la parte inferior de la estructura se dispuso papel burbuja enrollado alrededor de los rieles, actuando como amortiguación ante impactos. Asimismo, se añadieron tubos de PVC tanto en la base como en la parte superior de la estructura, los cuales funcionan como topes mecánicos que limitan el recorrido del cuerpo móvil y evitan colisiones con la base o el techo. Adicionalmente, se incorporó una cuerda de seguridad destinada a restringir levantamientos excesivos durante las prácticas, reduciendo el riesgo de movimientos abruptos.

Finalmente, se añadió una cinta métrica a lo largo de la estructura con el objetivo de **facilitar la visualización** del desplazamiento vertical y permitir una referencia directa de la altura durante el funcionamiento del sistema.

El diseño de la estructura **priorizó** la rigidez del cuerpo móvil, de modo que pueda soportar tanto su propio peso como eventuales caídas desde alturas cercanas a un metro. Asimismo, se buscó una solución de fácil construcción, utilizando materia-

les de adquisición accesible en el contexto local y adaptándose a los recursos disponibles y al tiempo de desarrollo del trabajo. La visibilidad del movimiento y el correcto funcionamiento mecánico del sistema fueron considerados aspectos clave para su utilización como planta experimental en este trabajo práctico.

#### IV-C. Cuerpo móvil

- **Masa total móvil:**

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

(incluye motor, hélice, soporte, cableado y elementos solidos al movimiento).

- **Tipo de movimiento:** traslación puramente vertical.
- **Altura inicial típica:** aproximadamente 12.5 cm.
- **Altura máxima disponible en la estructura:** aproximadamente 134 cm.

La ausencia de contrapesos implica que el sistema depende exclusivamente del empuje generado por la hélice para vencer la fuerza gravitatoria y los efectos de rozamiento.

#### IV-D. Sistema de actuación (propulsión)

El sistema de actuación está compuesto por:

- **Motor:** brushless A2212/5T, 2450 KV [1].



Figura 5. Motor

- **Hélice:**

- Diámetro: 25 cm.



Figura 6. Hélice

- **Controlador electrónico (ESC) [2]:**

- Corriente continua: 40 A.
- Corriente máxima de corta duración: 55 A.

- **Batería:** LiPo 3S, [3].



Figura 7. ESC 40A

- Tensión inicial típica: 12.5 V.
- La tensión disminuye de forma apreciable durante la operación, dependiendo del régimen de empuje y la duración de la práctica.



Figura 8. Bateria LiPo 3S Ovonic

El empuje generado por el sistema depende fuertemente del comando aplicado, de la hélice y del voltaje instantáneo de la batería, lo que introduce una **no linealidad significativa** en la planta.

#### IV-E. Señal de control

- **Tipo de señal:** PWM tipo servo.
- **Frecuencia:** 50 Hz.
- **Rango:**  $1000 \mu\text{s} - 2000 \mu\text{s}$ .

Esta señal actúa como la **entrada manipulada** del sistema, regulando indirectamente el empuje generado por el motor y la hélice a través del ESC.

#### IV-F. Sistema de sensado

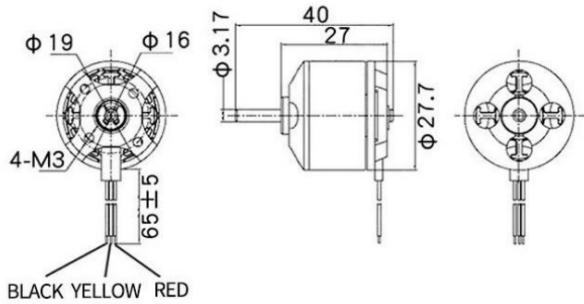
- **Sensor de altura:** TFMini Plus [4].
- **Variable medida:** posición vertical del cuerpo móvil  $z(t)$ .
- **Frecuencia de lectura:** configurable, típicamente en el rango de 1 Hz hasta 1000 Hz, según la configuración utilizada durante las distintas prácticas.

La señal de medición presenta efectos de **ruido, cuantización y latencia**, propios del sistema de sensado y del procesamiento digital, los cuales deben ser considerados tanto en el diseño del sistema de control como en el tratamiento de la señal medida.

#### IV-G. Variables del sistema

- **Entrada del sistema:**

$$u(t) = \text{PWM} \in [1000, 2000] \mu\text{s}$$



MOTOR PERFORMANCE DATA (性能参数) :

MODEL	KV (rpm/V)	Voltage (V)	Prop	Load Current (A)	Pull (g)	Power (W)	Efficiency (g/W)	Lipo Cell	Weight (g) Approx
	930	1060		9.8	660	109	6.1		60
	1000	1047		15.6	885	173	5.1	3S	61
A2212	1400	11.1	9050	19.0	910	210	4.3		61
	2200	6030		21.5	732	239	3.1	2-3S	62
	2450	6.3		25.2	815	280	2.9		62

Figura 9. Características del motor A2212/5T, 2450KV [1]



Figura 10. Sensor óptico de distancia TFMini Plus.

#### ■ Salida del sistema:

$$y(t) = z(t)$$

#### ■ Disturbios principales:

- Variaciones del voltaje de la batería durante la operación.
- Rozamiento mecánico en las guías.
- Perturbaciones aerodinámicas externas.
- Vibraciones estructurales.

#### IV-H. Limitaciones físicas y no idealidades

La planta presenta las siguientes características no ideales:

- **Saturación del actuador**, limitada por el rango de PWM y la corriente máxima del ESC.
- **Dinámica no instantánea del empuje**, asociada a la respuesta del ESC, del motor y de la hélice.
- **Variabilidad paramétrica**, principalmente debida a la caída de tensión de la batería bajo carga.

#### V. DIAGRAMA DEL SISTEMA

La Figura 11 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de altura en lazo cerrado. La referencia de altura  $z_{ref}$  es comparada con la señal de salida medida  $z(t)$ , generando el error  $e(t)$ , el cual es procesado por el controlador.

El controlador representa el algoritmo de control implementado, pudiendo corresponder a un controlador estudiado en el semestre. A partir del error, el controlador genera la señal de control  $u(t)$ , que constituye el esfuerzo aplicado al sistema.

La señal  $u(t)$  actúa sobre el actuador, conformado por el motor brushless y la hélice, el cual convierte la señal de control en empuje mecánico. Dicho empuje excita la planta física, cuya dinámica vertical determina la altura real del sistema  $y(t)$ .

La altura es medida mediante un sensor TFMini Plus, que proporciona la señal  $z(t)$  utilizada para cerrar el lazo de control. En el diagrama se indican explícitamente las fuentes de ruido asociadas tanto al controlador como al sensor, reflejando las perturbaciones y no idealidades presentes en el sistema real.

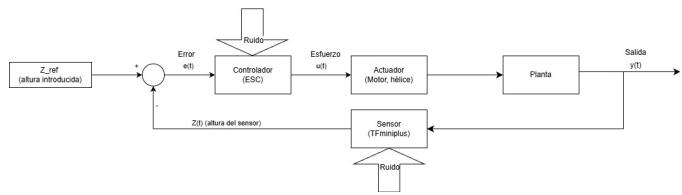


Figura 11. Diagrama de bloques de Control.

La Figura 12 muestra un diagrama de bloques que representa la implementación física y funcional completa del sistema de control de altura. En dicho diagrama se identifican claramente los siguientes subsistemas:

- la cadena de energía (batería → ESC → motor),
- la cadena de control (MATLAB → PSOC → PWM),
- la planta física correspondiente al sistema bajo control,
- y la cadena de medición y realimentación (planta → sensor → PSOC → MATLAB).

#### V-A. Flujo de energía (parte electro-energética)

La batería utilizada es una LiPo de tres celdas (3S), con tensión nominal de 11,1 V. Cada celda presenta una tensión máxima de 4,2 V, por lo que la batería completamente cargada alcanza:

$$V_{max} = 12,6 \text{ V}$$

Con el objetivo de preservar la integridad química de la batería y evitar degradación prematura, el rango operativo se restringe aproximadamente a:

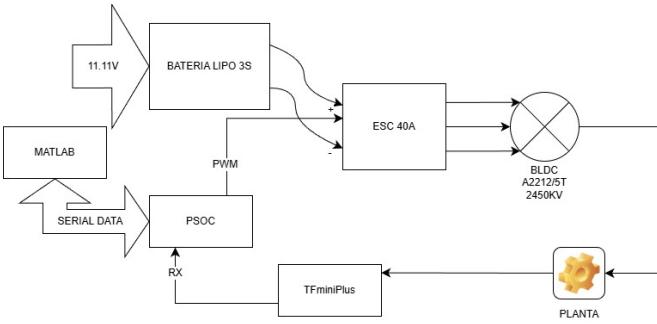


Figura 12. Diagrama de bloques, implementación física.

$$V \in [11.5, 12.5] \text{ V}$$

Evitar descargas por debajo de 11,5 V resulta fundamental, ya que tensiones inferiores pueden producir daño irreversible en las celdas LiPo.

La batería alimenta directamente al controlador electrónico de velocidad (ESC) de 40 A, el cual convierte la tensión continua en señales trifásicas moduladas para accionar el motor brushless.

El ESC incorpora disipadores térmicos integrados sobre los dispositivos de potencia (MOSFETs), cuya función es evacuar el calor generado durante la commutación y conducción de corriente. Dado que el sistema opera en un régimen de potencia relativamente elevado para el tamaño del conjunto, la gestión térmica resulta crítica para evitar sobrecalentamientos que puedan producir fallas o reducción de eficiencia.

La presencia de disipadores mejora la transferencia térmica hacia el ambiente, aumentando la confiabilidad del sistema durante los intervalos de operación de aproximadamente 5 min continuos.

A medida que la batería se descarga, se observa una disminución progresiva de la tensión disponible, lo que impacta directamente en la capacidad de generación de empuje del motor. Este fenómeno es perceptible incluso en aplicaciones aeronáuticas (como drones), donde la pérdida de tensión se traduce en menor capacidad de sustentación.

En la práctica experimental, el tiempo de operación continua es del orden de 5 min como máximo. Esto se debe a que la batería utilizada posee una capacidad limitada para el nivel de potencia demandado por el sistema.

El tiempo típico de recarga completa es aproximadamente 1,5 h, lo que introduce una restricción significativa en la repetibilidad de los ensayos experimentales, constituyendo un factor limitante en el desarrollo de la práctica.

En esta etapa del sistema no se realiza acción de control propiamente dicha, sino únicamente conversión y transferencia de potencia hacia el actuador.

#### V-B. Flujo de control (parte de mando)

El PSoC actúa como el controlador embebido del sistema. A partir de los algoritmos de control implementados (PID, control

en espacio de estados, LQG, entre otros), el PSoC genera una señal PWM de tipo servo que es enviada al ESC.

Esta señal PWM representa la variable de control  $u(t)$  del sistema y determina el nivel de empuje aplicado al motor. Para asegurar una correcta referencia eléctrica y el funcionamiento adecuado del sistema, el PSoC y el ESC comparten una conexión de tierra común (GND).

El sistema MATLAB se comunica con el PSoC mediante una interfaz de datos seriales, lo que permite:

- enviar referencias de altura,
- modificar parámetros de control,
- recibir y visualizar datos del sistema en tiempo real.

En este esquema, MATLAB cumple una función de supervisión, ajuste y análisis experimental, mientras que el PSoC ejecuta el control en tiempo real.

#### V-C. Medición y realimentación (cierre del lazo)

La planta física, al desplazarse verticalmente, genera una altura real que es medida mediante el sensor de distancia láser TFmini Plus. Este sensor entrega la medición de altura al PSoC a través de su interfaz de recepción (RX).

La señal medida es utilizada por el PSoC para calcular el error entre la referencia y la salida real del sistema, cerrando de esta manera el lazo de control de altura. Adicionalmente, los datos medidos pueden ser enviados a MATLAB para su visualización, almacenamiento y análisis experimental.

## VI. MODELADO FÍSICO DEL SISTEMA

#### VI-A. Variables y convenciones

Se definen a continuación las variables y convenciones utilizadas para el modelado del sistema:

- Eje vertical  $z$  [m], definido positivo hacia arriba.
- Masa móvil:

$$m = 0.360 \text{ kg}$$

- Aceleración de la gravedad:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

- Peso del cuerpo móvil:

$$mg = 3.924 \text{ N}$$

- Entrada del sistema: señal PWM tipo servo a 50 Hz,

$$u \in [1000, 2000] \mu\text{s}$$

Si bien el rango eléctrico nominal del protocolo PWM se encuentra entre 1000 y 2000  $\mu\text{s}$ , durante la operación en vuelo la señal se restringe intencionalmente al intervalo

$$u \in [1100, 1700] \mu\text{s}$$

Esta limitación surge de criterios de confiabilidad experimental. En ensayos previos realizados con ESCs de menor capacidad nominal (30 A), se observaron fallas térmicas al operar en valores superiores a aproximadamente 1600  $\mu\text{s}$  bajo carga sostenida.

Dado que no se realizaron mediciones directas de corriente ni caracterizaciones térmicas detalladas del conjunto motor-ESC-hélice, se adoptó un margen de seguridad conservador que evita la operación prolongada en regímenes de alta demanda energética.

Asimismo, el límite inferior de  $1100 \mu s$  se fija con el objetivo de evitar regiones cercanas a la detención del motor, donde pueden presentarse comportamientos fuertemente no lineales y pérdida abrupta de sustentación.

En consecuencia, el modelo identificado y las estrategias de control desarrolladas se consideran válidos únicamente dentro de este rango operativo seguro.

- Normalización de la entrada:

$$\hat{u} = \text{sat}(u - u_0, 1100 - u_0, 1700 - u_0)$$

Siendo  $u_0$  el valor de PWM necesario para generar un empuje equivalente al peso del sistema, es decir, la condición de equilibrio vertical estacionario.

- Salida medida:

$$y = z$$

correspondiente a la altura del cuerpo móvil medida mediante el sensor TFMini Plus, cuya resolución efectiva se encuentra en el orden de centímetros.

*VI-A1. Modelo físico simplificado:* Desde un punto de vista físico, el movimiento vertical del cuerpo móvil puede describirse, en primera aproximación, mediante:

$$\dot{z} = v$$

$$m\dot{v} = T - mg$$

Este modelo corresponde al caso ideal sin disipación, en el cual la dinámica posición–empuje presenta una estructura de doble integración.

En una aproximación más realista, puede incorporarse el efecto de rozamiento de las guías mediante un término viscoso proporcional a la velocidad:

$$m\dot{v} = T - mg - bv$$

donde  $b$  [N s/m] representa un coeficiente equivalente de fricción viscosa.

La inclusión de este término modifica la estructura ideal de doble integrador, convirtiéndola en un sistema con integración amortiguada. Desde el punto de vista de función de transferencia continua, el doble polo en el origen deja de ser estrictamente doble, introduciéndose un amortiguamiento mecánico que desplaza uno de los polos hacia el semiplano izquierdo.

Por lo tanto, la presencia de un único integrador dominante en el modelo simplificado resulta coherente con la física del sistema cuando se consideran pérdidas mecánicas.

*VI-A2. Modelo dinámico equivalente del actuador (BLDC):* A efectos de análisis lineal, el conjunto ESC–motor BLDC puede aproximarse mediante un modelo promedio equivalente al de un motor DC de imanes permanentes:

$$v(t) = R i(t) + L \dot{i}(t) + K_e \omega(t)$$

$$J \dot{\omega}(t) = K_t i(t) - B \omega(t) - \tau_L(t)$$

Este modelo introduce una dinámica electromecánica adicional respecto del modelo puramente mecánico de la masa móvil, justificando la aparición de un polo adicional en la relación entrada–salida.

En muchos casos, la constante de tiempo eléctrica  $\tau_e = L/R$  es considerablemente menor que la mecánica, permitiendo despreciar  $L$  y obtener una dinámica dominante de segundo orden asociada al actuador.

*VI-A3. Función de transferencia continua equivalente:* La representación continua obtenida a partir del modelo identificado puede expresarse inicialmente como:

$$G(s) = \frac{-0.12107(s - 14)(s + 10.62)}{(s + 0.0002797)(s^2 + 5.61s + 14.02)}$$

El polo ubicado en  $s = -0.0002797$  corresponde a una dinámica extremadamente lenta respecto de las restantes constantes de tiempo del sistema.

Considerando que:

- la resolución del sensor de altura se encuentra en el orden de centímetros,
- no se dispone de mediciones de alta precisión submilimétrica,
- el identificador polinomial puede ajustar polos muy cercanos al origen para capturar pequeñas tendencias de deriva,

se interpreta que dicho polo próximo a cero no representa una dinámica física real dominante, sino un posible efecto de sobreajuste (*overfitting*) del procedimiento de identificación.

