



## 第三章：图像预处理

---

中国科学技术大学  
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 ([lihq@ustc.edu.cn](mailto:lihq@ustc.edu.cn))  
周文罡 ([zhwg@ustc.edu.cn](mailto:zhwg@ustc.edu.cn))

助教：王 宁 ([wn6149@mail.ustc.edu.cn](mailto:wn6149@mail.ustc.edu.cn))  
邓家俊 ([dengjj@mail.ustc.edu.cn](mailto:dengjj@mail.ustc.edu.cn))  
陈 铮 ([czczcz@mail.ustc.edu.cn](mailto:czczcz@mail.ustc.edu.cn))  
胡鹤臻 ([alexhu@mail.ustc.edu.cn](mailto:alexhu@mail.ustc.edu.cn))



# 图像增强

---

- ☐ 什么是图像增强？
- ☐ 灰度变换与空域滤波
- ☐ 图像频域滤波
- ☐ 色彩增强
- ☐ 图像增强的应用



# 图像增强

---

- 什么是图像增强?
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波
- 色彩增强
- 图像增强的应用

# 图像增强

- 图像增强是一种重要的图像处理方法，它的目标是提高图像的质量，使之适合于人眼或机器的观察判断，以及进一步的分析和处理。





# 图像增强

- 什么是图像增强？
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波
- 色彩增强
- 图像增强的应用



# 灰度变换与空域滤波

## □ 空间域灰度变换

- 基本灰度变换
- 直方图处理

## □ 空域滤波

- 空间域滤波基础
- 空域平滑
- 空域锐化

# 空间域灰度变换

- 空间域：包含图像像素的简单平面
- 空间域灰度变换

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

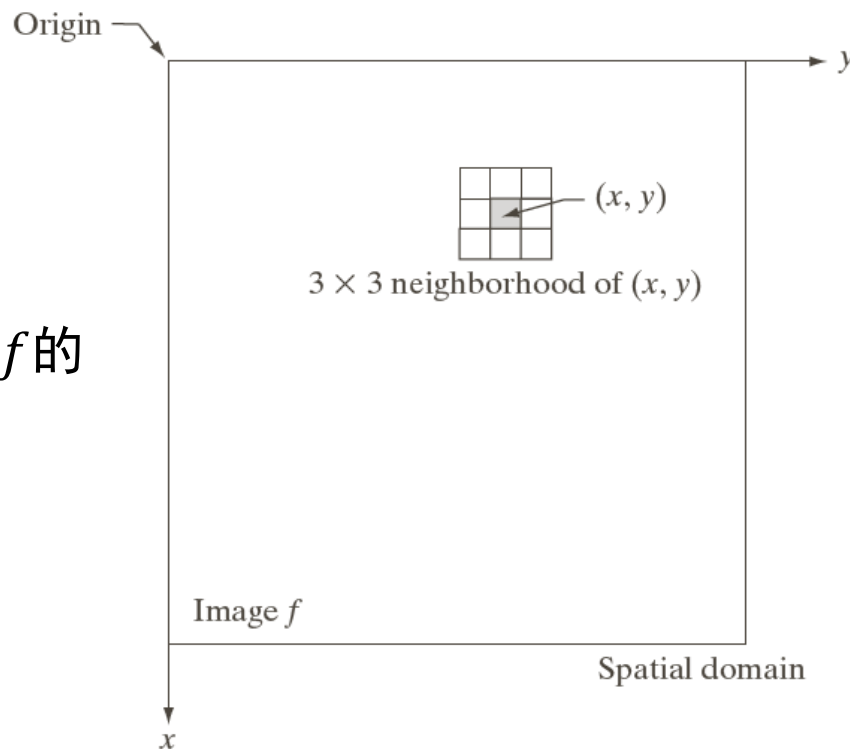
$f(x, y)$ : 输入图像

$g(x, y)$ : 输出图像

$T$ : 在点 $(x, y)$ 的邻域上定义的 关于 $f$ 的一种算子

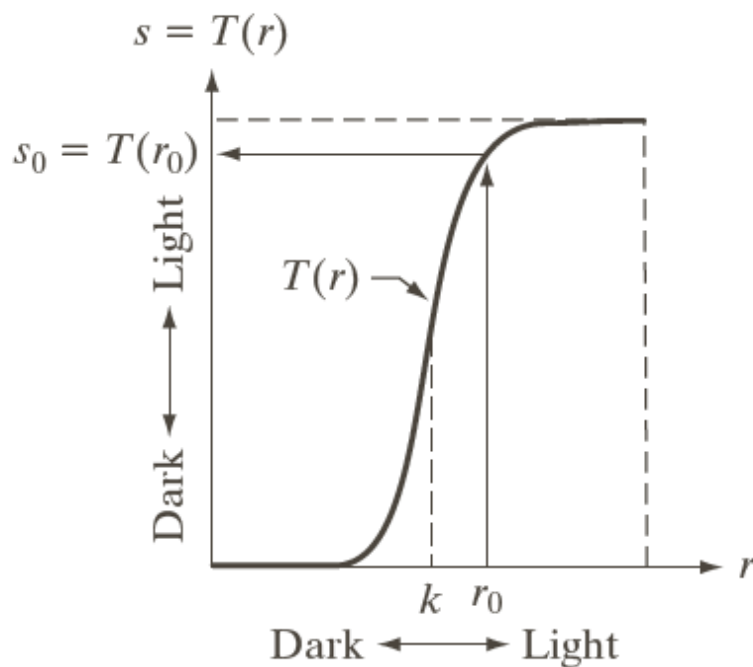
- 空间邻域

- 决定了灰度操作的范围
- $1 \times 1, 3 \times 3$

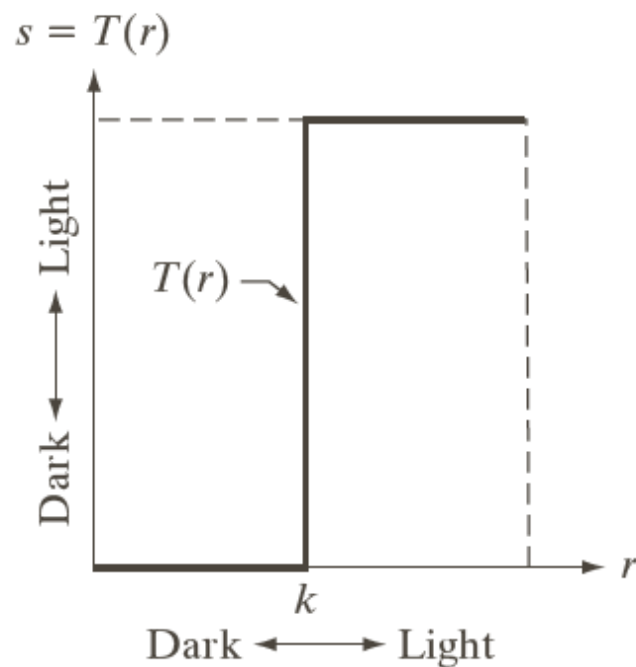


# 灰度变换

## □ 邻域为 $1 \times 1$ 时的灰度变换



对比度拉伸函数



阈值处理函数





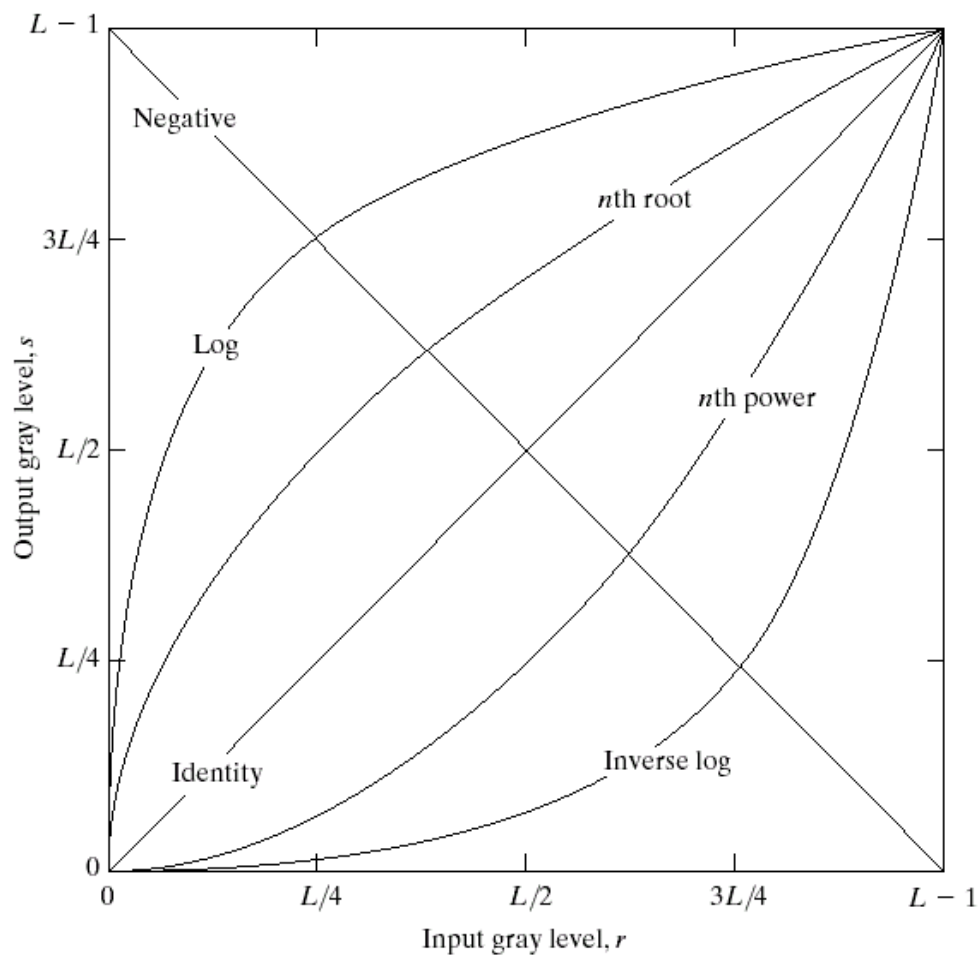
# 灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
  - 基本灰度变换
  - 直方图处理
- 空域滤波
  - 空间域滤波基础
  - 空域平滑
  - 空域锐化

# 常见灰度变换

□ 灰度变换  $s = T(r)$

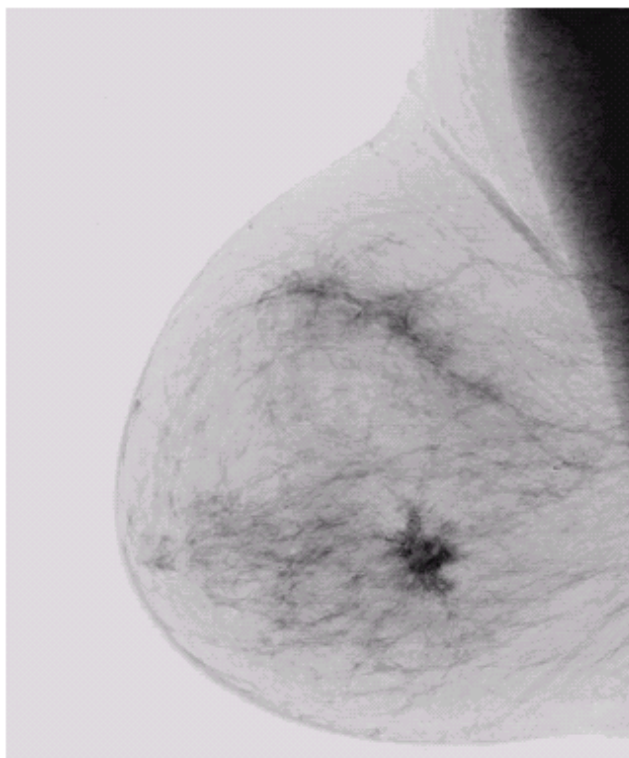
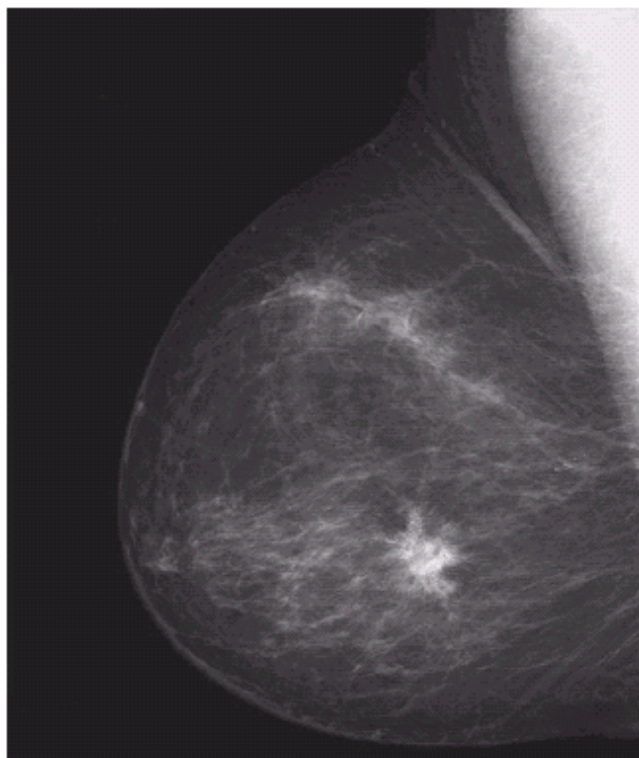
■  $r$ 为数字量且取值有限，该映射可通过查找表实现



# 图像求反

□ 灰度变换函数:  $s = L - 1 - r$

■ 适用于增强嵌入图像暗色区域中的白色或灰色细节



a b

**FIGURE 3.4**

(a) Original digital mammogram.  
(b) Negative image obtained using the negative transformation in Eq. (3.2-1).  
(Courtesy of G.E. Medical Systems.)

