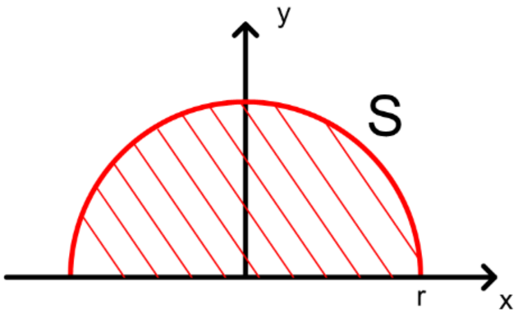
Jacobian determinant

使用在座標轉換計算面積時使用

e.g.



$x^2 + y^2 = r^2$

$\Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$

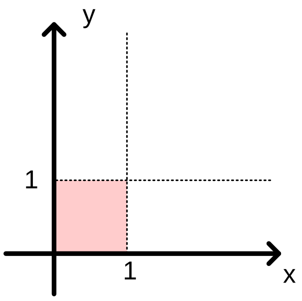
$S(x) = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

若需解這個積分，需要用特別的方法，等會再解，因為我們有更快速簡單的解法，就是使用 Jacobian

前情提要：

1. 在任意座標系統中，為方便說明，以二維座標為例，兩向量 $\overline{x_1} = (a,b), \overline{x_2} = (c,d)$ 展開的平行四邊形面積為 $\det\left(\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$。以此類推，若為 n 維座標，則 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ 所展開的面積為 $\det\left(\begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \ldots & \overline{x_n} \end{bmatrix}^T\right)$
若要看詳細證明，請見 https://ccjou.wordpress.com/2010/12/01/行列式的運算公式與性質/

2. 若做一線性轉換，原本的基底 $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right\}$ 經由線性轉換 T 換為一新基底 $\left\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\right\}$，其中 $\overline{a_i} = A\overline{e_i}$, $for\ 1 \le i \le n$，在這裡我們一樣以二維基底為例，$B = [\overline{e_1} \ \ \overline{e_2}]$ 我們原本基底的單位區塊表示為 $S = \{x\overline{e_1} + y\overline{e_2} \mid 0 \le x, y \le 1\}$



轉換前的面積為 detB

而線性轉換 T 轉換後的區塊為 $T(x\overline{e_1}+y\overline{e_2})=A(x\overline{e_1}+y\overline{e_2})=xA\overline{e_1}+yA\overline{e_2}=x\overline{a_1}+y\overline{a_2}$ ，轉換後的面積為 $\det\left(\begin{bmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2}\end{bmatrix}^T\right)=\det\left(\begin{bmatrix}A\overline{e_1} & A\overline{e_2}\end{bmatrix}^T\right)=\det((AB)^T)=\det A\cdot\det B$

故若我們做線性轉換，原來的面積經轉換後會乘上線性轉換矩陣表示式 A 的行列式

參考網站：https://ccjou.wordpress.com/2011/01/03/線性變換把面積伸縮了/

Jacobian 矩陣

為求簡單，仍以二維為例，若原本基底$\{u,v\}$想將其轉換為$\{x,y\}$ ，其轉換矩陣為 Jacobian 矩陣為 $J(u,v)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$，可以想成是上面講的”線性轉換矩陣表達式 A”，只是這裡並不一定是線性的關係而已。

若原本基底的極小量面積為兩向量 du,dv 所展開的面積，則和前面線性轉換所造成的面積轉換需要再多乘上其矩陣表達式之行列式是一樣概念，需要再多乘上$\det(J(u,v))$ ，我再用一樣方式證明一遍

$$J(u,v)\begin{bmatrix}du\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}du\\ \frac{\partial y}{\partial u}du\end{bmatrix}$$