En consecuencia, y en coherencia con el modelo físico que contempla amortiguamiento mecánico, se adopta la siguiente simplificación:

$$G(s) = \frac{-0.12107(s - 14)(s + 10.62)}{s(s^2 + 5.61s + 14.02)}$$

En esta forma:

- El polo en el origen representa el carácter integrador dominante de la posición vertical.
- El segundo orden  $s^2 + 5.61s + 14.02$  modela la dinámica electromecánica del actuador.
- Los ceros se interpretan como parámetros de ajuste que capturan efectos agregados del actuador, discretización y linealización alrededor del punto de operación.

**VI-A4. Obtención del modelo mediante identificación en MATLAB:** La función de transferencia utilizada en este trabajo no se obtuvo exclusivamente a partir de un modelo físico teórico, sino mediante un proceso de **identificación experimental**.

En particular, se empleó la herramienta *System Identification Toolbox* de MATLAB, utilizando registros experimentales previamente adquiridos del sistema en lazo abierto (señal de mando PWM y altura medida por el sensor). Dichos datos fueron importados al entorno de identificación y organizados en un objeto *iddata*, definiendo la entrada como  $u(t)$  y la salida como  $y(t) = z(t)$ , con el tiempo de muestreo correspondiente al sistema de adquisición.

Sobre ese conjunto de datos se ajustó un modelo lineal SISO en tiempo continuo, seleccionando una estructura paramétrica compatible con la dinámica esperada del sistema, y estimando sus parámetros mediante los algoritmos de optimización incluidos en MATLAB.

Finalmente, el modelo resultante fue validado comparando su respuesta con los datos medidos (ajuste temporal y análisis de residuales), y se adoptó como representación equivalente continua la función de transferencia  $G(s)$  presentada en la sección siguiente.

**VI-A5. Validez del modelo:** El modelo adoptado constituye una aproximación coherente con la física del sistema y adecuada para el diseño de control dentro del rango operativo  $[1100, 1700] \mu s$ .

Fuera de dicho intervalo, el sistema presenta comportamientos no lineales significativos (aerodinámica, fricción no lineal, saturaciones y posibles limitaciones térmicas del actuador) que no son capturados por el modelo lineal simplificado.

## VII. MÉTODOS CLÁSICOS DE CONTROL

### VII-A. Introducción

Los métodos clásicos de control se fundamentan en el análisis de sistemas lineales mediante funciones de transferencia y herramientas del dominio de la frecuencia y del plano complejo.

En este enfoque, la dinámica del sistema se describe como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{o en tiempo discreto} \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

El diseño del controlador se realiza modificando la función de transferencia del lazo abierto:

$$L(s) = C(s)G(s) \quad \text{o} \quad L(z) = C(z)G(z)$$

con el objetivo de garantizar:

- Estabilidad en lazo cerrado.
- Desempeño transitorio adecuado.
- Error estacionario reducido.
- Robustez frente a incertidumbre.

Los métodos clásicos utilizados en este trabajo incluyen:

- Controlador PID.
- Diseño por Lugar de Raíces.

- Diseño mediante Respuesta en Frecuencia (Bode).
- Síntesis Directa (Truxal-Ragazzini).

### VII-B. Modelo de la Planta

El diseño clásico parte de la función de transferencia identificada:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

Tiempo de muestreo, depende de la experiencia.

### VII-C. Fundamentos Matemáticos del Control Clásico

**VII-C1. Estabilidad en Lazo Cerrado:** El sistema en lazo cerrado se expresa como:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

La estabilidad discreta requiere que:

$$|z_i| < 1 \quad \forall i$$

donde  $z_i$  son los polos de  $G_{cl}(z)$ .

**VII-C2. Lugar de Raíces:** Los polos del lazo cerrado satisfacen:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

El Lugar de Raíces describe la trayectoria de estos polos al variar la ganancia del controlador.

**VII-C3. Márgenes de Estabilidad:** A partir del diagrama de Bode del lazo abierto  $L(z)$  se definen:

- Margen de ganancia.
- Margen de fase.
- Frecuencia de cruce de ganancia.

Estos parámetros cuantifican la estabilidad relativa y robustez del sistema.

### VII-D. Controlador PID

Durante las etapas iniciales de diseño se intentó sintonizar un controlador PID utilizando la herramienta PID Tuner de MATLAB. Sin embargo, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios para la planta bajo estudio, principalmente debido a la complejidad de la dinámica identificada, la presencia de retardos efectivos asociados al sistema de actuación (ESC-motor) y las limitaciones físicas del actuador. En particular, el desempeño obtenido presentaba respuestas lentas o esfuerzos de control excesivos, incompatibles con la implementación experimental.

Ante esta situación, se optó por utilizar una formulación de controlador PID basada en el método propuesto por Åström, el cual permite un mayor control sobre la estructura del controlador y sobre el compromiso entre rapidez, amortiguamiento y esfuerzo de control. Este enfoque resultó más adecuado para la planta identificada y permitió obtener respuestas dinámicas satisfactorias en simulación y en la práctica.

**VII-D1. Formulación del PID de Åström:** La estructura del controlador PID de Åström se implementa en forma discreta y separa explícitamente las acciones proporcional, integral y derivativa. El término proporcional se define como:

$$P(t) = K(b u_c(t) - y(t))$$

donde  $K$  es la ganancia proporcional y  $b$  es un parámetro que determina qué fracción de la referencia se introduce en la acción proporcional, permitiendo reducir el sobreimpulso ante cambios bruscos de referencia.

La acción derivativa se implementa mediante un filtro de primer orden, cuya ecuación en tiempo discreto es:

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(kh-h) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} (y(kh) - y(kh-h))$$

donde  $T_d$  es la constante de tiempo derivativa,  $N$  es el parámetro que limita el ancho de banda del término derivativo, y  $h$  es el período de muestreo.

La acción integral se describe mediante:

$$I(kh + h) = I(kh) + \frac{K_h}{T_i} e(kh)$$

donde  $T_i$  es la constante de tiempo integral y  $e(kh) = u_c(kh) - y(kh)$  es el error de control.

La señal de control total se obtiene como la suma de los tres términos:

$$u(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh)$$

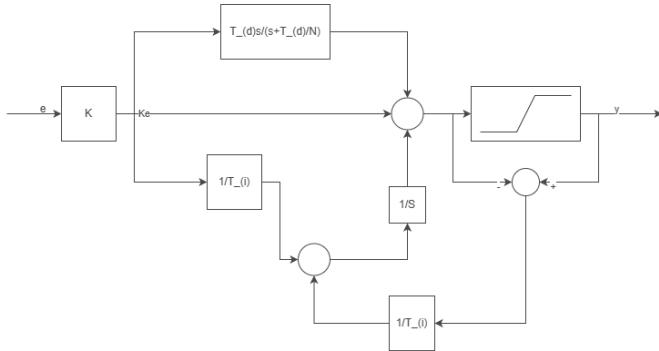


Figura 13. Diagrama de bloques, Astrom - Antiwindup [5]. Aplicada a la planta.

**VII-D2. Criterios de sintonización:** La sintonización de los parámetros del controlador se realizó de forma iterativa, utilizando simulaciones y observando tanto la respuesta del sistema como el esfuerzo de control. Los criterios adoptados fueron los siguientes:

- **Ganancia proporcional  $K$ :** se incrementó progresivamente hasta aproximar el sistema al umbral de inestabilidad, con el objetivo de obtener un transitorio rápido y una respuesta ágil.
- **Acción integral  $T_i$ :** se incorporó posteriormente para eliminar el error en régimen permanente, ajustando su valor de manera que el tiempo de establecimiento resultara razonable sin introducir oscilaciones significativas.

- **Acción derivativa  $T_d$ :** se añadió con el fin de reducir el sobreimpulso y mejorar el amortiguamiento del sistema.
- **Parámetro  $N$ :** se ajustó para limitar la amplificación de ruido del término derivativo, probando distintos valores hasta observar una señal excesivamente sensible al ruido de medición.

Durante todo el proceso de sintonización se monitoreó cuidadosamente el esfuerzo de control. Como condición de diseño, se impuso que la variación de la señal PWM no superara aproximadamente  $10\mu\text{s}$  por centímetro de incremento en la altura, garantizando de esta manera que el actuador no entrara en saturación ni se expusiera la planta a condiciones potencialmente dañinas.

**VII-D3. Resultados:** El controlador PID basado en el método de Åström permitió obtener un comportamiento dinámico estable, con un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta, amortiguamiento y esfuerzo de control. En comparación con los resultados obtenidos mediante el PID Tuner, esta metodología ofreció mayor flexibilidad y un mejor ajuste a las particularidades de la planta identificada, resultando adecuada para su implementación experimental (Figuras 14 y 15).

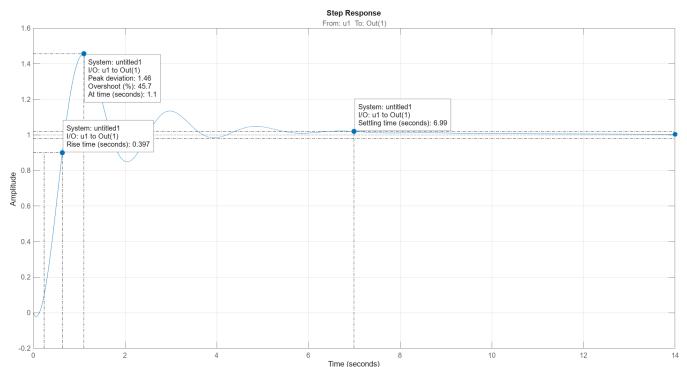


Figura 14. La respuesta al escalón con el controlador PID.

#### VII-D4. Práctica:

$$K_p = [2.5], \quad T_i = [5], \quad T_d = [0.1], \quad N = [3]$$

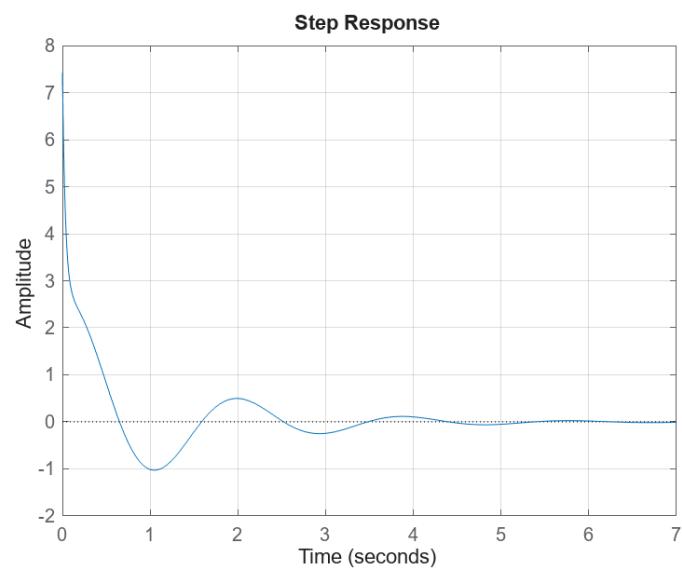


Figura 15. El esfuerzo del con el controlador PID.

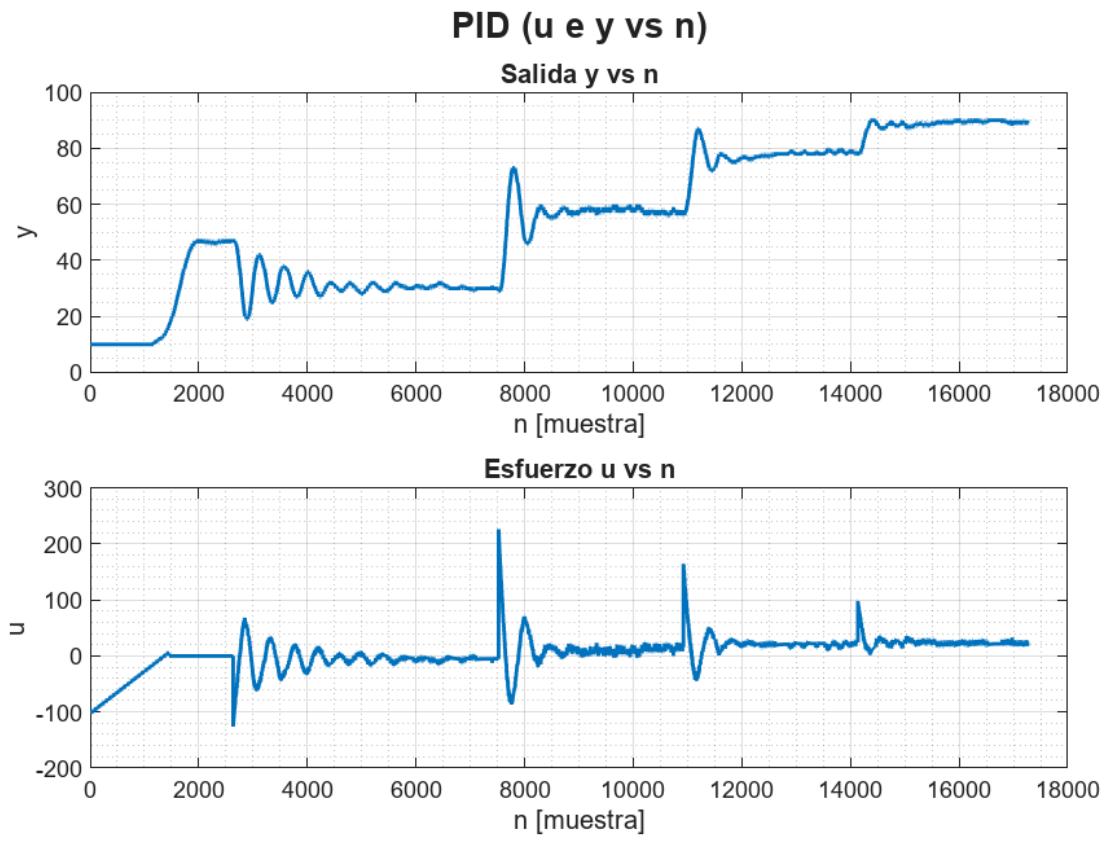


Figura 16. Implementación práctica del PID.

## VII-E. Diseño por Lugar de Raíces

Se analiza la ecuación característica:

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

Dado que la planta identificada (ecuación ??) presenta polos ubicados fuera del círculo unitario, el sistema en lazo abierto resulta inestable en el dominio discreto. En consecuencia, cualquier diseño de control debe garantizar que los polos del lazo cerrado queden estrictamente dentro del círculo unitario para asegurar estabilidad interna.



Figura 17. Ubicación de los polos de la planta sin compensar en el plano  $z$ . Se observa que al menos uno de ellos se encuentra fuera del círculo unitario, lo que implica inestabilidad discreta.

El objetivo del diseño consistió en modificar la dinámica del sistema mediante compensación, de modo que:

- todos los polos del lazo cerrado queden dentro del círculo unitario,
- se logre un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta y amortiguamiento,
- el esfuerzo de control permanezca dentro de límites físicamente realizable.

### VII-E1. Elección de la estructura del compensador:

Para estabilizar el sistema se adoptó una estructura de tipo **lag-lead** (atraso–adelanto). Esta configuración permite actuar simultáneamente sobre la estabilidad relativa y el desempeño en régimen permanente.

El término *lead* (adelanto) se empleó para aumentar el margen de fase y desplazar los polos dominantes del lazo cerrado hacia regiones del plano  $z$  asociadas con mayor amortiguamiento y mejor desempeño transitorio. Por otro lado, el término *lag* (atraso) permitió ajustar la ganancia en bajas frecuencias, mejorando el comportamiento estacionario sin comprometer significativamente la estabilidad.

La adecuada ubicación de ceros permitió modificar la geometría del lugar de raíces, atrayendo las ramas hacia

la región estable del plano discreto, mientras que los polos adicionales modelaron el compromiso dinámico requerido.

**VII-E2. Determinación de la ganancia  $K$ :** Una vez definida la estructura del compensador, se analizó el lugar de raíces del sistema compensado. La determinación manual de la ganancia  $K$  resultó particularmente sensible, ya que pequeños incrementos en su valor provocaban que las trayectorias de los polos abandonaran el círculo unitario antes de satisfacer las especificaciones dinámicas deseadas.

Esta sensibilidad está directamente relacionada con la naturaleza inestable de la planta y con la fuerte dependencia de la ubicación de los polos del lazo cerrado respecto a la ganancia del compensador.

El compensador finalmente adoptado fue:

$$C(z) = -0.0173 \frac{(z - 1.0140)(z - 0.5)}{(z - 0.9522)(z - 0.9894)} \quad (1)$$

**VII-E3. Ajuste mediante Optimization-Based Tuning:** Con el fin de sistematizar el proceso de ajuste y garantizar el cumplimiento simultáneo de múltiples especificaciones (estabilidad, rapidez y esfuerzo de control), se utilizó la herramienta Optimization-Based Tuning de MATLAB.