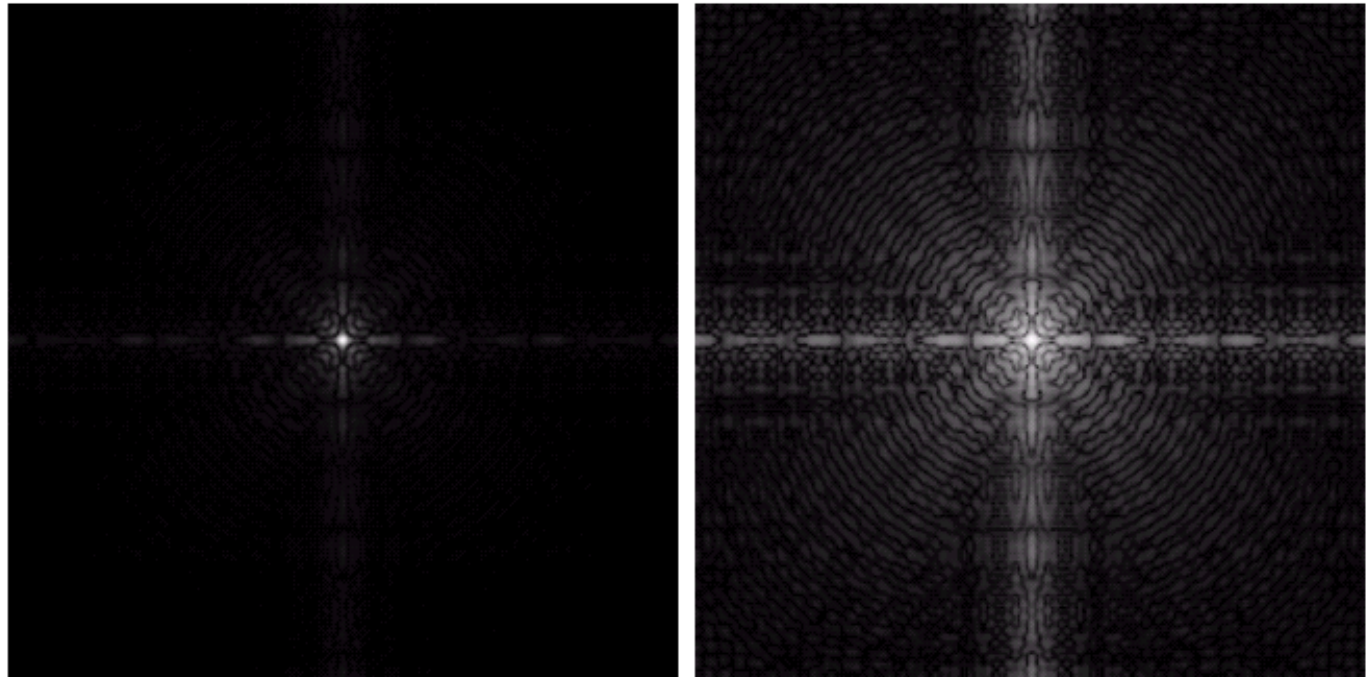
# 对数变换

□ 灰度变换函数:  $s = c \cdot \log(1 + r)$

a b

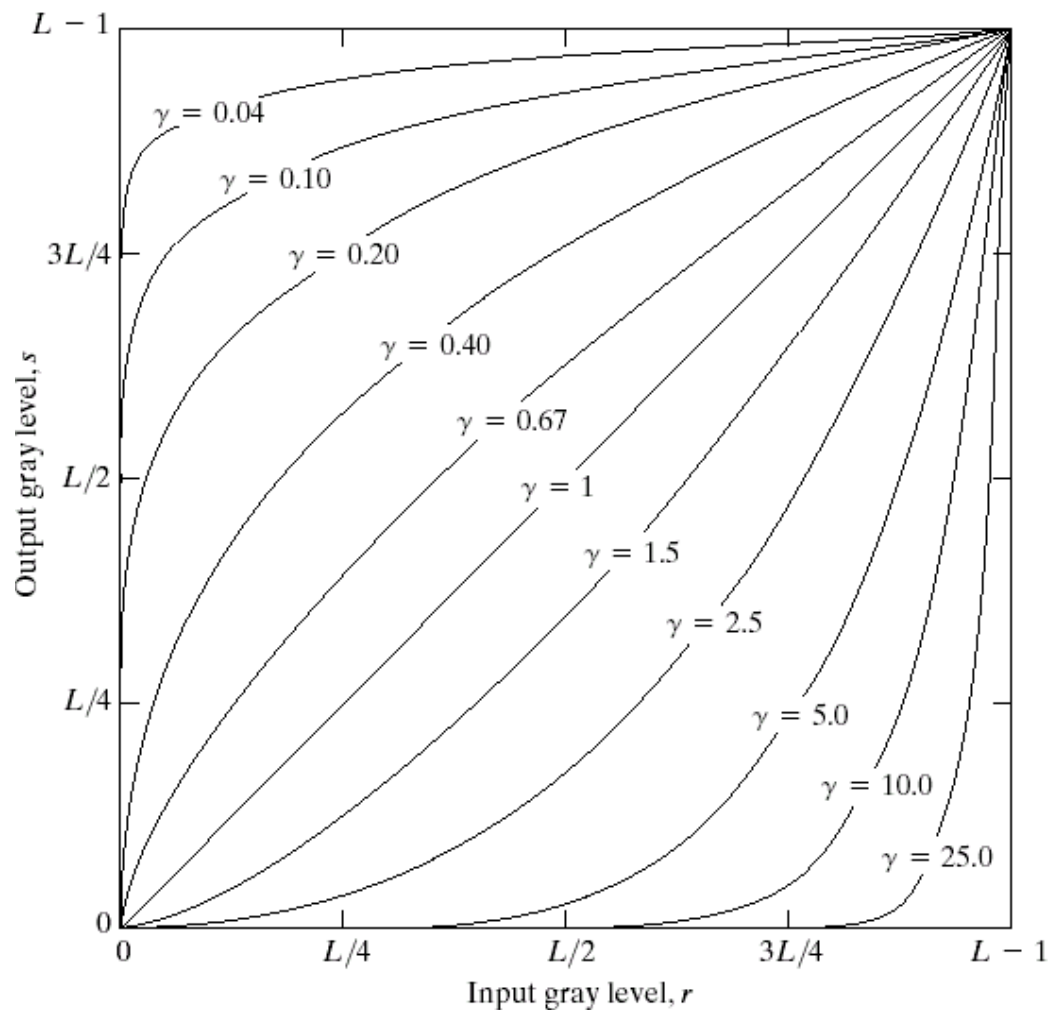
**FIGURE 3.5**

(a) Fourier spectrum.  
(b) Result of applying the log transformation given in Eq. (3.2-2) with  $c = 1$ .



# 指数变换

□ 灰度变换函数:  $s = c \cdot r^\gamma$



**FIGURE 3.6** Plots of the equation  $s = cr^\gamma$  for various values of  $\gamma$  ( $c = 1$  in all cases).

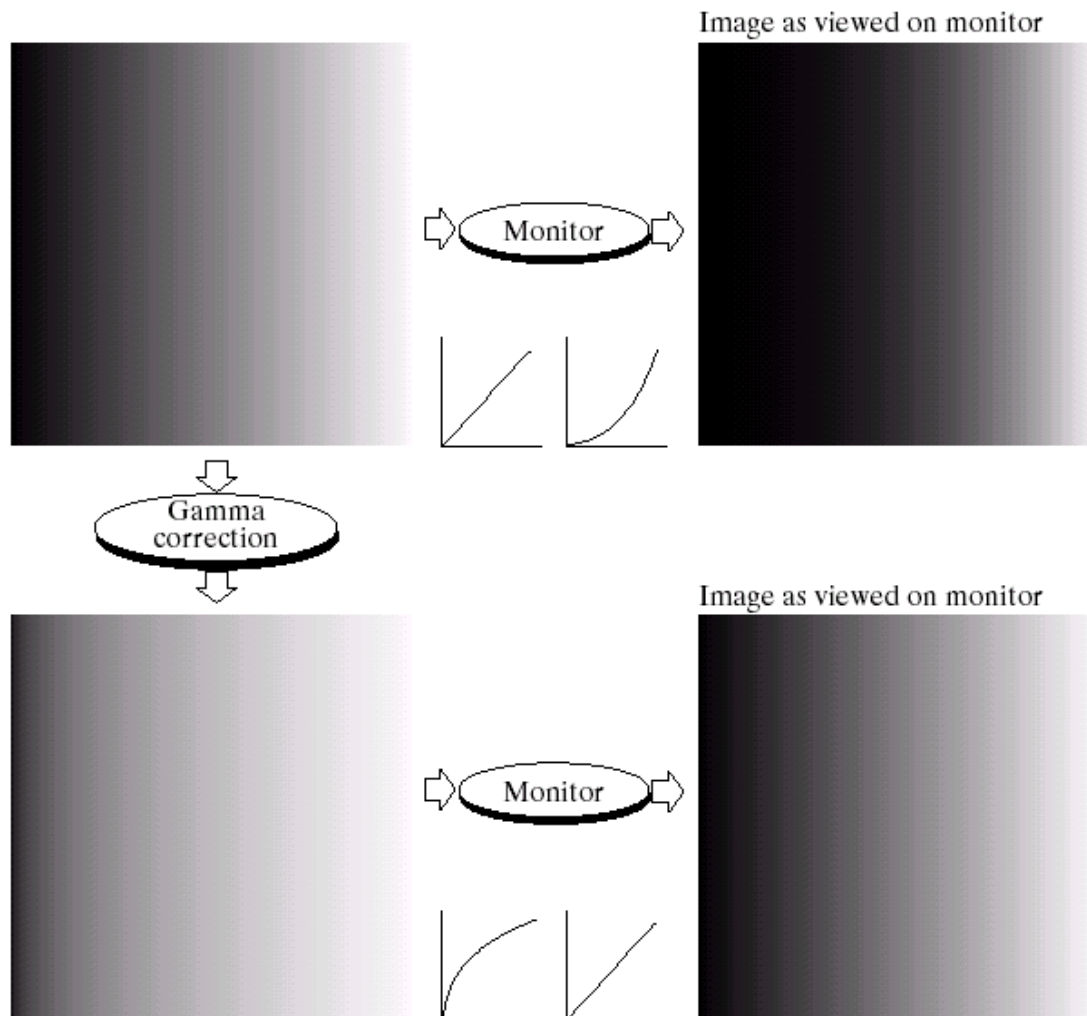
# 指数变换：伽马校正

## □ 用于缓解显示设备的非线性亮度映射

a b  
c d

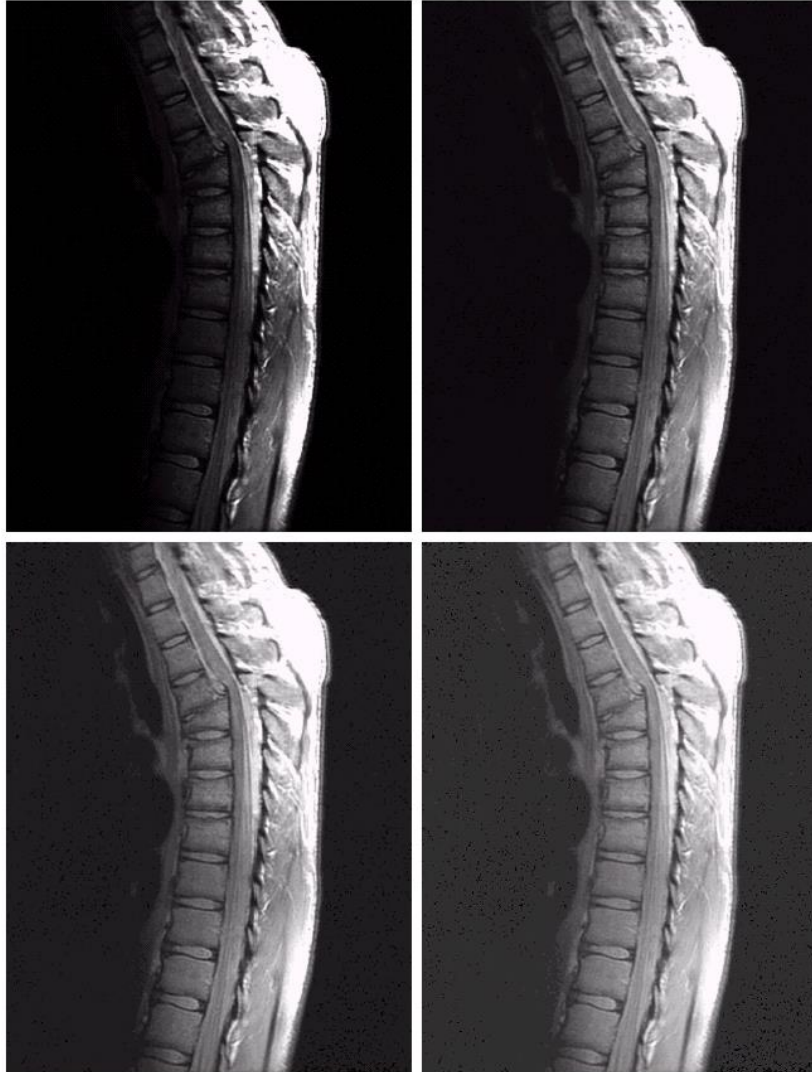
**FIGURE 3.7**

(a) Linear-wedge gray-scale image.  
(b) Response of monitor to linear wedge.  
(c) Gamma-corrected wedge.  
(d) Output of monitor.





# 指数变换



a b  
c d

**FIGURE 3.8**

(a) Magnetic resonance (MR) image of a fractured human spine. (b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with  $c = 1$  and  $\gamma = 0.6, 0.4$ , and  $0.3$ , respectively. (Original image for this example courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

# 指数变换

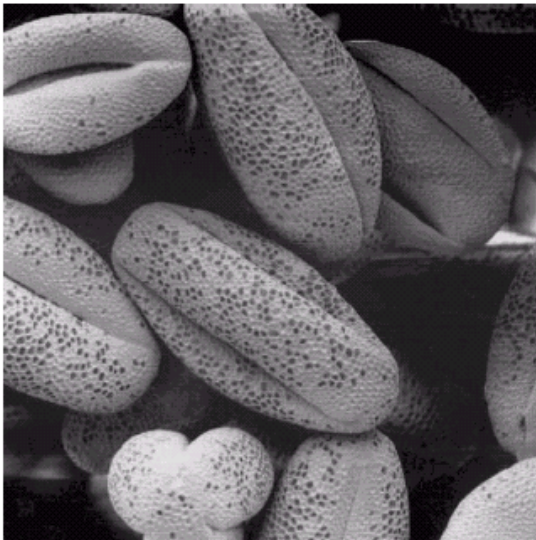
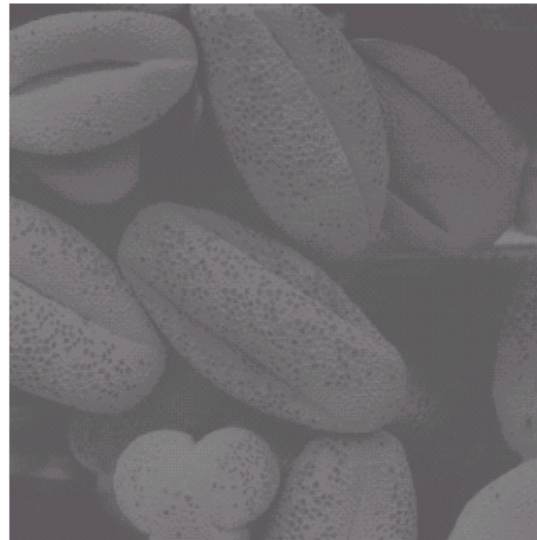
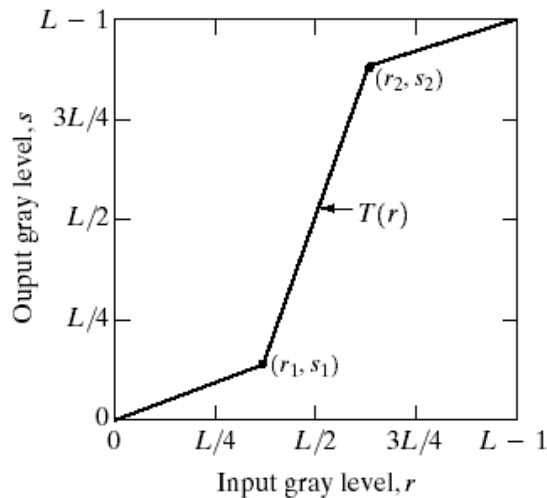
a b  
c d

**FIGURE 3.9**  
(a) Aerial image.  
(b)–(d) Results of  
applying the  
transformation in  
Eq. (3.2-3) with  
 $c = 1$  and  
 $\gamma = 3.0, 4.0,$  and  
 $5.0$ , respectively.  
(Original image  
for this example  
courtesy of  
NASA.)