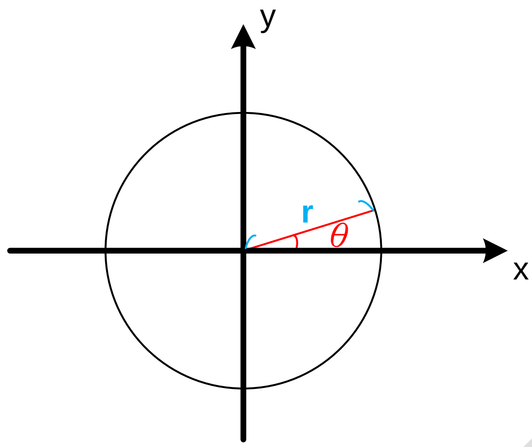
$$J(u,v)\begin{bmatrix}0\\dv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\dv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}dv\\ \frac{\partial y}{\partial v}dv\end{bmatrix}$$

兩向量$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}du\\ \frac{\partial y}{\partial u}du\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}dv\\ \frac{\partial y}{\partial v}dv\end{bmatrix}$所展開之面積為

$$dA = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right)dudv = \det(J(u,v))dudv$$

更高維空間亦成立！

e.g.
我們要將直角座標(x,y)轉為極座標(r,θ)



$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$J(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J(r,\theta)) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\therefore S(x) = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi}\int_0^{r} r dr d\theta = \int_0^{\pi}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^r d\theta = \frac{\pi r^2}{2}$$

輕鬆愉快！

//以下是純用積分技巧解，有興趣再看

$$S(x) = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx,\ let\ x = r\sin\theta,\theta = \sin^{-1}\frac{x}{r}, dx = r\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow S(x) = S(x) = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_{\sin^{-1}(-1)}^{\sin^{-1}1}\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta}r\cos\theta d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} r^2\cos^2\theta d\theta$$

$$= r^2\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = r^2\left(\frac{2\pi - \pi}{2} + (1-1)\right) = \frac{\pi r^2}{2}$$

結果一樣

Gaussian integral

求解下列積分的 close form: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

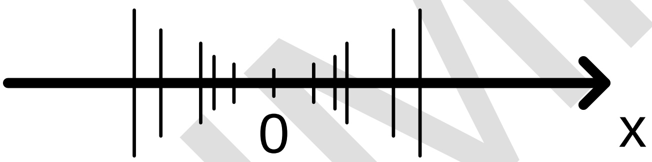
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y)^2} dx} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta} = \sqrt{2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} d\frac{r^2}{2}} = \sqrt{\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr^2} = \sqrt{\pi (-e^{-r^2})\Big|_0^{\infty}} = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

求解 Gaussian distribution 的 close form

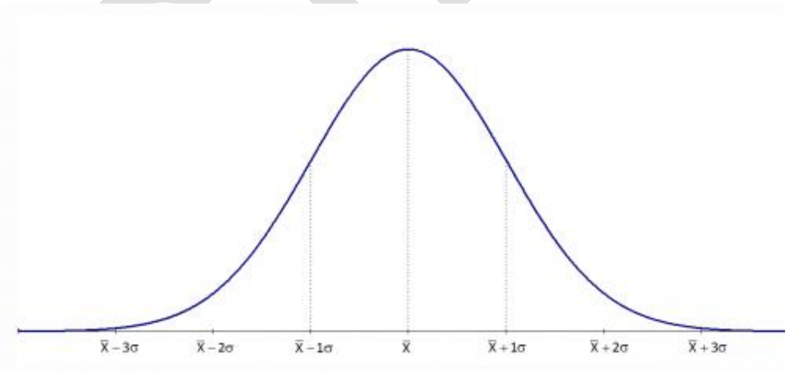
超技巧！
Step1: 我們希望有一種分佈，離 mean 等距的地方機率相同，無論維度如何都成立
Step2: 再代入可決定唯一 gauss distribution 的參數(μ,σ)