Este enfoque permitió:

- definir directamente especificaciones temporales (tiempo de establecimiento, sobreimpulso, etc.),
- ajustar automáticamente los parámetros del compensador,
- verificar la estabilidad del sistema en el dominio discreto.

El resultado fue un compensador lag–lead cuyos parámetros fueron obtenidos mediante optimización numérica, asegurando que los polos del lazo cerrado se mantengan dentro del círculo unitario y que el desempeño temporal cumpla con los objetivos establecidos para la planta experimental.

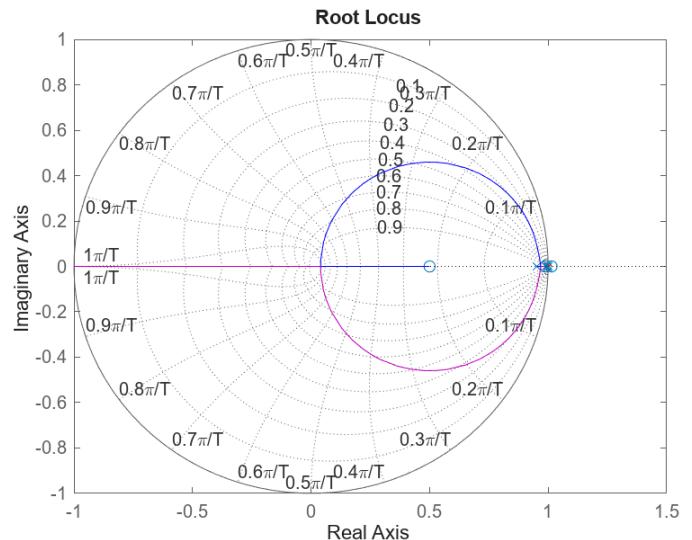


Figura 18. Ubicación de los polos del sistema compensado en el plano  $z$ . Se verifica que todos ellos se encuentran dentro del círculo unitario, garantizando estabilidad discreta.

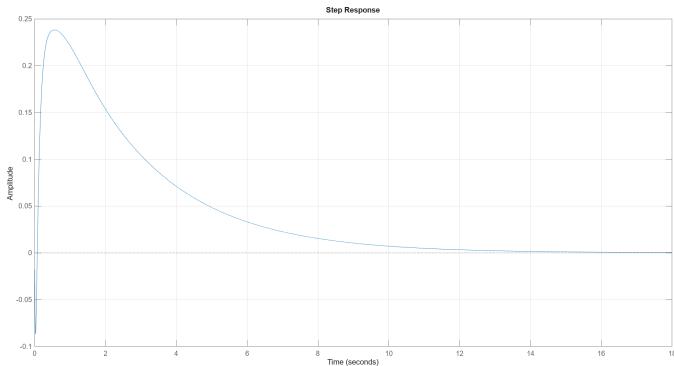


Figura 19. Esfuerzo de control en lazo cerrado con el compensador diseñado mediante Lugar de Raíces.

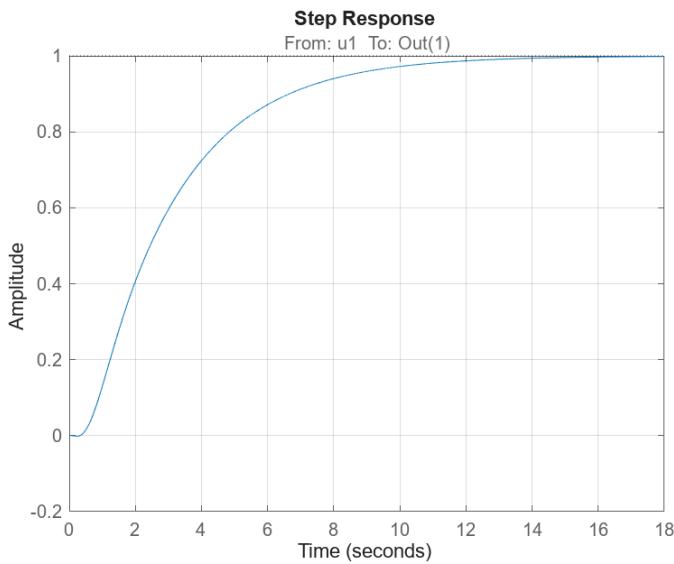


Figura 20. Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado con el compensador diseñado.

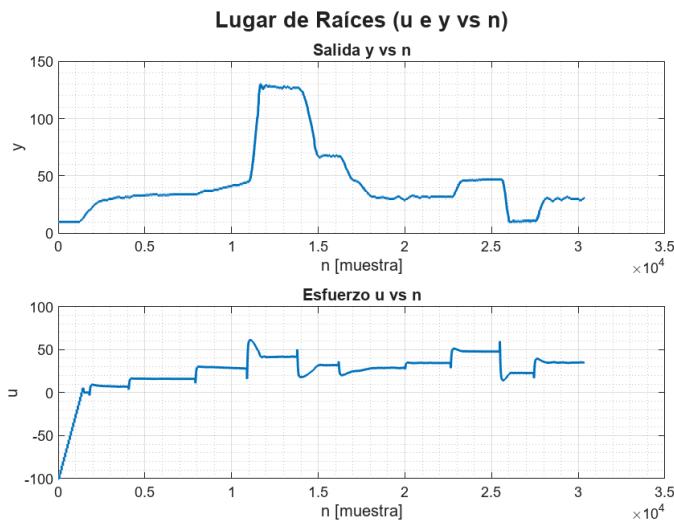


Figura 21. Esfuerzo y altura de la implementación práctica de lugar de raíces

#### VII-E4. Práctica: Objetivos:

- Ubicar polos dentro del círculo unitario.
- Controlar amortiguamiento.
- Ajustar velocidad de respuesta.

## VII-F. Diseño por Respuesta en Frecuencia

Se analiza el lazo abierto:

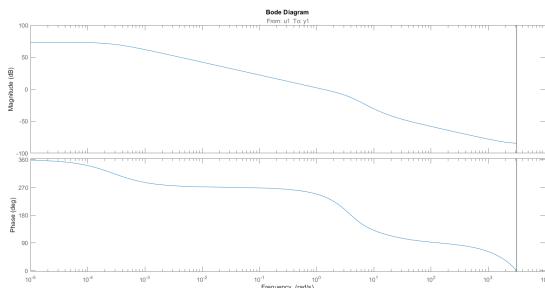


Figura 22. Respuesta en frecuencia del lazo abierto del sistema identificado sin compensación.

Para el diseño del controlador basado en el método de respuesta en frecuencia se utilizó directamente el modelo discreto de la planta obtenido mediante identificación experimental, mostrado en la Fig. 22. En particular, se trabajó con la función de transferencia discreta  $G(z)$  dada en (??), la cual representa el comportamiento dinámico del sistema en el rango de operación considerado.

El modelo identificado fue introducido en el entorno de diseño de MATLAB mediante la herramienta `controlSystemDesigner`, lo que permitió analizar la respuesta en frecuencia del sistema y realizar el diseño del controlador de manera interactiva. A partir de esta herramienta se obtuvieron los diagramas de Bode del lazo abierto, así como los márgenes de ganancia y de fase asociados.

**VII-F1. Análisis del sistema sin compensar:** En la Fig. 23, correspondiente al sistema sin compensación, se observa el diagrama de Bode del lazo abierto conformado únicamente por la planta identificada. A partir de dicho análisis se determinan los márgenes de estabilidad iniciales, los cuales permiten evaluar la estabilidad relativa y la robustez del sistema frente a variaciones paramétricas.

El sistema presenta un margen de fase positivo, lo que indica estabilidad en lazo cerrado para valores reducidos de ganancia, aunque con un compromiso limitado en términos de rapidez de respuesta y amortiguamiento. Asimismo, la pendiente del módulo en la región de cruce de ganancia evidencia la presencia de múltiples polos dominantes, coherentes con la dinámica de orden superior identificada y asociada al conjunto motor-ESC-hélice.

**VII-F2. Diseño del compensador:** Con base en el análisis previo, se procedió al diseño de un compensador con el objetivo de mejorar el desempeño dinámico del sistema, manteniendo márgenes de estabilidad adecuados. El diseño se realizó ajustando la estructura y los parámetros del controlador directamente sobre el diagrama de Bode del lazo abierto, utilizando la herramienta gráfica provista por MATLAB.

Los criterios de diseño considerados fueron:

- incrementar el margen de fase para mejorar el amortiguamiento del sistema,

- fijar una frecuencia de cruce que permita un compromiso adecuado entre rapidez de respuesta y robustez,
- limitar la amplificación de ruido a altas frecuencias y el esfuerzo de control.

**VII-F3. Análisis del sistema compensado:** La Fig. 24 muestra el diagrama de Bode del lazo abierto una vez incorporado el controlador diseñado. Se observa un aumento del margen de fase y un ajuste controlado del margen de ganancia, lo cual indica una mejora en la estabilidad relativa del sistema.

Los valores obtenidos a partir de los diagramas de Bode son los siguientes:

### Sistema sin compensación (Fig. 23):

- Margen de ganancia: 13 dB,
- Margen de fase: 61,700°.

### Sistema compensado (Fig. 24):

- Margen de ganancia: 10.6 dB,
- Margen de fase: 52,900°.

La validación del diseño se realizó mediante el análisis de la respuesta temporal en lazo cerrado. La respuesta al escalón del sistema compensado presenta un comportamiento estable, con un sobreimpulso moderado y un tiempo de establecimiento acorde a los objetivos del trabajo. Asimismo, la señal de control se mantiene dentro de valores aceptables, evitando saturaciones prolongadas del actuador.

En este caso, la compensación se realizó mediante un controlador puramente proporcional, definido como:

$$C(z) = K_p, \quad K_p = 1.308$$

Por lo tanto, el lazo abierto queda dado por  $L(z) = K_p G(z)$ . La acción del controlador proporcional consiste en escalar la magnitud de la respuesta en frecuencia del lazo abierto, desplazando la frecuencia de cruce y, en consecuencia, modificando los márgenes de ganancia y de fase observados. No se introducen polos ni ceros adicionales, por lo que no se realiza una compensación dinámica de fase; la mejora del desempeño se logra exclusivamente mediante el ajuste de la ganancia.

La incorporación de polos adicionales introduciría retardos en la respuesta y una reducción del margen de fase, mientras que la adición de ceros podría generar un adelanto de fase a costa de un incremento significativo del esfuerzo de control. Dado que en la simulación no se dispone de una estimación fiable del esfuerzo del actuador, no resulta posible ponderar adecuadamente estos efectos. Por este motivo, se descartó la inclusión de polos, ceros o acción integral en esta etapa, con el fin de preservar la integridad del sistema físico durante la implementación experimental.

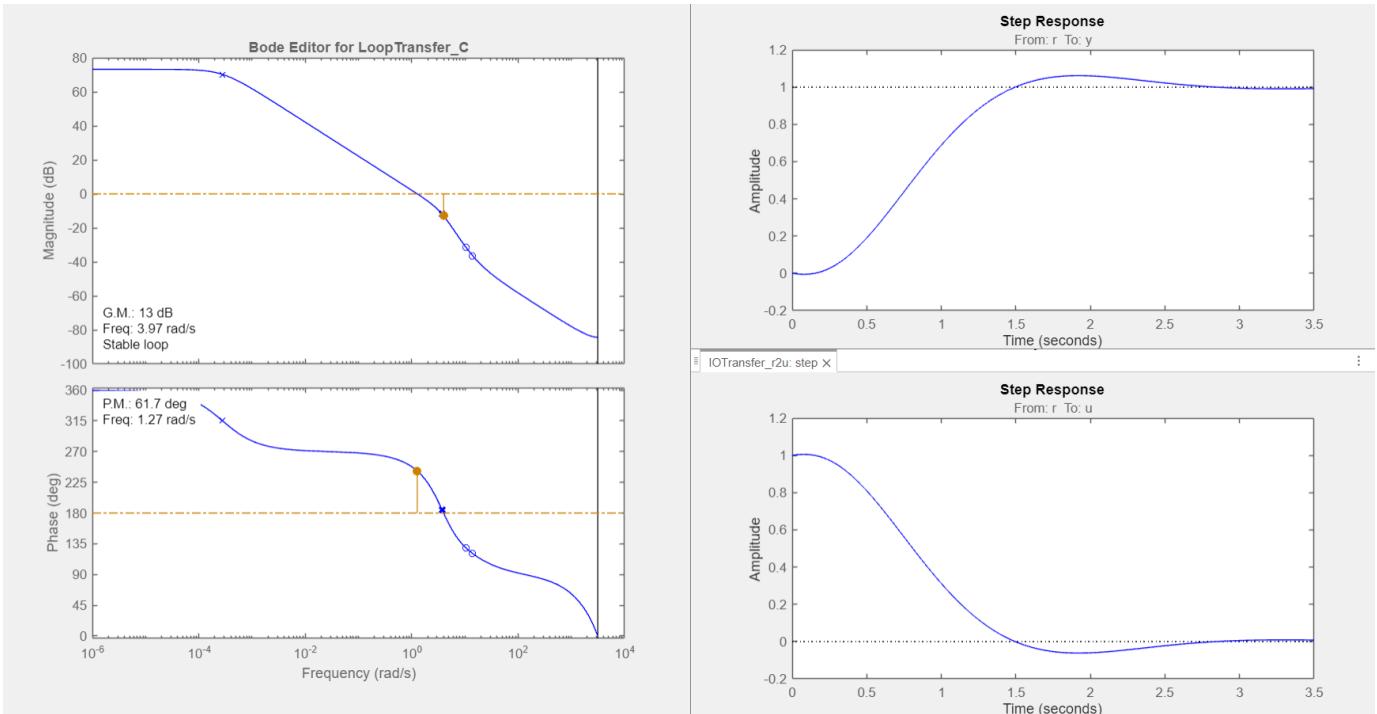


Figura 23. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

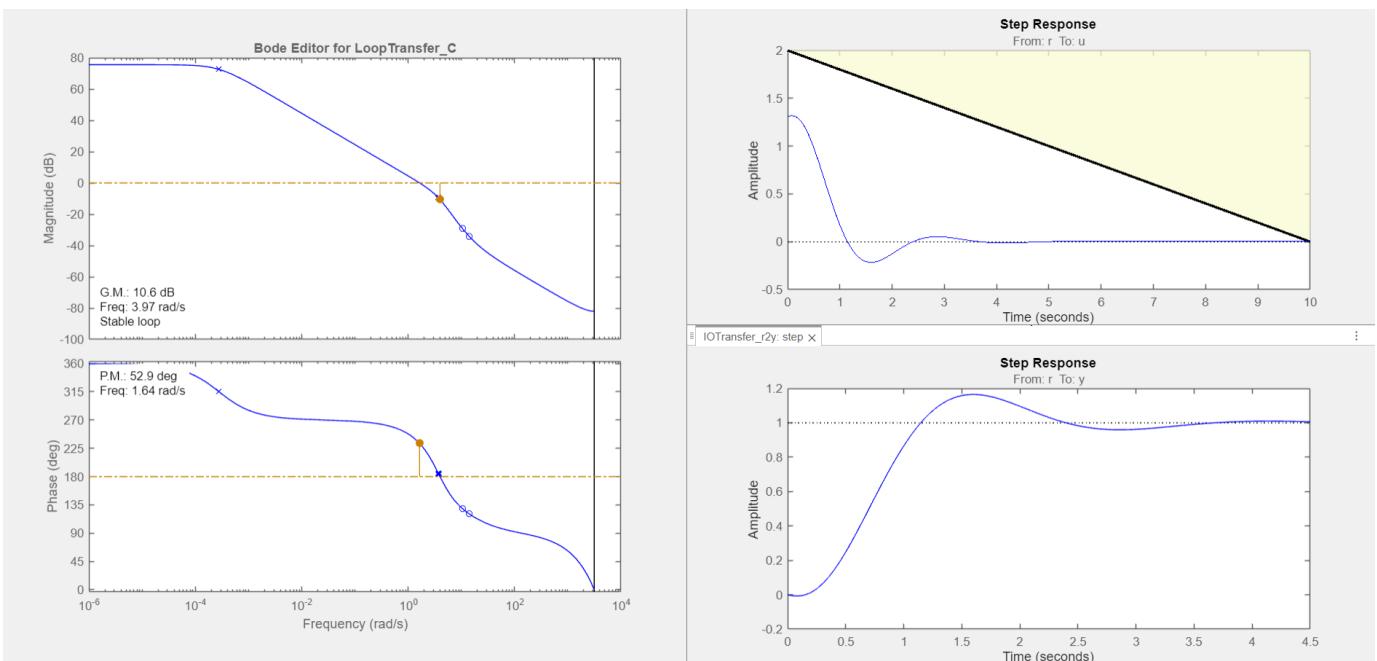


Figura 24. Diagrama de Bode y respuestas temporales del sistema con compensación.