# 分段线性变换函数一对比度拉伸

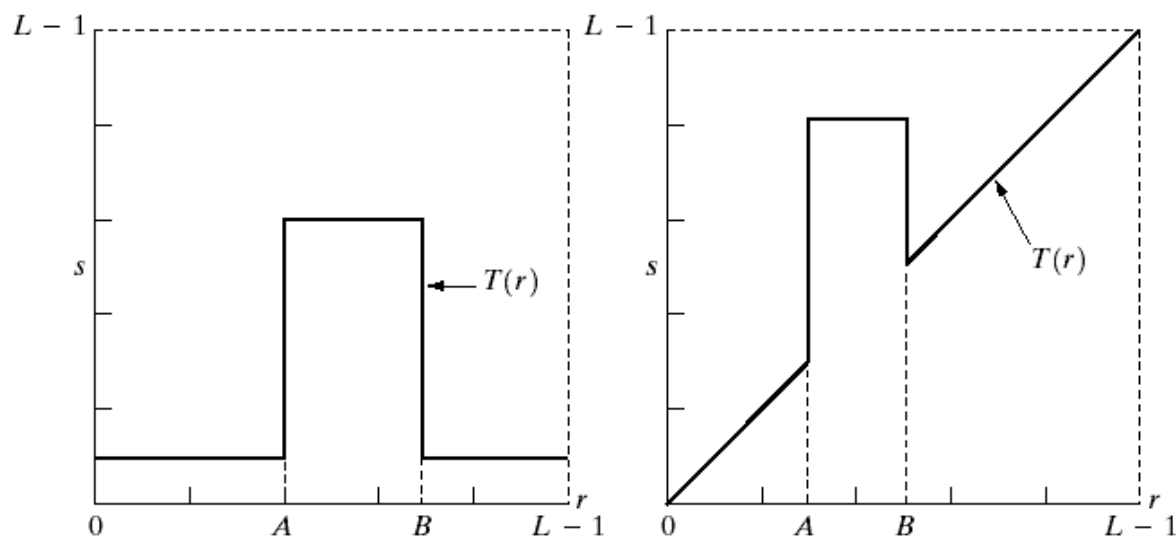


a b  
c d

**FIGURE 3.10**

Contrast stretching. (a) Form of transformation function. (b) A low-contrast image. (c) Result of contrast stretching. (d) Result of thresholding. (Original image courtesy of Dr. Roger Heady, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)

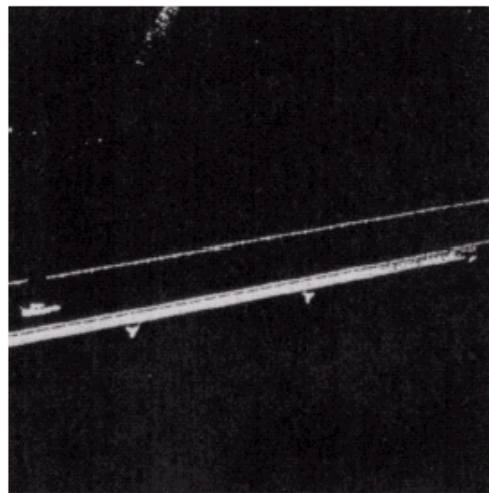
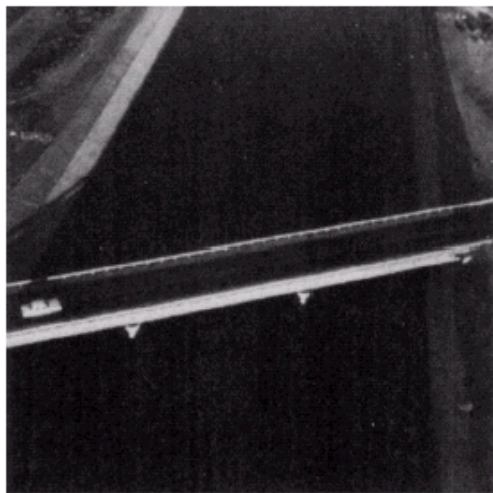
# 分段线性变换函数—灰度级切分



a b  
c d

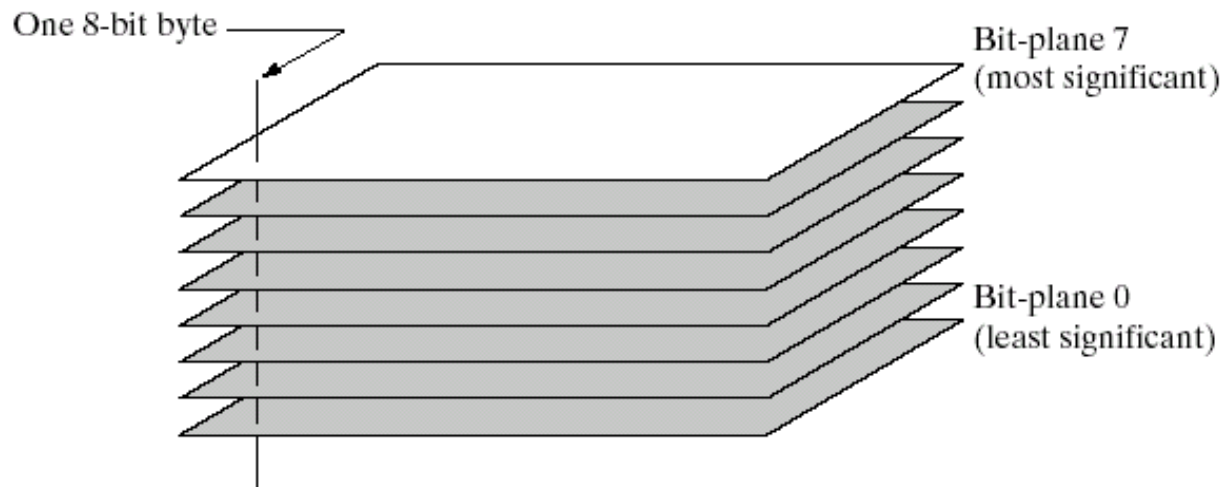
**FIGURE 3.11**

(a) This transformation highlights range  $[A, B]$  of gray levels and reduces all others to a constant level.  
(b) This transformation highlights range  $[A, B]$  but preserves all other levels.  
(c) An image.  
(d) Result of using the transformation in (a).



# 分段线性变换函数—比特面分割

## □ 突出特定比特对整幅图像的贡献



**FIGURE 3.12**  
Bit-plane  
representation of  
an 8-bit image.

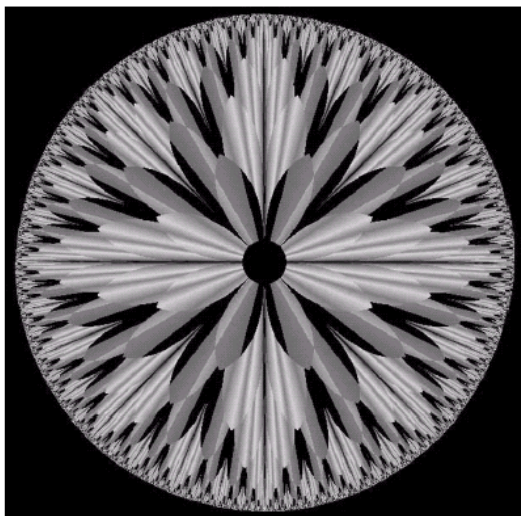
`unsigned char f(r, c);`  $\rightarrow$  `bool g(b, r, c);`



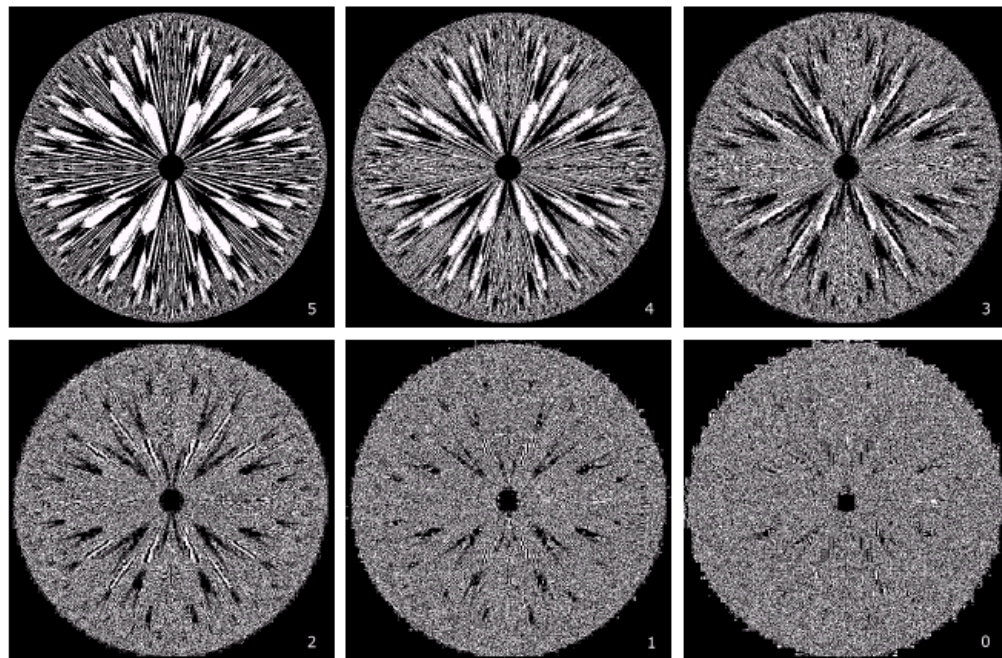
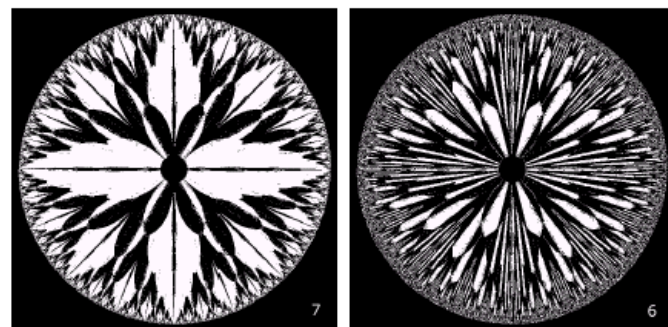
# 分段线性变换函数—比特面分割

## □ 分形图像的比特面分割

- $f(r, c)$ 到 $g(b, r, c)$ 的函数映射关系?



**FIGURE 3.13** An 8-bit fractal image. (A fractal is an image generated from mathematical expressions). (Courtesy of Ms. Melissa D. Binde, Swarthmore College, Swarthmore, PA.)



**FIGURE 3.14** The eight bit planes of the image in Fig. 3.13. The number at the bottom, right of each image identifies the bit plane.



# 灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
  - 基本灰度变换
  - 直方图处理
- 空域滤波
  - 空间域滤波基础
  - 空域平滑
  - 空域锐化

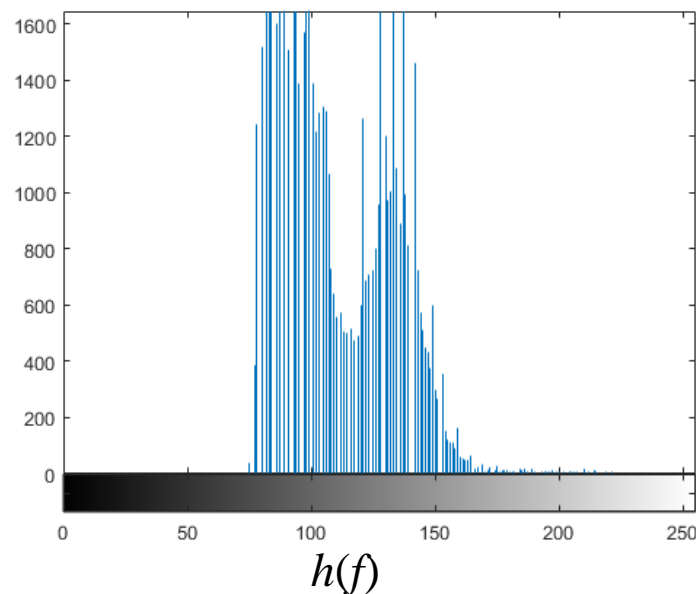
# 灰度直方图

## □ 灰度直方图 (histogram)

- 是一种关于灰度级的函数，它表示数字图像中每一灰度级与该灰度级出现的频数之间的对应关系
- 一幅特定的图有唯一的直方图，但反之不成立
- 直方图在一定程度上可以反映图像的状况
  - ✓ 例如: 有时可以根据直方图确定分割物体和背景的边界