Step1:
對稱 distribution 的特性，朝著 mean 往外走，固定距離的 P(x)都會相同
圖示：

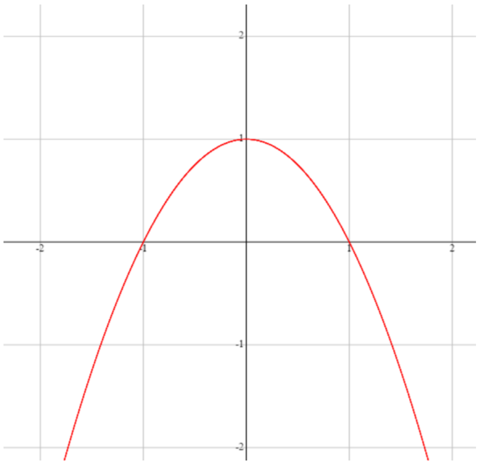
一維(相同長度代表一樣的 P(x))



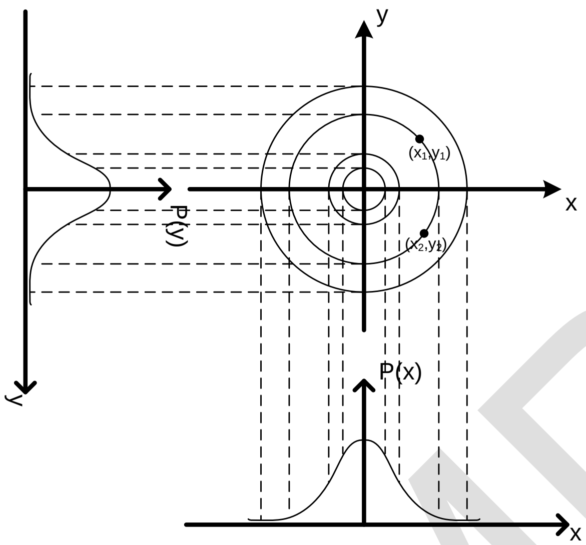
若把 P(x)也當成一個維度，很多種函數都能夠成立，Gauss distribution 就是其中一種



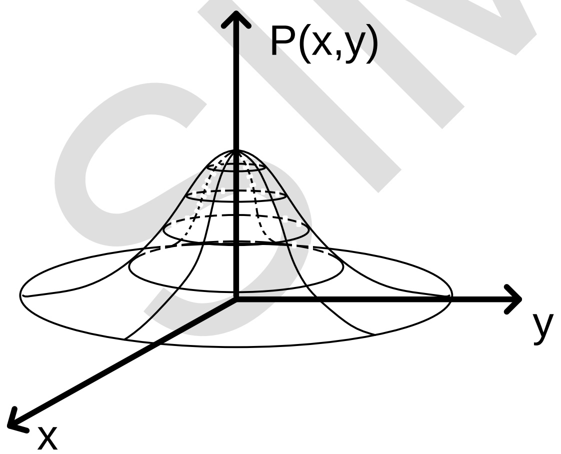
其實，像是 $y=-x^2+1$ 這個函數也是成立的



二維(相同圖代表一樣的 P(x))



將二維的圖再加上一個維度 P(x,y)，會變成像下圖



我們希望得到 Gaussian distribution，我們使用的性質一樣是”離 mean 等距的點，P(x,y)會相同”，故會使下列式子成立

$$P(x,y)=P(x_1)P(y_1)=P(x_2)P(y_2)=P(x)P(y)=P(r)$$

此時我們還不能保證擁有此性質的函數唯一，只能說現在找到的函數(可能有多個)符合”離 mean 等距的 P(x,y)皆相等”這個性質

那麼我們試著來推論符合這樣性質函數的 close form，接著再代入已知道的參數(μ,σ)，我們試著證明這樣的函數唯一，我們就將這樣的函數稱為 Gaussian distribution