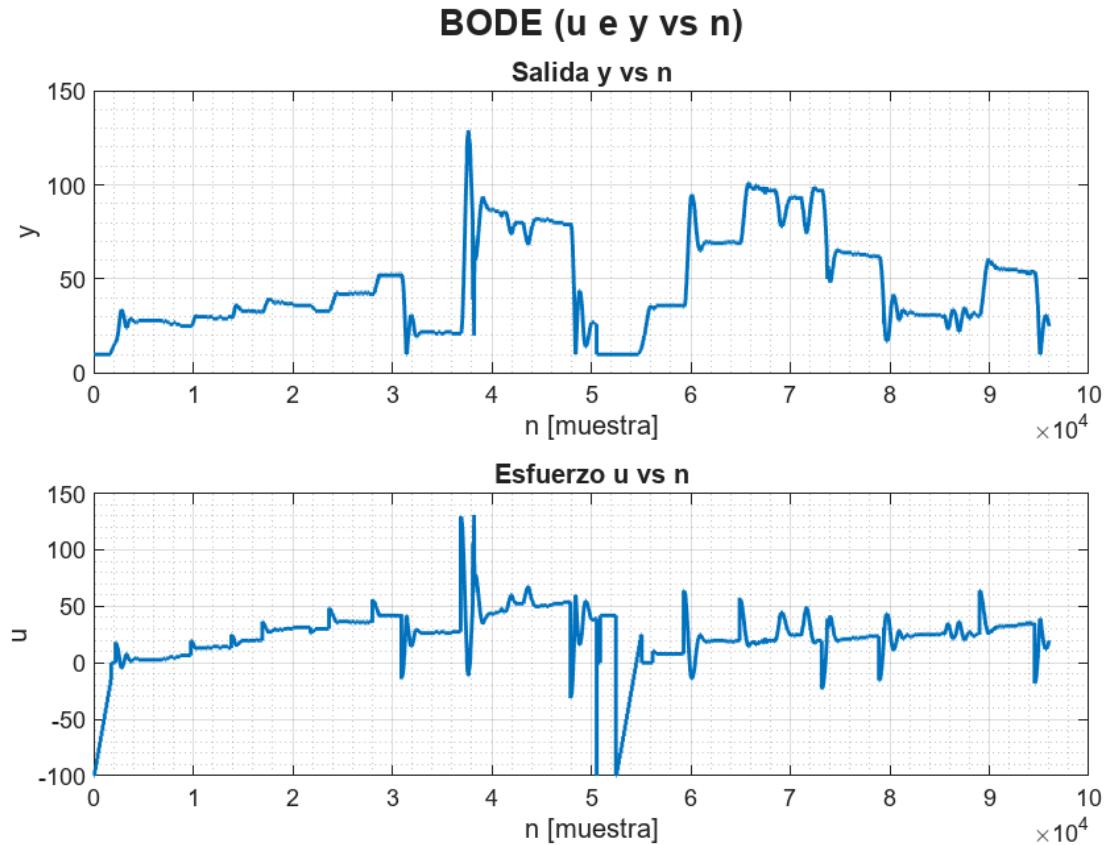


Figura 25. Figura de la respuesta del bode, altura y esfuerzo en n muestras

Compensador usado:

$$C_{Bode} = 1.3082$$

Tiempo de muestreo:

$$T_s = 0.0001$$

## VII-H. Síntesis Directa

**VII-H1. Síntesis directa (Truxal–Ragazzini):** Se parte del modelo discreto identificado de la planta:

$$G_{ZAS}(z) = \frac{-0.0001205 z^{-1} + 0.0002415 z^{-2} - 0.0001209 z^{-3}}{1 - 2.994 z^{-1} + 2.989 z^{-2} - 0.9944 z^{-3}} \quad (2)$$

El método de Truxal–Ragazzini consiste en especificar explícitamente una dinámica deseada en lazo cerrado  $G_{cl}(z)$  y obtener el controlador a partir de la relación:

$$G_{cl}(z) = \frac{C(z)G_{ZAS}(z)}{1 + C(z)G_{ZAS}(z)} \implies C(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{G_{cl}(z)}{1 - G_{cl}(z)} \quad (3)$$

Este procedimiento implica una inversión explícita del modelo de la planta, por lo que el diseño depende fuertemente de la exactitud del modelo identificado.

**VII-H1a. Método 1: respuesta deadbeat:** Como primera aproximación se adoptó una dinámica deseada del tipo *deadbeat*, definida por:

$$G_{cl}(z) = z^{-1}. \quad (4)$$

Esta elección implica que la salida alcance el valor deseado en un único período de muestreo, anulando el error en el menor tiempo posible.

Reemplazando en (3) se obtiene:

$$C_1(z) = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{G_{ZAS}(z)} \frac{1}{z - 1}. \quad (5)$$

Se observa que el controlador resultante contiene explícitamente la inversa de la planta y un polo adicional en  $z = 1$ , lo que anticipa posibles problemas de magnitud del esfuerzo de control.

**VII-H2. Método 2: Deadbeat ripple-free:** Como alternativa se evaluó la variante *ripple-free*, cuyo controlador obtenido es:

$$C_2(z) = \frac{10.43038 z^2 - 2.7635 z + 3.3344}{-0.33662 z^2 - 0.66338 z + 1}. \quad (6)$$

Multiplicando numerador y denominador por  $(-1)$  y normalizando el coeficiente líder del denominador, se obtiene:

$$C_2(z) = \frac{-30.9856 z^2 + 8.2096 z - 9.9055}{z^2 + 1.9707 z - 2.9707}. \quad (7)$$

Para implementación digital resulta conveniente expresarlo en términos de  $z^{-1}$ :

$$C_2(z) = \frac{-30.9856 + 8.2096 z^{-1} - 9.9055 z^{-2}}{1 + 1.9707 z^{-1} - 2.9707 z^{-2}}. \quad (8)$$

**VII-H3. Resultados y Limitaciones Prácticas:** Las simulaciones mostraron que ambos controladores demandan esfuerzos de control extremadamente elevados, alcanzando valores del orden de:

$$|u_{\max}| \sim 10^{29},$$

lo cual excede ampliamente las capacidades del actuador físico.

En la implementación real, la señal de control corresponde a una señal PWM tipo servo a 50 Hz acotada en el rango:

$$u \in [1000, 2000] \mu s. \quad (9)$$

La magnitud desproporcionada del esfuerzo se explica por:  
■ La inversión explícita del modelo  $G_{ZAS}(z)$ .

- La presencia de polos cercanos a  $z = 1$  en la planta.
- Alta sensibilidad a pequeñas incertidumbres del modelo.
- Cancelaciones exactas requeridas por el diseño.

En particular, la inversión de dinámicas cercanas al borde del círculo unitario produce amplificaciones significativas en la señal de control, haciendo que el diseño sea extremadamente sensible a variaciones como cambios en la tensión de batería, fricción, efectos aerodinámicos y dinámica no modelada del conjunto ESC–motor–hélice.

Por estas razones, si bien la síntesis directa resulta valiosa desde el punto de vista conceptual y didáctico, no se considera viable para implementación experimental en la planta real.

En consecuencia, para la etapa práctica se priorizan estrategias de menor orden y mayor robustez, que contemplen explícitamente las limitaciones del actuador y la saturación de la señal de control. Ecuación general:

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{cl}(z)}{1 - G_{cl}(z)}$$

Dinámica deseada:

$$G_{cl}(z) = [\text{Completar}]$$

Observaciones:

- Sensibilidad al modelo.
- Elevado esfuerzo de control.
- Limitaciones prácticas.

## VII-I. Comparación entre Métodos Clásicos

- PID: **[Completar fortalezas y debilidades]**
- Lugar de Raíces: **[Completar]**
- Bode: **[Completar]**
- Síntesis Directa: **[Completar]**

Observación general:

**[Completar: limitaciones estructurales del enfoque clásico]**

## VIII. MÉTODOS MODERNOS DE CONTROL

### VIII-A. Introducción

A diferencia de los métodos clásicos basados en funciones de transferencia y análisis en frecuencia, los métodos modernos de control se fundamentan en la representación en espacio de estados del sistema dinámico.

En este enfoque, la dinámica se describe mediante:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (10)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (11)$$

donde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u_k$  la entrada de control y  $y_k$  la salida medida.

Este formalismo permite:

- Diseñar realimentación directa de estados.
- Ubicar polos del sistema de manera sistemática.
- Formular problemas de control óptimo.
- Incorporar estimadores de estado.

*VIII-A1. Modelo en espacio de estados continuo:* Las matrices del modelo continuo en representación estado–espacio son:

$$F = \begin{bmatrix} -5.6102 & -3.5055 & -0.0314 \\ 4.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0312 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [-0.0076 \quad 0.0064 \quad 8.9975]$$

$$J = [0]$$

*VIII-A2. Modelo en Espacio de Estados:* El modelo discreto obtenido:

$$A = e^{FT_s}, \quad B = F^{-1}(e^{FT_s} - I)G, \quad C = H,$$

$$D = J$$

Tiempo de muestreo depende de la práctica

*VIII-A3. Análisis de Controlabilidad y Observabilidad:*  
Matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = [3]$$

Matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = [3]$$

Conclusión estructural:

Dado que el rango de ambas matrices coincide con el orden del sistema, se concluye que el modelo es completamente controlable y completamente observable.

Desde el punto de vista físico, esto implica que:

- Existe una combinación adecuada de la señal de entrada que permite influenciar todos los estados internos del sistema.
- La salida medida contiene información suficiente para reconstruir completamente el vector de estados mediante un observador.

En consecuencia, el modelo identificado resulta estructuralmente apto para el diseño de control por realimentación de estados, ubicación de polos, LQR y estimación de estados mediante observador de Luenberger o filtro de Kalman.

No obstante, la validez práctica de dicha síntesis en tiempo discreto depende de que el tiempo de muestreo  $T_s$  sea suficientemente pequeño para capturar la dinámica relevante del sistema, evitando aliasing. En particular, se asume que las componentes significativas de la señal de salida y de las perturbaciones se encuentran por debajo de la frecuencia de Nyquist  $f_N = \frac{1}{2T_s}$ , y que el acondicionamiento analógico (filtrado anti-alias) es consistente con esta hipótesis.

### VIII-B. Ubicación Arbitraria de Polos

### VIII-C. Realimentación de Estados y Estimación

*VIII-C1. Realimentación de Estados:* Considerando el modelo discreto del sistema:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k$$

se propone una ley de control por realimentación de estados:

$$u_k = -Kx_k$$

lo que conduce a la dinámica en lazo cerrado:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k$$

El diseño por ubicación arbitraria de polos consiste en determinar la matriz de ganancia  $K$  tal que:

$$\lambda(A - BK) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

siendo  $|p_i| < 1$  condición necesaria para estabilidad discreta.

La determinación de  $K$  puede realizarse mediante el método de Ackermann o utilizando la función `place()` de MATLAB, siempre que el sistema sea completamente controlable.

**VIII-C2. Estimador de Estados:** En situaciones donde no todos los estados son medibles, se introduce un estimador para reconstruir el vector de estados a partir de la entrada y la salida medida.

El estimador discreto se define como:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - \hat{y}_k)$$

donde:

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k$$

La dinámica del error de estimación:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k$$

queda gobernada por:

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k$$

Por lo tanto, la convergencia del estimador depende de la ubicación de los autovalores de la matriz  $A - LC$ , que pueden ser fijados arbitrariamente siempre que el sistema sea observable:

$$\lambda(A - LC) = \{p_{obs,1}, \dots, p_{obs,n}\}$$

**VIII-C3. Principio de Separación:** Cuando se combinan realimentación de estados y estimación, la ley de control adopta la forma:

$$u_k = -K\hat{x}_k$$

y la dinámica total del sistema presenta autovalores dados por la unión de los polos del controlador y los polos del estimador:

$$\lambda_{total} = \lambda(A - BK) \cup \lambda(A - LC)$$

Este resultado, conocido como principio de separación, permite diseñar independientemente el controlador y el estimador.

#### VIII-D. Control Integrador

**VIII-D1. Ubicación arbitraria de polos con Integrador:** En esta sección se implementa el procedimiento propuesto en Ogata (Ec. 6.19) para incorporar acción integral al sistema en espacio de estados, utilizando únicamente un integrador externo y realimentación de estados estimados.

La planta discreta utilizada (orden  $n = 3$ ) se obtuvo mediante discretización por ZOH con período de muestreo:

$$T_s = 0.02 \text{ s} \quad (50 \text{ Hz})$$

**VIII-D1a. Sistema aumentado con integrador:** Para eliminar el error en régimen permanente frente a referencias constantes, se define el estado integral:

$$v_{k+1} = v_k + (r_k - y_k)$$

$$\text{donde } y_k = Cx_k.$$

Siguiendo el desarrollo de Ogata, se construye el sistema aumentado:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y se ubican los polos deseados del sistema aumentado:

$$p_{ctrl} = \{0.95 \pm 0.15j, 0.98\}, \quad p_i = 0.96$$

De esta forma se obtienen las ganancias equivalentes:

$$K_2 = [0.7820721 \quad -0.5678709 \quad 0.3779423]$$

$$K_1 = 0.1469358$$

donde:

-  $K_2$  actúa sobre el estado estimado  $\hat{x}_k$ . -  $K_1$  actúa sobre el estado integral  $v_k$ .

La ley de control implementada es:

$$u_k = K_1 v_k - K_2 \hat{x}_k$$

Los polos del sistema aumentado cerrado fueron correctamente ubicados (según place) en:

$$p_{K_{21}} = 13$$

(lo que confirma la correcta asignación interna en MATLAB).

**VIII-D1b. Diseño del observador:** Se diseñaron dos variantes de observador con los mismos polos deseados:

$$p_{obs} = \{0.8 \pm 0.25j, 0.9\}$$

VIII-D1c. *Observador predictor:* Dinámica del error:

$$A - L_{\text{pred}}C$$

Ganancia obtenida:

$$L_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 167.3535 \\ 253.6822 \\ 86.0310 \end{bmatrix}$$

$$p_{L_{\text{pred}}} = 12$$

VIII-D1d. *Observador actual:* Dinámica del error:

$$A - L_{\text{actual}}CA$$

Ganancia obtenida:

$$L_{\text{actual}} = \begin{bmatrix} 126.8411 \\ 172.0621 \\ 45.1301 \end{bmatrix}$$

$$p_{L_{\text{actual}}} = 13$$

VIII-D1e. *Estructura completa del sistema aumentado cerrado:* Para analizar explícitamente la dinámica del sistema completo (planta + integrador + control), el script construye el modelo aumentado:

$$A_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_2 - K_2A - K_1CA & 1 - K_2B - K_1CB \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{aug}} = [C \quad 0]$$

Este sistema representa la dinámica cerrada resultante de aplicar la ley de control integral derivada mediante Ogata 6.19.

Además, para comparar la dinámica del error de estimación, se construye el sistema:

$$A_{\text{obs}} = A - L_{\text{actual}}CA$$

y se superponen ambos mapas de polos mediante `pzmap`.

VIII-D2. *Resultados de simulación:* Se evaluó el comportamiento del sistema para una referencia escalón de 25 unidades, comparando:

- Observador predictor
- Observador actual
- Esfuerzo de control
- Evolución del estado integral

Las figuras correspondientes se muestran a continuación:

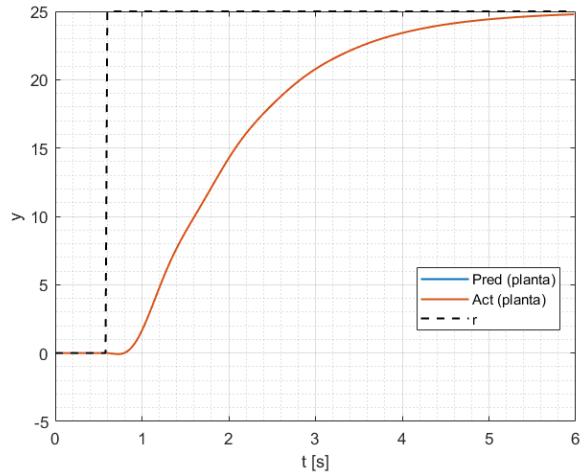


Figura 26. Respuesta temporal  $y(t)$  con integrador — comparación predictor vs actual.

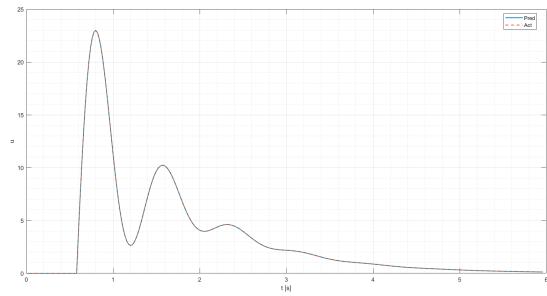


Figura 27. Esfuerzo de control  $u(t)$  con integrador.