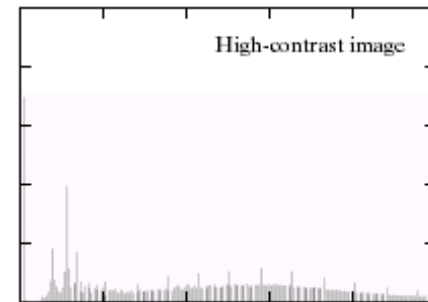
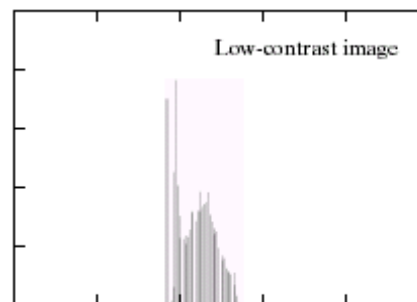
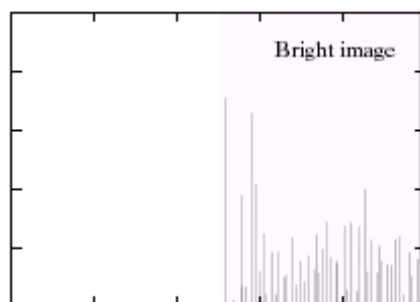
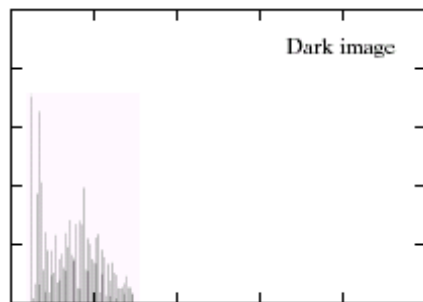
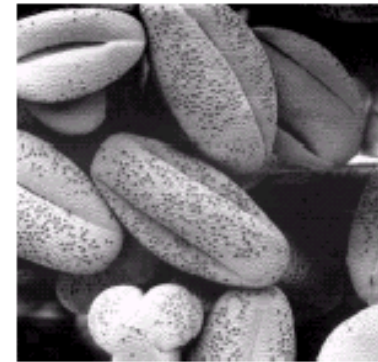
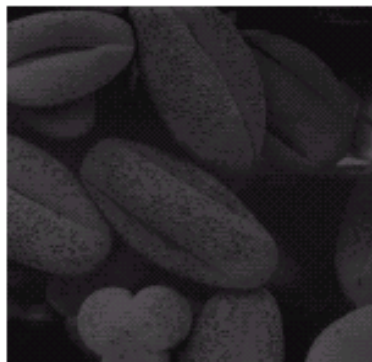


直方图



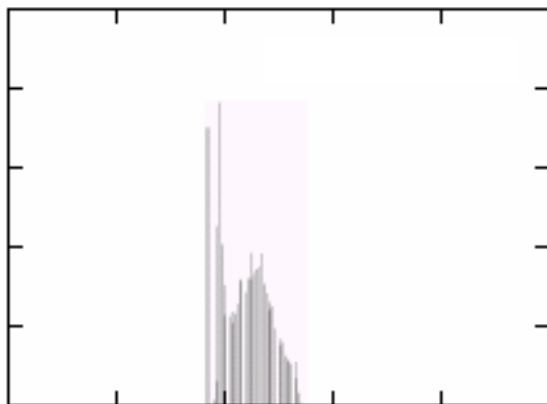
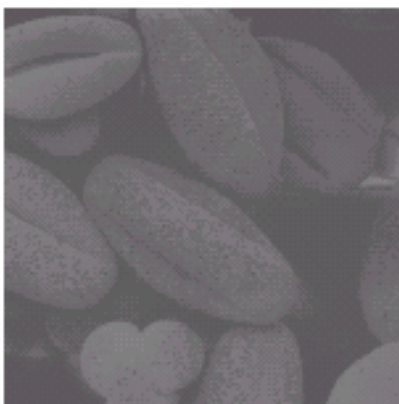
# 灰度直方图

- 低对比度图像的灰度级较窄
- 高对比度图像中直方图分量覆盖了很宽的灰度级范围

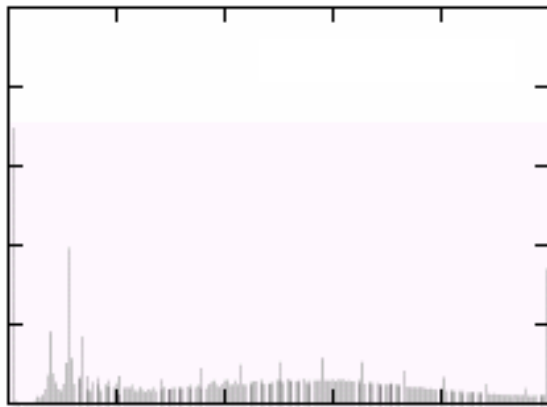


# 直方图修正

- 通过修改直方图可以达到增强图象的对比度、使感兴趣的部分看得更清楚



低对比度

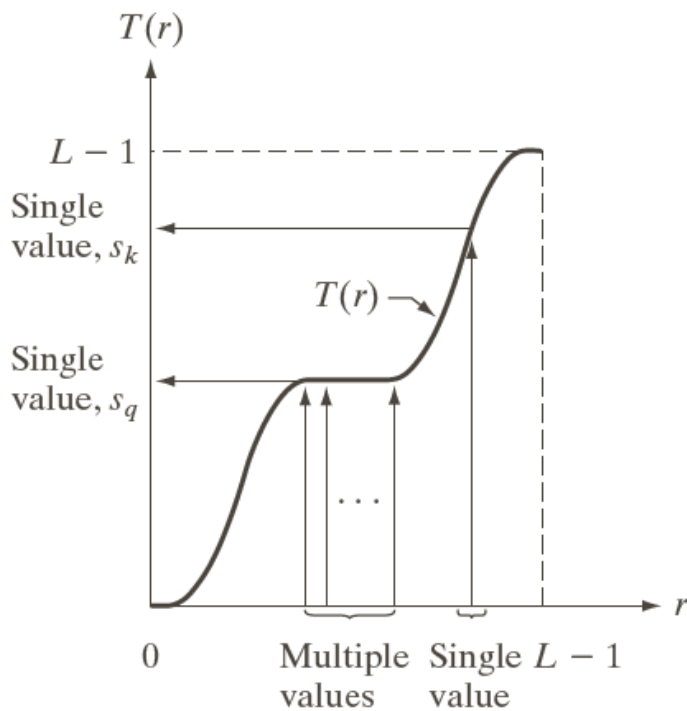


高对比度

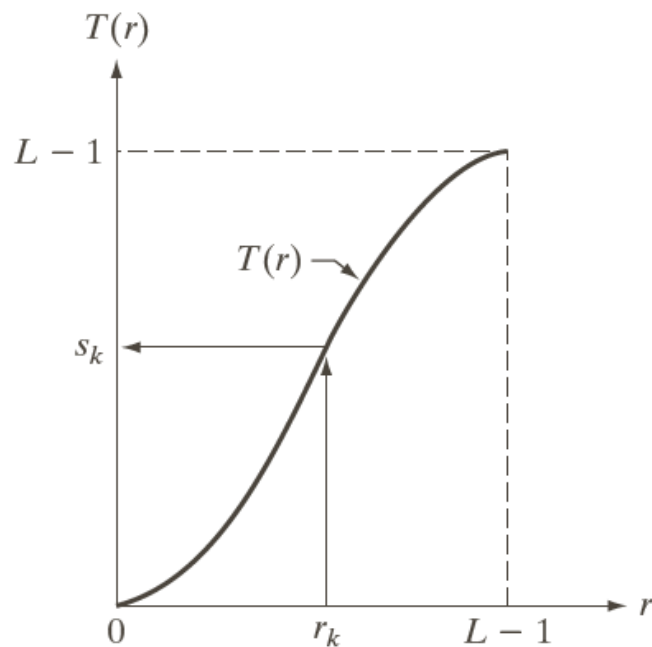


# 基于直方图的灰度变换

- 不改变像素的位置，只改变像素的灰度值
- 灰度变换函数：



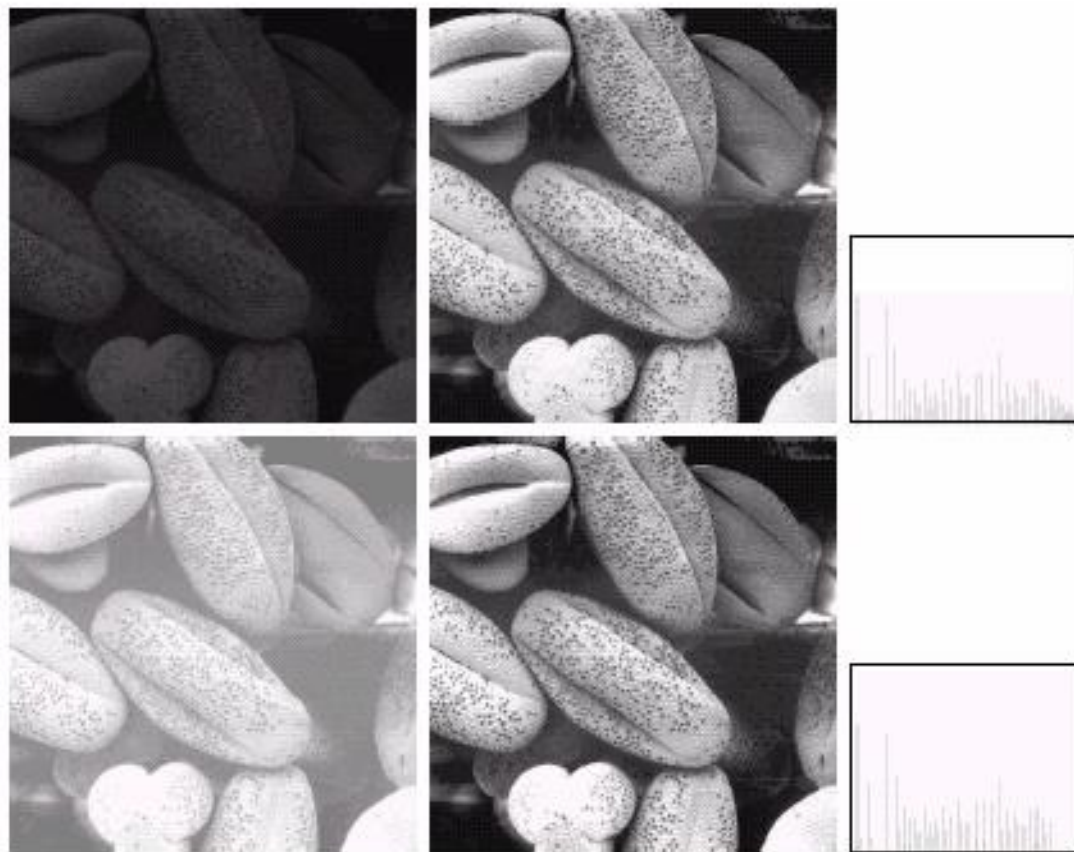
非严格单调递增函数



严格单调递增函数

# 直方图均衡

- 是基于直方图的灰度变换中一种处理方法
- 通常用直方图拉伸来执行直方图均衡处理



# 直方图均衡

## □ 直方图均衡化定义

■ 输入图像灰度概率密度函数为 $p_r(r)$ ，进行灰度变换 $s = T(r)$ ，使得

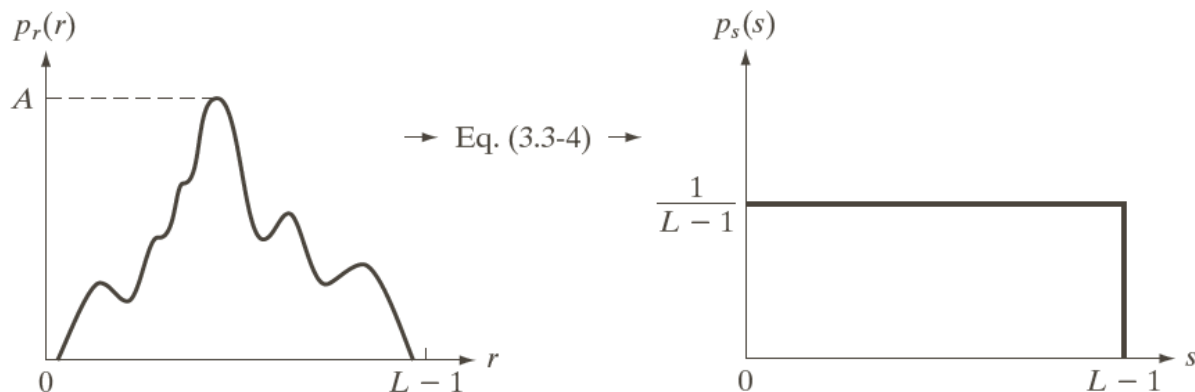
✓ (i) 若变换前灰度  $r_1 < r_2$ ，要求  $s_1 < s_2$  (**保序变换**)

✓ (ii) 变换后的灰度直方图 $p_s(s)$ 为均匀分布

■ 为满足上述条件(i)，有  $\int_0^r p_r(w)dw = \int_0^s p_s(w)dw$

■ 为满足上述条件(ii)，有  $\int_0^s p_s(w)dw = \frac{s}{L-1}$

■ 综上，可得： $s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w)dw$

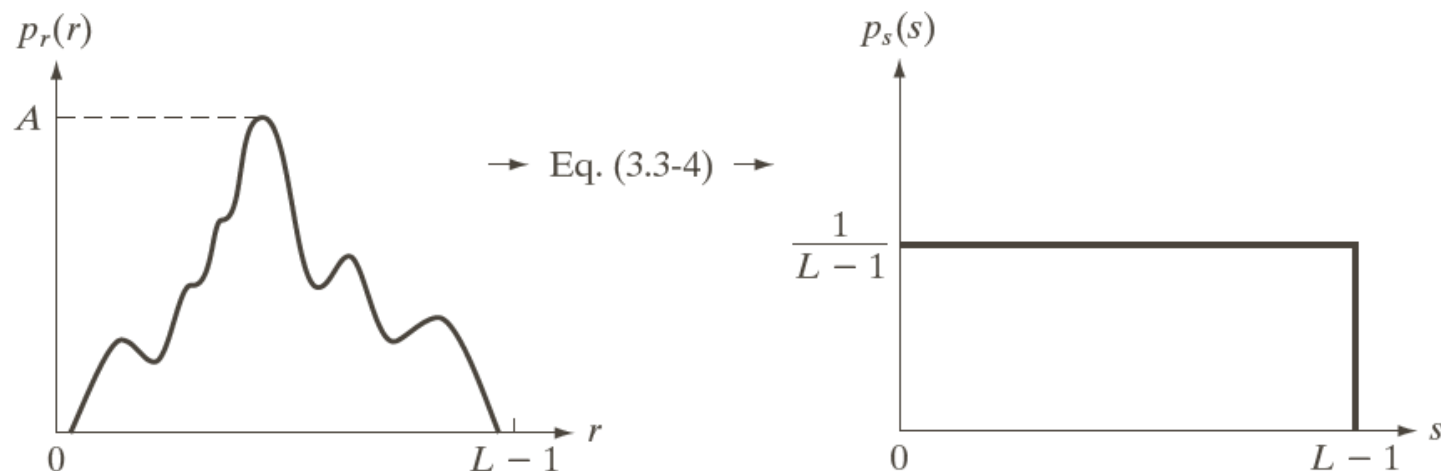


# 直方图均衡

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dr} = (L - 1) p_r(r)$$

由莱布尼茨准则,

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1) p_r(r)} \right| = \frac{1}{L - 1}, \quad 0 \leq s \leq L - 1$$



a b

**FIGURE 3.18** (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels,  $r$ . The resulting intensities,  $s$ , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the  $r$ 's.