因為 P(r)只和極座標中的 r 有關，和θ完全無關，故我們可對等式兩端同時對θ做微分，得

$$\frac{d(P(x)P(y))}{d\theta}=\frac{dP(r)}{d\theta}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dP(x)}{d\theta}P(y)+\frac{dP(y)}{d\theta}P(x)=\frac{dP(x)}{dx}\frac{dx}{d\theta}P(y)+\frac{dP(y)}{dy}\frac{dy}{d\theta}P(x)=0$$

$$\because x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dP(x)}{dx}\frac{dx}{d\theta}P(y)+\frac{dP(y)}{dy}\frac{dy}{d\theta}P(x)=-\frac{dP(x)}{dx}r\sin\theta P(y)+\frac{dP(y)}{dy}r\cos\theta P(x)=-\frac{dP(x)}{dx}yP(y)+\frac{dP(y)}{dy}xP(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dP(y)}{dy}xP(x)=\frac{dP(x)}{dx}yP(y)\Rightarrow \frac{dP(x)}{dx}\frac{1}{xP(x)}=\frac{dP(y)}{dy}\frac{1}{yP(y)}$$

而$\frac{dP(x)}{dx}\frac{1}{xP(x)}$和$\frac{dP(y)}{dy}\frac{1}{yP(y)}$為一 x 函數和 y 函數，因為彼此為獨立的變量，故要恆等只有皆等於常數一種選擇，故

$$\frac{dP(x)}{dx}\frac{1}{xP(x)}=\frac{dP(y)}{dy}\frac{1}{yP(y)}=c$$

解$\frac{dP(x)}{dx}\frac{1}{xP(x)}=c$

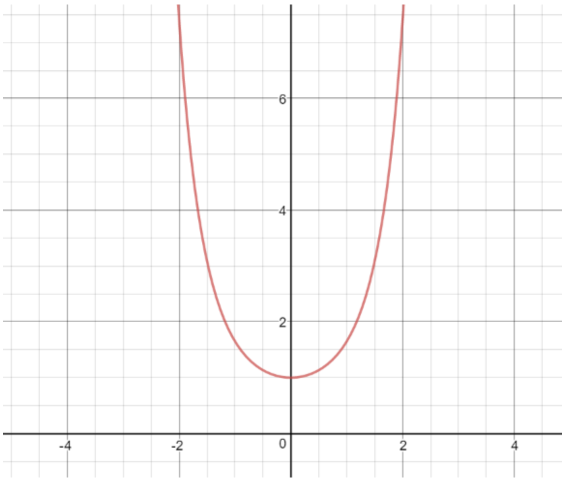
$$\frac{dP(x)}{P(x)}=cxdx\Rightarrow \ln(P(x))=c\frac{x^2}{2}+d$$

$$\Rightarrow P(x)=e^{\frac{cx^2}{2}+d}=ae^{\frac{cx^2}{2}},\ a\ is\ const$$

a 是任意實數，所以此時我們還是有無限多組候選函數符合要求，我們先使用”所有的 P(x)相加為 1”這個性質

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(x)dx=1=\int_{-\infty}^{\infty}ae^{\frac{cx^2}{2}}dx$$

而因為 x^2 恆為正，若 c>0，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{cx^2}{2}}dx=\infty$ ，畫圖出來就一目瞭然了



$e^{\frac{cx^2}{2}}$ 函數，故積分必為無窮大

c=0 時，$e^{\frac{0x^2}{2}}=1$，$\int_{-\infty}^{\infty} 1dx=\infty$

故 c<0

$$c=\frac{-k}{2}, k>0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} ae^{\frac{cx^2}{2}}dx=a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx$$

因為跟前面的 Gaussian integral 形式有些不一樣，再推一次

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ky^2}dy}=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(x^2+y^2)}dxdy}=\sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-kr^2}rdrd\theta}=\sqrt{2\pi\frac{-1}{2k}e^{-kr^2}\Big|_0^{\infty}}=\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

故 $a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx=a\sqrt{\frac{\pi}{k}}=1\Rightarrow a=\sqrt{\frac{k}{\pi}}$

$$\Rightarrow P(x)=\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{-kx^2}$$

到這步我們推得”離 mean 等距時會有一樣的 P(x,y)”，這種函數的 general close form

下堂課會代入參數(μ,σ)，求解唯一的 P(x)函數