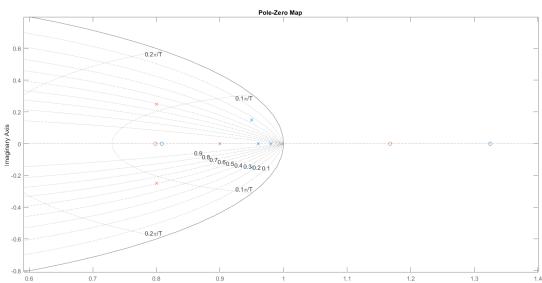


Figura 28. Mapa de polos: planta, sistema aumentado y dinámica del observador.

VIII-D3. *Discusión:* El método de Ogata 6.19 permite incorporar acción integral sin modificar la estructura original de la planta, utilizando un estado adicional y realimentación adecuada.

Se observa que:

- El integrador elimina el error en régimen permanente.
- La dinámica del observador es más rápida que la del sistema controlado.
- Ambos esquemas (predictor y actual) resultan estables, con

polos dentro del círculo unidad.

- El sistema aumentado conserva estabilidad global.

El código completo utilizado para esta sección se incluye en el Apéndice ??.

### VIII-E. Control Óptimo (LQR)

Se diseñó un regulador óptimo discreto de tipo LQR a partir del modelo en espacio de estados discretizado mediante retención de orden cero (ZOH) con tiempo de muestreo:

$$T_s = 0.01 \text{ s}$$

El objetivo del diseño es minimizar el funcional de costo cuadrático infinito:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

donde  $Q \succeq 0$  penaliza la energía de los estados y  $R \succ 0$  penaliza el esfuerzo de control.

**VIII-E0a. Matrices de ponderación:** Se adoptó una sintonización práctica basada en escalas típicas del experimento: un cambio de referencia del orden de  $\Delta y \approx 20$  y una restricción del mando aproximadamente  $|u| \lesssim 300$  (en unidades del actuador). El diseño penaliza principalmente la salida mediante  $C^T C$ , agregando un término pequeño para asegurar buena condición numérica:

$$Q = w_y (C^T C) + 10^{-8} I_n, \quad R = \frac{w_u}{u_{\max}}$$

con  $w_y = 20$ ,  $w_u = 500$  y  $u_{\max} = 300$ . Para el modelo discretizado utilizado, las matrices resultantes fueron:

$$Q = \begin{bmatrix} 6.8188 \times 10^{-3} & -6.9883 \times 10^{-3} & 7.0544 \times 10^{-3} \\ -6.9883 \times 10^{-3} & 7.1620 \times 10^{-3} & -7.2298 \times 10^{-3} \\ 7.0544 \times 10^{-3} & -7.2298 \times 10^{-3} & 7.2982 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$R = 1.6667$$

**VIII-E0b. Ecuación de Riccati discreta y ganancia óptima:** La solución del problema se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati discreta:

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

La ganancia óptima resulta:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

Para el modelo discretizado se obtuvo:

$$K = [0.5119095 \quad -0.4937470 \quad 0.4765571]$$

**VIII-E0c. Polos del sistema en lazo cerrado:** La estabilidad se verifica mediante los polos del sistema:

$$A_{\text{cl}} = A - BK$$

Los polos obtenidos fueron:

$$\begin{aligned} & 0.9728458 + 0.0327300 j \\ & \lambda(A - BK) = 0.9728458 - 0.0327300 j \\ & 0.9663930 \end{aligned}$$

Se observa que todos los polos se encuentran dentro del círculo unidad, garantizando estabilidad discreta.

**VIII-E0d. Referencia al apéndice de implementación:** El código completo utilizado para:

- cargar y discretizar la planta,
- definir  $Q$  y  $R$  mediante parámetros knobs ( $w_y$ ,  $w_u$ ),
- calcular  $K$  y verificar controlabilidad,
- diseñar observadores (predictor y actual) por ubicación de polos,
- calcular el prefiltro  $N_{\text{bar}}$  para seguimiento,
- y simular el lazo con/sin saturación, con/sin ruido, y en doble precisión y float32,

se incluye en el Apéndice A.

**VIII-E1. Simulación del LQR con observador, saturación y ruido:** Con el fin de aproximar el comportamiento del sistema real y evitar conclusiones optimistas, se implementó un entorno de simulación que contempla:

- **Observador de estados** en dos variantes:
  - *Predictor*: corrige usando  $y_k$ .
  - *Actual*: corrige usando  $y_{k+1}$ .
- **Prefiltro de referencia**  $N_{\text{bar}}$  para mejorar el seguimiento de referencia en lazo cerrado (estructura  $u_k = N_{\text{bar}} r_k - K \hat{x}_k$ ).
- **Saturación** del actuador con límite  $\pm u_{\max}$  para representar las restricciones del PWM/ESC.
- **Ruido** configurable para emular incertidumbres del experimento:
  - Ruido de medición:  $y_{\text{meas}} = y_{\text{true}} + v_y$ , con  $v_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2)$ .
  - Ruido del actuador (jitter) y cuantización:  $u_{\text{app}} = \text{sat}(\text{quant}(u_{\text{cmd}} + v_u))$ .
  - Ruido de proceso:  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$  (configurable como prueba de estrés).

**Comparación numérica** entre simulación en doble precisión y float32 para anticipar efectos de implementación embebida.

En particular, para evitar comparaciones sesgadas, las secuencias de ruido se pre-generaron y se reutilizaron de forma idéntica tanto en doble precisión como en float32.

**VIII-E1a. Observadores y ubicación de polos:** Los observadores se diseñaron mediante ubicación arbitraria de polos en el plano-z, definiendo polos deseados:

$$p_{\text{obs}} = \{0.8 \pm 0.25j, 0.9\}$$

y obteniendo:

$$K_{e,\text{pred}} = \text{place}(A^T, C^T, p_{\text{obs}})^T \quad K_{e,\text{act}} = \text{place}(A^T, (CA)^T, p_{\text{obs}})^T$$

*VIII-E1b. Prefiltro  $N_{\text{bar}}$ :* Para mejorar el seguimiento de referencia (SISO), se calculó un prefiltro  $N_{\text{bar}}$  tal que la ganancia estática equivalente sea adecuada, utilizando la rutina auxiliar `refi`:

$$u_k = N_{\text{bar}} r_k - K \hat{x}_k$$

*VIII-E1c. Diagnósticos para evitar autoengaño:* Se incluyeron verificaciones directas sobre el ruido inyectado:

$$e_y(k) = y_{\text{meas}}(k) - y_{\text{true}}(k)$$

y se reportaron métricas como  $\text{RMS}(e_y)$  y conteo de saturaciones en  $u$ , para confirmar que las perturbaciones y límites realmente están actuando sobre el lazo.

*VIII-E1d. Referencia al apéndice:* El script completo de simulación (incluyendo funciones locales `sim_obs_loop`, `plot_zplane`, `refi` y el *fallback* `dlqr_iter_nolic`) se incluye en el Apéndice A.

### VIII-F. Filtro de Kalman

**VIII-F1. Modelo con Ruido:** Para incorporar incertidumbre y modelar explícitamente la presencia de perturbaciones no modeladas y ruido del sensor, se adopta la siguiente representación estocástica discreta:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

donde:

- $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$  representa el ruido de proceso, asociado a una dinámica no modelada, perturbaciones aerodinámicas y simplificaciones del modelo identificado.
- $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$  representa el ruido de medición, proveniente del sensor láser de distancia.

**VIII-F1a. Estimación de  $R$  (ruido de medición):** La varianza del ruido de medición se obtuvo mediante ensayos empíricos, midiendo la dispersión de la señal del sensor con la planta en reposo. Siendo  $\sigma_v$  la desviación estándar medida (en cm), se adopta:

$$R = \sigma_v^2$$

En los ensayos realizados se obtuvo:

$$\sigma_v = 2.043 \text{ cm} \implies R = 4.174 \text{ cm}^2$$

**VIII-F1b. Parametrización y sintonización de  $Q$  (ruido de proceso):** La matriz de covarianza del ruido de proceso se parametrizó como:

$$Q = q I_n$$

donde  $q$  es un escalar positivo ajustable e  $I_n$  es la matriz identidad de dimensión  $n$ . El valor de  $q$  se determinó mediante consistencia estadística de la innovación normalizada (ver Apéndice A).

El valor óptimo obtenido fue:

$$q = 50.8022 \times 10^{-3} \implies Q = q I_n$$

**VIII-F2. Filtro de Kalman en régimen permanente:** Se utilizó un estimador de Kalman discreto en su variante *current estimator* (`kalman(..., 'current')`). La ganancia en régimen permanente  $L$  se obtiene a partir de la solución estacionaria  $P$  de la ecuación de Riccati discreta:

$$P = APA^T - APC^T (CPC^T + R)^{-1} CPA^T + Q$$

y la ganancia queda:

$$L = APC^T (CPC^T + R)^{-1}$$

La ganancia obtenida en MATLAB para el modelo discretizado fue:

$$L = \begin{bmatrix} 97.4968 \\ 192.3014 \\ 94.7820 \end{bmatrix}$$

**VIII-F2a. Polos del observador:** La estabilidad del observador se verifica a partir de los polos del sistema estimador. Para el *current estimator*, la dinámica del error queda determinada por  $A - LCA$ , por lo que se reportan los polos:

$$\begin{aligned} & 0.9730274 + 0.0308455 j \\ \lambda(A - LCA) = & 0.9730274 - 0.0308455 j \\ & 0.9694430 \end{aligned}$$

**VIII-F3. Control integral y realimentación de estados (LQI):** Con el objetivo de eliminar el error en régimen permanente ante referencias tipo escalón, se incorporó un integrador de error. Definiendo el estado integral  $\xi_k$ :

$$\xi_{k+1} = \xi_k + (r_k - y_k)$$

Se diseñó una ley de control tipo LQI:

$$u_k = -K_x \hat{x}_k + K_i \xi_k$$

donde  $\hat{x}_k$  proviene del estimador de Kalman.

Los valores obtenidos mediante `dlqr` (con pesos heurísticos) fueron:

$$K_x = [16.5343 \quad -15.8046 \quad 15.1271]$$

$$K_i = 3.2067$$

**VIII-F3a. Polos de la planta y del lazo cerrado:** Los polos de la planta discretizada (sin control) fueron:

$$\begin{aligned} & 0.9999972 \\ \lambda(A) = & 0.9720409 + 0.0241158 j \\ & 0.9720409 - 0.0241158 j \end{aligned}$$

Los polos del lazo cerrado del sistema aumentado (planta + integrador + control) fueron:

$$\begin{aligned} & 0.9735939 + 0.0318308 j \\ \lambda(A_{cl}) = & 0.9735939 - 0.0318308 j \\ & 0.9671966 \\ & 0 \end{aligned}$$

**VIII-F4. Sistema aumentado usado para `pzmap`:** Además del cálculo teórico de polos del lazo cerrado, en el script de validación se armó explícitamente un *sistema aumentado discreto* para analizar la estabilidad en el plano- $z$  con `pzmap`. Este sistema corresponde a la dinámica conjunta de planta e integrador, con la ley de control LQI aplicada.

En el código se definieron las matrices del sistema aumentado como:

$$A_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} A & B \\ K_x - K_x A - K_i C A & 1 - K_x B - K_i C B \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_i \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{aug}} = [C \quad 0] \quad D_{\text{aug}} = 0$$

y se construyó el modelo:

$$\text{sysDaug} = \text{ss}(A_{\text{aug}}, B_{\text{aug}}, C_{\text{aug}}, 0, \text{Ts}).$$

Finalmente, se utilizó `pzmap` (`sysDaug`) para visualizar los polos del sistema aumentado en el plano- $z$  y verificar que la dinámica resultante permanezca estable (polos dentro del círculo unidad) en el caso nominal.

**VIII-F4a.** *Nota:* Esta construcción se incluye tal cual se implementa en el script, con el objetivo de replicar el análisis práctico realizado y obtener directamente el mapa de polos asociado a la estructura planta + integrador + control.

**VIII-F5.** *Nota práctica sobre saturación:* En la implementación práctica se aplica saturación al mando  $u_k$  para respetar los límites del actuador (PWM). La presencia de saturación puede degradar el cumplimiento exacto de la dinámica diseñada y producir integrador acumulado, por lo que en firmware se complementa con estrategias de anti-windup cuando corresponde.

**VIII-F6.** *Resultados con ruido y validación:* Para evaluar el desempeño se simuló el sistema incluyendo tanto ruido de medición (como dispersión del sensor) como ruido de proceso (dinámica no modelada). Se comparó:

- Respuesta de salida con ruido, y seguimiento de referencia.
- Esfuerzo de control requerido en presencia de ruido.
- Estabilidad del sistema mediante mapa de polos y ceros.

Las siguientes figuras muestran los resultados obtenidos:

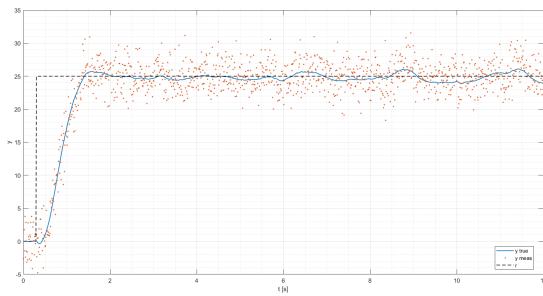


Figura 29. Respuesta temporal de la salida en presencia de ruido (medición y proceso) y comparación con la referencia.

El código completo utilizado para calcular  $L$ ,  $K_x$ ,  $K_i$ , los polos de la planta, los polos del observador y los polos del lazo cerrado se incluye en el Apéndice B.

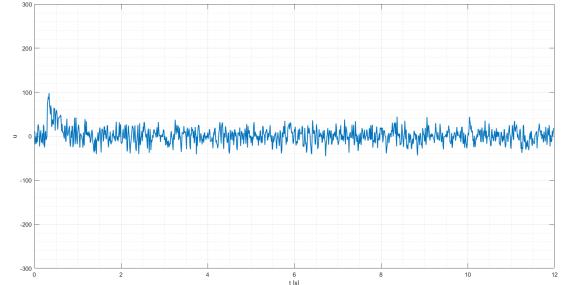


Figura 30. Esfuerzo de control (señal de mando) en presencia de ruido.

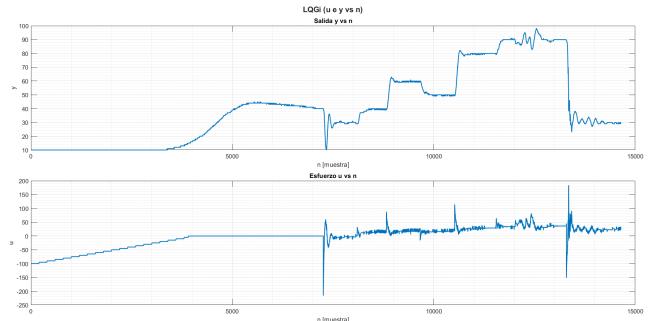


Figura 31. Resultado experimental obtenido con la implementación práctica sobre la planta real.

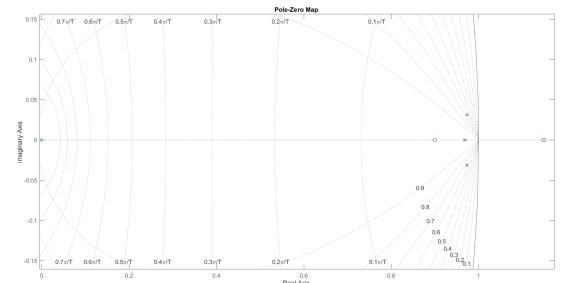


Figura 32. Mapa de polos y ceros. En naranja se muestran los polos del observador y en azul los polos asociados a la planta/sistema.