# 直方图匹配（直方图规定化）

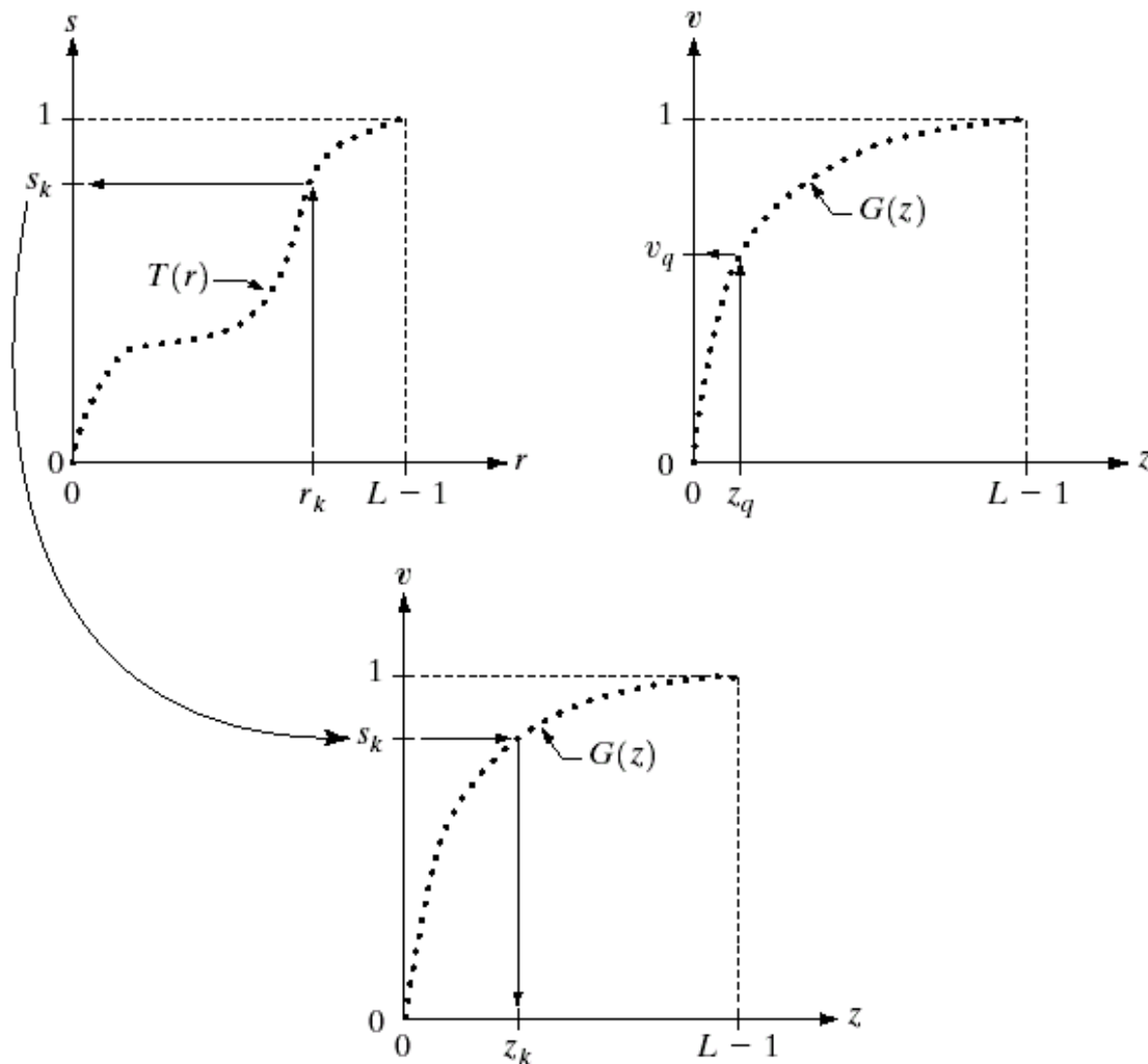
- 借助直方图变换实现规定/特定的灰度映射
  
- 方法：
  - 对原始直方图进行灰度均衡化
  - 规定需要的直方图，计算能使规定直方图均衡化的变换
  - 将原始直方图对应映射到规定直方图

# 直方图匹配 (直方图规定化)

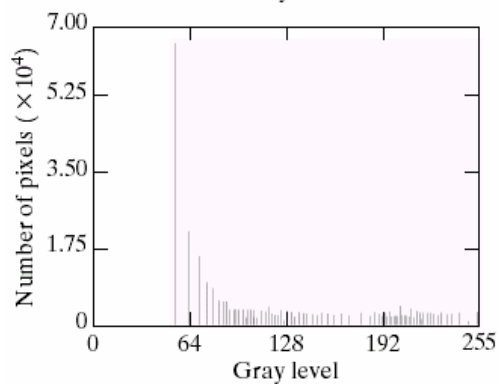
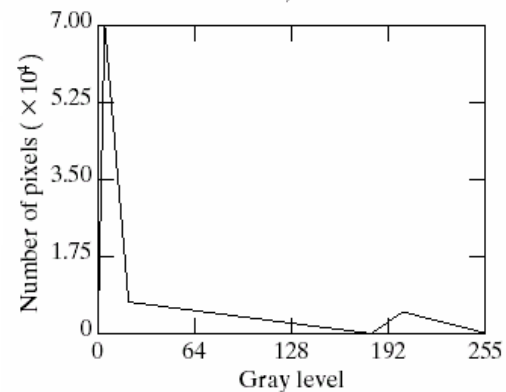
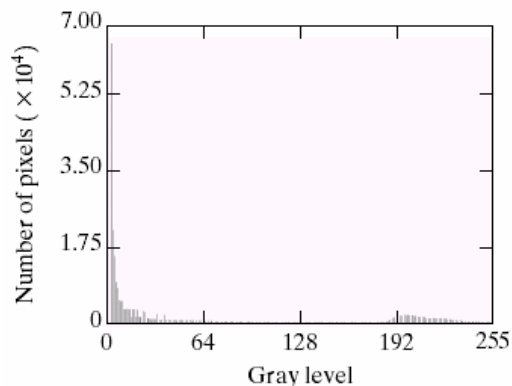
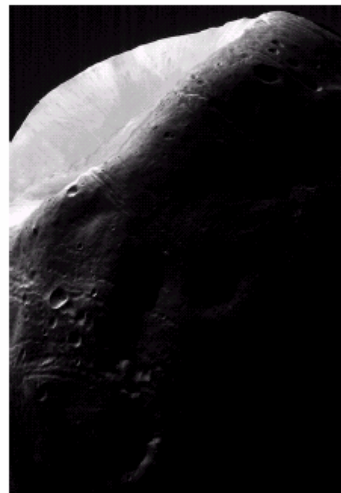
a b  
c

**FIGURE 3.19**

(a) Graphical interpretation of mapping from  $r_k$  to  $s_k$  via  $T(r)$ .  
 (b) Mapping of  $z_q$  to its corresponding value  $v_q$  via  $G(z)$ .  
 (c) Inverse mapping from  $s_k$  to its corresponding value of  $z_k$ .



# 直方图匹配



原图

原图  
直方图

匹配目标  
直方图

处理后  
图像

处理后  
直方图



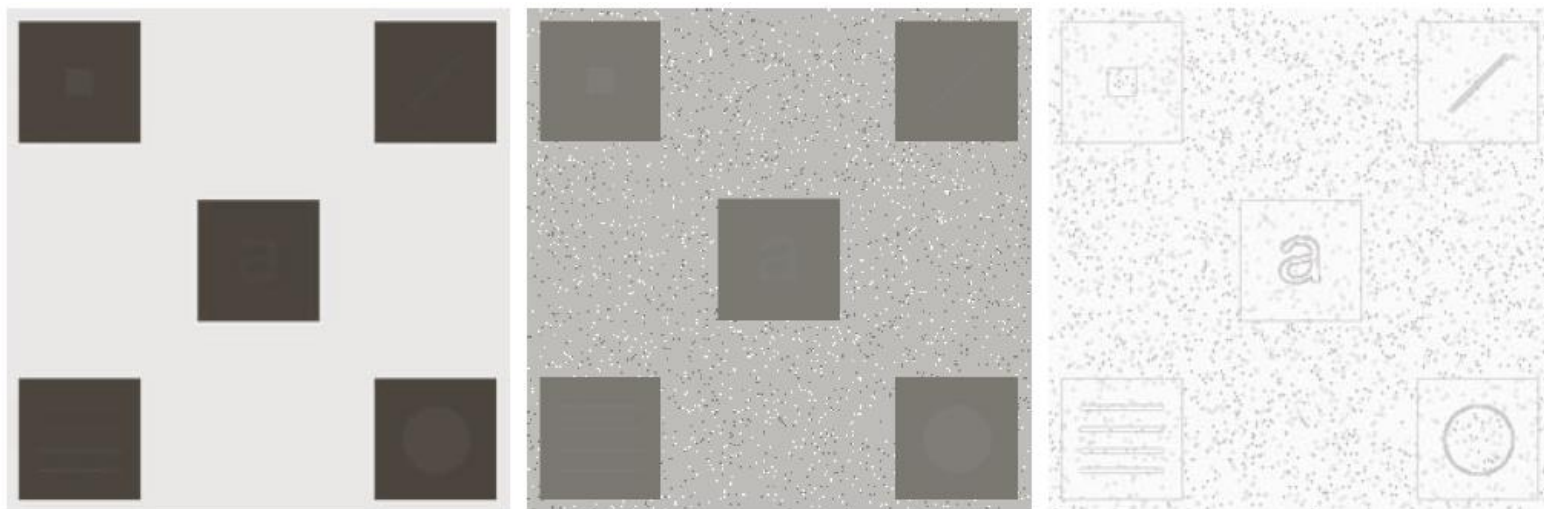
# 直方图均衡 vs. 直方图匹配

- 直方图均衡：
  - 自动增强
  - 效果不易控制
  - 总得到全图增强的结果
- 直方图匹配：
  - 有选择地增强
  - 须给定需要的直方图
  - 可特定增强的结果
- 直方图均衡可以看作是匹配直方图为**均匀分布**的直方图匹配



# 局部直方图处理

## □ 图像局部邻域的直方图均衡化

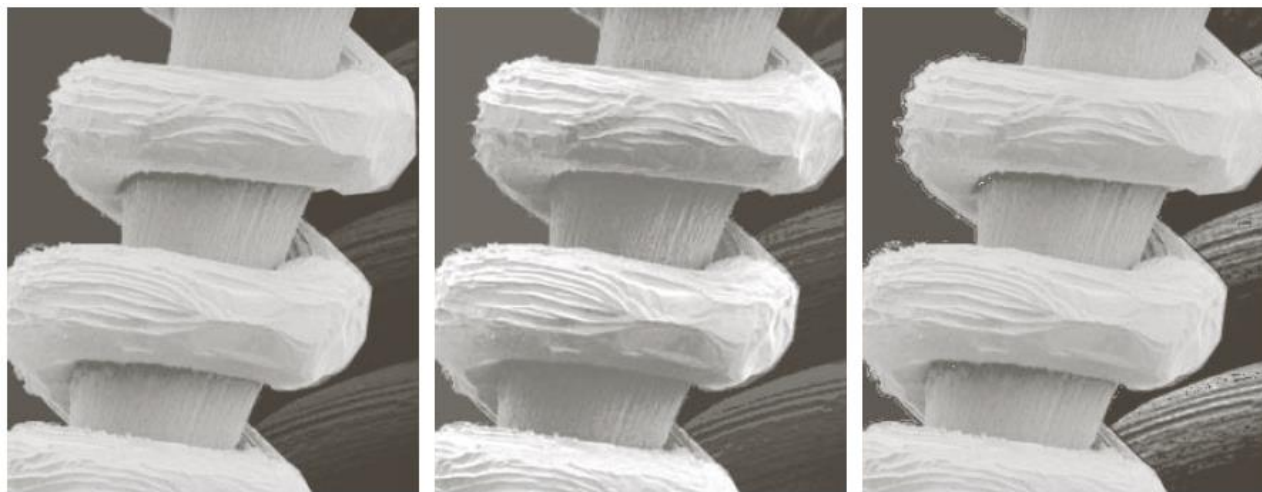


a b c

**FIGURE 3.26** (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization applied to (a), using a neighborhood of size  $3 \times 3$ .

# 基于直方图统计的图像增强

- 基于图像的直方图，很容易计算出图像像素灰度的**均值**和**标准差**
- 基于像素邻域的**均值和标准差**，可以**选择性地**对某些像素灰度进行增强



a b c

**FIGURE 3.27** (a) SEM image of a tungsten filament magnified approximately 130 $\times$ . (b) Result of global histogram equalization. (c) Image enhanced using local histogram statistics. (Original image courtesy of Mr. Michael Shaffer, Department of Geological Sciences, University of Oregon, Eugene.)