## IX. CONCLUSIONES

### APÉNDICE A PARÁMETROS DEL CONTROLADOR

### APÉNDICE B CÓDIGOS MATLAB

### APÉNDICE

En este apéndice se incluye el script MATLAB utilizado para: (i) cargar y discretizar la planta identificada, (ii) definir las ponderaciones  $Q$  y  $R$  del LQR, (iii) calcular la ganancia óptima  $K$  (vía `d1lqr/dare`), (iv) diseñar observadores (predictor y actual) por ubicación arbitraria de polos, (v) calcular el prefiltro  $N_{\text{bar}}$  para seguimiento de referencia, y (vi) simular el lazo con/sin saturación y con/sin ruido (incluyendo comparación double vs float 32).

```

1 close all; clear; clc
2
3 % % =====
4 % 1) CARGA + DISCRETIZACION
5 % % =====
6 S = load('planta_(1).mat');
7
8 if isfield(S,'plantaC')
9 plantaC = S.plantaC;
10 elseif isfield(S,'sysC')
11 plantaC = S.sysC;
12 else
13 error('No _encontro _"plantaC"_ ni _"sysC"_ dentro _de _planta_(1).mat');
14 end
15
16 Ts = 1/100; % sample time
17 sysD = c2d(plantaC, Ts, 'zoh');
18 [A,B,C,D] = ssdata(ss(sysD));
19 n = size(A,1);
20
21 fprintf('Ts= %.9f\n', Ts, n);
22 disp('A='); disp(A); disp('B='); disp(B); disp('C=');
23 disp(C); disp('D='); disp(D);
24
25 % % =====
26 % 2) PARAMETROS + PESOS (LQR)
27 % % =====
28 % Observador (z-plane)
29 p_obs = [0.8 + 0.25i, 0.8 - 0.25i, 0.9];
30
31 % Objetivo practico: step ~20 y u limitado a
32 +/-300
33 r_step = 20;
34 u_max = 300;
35
36 % knobs
37 wy = 20; % subir => mas seguimiento (
38 mas agresivo)
39 wu = 500; % subir => menos esfuerzo (
40 mas timido)
41
42 % Q y R coherentes
43 Q = wy*(C'*C) + 1e-8*eye(n);
44 R = wu/(u_max);
45
46 % % =====
47 % 3) GANANCIAS: LQR + OBSERVADOR +
48 Nbar
49 % % =====
50 rc = rank(ctrb(A,B));
51 if rc < n
52 error('El _par_(A,B)_NO _es _controlable_(rank=%
53 d,_<,_n=%d,)', rc, n);
54 end

```

```

49 % --- LQR discreto (con fallback) ---
50 if exist('dlqr','file') == 2
51 [K, P, e_cl] = dlqr(A, B, Q, R);
52 elseif exist('dare','file') == 2
53 [P,~,~] = dare(A,B,Q,R);
54 K = (R + B'*P*B)\(B'*P*A);
55 e_cl = eig(A - B*K);
56 else
57 [P, K, e_cl, info] = dlqr_iter_nolic(A,B,Q,R);
58 fprintf('DLQR_sin_toolbox:_iters=%d,_err=%.3e\n',
59 ', info.iters, info.err);
60 end
61
62 fprintf('LQR:_eig(A-BK)=\n'); disp(e_cl.');
63
64 % --- Observador (place) ---
65 Ke_pred = place(A', C', p_obs).'; % predictor: A - Ke*C
66 Ke_act = place(A', (C*A)', p_obs).'; % "actual": A - Ke*C*A
67
68 % --- Nbar (SISO) ---
69 if size(C,1) ~= 1
70 error('Tu _C_no _es _SISO_(tiene _%d _salidas)._Elegi _una _fila _de _C.', size(C,1));
71 end
72 [~,~,Nbar] = refi(A, B, C, K);
73 fprintf('Nbar= %.6g\n', Nbar);
74
75 % % =====
76 % 4) SIMULACION: SIN RUIDO vs CON RUIDO
77 (double y single)
78 % % =====
79 N = 200;
80 ulim_sat = u_max;
81 ulim_inf = Inf;
82
83 % referencia
84 r = zeros(1,N);
85 r(2:end) = r_step;
86
87 % ----- RUIDO (config) -----
88 rng(1); % repetible
89
90 noise.enable = true;
91 noise.sigma_y = 2; % ruido de medicion
92 noise.sigma_u = 2.0; % jitter actuador
93 noise.q_u = 1.0; % cuantizacion u
94 noise.sigma_w = 0.0; % ruido de proceso
95
96 noise.vy = noise.sigma_y * randn(1,N);
97 noise.vu = noise.sigma_u * randn(1,N);
98 noise.wx = noise.sigma_w * randn(n,N);

```

```

99 noise_off = noise;
100 noise_off.enable = false;
101 noise_off.vy = zeros(1,N);
102 noise_off.vu = zeros(1,N);
103 noise_off.wx = zeros(n,N);

104 % --- IDEAL (sin sat, sin ruido) ---
105 out_pred_ideal = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,Nbar,
106 Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_inf,false,false,noise_off);
107 out_act_ideal = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,Nbar,
108 Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_inf,true ,false,noise_off);

109 % --- REAL (sat, sin ruido) ---
110 out_pred_sat_clean = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,
111 Nbar,Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_sat,false,false,
112 noise_off);
113 out_act_sat_clean = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,
114 Nbar,Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_sat,true ,false,
115 noise_off);

116 % --- REAL (sat, con ruido) ---
117 out_pred_sat_noise = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,
118 Nbar,Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_sat,false,false,noise);
119 out_act_sat_noise = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,
120 Nbar,Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim_sat,true ,false,noise);

121 t = (0:N-1)*Ts;

122 % % =====
123 % 5) DIAGNOSTICOS
124 % % =====
125 eyp = out_pred_sat_noise.y_meas -
126 out_pred_sat_noise.y_true;
127 eya = out_act_sat_noise.y_meas -
128 out_act_sat_noise.y_true;

129 fprintf('\n---_CHECK_RUIDO_---\n');
130 fprintf('sigma_y= %.3g_\u2225 RMS(y_meas-y_true)_\u2225
Pred= %.3g_\u2225 Act= %.3g\n', noise.sigma_y, rms(eyp),
rms(eya));
131 fprintf('sigma_u= %.3g_\u2225 q_u= %g\n', noise.
sigma_u, noise.q_u);

132 fprintf('\n---_SATURACION_---\n');
133 fprintf('Pred_clean:_maxlul= %.2f_\u2225 sat= %d\n',
134 max(abs(out_pred_sat_clean.u)), sum(abs(
out_pred_sat_clean.u)) >= ulim_sat-1e-9));
135 fprintf('Pred_noise:_maxlul= %.2f_\u2225 sat= %d\n',
136 max(abs(out_pred_sat_noise.u)), sum(abs(
out_pred_sat_noise.u)) >= ulim_sat-1e-9));

137 fprintf('Act_\u2225 clean:_maxlul= %.2f_\u2225 sat= %d\n',
138 max(abs(out_act_sat_clean.u)), sum(abs(out_act_sat_clean.
u)) >= ulim_sat-1e-9);
139 fprintf('Act_\u2225 noise:_maxlul= %.2f_\u2225 sat= %d\n',
140 max(abs(out_act_sat_noise.u)), sum(abs(out_act_sat_noise.
u)) >= ulim_sat-1e-9);

141 % % =====
142 % 6) PLOTS
143 % % =====
144 figure('Name','Predictor: \u2225 y_\u2225(clean_\u2225 vs_\u2225 noise)\u2225[sat]')
145 ;
146 plot(t, out_pred_sat_clean.y_true, 'LineWidth',1.6);
147 hold on;
148 plot(t, out_pred_sat_noise.y_meas, '-.');
149 plot(t, r, 'k--','LineWidth',1.2);
150 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('y');
151 legend('y_\u2225 true_\u2225(clean)'\u2225'y_\u2225 meas_\u2225(noise)',r',
152 Location,'best');

153 figure('Name','Predictor: \u2225 u_\u2225(clean_\u2225 vs_\u2225 noise)\u2225[sat]')
154 ;
155 plot(t, out_pred_sat_clean.u, 'LineWidth',1.6);
156 hold on;
157 plot(t, out_pred_sat_noise.u, '-.');
158 yline(+ulim_sat,'k--'); yline(-ulim_sat,'k--');
159 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('u');

160 figure('Name','Actual: \u2225 y_\u2225(clean_\u2225 vs_\u2225 noise)\u2225[sat]')
161 ;
162 plot(t, out_act_sat_clean.y_true, 'LineWidth',1.6);
163 hold on;
164 plot(t, out_act_sat_noise.y_meas, '-.');
165 plot(t, r, 'k--','LineWidth',1.2);
166 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('y');

167 figure('Name','Actual: \u2225 u_\u2225(clean_\u2225 vs_\u2225 noise)\u2225[sat]')
168 ;
169 plot(t, out_act_sat_clean.u, 'LineWidth',1.6);
170 hold on;
171 plot(t, out_act_sat_noise.u, '-.');
172 yline(+ulim_sat,'k--'); yline(-ulim_sat,'k--');
173 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('u');

174 figure('Name','Ruido_de_medicion_(y_meas_\u2225
y_true)');
175 plot(t, eyp, t, eya);
176 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('error_de_medicion');
legend('Pred','Act','Location','best');

177 figure('Name','Float32_\u2225 Double_(y_meas)\u2225[sat+
noise]');
178 plot(t, out_pred_sat_noise.y_meas -
179 out_pred_sat_noise_f.y_meas, ...
180 t, out_act_sat_noise.y_meas - out_act_sat_noise_f.
y_meas);
181 grid on; xlabel('t_\u2225[s]'); ylabel('double_\u2225 float32');
legend('Pred','Act','Location','best');

```

```

177 % % =====
178 % 7) Z-PLANE (polos planta, CL, obs)
179 % % =====
180 p_ol = eig(A);
181 p_cl = eig(A - B*K);
182 p_op = eig(A - Ke_pred*C);
183 p_oa = eig(A - Ke_act*C*A);
184
185 try
186 z_plant = tzero(ss(A,B,C,D,Ts));
187 catch
188 z_plant = [];
189 end
190
191 plot_zplane('Z-plane:_Predictor', p_ol, p_cl, p_op,
192 z_plant);
193 plot_zplane('Z-plane:_Actual' , p_ol, p_cl, p_oa,
194 z_plant);
195
196 % %
197 % ===== FUNCIONES
198 LOCALES =====
199
200 function out = sim_obs_loop(A,B,C,D,K,Nbar,
201 Ke_pred,Ke_act,r,Ts,ulim,use_actual,use_single,noise)
202 if nargin < 15 || isempty(noise)
203 noise.enable=false; noise.vy=0; noise.vu=0; noise.
204 wx=0; noise.q_u=Inf;
205 end
206
207 if use_single
208 A=single(A); B=single(B); C=single(C); D=single(
209 D);
210 K=single(K); Nbar=single(Nbar);
211 Ke_pred=single(Ke_pred); Ke_act=single(Ke_act);
212 r=single(r); Ts=single(Ts); ulim=single(ulim);
213 end
214
215 n = size(A,1); N = numel(r);
216
217 x = zeros(n,N,'like',A);
218 xh = zeros(n,N,'like',A);
219
220 y_true = zeros(1,N,'like',A);
221 y_meas = zeros(1,N,'like',A);
222
223 u_cmd = zeros(1,N,'like',A);
224 u_app = zeros(1,N,'like',A);
225
226 vy = zeros(1,N,'like',A);
227 vu = zeros(1,N,'like',A);
228 wx = zeros(n,N,'like',A);
229
230
231 q_u = Inf;
232 if isfield(noise,'q_u'), q_u = noise.q_u; end
233 q_u = cast(q_u,'like',A);
234
235 y_true(1) = C*x(:,1) + D*0;
236 y_meas(1) = y_true(1) + vy(1);
237
238 for k=1:N-1
239 u_unsat = Nbar*r(k) - K*xh(:,k);
240 u_cmd(k) = sat(u_unsat, ulim);
241
242 u_app(k) = u_cmd(k) + vu(k);
243 if isnfinite(double(q_u))
244 u_app(k) = round(u_app(k)/q_u)*q_u;
245 end
246 u_app(k) = sat(u_app(k),ulim);
247
248 x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u_app(k) + wx(:,k);
249
250 y_true(k) = C*x(:,k) + D*u_app(k);
251 y_true(k+1) = C*x(:,k+1) + D*u_app(k);
252
253 y_meas(k) = y_true(k) + vy(k);
254 y_meas(k+1) = y_true(k+1) + vy(k+1);
255
256 if ~use_actual
257 yhat_k = C*xh(:,k) + D*u_app(k);
258 xh(:,k+1) = A*xh(:,k) + B*u_app(k) + Ke_pred*(
259 y_meas(k) - yhat_k );
260 else
261 z = A*xh(:,k) + B*u_app(k);
262 yzh = C*z + D*u_app(k);
263 xh(:,k+1) = z + Ke_act*( y_meas(k+1) - yzh );
264 end
265 end
266
267 u_cmd(N) = sat(Nbar*r(N) - K*xh(:,N), ulim);
268 u_app(N) = u_cmd(N) + vu(N);
269 if isnfinite(double(q_u))
270 u_app(N) = round(u_app(N)/q_u)*q_u;
271 end
272 u_app(N) = sat(u_app(N), ulim);
273
274 y_true(N) = C*x(:,N) + D*u_app(N);
275 y_meas(N) = y_true(N) + vy(N);
276
277 out.x = x; out.xh = xh;
278 out.y_true = y_true;
279 out.y_meas = y_meas;
out.u_cmd = u_cmd;

```

```

280 out.u_app = u_app;
281
282 out.y = y_meas;
283 out.u = u_app;
284 end
285
286 function y = sat(u,lim)
287 if isinf(lim)
288 y = u;
289 else
290 y = min(max(u, -lim), lim);
291 end
292 end
293
294 function plot_zplane(figName, p_ol, p_cl, p_obs,
295 z_plant)
296 figure('Name',figName,'NumberTitle','off');
297 hold on; grid on; grid minor; axis equal;
298 title('Z-plane');
299 xlabel('Re{z}'); ylabel('Im{z}');
300
301 th = linspace(0,2*pi,400);
302 plot(cos(th), sin(th), 'k:'); % unit circle
303
304 plot(real(p_ol), imag(p_ol), 'o', 'LineWidth', 1.5);
305 plot(real(p_cl), imag(p_cl), 'x', 'LineWidth', 1.8);
306 plot(real(p_obs), imag(p_obs), '^', 'LineWidth', 1.8);
307
308 if ~isempty(z_plant)
309 plot(real(z_plant), imag(z_plant), 's', 'LineWidth',
310 1.5);
311 legend('unit_circle','poles_plant_(A)','poles_CL_(A
312 -BK)','poles_obs','zeros_plant','Location','bestoutside')
313 ;
314 else
315 legend('unit_circle','poles_plant_(A)','poles_CL_(A
316 -BK)','poles_obs','Location','bestoutside');
317 end
318
319 xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
320 end
321
322 function [Nx,Nu,Nbar] = refi(phi,gam,Hr,K)
323 I=eye(size(phi));
324 [m,n]=size(Hr);
325 np=inv([phi-I gam;Hr zeros(m)])*([zeros(n,m);eye(
326 m)]);
327 Nx=np(1:n,:);
328 Nu=np(n+1:n+m,:);
329 Nbar=Nu+K*Nx;
330 end
331
332 function [P, K, e_cl, info] = dlqr_iter_nolic(A,B,Q,
333 R)
334 maxit = 5000;
335 tol = 1e-10;
336
337 P = Q;
338 err = Inf;
339
340 for it = 1:maxit
341 G = R + B'*P*B;
342 Ktmp = G \ (B'*P*A);
343 Pn = A'*P*A - A'*P*B*Ktmp + Q;
344
345 err = norm(Pn - P, 'fro');
346 P = Pn;
347
348 if err < tol
349 break;
350 end
351 end
352
353 K = (R + B'*P*B) \ (B'*P*A);
354 e_cl = eig(A - B*K);
355
356 info.iters = it;
357 info.err = err;
358 info.converged = (err < tol);
359
360 if ~info.converged
361 warning('Riccati_iterativa_NO_convergio_(err= %.3
362 e)', err);
363 end
364 end

```

Listing 1. LQR + Observador (predictor/actual) + Nbar + Simulacion con saturacion y ruido

En este apéndice se presenta el script utilizado para sintonizar la covarianza del ruido de proceso del filtro de Kalman manteniendo fija la covarianza de medición.

Se parametriza la matriz de proceso como  $Q = qI_n$  y se fija  $R = \sigma_v^2$ , donde  $\sigma_v$  se obtuvo a partir de mediciones empíricas del sensor (planta en reposo). El escalar  $q$  se selecciona mediante un criterio de consistencia estadística sobre la innovación normalizada.

La innovación se define como  $\nu_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$  y su varianza teórica estacionaria como  $S = CPC^T + R$ , donde  $P$  es la solución estacionaria de Riccati. Se utiliza:

$$\eta_k = \frac{\nu_k}{\sqrt{S}}$$

y se escoge el valor  $q$  que aproxima  $\text{var}(\eta_k) \approx 1$ .