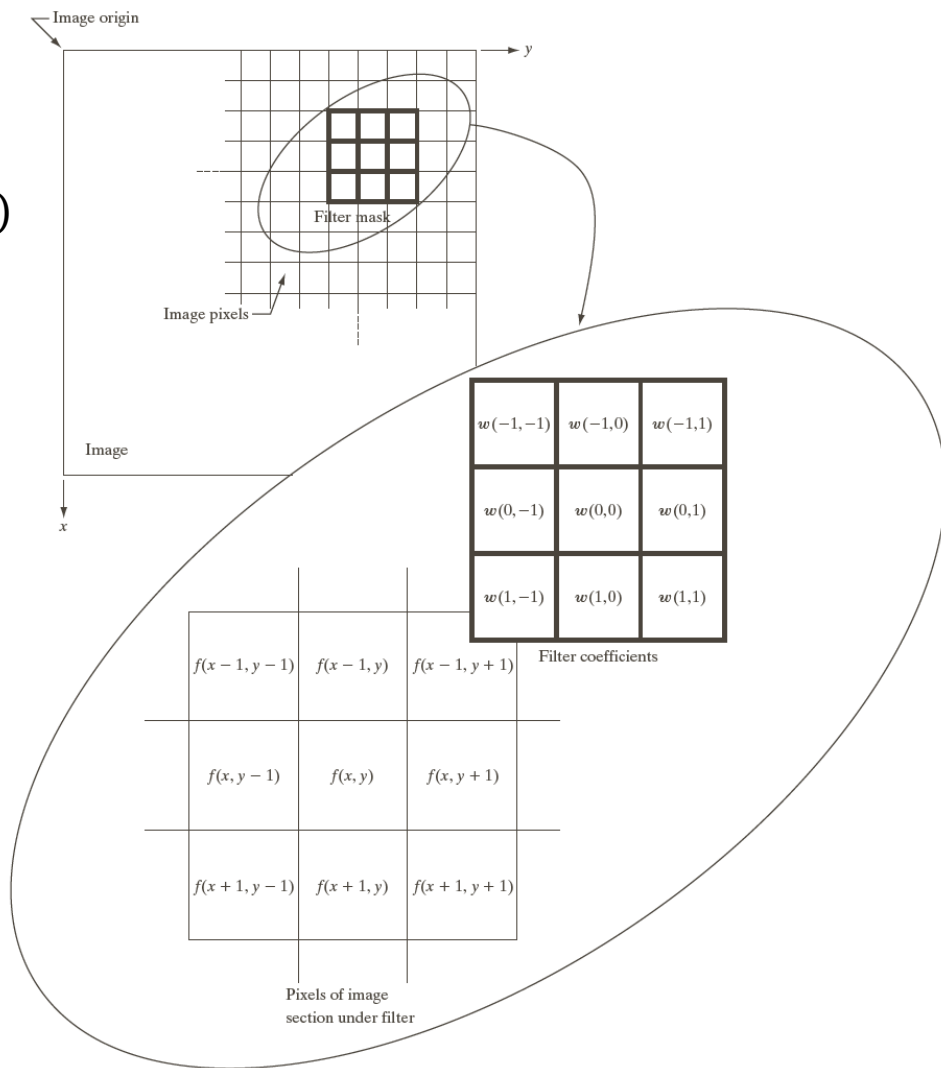
# 灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
  - 基本灰度变换
  - 直方图处理
- 空域滤波
  - 空间域滤波基础
  - 空域平滑
  - 空域锐化

# 空域滤波机制

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) \cdot f(x + s, y + t)$$

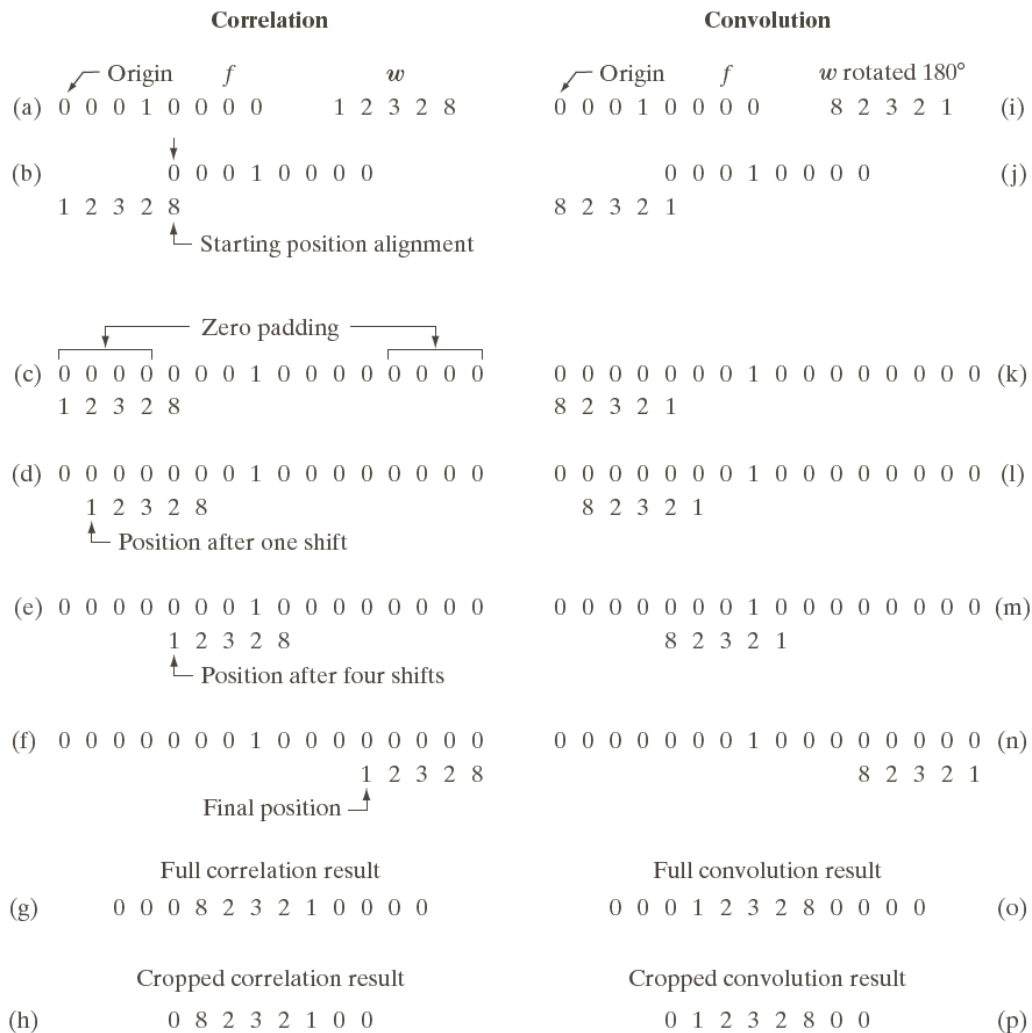
**相关 vs. 卷积：**卷积运算需要对卷积核进行反转操作，而相关不需要。



# 空间相关与卷积：一维情况

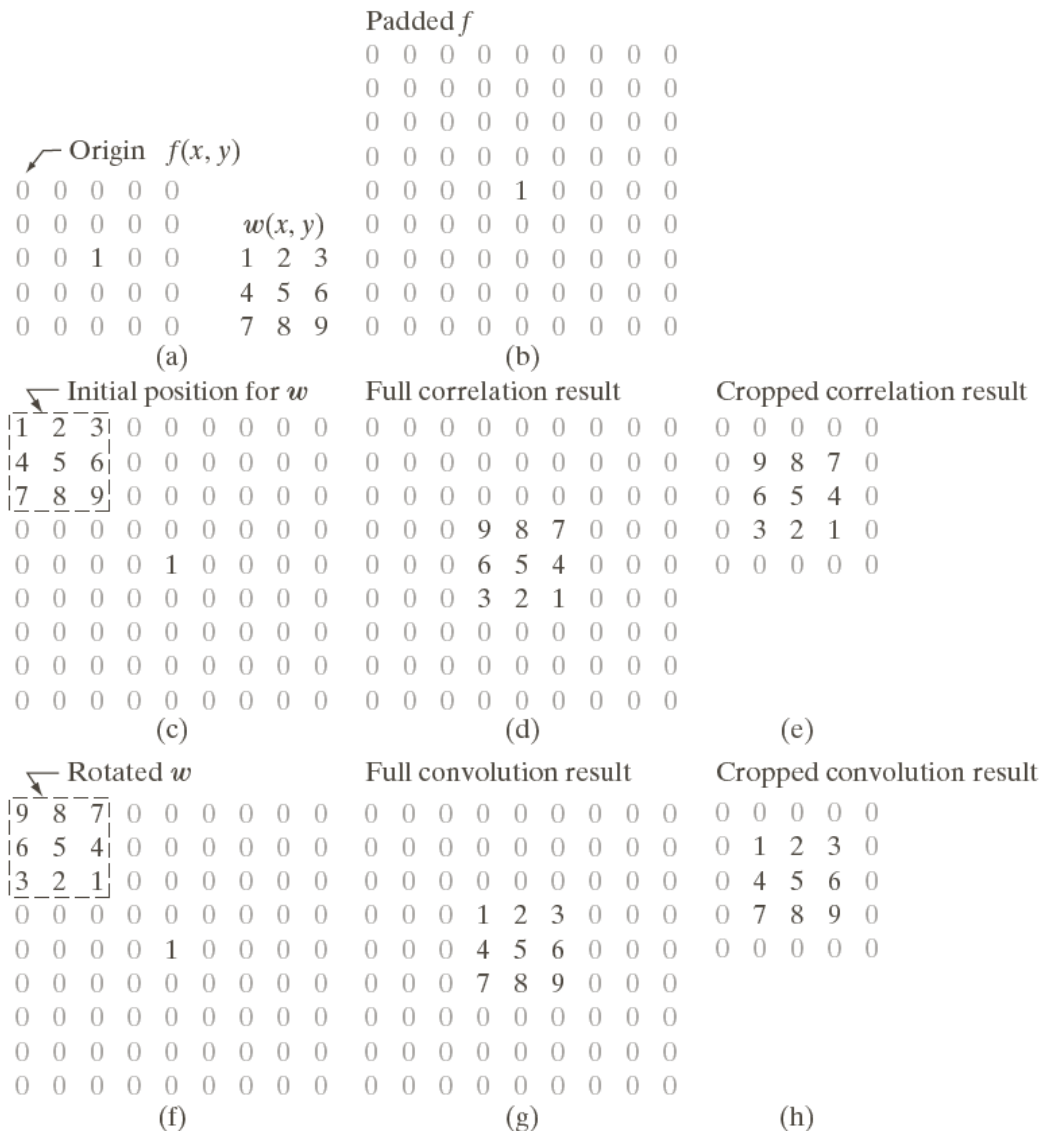
边界延拓：

- 1) 补零延拓
- 2) 对称延拓
- 3) 复制延拓
- 4) 循环延拓



**FIGURE 3.29** Illustration of 1-D correlation and convolution of a filter with a discrete unit impulse. Note that correlation and convolution are functions of *displacement*.

# 空间相关与卷积：二维情况



**FIGURE 3.30** Correlation (middle row) and convolution (last row) of a 2-D discrete, unit impulse. The 0s are shown in gray to simplify visual analysis.

相关运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

卷积运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

# 滤波器的向量表示与模板生成

- 当关注相关或卷积的响应特性时，可以将响应写为乘积的求和形式

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{MN} z_{MN} = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$$

- 等价于将二维滤波器按一维进行编号

- 空间滤波器的模板生成

- 滤波器的系数根据其支持怎么样的操作来选择
- **线性滤波**的作用是实现乘积求和操作：加权求和

$$w_{mn} = \frac{1}{MN} \quad w_{mn} = \exp \left( - \frac{\left( m - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \right)^2 + \left( n - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right)^2}{2\sigma} \right)$$

- **非线性滤波**要求确定邻域大小，以及对包含在邻域内的图像像素执行的操作



# 灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
  - 基本灰度变换
  - 直方图处理
- 空域滤波
  - 空间域滤波基础
  - 空域平滑
  - 空域锐化



# 平滑滤波器

## □ 局部平均滤波器

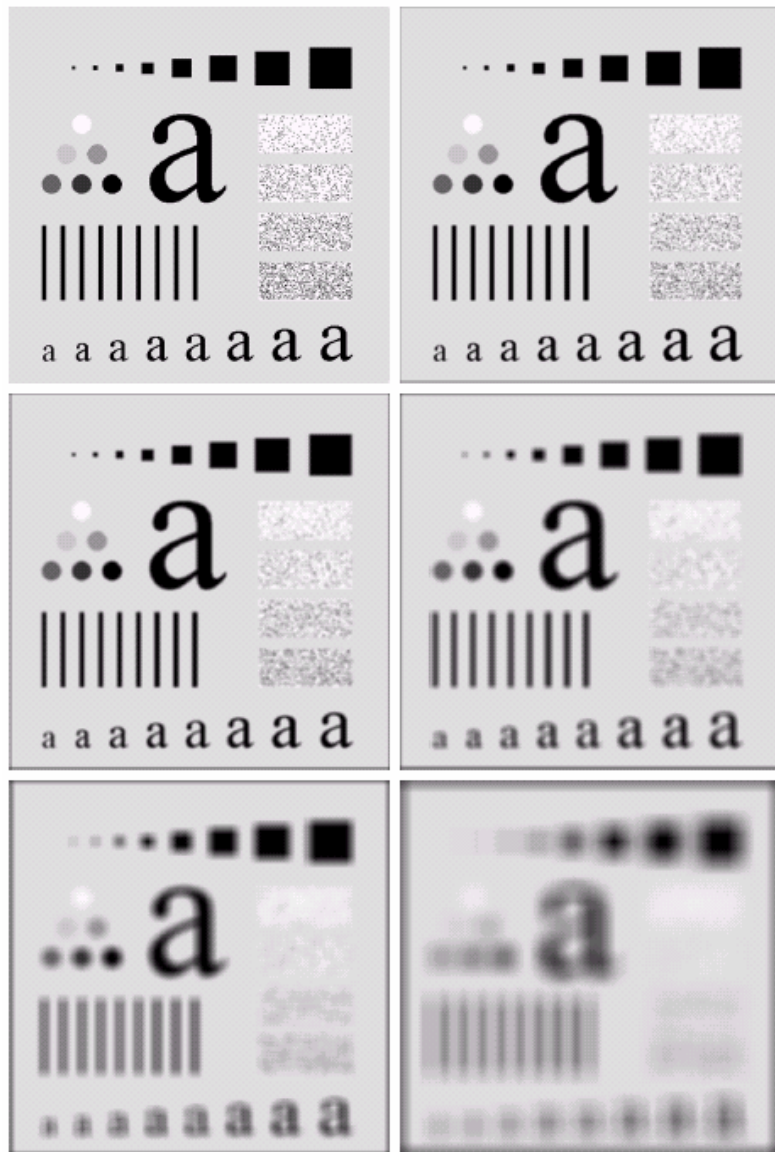
- 局部平均滤波器用某像素邻域内的各点灰度的平均值来代替该像素原来的灰度值

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

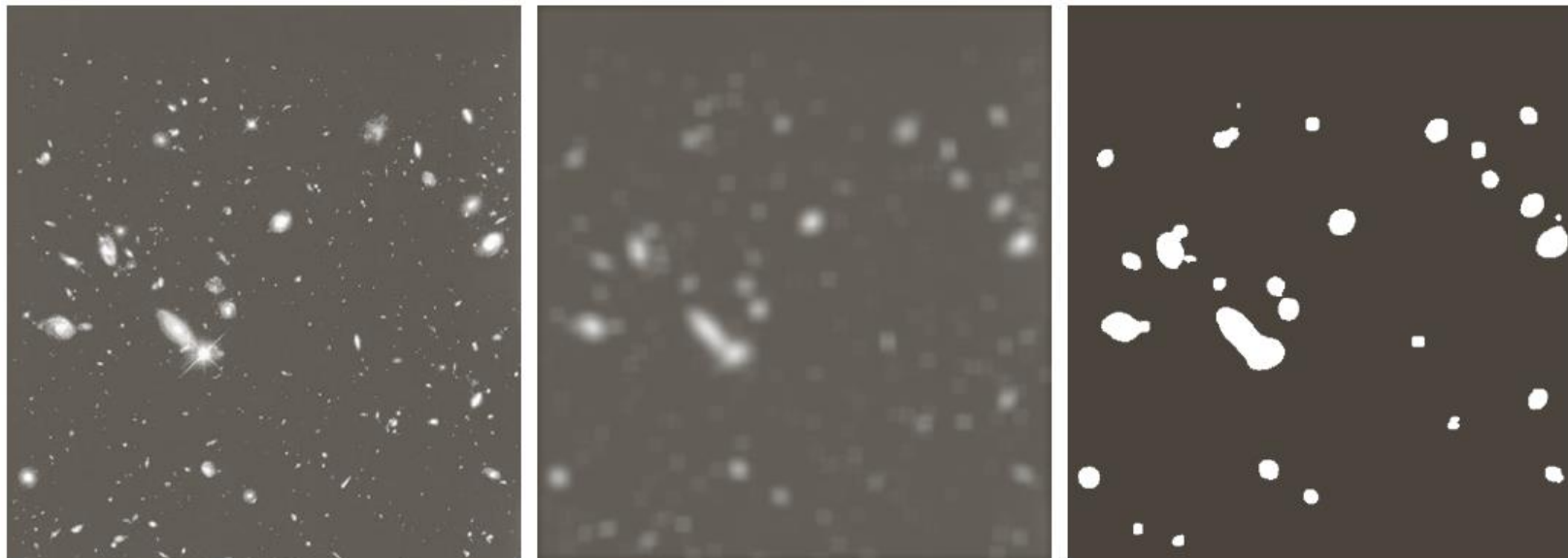
$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

# 图像平滑



原图	n=3 方形均值滤波
n=5 方形均值滤波	n=9 方形均值滤波
n=15 方形均值滤波	n=35 方形均值滤波

# 图像平滑



a b c

**FIGURE 3.34** (a) Image of size  $528 \times 485$  pixels from the Hubble Space Telescope. (b) Image filtered with a  $15 \times 15$  averaging mask. (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of NASA.)