**A. Script de sintonización (RQ\_tuning\_fixedR.m)**

A continuación se incluye el código completo empleado para el barrido de  $q$  en escala logarítmica, el cálculo de la ganancia estacionaria con `dlqe` y el guardado de los parámetros resultantes en `RQ_tuning_fixedR.mat`.

```

1 % % =====
2 % Tuning de Q = q*I para Kalman (dlqe) con R
% FIJO (sigma_v ~ 2..3 cm)

```

```

3 % usando datos reales (dato1,dato2) desde
4 % iddata.
5 % - Planta: BJ continuo en planta (1).mat
6 % - Datos : datos.mat con dato1,dato2 (iddata) con y en cm, u en du_us
7 % - Ts_target: 0.01 s (decimación exacta si
8 % Ts original es divisor)
9 % Objetivo: var(eta) ~ 1 donde eta = nu /
10 % sqrt(S), S = C P C' + R
11 % (criterio consistente para elegir q cuando
12 % el modelo no es perfecto)
13 % =====
14 %% ===== rutas =====
15 mat_planta = 'planta_(1).mat';
16 mat_datos = 'D:\GitHub\auto\TPF-
    HelicopteroVertical\Matlab\
    PruebasEmpiricas\datos.mat';
17
18 Ts_target = 0.01; % 100 Hz
19
20 %% =====
21 % 1) CARGAR PLANTA Y DISCRETIZAR
22 %% =====
23 S = load(mat_planta);
24
25 if isfield(S,'plantaC')
26 plantaC = S.plantaC;
27 elseif isfield(S,'sysC')
28 plantaC = S.sysC;
29 else
30 error('No_encuentro_"plantaC"_ni_"sysC"_'
31       'dentro_de_%s', mat_planta);
32 end
33
34 % Planta determinista desde BJ: G = B/F
35 G = tf(plantaC.B, plantaC.F);
36 Gd = c2d(ss(G), Ts_target, 'zoh');
37 [A,B,C,D] = ssdata(Gd);
38
39 n = size(A,1);
40 if size(B,2) ~= 1
41 error('SISO_requerido._size(B,2)=%d', size(B
42 ,2));
43 end
44 if size(C,1) ~= 1
45 C = C(1,:);
46 D = D(1,:);
47 end
48 if isempty(D), D = 0; end
49 D = double(D);
50
51 fprintf('Planta_discretizada:_n=%d,_
52       Ts_target=%.6g\n', n, Ts_target);
53
54 DD = load(mat_datos);
55 use_names = {'dato1','dato2'};
56
57 u_all = [];
58 y_all = [];
59
60 for i=1:numel(use_names)
61 nm = use_names{i};
62 if ~isfield(DD,nm)
63 error('No_existe_%s_en_%s', nm, mat_datos);
64 end
65
66 zi = DD.(nm);
67 if ~isa(zi,'iddata')
68 error('%s_no_es_iddata.', nm);
69 end
70
71 Ts_i = zi.Ts;
72 if isempty(Ts_i) || Ts_i <= 0
73 error('%s:_iddata_sin_Ts_válido.', nm);
74 end
75
76 % señales crudas
77 yraw = zi.OutputData(:);
78 uraw = zi.InputData(:);
79
80 % limpiar NaN/Inf (sin infinite por compat)
81 m = ~isnan(yraw) & ~isinf(yraw) & ~isnan(uraw
82 ) & ~isinf(uraw);
83 yraw = yraw(m);
84 uraw = uraw(m);
85
86 % decimación exacta a Ts_target
87 if abs(Ts_i - Ts_target) > 1e-12
88 ratio = Ts_target / Ts_i;
89 if abs(ratio - round(ratio)) > 1e-12
90 error('%s:_Ts_target/Ts_i_no_entero._Ts_i
91       =%.17g,Ts_target=%.17g', nm, Ts_i,
92       Ts_target);
93 end
94 M = round(ratio);
95 fprintf('%s:_decimación_M=%d_(Ts %.17g->_
96       %.17g)\n', nm, M, Ts_i, Ts_target);
97 yraw = yraw(1:M:end);
98 uraw = uraw(1:M:end);
99 else
100 fprintf('%s:_Ts_ya_coincide_(%.17g)\n', nm,
101       Ts_i);
102 end
103
104 % (opcional) detrend: sacá media para no
105 % pelear con offsets
106 yraw = yraw - mean(yraw);
107 uraw = uraw - mean(uraw);
108
109 fprintf('%s:_N=%d\n', nm, numel(yraw));
110
111 % concatenar
112 y_all = [y_all; yraw(:)]; %#ok<AGROW>
113 u_all = [u_all; uraw(:)]; %#ok<AGROW>
114
115
116 % 3) FIJAR R (ruido de medición) y TUNEAR q
117 % en Q=q*I
118 % =====

```

```

118 sigma_v = 2.043227851; % cm (poné 2..3
119     según tu medición)
120 R = sigma_v^2;
121 q_grid = logspace(-12, 2, 120);
122
123 best_q = NaN; best_err = Inf;
124 stats_q = zeros(numel(q_grid),1);
125 stats_var_eta = zeros(numel(q_grid),1);
126 stats_var_nu = zeros(numel(q_grid),1);
127
128 for i=1:numel(q_grid)
129 q = q_grid(i);
130 Q = q*eye(n);
131
132 % Kalman (w entra a estados)
133 Gk = eye(n);
134 [L,P,~] = dlqe(A,Gk,C,Q,R);
135
136 % Sinnov estacionario
137 Sinnov = C*P*C' + R;
138 if Sinnov < 1e-12, Sinnov = 1e-12; end
139
140 xhat = zeros(n,1);
141 nu = zeros(numel(y),1);
142
143 for k=1:numel(y)
144 ypred = C*xhat + D*u(k);
145 nu(k) = y(k) - ypred;
146
147 % delayed estimator estilo firmware
148 xhat = xhat + L*nu(k);
149 xhat = A*xhat + B*u(k);
150 end
151
152 eta = nu / sqrt(Sinnov);
153
154 var_eta = var(eta,1);
155 var_nu = var(nu,1);
156
157 stats_q(i) = q;
158 stats_var_eta(i) = var_eta;
159 stats_var_nu(i) = var_nu;
160
161 err = abs(log(var_eta)); % objetivo
162     var_eta ~ 1
163 if err < best_err
164 best_err = err;
165 best_q = q;
166 best_L = L;
167 best_P = P;
168 best_S = Sinnov;
169 end
170 end
171
172 fprintf('\n====_Resultado_tuning_Q_con_R_fijo_'
173     '===%n');
174 fprintf('sigma_v=% .3f_cm=>_R=% .3f_cm^2\n',
175         sigma_v, R);
176 fprintf('q_best=% .3e\n', best_q);
177 fprintf('Sinnov=% .3f=>_sigma_pred_innov_'
178     '% .3f_cm\n', best_S, sqrt(best_S));
179 fprintf('L_best=%n'); disp(best_L);
180
181 figure('Name','Tuning_Q:_var(eta)');
182 semilogx(stats_q, stats_var_eta,'LineWidth',
183             1.2); grid on; grid minor;
184 xlabel('q'); ylabel('var(\eta)'); title('
185     Objetivo:_var(\eta)_\approx_1');
186
187 figure('Name','Tuning_Q:_sigma(nu)');
188 semilogx(stats_q, sqrt(stats_var_nu),'_
189     LineWidth',1.2); grid on; grid minor;
190 xlabel('q'); ylabel('sigma(\nu)_[cm]'); title(
191     'Innovación_(predicción)_vs_q');
192
193 % =====
194 % 5) Guardar
195 %
196 Q_best = best_q*eye(n);
197 L_best = best_L;
198 save('RQ_tuning_fixedR.mat','sigma_v','R',...
199     'best_q','Q_best','L_best','best_P',...
200     'best_S','A','B','C','D','Ts_target');
201 disp('Guardado:_RQ_tuning_fixedR.mat');

```

### B. Parámetros exportados para el diseño LQG

El script guarda el archivo `RQ_tuning_fixedR.mat` con los parámetros utilizados posteriormente en el diseño del estimador y controlador:

- `sigma_v`: desviación estándar empírica del ruido de medición.
- `R`: covarianza del ruido de medición ( $R = \sigma_v^2$ ).
- `best_q`: escalar óptimo de la parametrización del ruido de proceso.
- `Q_best`: matriz final de ruido de proceso ( $Q = qI_n$ ).
- `L_best`: ganancia estacionaria calculada con `dlqe`.
- `best_P` y `best_S`: covarianza estacionaria y varianza de innovación.
- `A, B, C, D, Ts_target`: modelo discretizado usado en la sintonización.

En este apéndice se incluye el script utilizado para obtener los parámetros numéricos del esquema LQG/LQI empleado en el trabajo: ganancia del filtro de Kalman en régimen permanente  $L$ , ganancias de realimentación de estados  $K_x$  y del integrador  $K_i$ , junto con la verificación de polos del observador  $\lambda(A-LC)$  y la simulación en presencia de ruido de proceso y medición.

El script fue construido con el objetivo de ser *firmware friendly*, es decir, replicar la lógica de estimación y control que luego se implementa en el microcontrolador:

- **Estimador tipo current:** se calcula  $L$  con `kalman(...,'current')`.
- **Ruido de proceso y medición:** se inyecta  $w_k$  en la dinámica del estado y  $v_k$  en la medición.
- **Control con integrador:** se emplea una acción integral  $\xi_k$  para asegurar error estacionario nulo.

### C. Estructura del diseño

*C0a. Planta discretizada:* A partir del modelo continuo identificado (`planta (1).mat`) se discretiza con ZOH a  $T_s = 0.01$  s (100 Hz), obteniendo el sistema discreto:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k + Du_k$$

*C0b. Covarianzas de ruido:* Las covarianzas utilizadas por el estimador se toman del archivo RQ\_tuning\_fixedR.mat (Apéndice A):

$$Q_n = Q_{\text{best}}, \quad R_n = R$$

Adicionalmente, para la simulación se utilizan las desviaciones estándar:  $\sigma_v$  (medición) y  $\sigma_w$  (proceso), e inyección de ruido blanco gaussiano.

*C0c. Filtro de Kalman (current estimator):* Se construye un sistema extendido para el cálculo de Kalman, incorporando explícitamente el canal de ruido de proceso  $w$ :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, \quad y_k = Cx_k + Du_k + Hw_k + v_k$$

En este trabajo se asumió:

$$G = I_n, \quad H = 0$$

y se obtiene la ganancia  $L$  en régimen permanente (y sus polos):

$$L = L_k, \quad \lambda(A - LCA)$$

*C0d. Control LQI con integrador:* Se incorpora un integrador escalar  $\xi_k$  sobre el error:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + (r_k - y_k)$$

y se adopta la ley de control:

$$u_k = -K_x \hat{x}_k + K_i \xi_k$$

Las ganancias se obtienen mediante dlqr aplicado al sistema aumentado, usando pesos heurísticos basados en escalas prácticas: paso deseado  $\Delta y \approx 20$  y esfuerzo máximo  $|u| \lesssim 300$ .

#### D. Script completo (LQG\_servo\_firmware\_friendly.m)

A continuación se incluye el script completo utilizado para calcular  $L$ ,  $K_x$ ,  $K_i$ , reportar polos y simular en presencia de ruido.

```
% % =====
% LQG SERVO "firmware friendly"
% (kalman + lqi + lqgtrack)
% + estimador CURRENT (default en
discreto)
% + ruido de proceso y medición (
sigma_w, sigma_v)
% %
close all; clear; clc

% %
% 1) CARGA + DISCRETIZACIÓN
% %
S = load('planta_(1).mat');

if isfield(S, 'plantaC')
```

```
15 plantaC = S.plantaC;
16 elseif isfield(S, 'sysC')
17 plantaC = S.sysC;
18 else
19 error('No_encuentro_plantaC_ni_
sysC" dentro_de_planta_(1).mat');
20 end

21 Ts = 1/100; % 100
22 Hz

23 sysD = c2d(plantaC, Ts, 'zoh');
24 [A, B, C, D] = ssdata(ss(sysD));
25

26 n = size(A,1);
27 if size(C,1) ~= 1
28 C = C(1,:);
29 D = D(1,:);
30 end
31 if size(B,2) ~= 1
32 error('Este_script_asume_SISO_(1_
entrada).size(B,2)=%d', size(B,2));
33 end

34 fprintf('Ts=%.9f | n=%d\n', Ts, n);
35
36 % % =====
37 % 2) RUIDOS (sigma -> covarianzas)
38 % %
39 S = load("RQ_tuning_fixedR.mat");
40

41 Qn = S.Q_best; % cov(w) : nxn
42 Rn = S.R; % cov(v) : 1x1
43 sigma_v = S.sigma_v;
44 sigma_w = S.best_q;
45 Nn = zeros(n,1); % cov(wv')
46 asumimos 0

47 % % =====
48 % 3) KALMAN: sys debe incluir el
49 % canal de ruido w
50 % %
51 G = eye(n); % w entra a todos
52 los estados
53 H = zeros(1,n); % y NO depende
54 directamente de w (H=0)

55 sysK = ss(A, [B G], C, [D H], Ts);
56 % inputs: [u ; w]

57 % Para tu MATLAB: TYPE va como ÚLTIMO argumento.
58 % 'current' es el default, pero lo
59 dejamos explícito.
60 [kest, Lk, Pk, Mx, Z, My] = kalman(
61 sysK, Qn, Rn, Nn, 'current');

62 fprintf('\nLk_(kalman)_=%'), disp(Lk)
63 ;
64 fprintf('poles(A-LC)_=%'), disp(eig(A-
65 Lk*C).');

66 % %
% 4) LQI: K = [Kx Ki] para u = -Kx*
xhat - Ki*x
% %

m = 1; %
```

```

integrador escalar
1 Ahat = [A B; zeros(m,n+m) ];
2 Bhat = [zeros(n,m); eye(m) ];
3 Chat = [C zeros(1,m) ];

4 % --- interpretación física: "step
5 ~20" y "u no pase ~300" ---
6 y_step = 20;
7 u_max = 300;

8 % knobs
9 wy = 20; % subí
10 => seguís más (más agresivo)
11 wu = 50; % subí
12 => penalizás más u (más tímido)
13 wv = 0.000000000000001; % subí
14 => penalizás integrador

15 % OJO: acá tu "escala física" es
16 discutible. Esto es heurístico.
17 qy = wy*(1/(y_step));
18 ru = wu*(1/(u_max));
19 qv = wv*(1/(y_step));

20 Qa = blkdiag(qy*(C'*C) + 1e-8*eye(n),
21 qv);
22 R = ru;

23 [Khat,Pa,ecl] = dlqr(Ahat, Bhat, Qa,
24 R);

25 Aux = [A-eye(size(A)) B;
26 C*A C*B];

27 K2K1 = (Khat + [zeros(1,n) eye(m)]) /
28 Aux;

29 Kx = K2K1(1,1:n);
30 Ki = K2K1(1,n+1);

31 fprintf('\nKx_(lqi)_='); disp(Kx);
32 fprintf('Ki_(lqi)_='); disp(Ki);

33 %% =====
34 % 6) SIMULACIÓN (tu estilo) con
35 ruido de proceso+medición
36 %% =====
37 N = 1200;
38 t = 0:Ts:(N-1)*Ts;

39 r = ones(1,N)*25;
40 r(1:30) = 0;

41 umin = -u_max; umax = u_max;

42 X = zeros(n,N); % estados reales
43 Xh = zeros(n,N); % estados
44 estimados (los que usás en tu control)
45 V = zeros(1,N); % integrador
46 U = zeros(1,N); % control

47 Y_true = zeros(1,N);
48 Y_meas = zeros(1,N);

49 for kidx = 1:N-1
50 rk = r(kidx);
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

122 % medición y[k]
123 y_true_k = C*X(:,kidx);
124 v_k = sigma_v*randn;
125 y_meas_k = y_true_k + v_k;

126 Y_true(kidx) = y_true_k;
127 Y_meas(kidx) = y_meas_k;

128
129
130
131 % integrador xi[k+1] = xi[k] + (r-y)
132 V(kidx+1) = V(kidx) + (rk - y_meas_k);

133 ;
134
135 % control: u = -Kx*xhat - Ki*xi
136 u_unsat = -Kx*X(:,kidx) + Ki*V(kidx+1);
137 u_k = min(max(u_unsat, umin), umax);
138 U(kidx) = u_k;

139 % planta con ruido de proceso: x[k+1] = A x + B u + w
140 w_k = sigma_w*randn(n,1);
141 X(:,kidx+1) = A*X(:,kidx) + B*u_k +
142 w_k;

143 % estimador (usa Lk)
144 Xh(:,kidx+1) = A*Xh(:,kidx) + B*u_k +
145 ...
146 Lk*(y_meas_k - (C*Xh(:,kidx) + D*u_k));
147
148 end

149 % último sample para plots
150 Y_true(N) = C*X(:,N);
151 Y_meas(N) = Y_true(N) + sigma_v*randn;
152 ;
153 U(N) = U(N-1);

154 %% =====
155 % 7) PLOTS
156 %% =====
157 figure('Name','y(t)--LQG+integrador+ruido');
158 plot(t, Y_true, 'LineWidth',1.2);
159 hold on;
160 plot(t, Y_meas, '.', 'LineWidth',1.0);
161 plot(t, r, 'k--', 'LineWidth',1.1);
162 grid on; grid minor;
163 xlabel('t[s]'); ylabel('y');
164 legend('y_true','y_meas','r','Location','best');

165 figure('Name','u(t)--saturado');
166 plot(t, U, 'LineWidth',1.4);
167 grid on; grid minor;
168 xlabel('t[s]'); ylabel('u');
169 ylim([umin umax]);

170 figure('Name','xi(t)--integrador');
171 plot(t, V, 'LineWidth',1.4);
172 grid on; grid minor;
173 xlabel('t[s]'); ylabel('xi');

174 Aaug = [A,B;...
175 Kx-Kx*A-Ki*C*A,1-Kx*B-Ki*C*B];

```

```

177 Baug = [0;0;0;Ki];
178 Caug = [C,0];
179 D = 0;
180 sysDaug = ss(Aaug,Baug,Caug,D,Ts);
181
182 figure; pzmap(sysDaug); grid on;
zgrid;

```

Durante el desarrollo del trabajo práctico, la estructura física de la planta atravesó distintas etapas de diseño, las cuales permitieron identificar limitaciones mecánicas y realizar mejoras progresivas hasta alcanzar la configuración final utilizada en las prácticas experimentales. En este apéndice se describe la primera etapa de diseño de la estructura y se destacan las principales diferencias respecto de la versión final.

#### E. Primera etapa de diseño

La primera versión de la estructura fue concebida con una altura total aproximada de 80 cm, utilizando la misma base y el mismo techo de madera que se mantienen en el diseño final. Debido a las dimensiones de estos elementos, la altura útil de movimiento del cuerpo móvil en esta etapa era de aproximadamente 72 cm.

En esta configuración inicial, el diseño mecánico del cuerpo móvil era diferente al actual, presentando dimensiones ligeramente mayores. El sistema no contaba con elementos de seguridad adicionales, tales como topes mecánicos, amortiguación ante caídas ni cuerda de seguridad, dado que el recorrido vertical era considerablemente menor y el riesgo asociado a caídas desde grandes alturas resultaba limitado.

El guiado del cuerpo móvil se realizaba mediante vigas metálicas rectas y rígidas, las cuales no presentaban deformaciones apreciables. Debido a esta rigidez estructural, no fue necesario incorporar articulaciones pasivas tipo “muñeca” en las abrazaderas, ni estructuras auxiliares de madera para limitar deformaciones. En esta etapa, el contacto entre el cuerpo móvil y los rieles generaba fricción apreciable, la cual se manifestaba de forma consistente durante el movimiento vertical.

Cabe destacar que este comportamiento friccional, observable en la primera versión de la estructura, no se presenta de la misma manera en el diseño final. La incorporación de vigas metálicas de mayor longitud, junto con las deformaciones inherentes a las mismas y la inclusión de articulaciones pasivas en las abrazaderas, redujo significativamente la fricción directa entre el cuerpo móvil y los rieles, modificando así las características mecánicas del sistema.

En las figuras siguientes se presentan imágenes correspondientes a las primeras versiones de las piezas impresas en 3D utilizadas en esta etapa inicial del diseño, las cuales difieren de las empleadas en la configuración final de la planta.

En la primera etapa de diseño, el soporte superior del cuerpo móvil presentaba una altura aproximada de 3 cm y un diámetro de 4 cm. Las secciones sobresalientes destinadas al acople de los brazos contaban con una altura de aproximadamente 1,5 cm. Dicho soporte incluía orificios dimensionados específicamente para el montaje del motor brushless, con un diámetro de 3 mm, acorde al patrón de fijación del mismo.

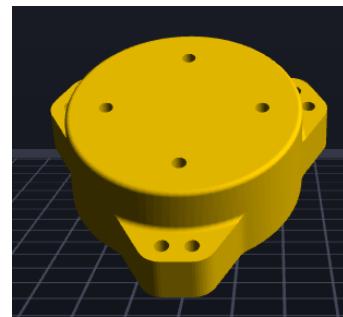


Figura 33. Primer diseño del soporte superior del motor.

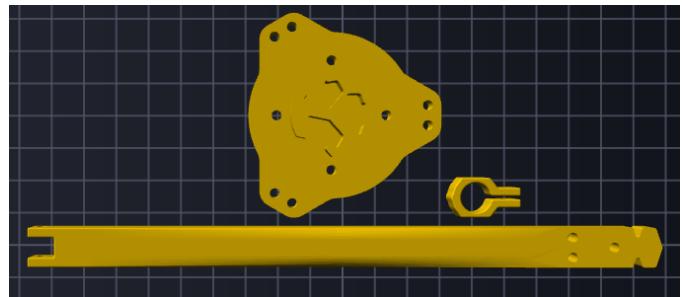


Figura 34. Primeros diseños del soporte inferior y de los brazos estructurales.

El soporte inferior del cuerpo móvil correspondía a una geometría espejo del soporte superior. En este componente se realizaba el encastre de los brazos estructurales, los cuales, en esta etapa inicial, presentaban dimensiones menores en comparación con el diseño final. Cada brazo tenía dimensiones aproximadas de 1 cm × 1 cm × 20 cm.

El sistema de agarre de los brazos difería del implementado en la versión final de la planta. Inicialmente, el agarre no contaba con movilidad angular, aunque permitía un ajuste manual respecto a la posición de la viga metálica, lo que condicionaba el guiado del cuerpo móvil y su interacción con los rieles.

#### F. Segunda etapa de diseño

En la segunda etapa de diseño, el componente que presentó mayores modificaciones fue el brazo estructural. A partir de la experiencia obtenida en la etapa inicial, se introdujeron variaciones geométricas en el diseño del brazo, incorporando curvaturas con el objetivo de mejorar el encastre y la interacción con la estructura de guiado.

En esta versión, el brazo y el sistema de agarre fueron integrados en una única pieza impresa en 3D, eliminando la separación entre ambos componentes. Dado que en esta etapa las vigas metálicas utilizadas como rieles presentaban una geometría recta y una rigidez suficiente, no fue necesaria la incorporación de articulaciones pasivas tipo “muñeca”. En consecuencia, el guiado del cuerpo móvil se realizaba mediante un agarre rígido, sin movilidad angular.

Cabe destacar que, durante esta etapa, el diseño del cuerpo móvil se mantuvo sin modificaciones significativas respecto a la versión anterior. Las mejoras se concentraron exclusivamente

en el diseño de los brazos y del sistema de agarre, manteniendo constante la geometría general del conjunto móvil.



Figura 35. Segundo diseño de brazo.

#### G. Tercera etapa de diseño

En la tercera etapa de diseño se introdujo una modificación significativa en la estructura general de la planta, extendiendo su altura máxima hasta aproximadamente 160 cm. Esta ampliación respondió a la necesidad de disponer de un mayor recorrido vertical para la realización de las prácticas de control, lo cual implicó nuevas exigencias mecánicas sobre el conjunto estructural y el cuerpo móvil.

Como consecuencia del aumento de altura de la estructura, el diseño de los brazos del cuerpo móvil volvió a ser modificado. En esta etapa, los brazos fueron rediseñados con mayor grosor y mayor altura, con el objetivo de incrementar su rigidez y capacidad de carga. Asimismo, se incorporaron aberturas longitudinales en los brazos, destinadas a permitir la inserción de elementos metálicos, con el fin de reforzar la estructura y mejorar su resistencia mecánica frente a esfuerzos y vibraciones.

El cuerpo móvil mantuvo su configuración general respecto a las etapas anteriores; sin embargo, el rediseño de los brazos resultó fundamental para adaptar el conjunto a las nuevas condiciones estructurales impuestas por la mayor altura de la planta.

#### H. Cuarta etapa de diseño: configuración final

La cuarta etapa de diseño corresponde a la configuración final de la estructura y del cuerpo móvil utilizada en las prácticas experimentales del trabajo. En esta etapa se introdujeron modificaciones orientadas principalmente a mejorar el guiado mecánico del cuerpo móvil y a reducir la masa total del conjunto.

Debido a que las vigas metálicas empleadas como rieles presentan deformaciones asociadas a su longitud, se incorporaron articulaciones pasivas tipo “muñeca” en el sistema de guiado. Estas articulaciones permiten un movimiento angular relativo entre el cuerpo móvil y los rieles, mejorando el desplazamiento vertical y evitando atascamientos o esfuerzos indeseados durante el recorrido.

Con el objetivo de reducir la masa del cuerpo móvil, se redimensionaron los soportes principales. El soporte superior, que en versiones anteriores presentaba una altura de 3 cm, fue reducido a aproximadamente 1,5 cm, mientras que el soporte inferior pasó de 2 cm a 0,5 cm. A pesar de esta reducción dimensional, se conservó el sistema de encastre tanto en el soporte superior como en el inferior, asegurando la rigidez estructural del conjunto.



Figura 36. Tercer diseño de brazos.

Adicionalmente, se incorporó un soporte específico para la batería, integrado al cuerpo móvil. En dicho soporte se colocaron almohadillas internas con el fin de proteger la batería frente a vibraciones e impactos durante el funcionamiento del sistema.

Estas modificaciones permitieron obtener un diseño final más liviano, adaptable a las deformaciones estructurales de los rieles y adecuado para la implementación de las distintas estrategias de control desarrolladas en el presente trabajo.

Durante el desarrollo experimental del trabajo se presentaron fallas en los controladores electrónicos de velocidad (ESC) utilizados en las primeras etapas de prueba del sistema. En este apéndice se describen los incidentes observados, junto con el análisis de las posibles causas y las medidas adoptadas posteriormente.

#### I. Primer incidente: ESC de 30A con alimentación externa

En una primera instancia, se utilizó un ESC de 30 A alimentado mediante una batería para automóviles, con el objetivo de verificar el funcionamiento básico del sistema de propulsión. La conexión entre la fuente de alimentación y el ESC se realizó utilizando un cable unifilar de cobre de considerable longitud.

Durante las pruebas iniciales, el sistema logró generar empuje y el cuerpo móvil llegó a elevarse. Sin embargo, tras un período de funcionamiento, el ESC comenzó a emitir una secuencia de señales acústicas consistente en cuatro pitidos cortos seguidos de un pitido largo. En ese momento no se contaba con una interpretación clara del significado de dicha señalización.



Figura 37. Tercer diseño de brazos.

Posteriormente, mediante la consulta de documentación y experiencias previas, se determinó que dicha secuencia de pitidos está asociada a condiciones de protección del ESC, tales como sobrecorriente o sobretensión. Esta hipótesis se vio reforzada por el hecho de que los cables unifilares utilizados para la alimentación se calentaron excesivamente y llegaron a derretirse, indicando una circulación de corriente elevada y pérdidas resistivas significativas.

#### J. Segundo incidente: reinicios y falla del ESC de 30 A

En una segunda etapa de pruebas con el mismo ESC de 30 A, se reemplazaron los cables de alimentación por conductores adecuados para altas corrientes, conectando el ESC directamente a la batería utilizada en la planta. En esta configuración, el sistema no lograba elevarse de forma sostenida y el ESC emitía una secuencia de sonidos correspondiente a un reinicio del controlador.

Con el fin de descartar un problema en la señal de control, se analizó la señal PWM generada por el PSoC mediante un osciloscopio, verificándose que la misma presentaba una forma adecuada y estable, sin perturbaciones significativas. En consecuencia, se descartó que la falla estuviera asociada a errores en la generación de la señal de control.

Ante la hipótesis de una posible caída de tensión en la alimentación del ESC durante los transitorios de corriente, se incorporaron capacitores de desacople en la línea de alimentación. Tras esta modificación, el sistema logró generar empuje y elevarse durante breves instantes. No obstante, luego de un corto período de funcionamiento, se produjo la falla

definitiva del ESC, observándose la quema de un MOSFET correspondiente a una de las fases del motor.

#### K. Análisis y consideraciones

A partir de los incidentes descritos, se identificaron como causas probables la combinación de sobrecorriente, exigencias térmicas elevadas y condiciones de alimentación no ideales durante las primeras pruebas. La utilización de una fuente de alimentación inadecuada, conductores con alta resistencia y la ausencia inicial de medidas de protección contribuyeron a someter al ESC a esfuerzos superiores a sus límites operativos.

Estos eventos pusieron de manifiesto la importancia de considerar cuidadosamente los aspectos de potencia, dissipación térmica y protección eléctrica en sistemas de propulsión basados en motores brushless, incluso en etapas preliminares de prueba.

Las lecciones aprendidas a partir de estas fallas motivaron la adopción de controladores de mayor capacidad de corriente, mejoras en el cableado de alimentación y la implementación de estrategias de operación más conservadoras, las cuales permitieron continuar con el desarrollo experimental del trabajo de manera segura y confiable.

#### L. Tercer incidente: falla del ESC de 30 A durante operación con batería LiPo

En un tercer incidente, se utilizó un ESC de 30 A alimentado mediante una batería LiPo para drones. Durante esta prueba, se incrementó la señal PWM hasta aproximadamente  $1500 \mu s$ , logrando que el sistema generara empuje suficiente para elevar el cuerpo móvil hasta la parte superior de la estructura.

Al intentar detener el movimiento, se adoptó un procedimiento no óptimo, consistente en bloquear mecánicamente la hélice con el fin de evitar una colisión con el techo de la estructura. Esta acción provocó el trabado de la hélice durante el funcionamiento del motor, lo cual generó un incremento abrupto de la corriente demandada. Como consecuencia, el ESC sufrió una falla catastrófica, produciéndose la quema de múltiples componentes internos y la pérdida total del controlador.

Este incidente permitió identificar el riesgo asociado al bloqueo mecánico del rotor en sistemas de propulsión brushless, dado que dicha condición conduce a corrientes elevadas que superan rápidamente la capacidad de los dispositivos de conmutación del ESC.

#### M. Cuarto incidente: falla del ESC de 30 A por sobrecorriente

En un cuarto incidente, se realizaron pruebas controladas con un nuevo ESC de 30 A, con el objetivo de determinar el valor máximo de PWM que el sistema podía soportar de manera segura. Durante esta prueba, el valor de PWM se incrementó progresivamente hasta alcanzar aproximadamente  $1600 \mu s$ .

En estas condiciones, el ESC volvió a presentar una falla similar a la observada en el segundo incidente, registrándose la quema de un MOSFET correspondiente a una de las fases del motor. Este comportamiento reforzó la hipótesis de que el controlador se encontraba operando cerca de sus límites de corriente, incluso sin que se produjera un bloqueo mecánico del rotor.

#### *N. Medidas adoptadas*

La repetición de fallas en controladores de 30 A, tanto bajo condiciones transitorias como en operación sostenida, llevó a concluir que dicho margen de corriente resultaba insuficiente para el motor utilizado y las exigencias mecánicas de la planta. Asimismo, se consideró la posible influencia de algoritmos internos del ESC y de su calidad de construcción, los cuales podrían limitar su capacidad de manejo de sobrecorrientes.

En función de estas observaciones, se decidió sobredimensionar el sistema de actuación mediante la adquisición de un ESC de 40 A. Esta decisión permitió operar el motor con un mayor margen de seguridad, evitando la necesidad de reducir aún más la masa del cuerpo móvil y mejorando la confiabilidad del sistema durante las prácticas experimentales.

#### REFERENCIAS

- [1] Dongguan E-S Motor Co., Ltd., “E-s motor official website,” <https://cdn.robotshop.com/rbm/a00a7635-653b-4220-aac9-b0c23c5c5e2c/5/520795f9-301f-4e66-a0a3-019811d1f78b/222c434ca2212-brushless-motor.pdf>, 2026, accessed: Feb. 2026.
- [2] NEX Robotics Pvt, Ltd, “40a bldc esc,” <https://www.scribd.com/document/280924512/ESC-Datasheet>, 2015, accessed: Feb. 2026.
- [3] AMAZON, “Lipo 3s ovonic air,” <https://www.amazon.com/-/es/OVONIC-3s-Conector-Helic%C3%BCB3ptero-Quadcopter/dp/B07MS8QF3K>, 1996-2026, accessed: Feb. 2026.
- [4] Benewake Co., Ltd., *TFmini Plus Single-Point LiDAR Range Sensor Datasheet*, 2019, rev. A02. [Online]. Available: [https://cdn.sparkfun.com/assets/2/b/0/3/8/TFmini\\_Plus-01-A02-Datasheet\\_EN.pdf](https://cdn.sparkfun.com/assets/2/b/0/3/8/TFmini_Plus-01-A02-Datasheet_EN.pdf)
- [5] Lic. Piero Codas Morselli, *Evaluación de Algoritmos de Control Digital Industrial*, 2005. [Online]. Available: <https://drive.google.com/file/d/1TIa3A4172OXRvjMa7e-VbKXvCpIqimyW/view>