# 统计排序滤波器

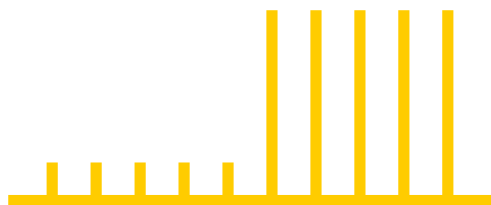
## □ 中值滤波

- 用局部邻域（窗口）里的中值来代替上述局部平均法中的局部平均值。即将以该点为中心的某个窗口框住的各像素的中间值作为处理后图象中该点像素的值。
- 二维中值滤波的概念是一维的推广
- 以一维为例：
  - ✓ 奇数窗口中五点的值为 88、95、230、110、120，按大小重排这五个值得 88、95、110、120、230，其位于中间位置上的“中值”是110。
  - ✓ 实际应用：美国家庭收入统计（中位数）

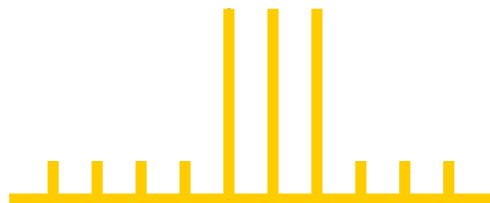
## □ 其他统计排序滤波器

- 最大值滤波器，最小值滤波器

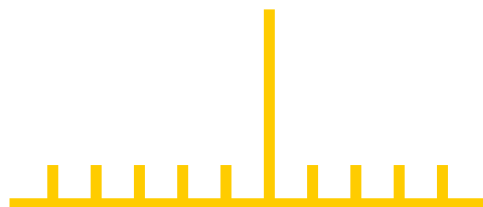
# 中值滤波保留边缘的性能



阶跃信号

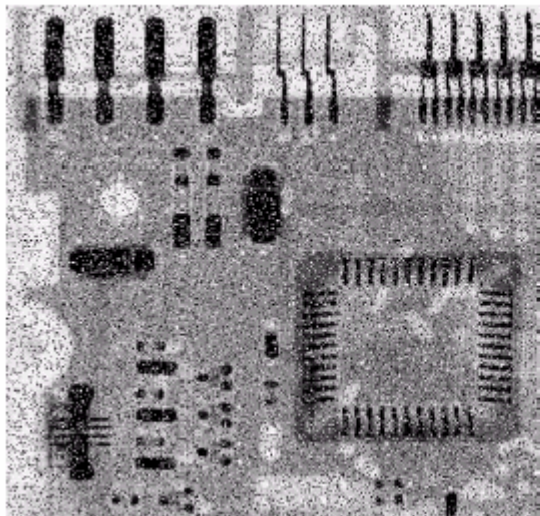


脉冲信号

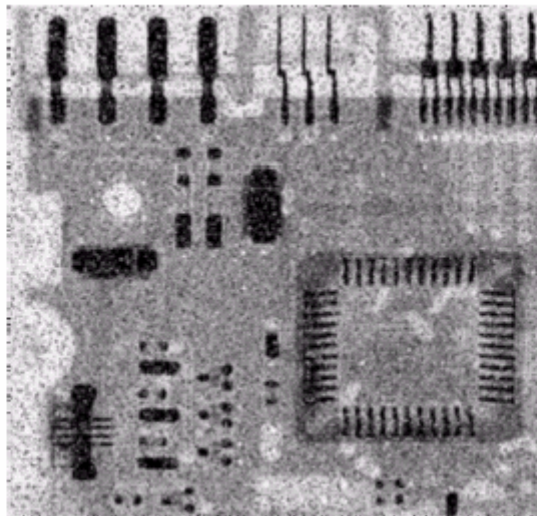


噪声

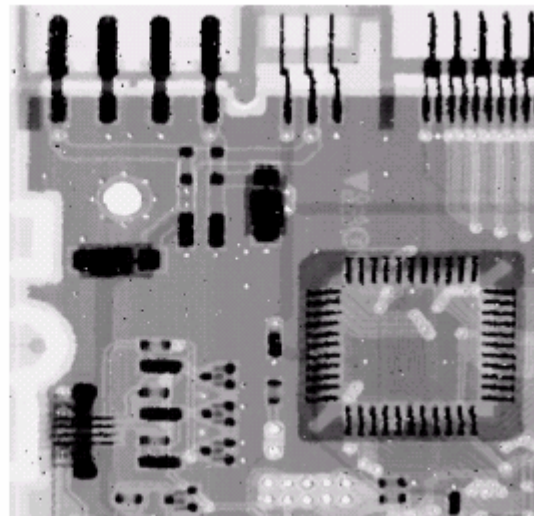
# 中值滤波



椒盐噪声污染的  
电路板X光图像



3\*3均值掩模去除噪声



3\*3中值滤波器去除噪声

去除椒盐噪声使用自适应中值滤波器的效果会更好一些，  
详情参见《数字图像处理》（冈萨雷斯）

# 保边滤波器

- 在滤波过程中能尽可能保留图像中的边缘信息，同时达到平滑的目的
- 保边滤波器在图像不同位置的权重将不再一致，以此达到在图像平缓区域进行平滑，同时在图像边缘区域保留边缘信息的目的。

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$



$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

- 代表性方法
  - 双边滤波，导向滤波



# 双边滤波器

□ 顾名思义，双边滤波器同时考虑滤波过程中由两方面因素带来的影响

■ 像素相对位置的影响：距离越远，对应权重越小

$$w_d(s, t) = \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2}\right)$$

■ 像素值的影响：相差越小，越不可能为边缘，对应权重越大

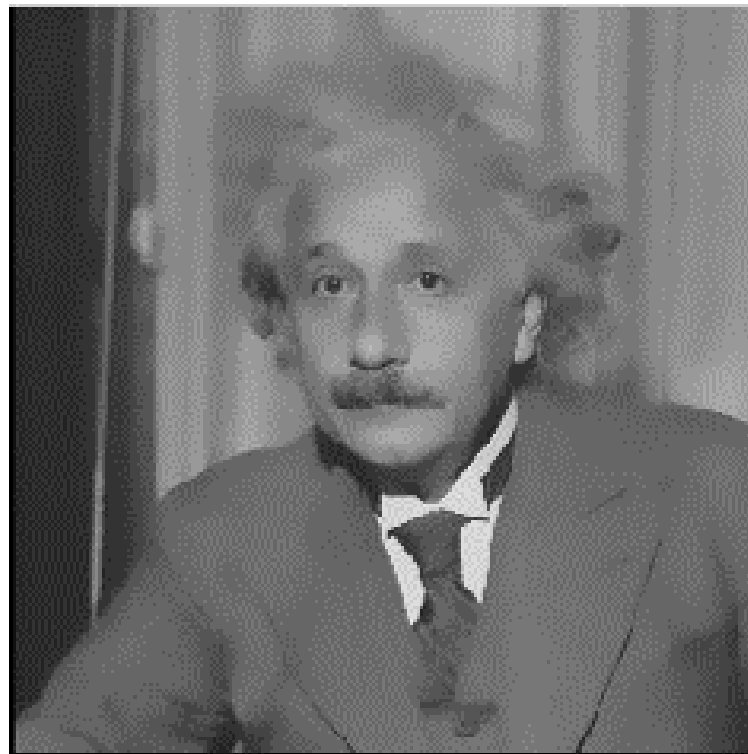
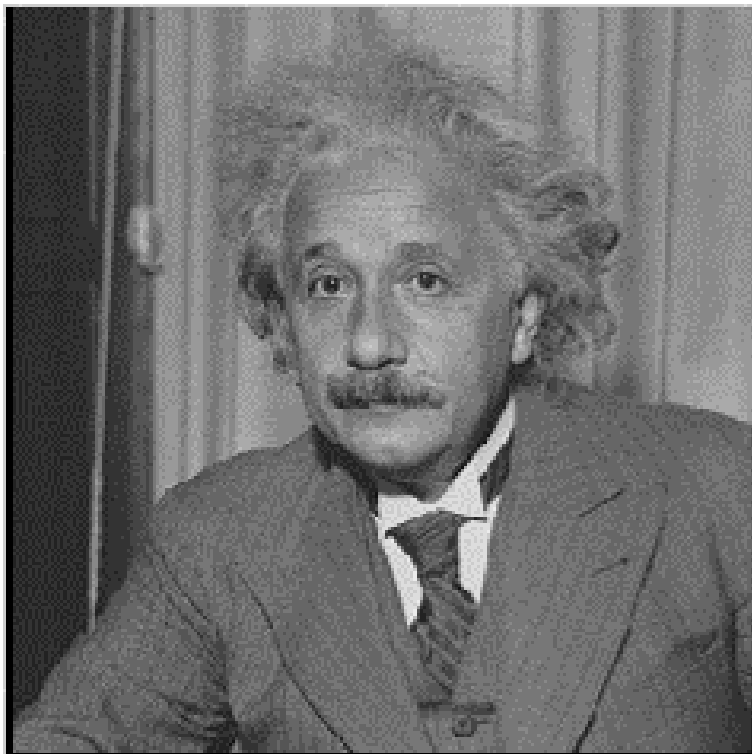
$$w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right)$$

■ 双边滤波器的权重将由两部分权重共同决定：

$$\begin{aligned} w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= w_d(s, t) * w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right) \end{aligned}$$

# 双边滤波器

## □ 双边滤波器的滤波效果



# 导向滤波

## □ 利用引导图像对图像滤波进行指导

输入：待滤波图像  $p$ ，引导图像  $I$

我们定义一个这样的滤波过程：

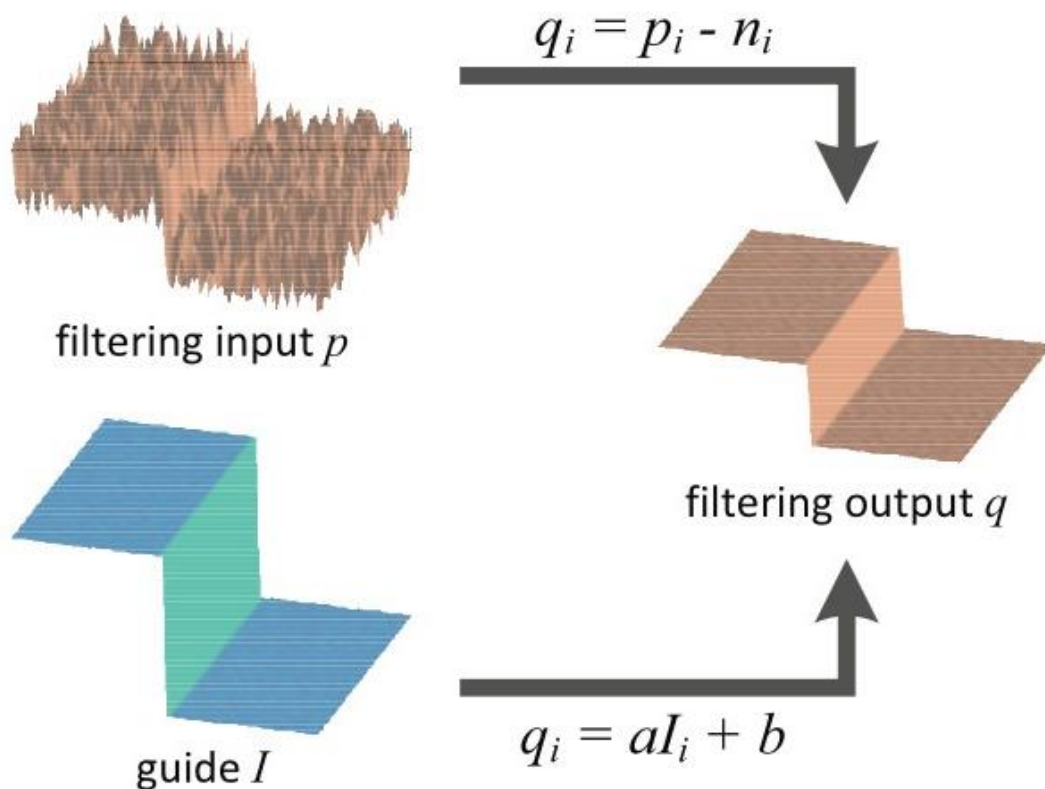
$$q_i = \sum_{j \in w_i} w_{ij}(I) p_j$$

其中  $q$  为滤波器输出，

$i, j$  为像素下标，

$w_{ij}$  是一个只和引导图像相关的线性滤波核

# 导向滤波



我们假设输出图像在一个窗口  $w_k$  内与引导图像有局部线性关系：

$$q_i = a_k I_i + b_k, \forall i \in w_k$$

对等式求导，我们可以看到输出图像的边缘可以得到保留：

$$\nabla q = a \nabla I$$

我们的输出图像则应为输入图像去除图中的噪声  $n$ ：

$$q_i = p_i - n_i$$

对于每一个滤波窗口，我们的目标就是最小化这个噪声：

$$\operatorname{argmin} \sum_{i \in w_k} (q_i - p_i)^2$$

# 导向滤波

我们引入一个正则化参数  $\varepsilon$  避免  $a_k$  过大:

$$E(a_k, b_k) = \sum_{i \in w_k} ((a_k I_i + b_k - p_i)^2 + \varepsilon a_k^2)$$

对参数求偏导并令其为零, 解得:

$$a_k = \frac{\frac{1}{|w|} \sum_{i \in w_k} I_i p_i - \mu_k \bar{p}_k}{\sigma_k^2 + \varepsilon}, \quad b_k = \bar{p}_k - a_k \mu_k$$

其中  $\mu_k$ ,  $\sigma_k^2$  表示引导图像  $I$  在窗口  $w_k$  中的均值和方差,  $|w|$  表示窗口中像素的个数,  $\bar{p}_k$  是输入图像  $p$  在窗口中的平均值。

由于每一个像素都处于多个窗口中, 我们将得到的所有结果取平均, 由此得到最后的结果:

$$q_i = \frac{1}{|w|} \sum_{k: i \in w_k} (a_k I_i + b_k) = \bar{a}_k I_i + \bar{b}_k$$

# 导向滤波

- 导向滤波的一个常用场景即将输入图像作为引导图像，此时方程的解变化为：

$$a_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \varepsilon}$$

$$b_k = (1 - a_k)\bar{p}_k$$

- 在平坦区域，方差较小，此时 $a_k \approx 0, b_k \approx \bar{p}_k$ ，相当于对该区域做均值滤波
- 在边缘区域，方差较大，此时 $a_k \approx 1, b_k \approx 0$ ，相当于在该区域保持原有图像



# 灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
  - 基本灰度变换
  - 直方图处理
- 空域滤波
  - 空间域滤波基础
  - 空域平滑
  - 空域锐化



# 空域锐化

- 图象锐化针对常见的图像模糊、边缘不清晰所采取的处理方法，它能加强图象的轮廓，使图象看起来比较清楚
- 锐化处理的主要目的：突出灰度的过渡部分
  - 常用一阶微分和二阶微分的锐化滤波器

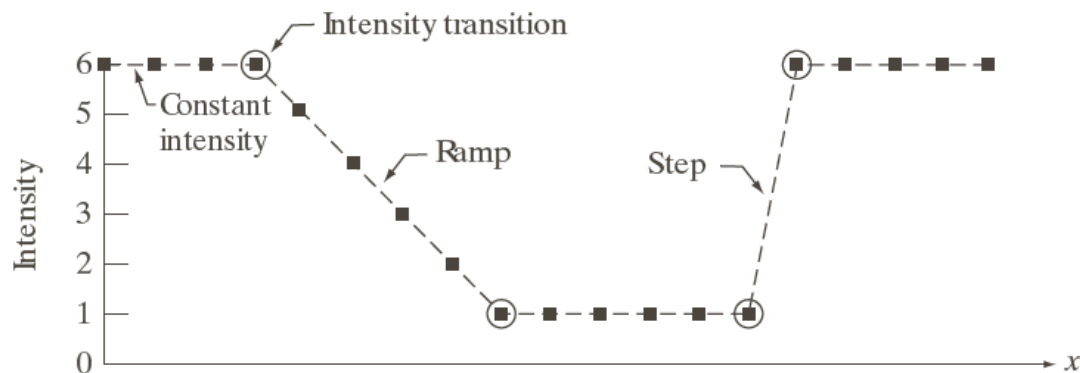
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x) \quad (\text{前向差分})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x) - f(x-1) \quad (\text{后向差分})$$

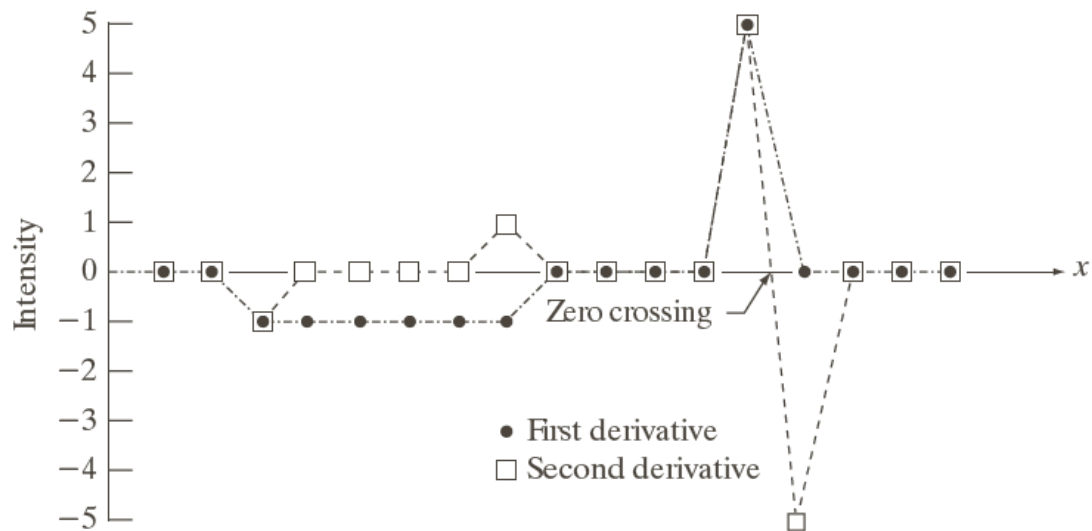
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.5 \cdot [f(x+1) - f(x-1)] \quad (\text{中心差分})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

# 空域锐化



Scan line	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	$\rightarrow x$
1st derivative	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	
2nd derivative	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0	



a  
b  
c

**FIGURE 3.36**  
Illustration of the first and second derivatives of a 1-D digital function representing a section of a horizontal intensity profile from an image. In (a) and (c) data points are joined by dashed lines as a visualization aid.



# 一阶微分锐化图像

- 分析表明微分可以突出高频成分，从而使图象轮廓清晰。因此在空间域可用微分法锐化图象
- 图象处理中常用的微分方法是“梯度法”，即用梯度作为锐化图象的度量。对于数字图象，则用差分来表示梯度。
- 实际应用中，为了获得各向同性的度量，用梯度的模代替梯度

# 一阶微分锐化图像

□ 典型的差分运算：

$$G[f(x, y)] = |f(x, y) - f(x - 1, y)| + |f(x, y) - f(x, y - 1)|$$

0	0
-1	1

0	-1
0	1

直接差分算子

# 梯度算子

- ☐ Roberts算子
- ☐ Sobel算子
- ☐ Prewitt算子
- ☐ Kirsch算子

-1	0
0	1

0	-1
1	0

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

5	5	5
-3	0	-3
-3	-3	-3

-3	5	5
-3	0	5
-3	-3	-3

# 梯度算子

原始图像



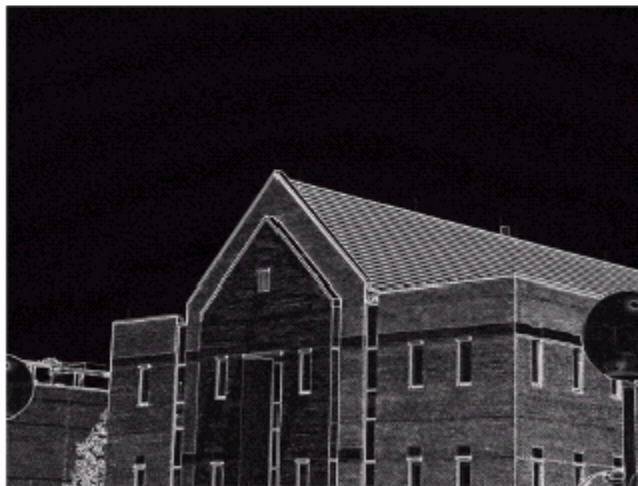
$|G_y|$



$|G_x|$



$|G_x| + |G_y|$



# 梯度算子

## □ Sobel算子

- 微分算子对图像噪声敏感，低通滤波可抑制噪声
- Sobel算子（垂直方向）：等价于先在图像水平的方向上进行低通滤波，然后在垂直的方向上做中心差分

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

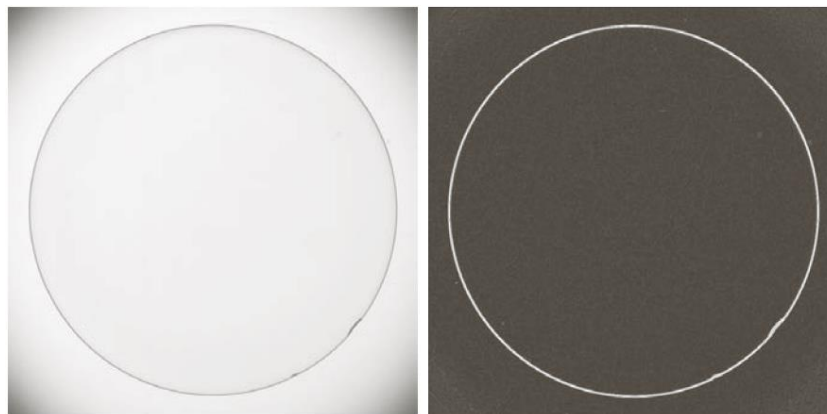
Sobel算子（垂直方向）

0	0	0
1	2	1
0	0	0

低通滤波

0	-1	0
0	0	0
0	1	0

中心差分



a b

**FIGURE 3.42**

(a) Optical image of contact lens (note defects on the boundary at 4 and 5 o'clock).  
(b) Sobel gradient.  
(Original image courtesy of Pete Sites, Perceptics Corporation.)



# 拉普拉斯算子

□ 一个二元图像函数 $f(x, y)$ 的拉普拉斯变换定义为:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

□ 几种常用的拉普拉斯算子:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

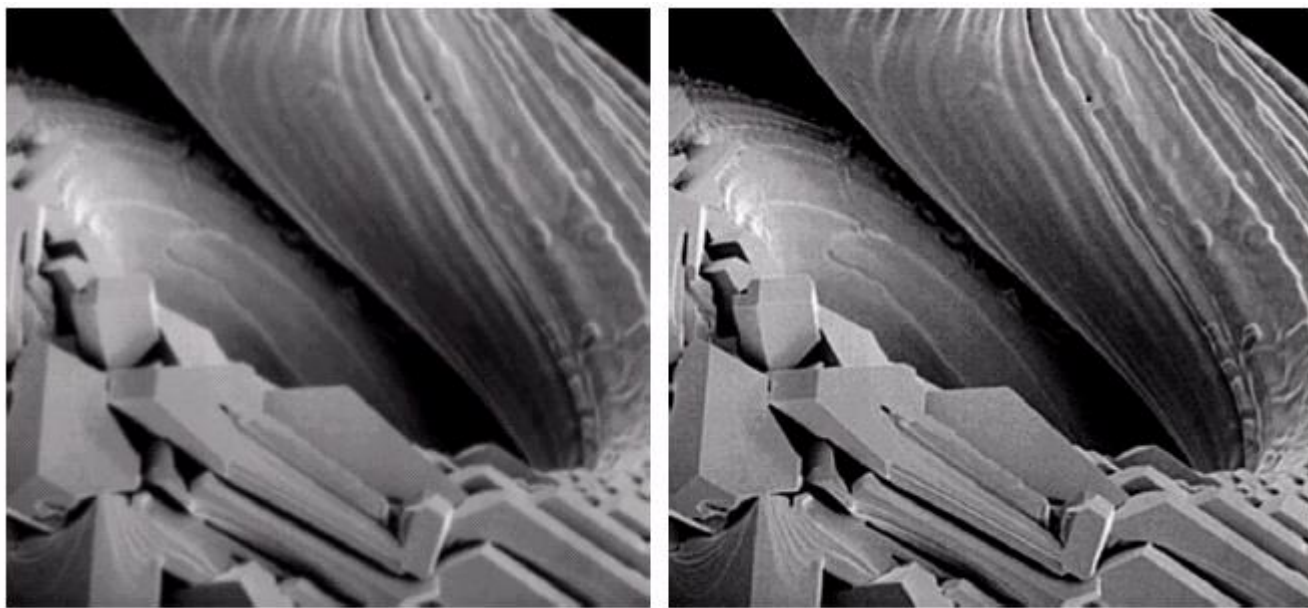
1	1	1
1	-8	1
1	1	1

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

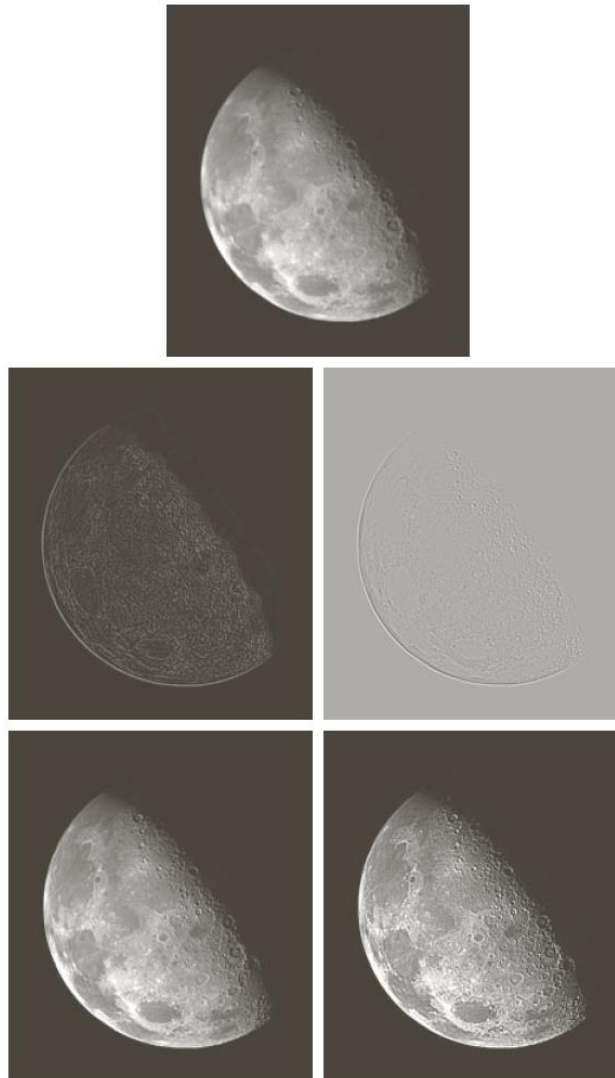
-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

# 使用拉普拉斯算子进行图像增强

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为负} \\ f(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为正} \end{cases}$$



# 使用拉普拉斯算子进行图像增强



a
b c
d e

**FIGURE 3.38**

(a) Blurred image of the North Pole of the moon.

(b) Laplacian without scaling.

(c) Laplacian with scaling. (d) Image sharpened using the mask in Fig. 3.37(a). (e) Result of using the mask in Fig. 3.37(b).

(Original image courtesy of NASA.)