Mathe Grundlagen

P. Häusermann, J. Hösli, N. Selvarajah, S. Walker

7. August 2020

Inhaltsverzeichnis

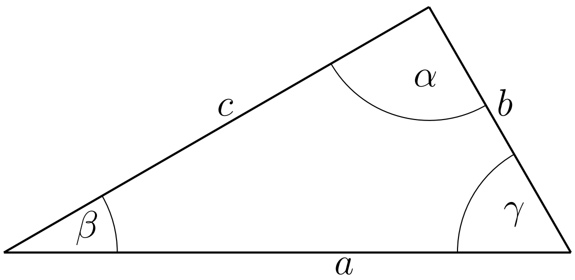
1 Trigonometrie und Hyperbelfunktionen

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Rechtwinkliges Dreieck:

$\sin(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$ $\tan(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
$\cos(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$ $\cot(\beta) = \frac{c}{b} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



1.1 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$
$\sinh(a) = -\sinh(-a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$
$\cosh(-a) = \cosh(a)$

1.2 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$
$\sinh(a \pm b) = \sinh(a) \cdot \cosh(b) \pm \cosh(a) \cdot \sinh(b)$
$\cosh(a \pm b) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) \mp \sinh(a) \cdot \sinh(b)$
$\tanh(a \pm b) = \dfrac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a) \cdot \tanh(b)}$

1.3 Euler-Formeln

$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$
$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$
$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$
$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j\sin(y))$
$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$

1.4 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$
$\sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

1.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \qquad \sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

1.6 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

1.7 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

1.8 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0°	0	0	1	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180°	π	0	-1	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sinh(0) = \tanh(0) = 0 \qquad \cosh(0) = 1$

2 Differenzieren

2.1 Wozu brauche ich die Ableitung?

Die Differenzialrechnung(Ableitung) ist ein wesentlicher Bestandteil der Analysis. Sie ist eng mit der Integralrechnung verwandt, mit der sie gemeinsam unter der Bezeichnung **"Infinitesimalrechnung"** zusammengefasst wird. Zentrales Thema der Differenzialrechnung ist die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. (Tangenten**steigung**)

2.2 Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{(cos(x))^2}$

2.3 Wichtige Regeln

Regel	**Funktion**	**Ableitung**
Ableitung eine Summe	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

2.4 Partielle Ableitung

In der Differentialrechnung ist eine partielle Ableitung die Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden als konstant gehalten.

Bsp.: $f(x, y, z) = cos(x) \cdot y + sin(z) \cdot x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -sin(x) \cdot y + sin(z) \qquad \rightarrow \text{partiell nach x abgeleitet}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = cos(x) \qquad \rightarrow \text{partiell nach y abgeleitet}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot cos(z) \qquad \rightarrow \text{partiell nach z abgeleitet}$$

2.5 Taylor-Polynom

Dieses Polynom kann verwendet werden, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes anzunähern. Es ist aufgrund seiner einfachen Anwendbarkeit und Nützlichkeit ein Hilfsmittel in vielen Ingenieur-, Sozial- und Naturwissenschaften geworden.

$(x_0 = \text{Entwicklungspunkt})$ $\quad f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}}{n!} h^n = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$
$h = x - x_0$

2.6 Bernoulli-de l'Hospital

Die Regel von **"de L'Hopital"** erlaubt es in vielen Fällen, den Grenzwert von Funktionen selbst dann noch zu bestimmen, wenn deren Funktionsterm beim Erreichen der betreffenden Grenze einen unbestimmten Ausdruck (bspw. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$) liefert.
$lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, dies gilt für: „$\frac{0}{0}$" 1. Regel, oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

2.7 Kurvenuntersuchungen

2.7.1 Monotonie

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
≥ 0					monoton wachsend
≤ 0					monoton fallend
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	> 0	streng monoton wachsend (falls n ungerade)
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	< 0	streng monoton falls (falls n ungerade)

2.7.2 Extremstelle

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
$= 0$	> 0				relatives Minimum, **Randstellen beachten**
$= 0$	< 0				relatives Maximum, **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	> 0	relatives Minimum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\cdots = 0$	< 0	relatives Maximum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
Zweite Variante Falls bei $f'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremstelle					

2.7.3 Konvexität - Krümmungsverhalten

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

2.7.4 Wendepunkte (Terassenpunkt)

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terassen- oder Sattelpunkt
Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt					

3 Integrieren

3.1 Wozu brauche ich die Integralrechnung?

Die Integralrechnung ist neben der Differentialgleichung der wichtigste Zweig der mathematischen Disziplin Analysis. Sie ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. (Quelle Wikipedia)

3.2 Stammfunktion

Jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion F nennt man Stammfunktion, wenn $F' = f$.
Umgangssprachlich nennt man dies **"aufleiten"** (Gegenteil von ableiten)

3.3 Leibniz- oder Integralschreibweise

$$I = \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

3.4 Bestimmtes Integral

Ein bestimmtes Integral besitzt obere und untere Grenzen. Die Integrationskonstante C verschwindet.
(siehe auch 3.3, Leibniz- oder Integralschreibweise (S. 9))

3.5 Unbestimmtes Integral

Im Unterschied zu einem bestimmten Integral besitzt ein unbestimmtes Integral **keine** Grenzen.

$$I = \int f(x)dx = F(x) + C$$

3.6 Wie löse ich ein Integral?

Sobald das Integral in der Leibnizform steht, gehe ich wie folgt vor:

3.6.1 Bestimmtes Integral

1. Stammfunktion der Funktion $f(x)$ bilden
2. Nacheinander die beiden Grenzen b und a in die Stammfunktion einsetzen
3. Lösung des Integrals: Die beiden eingesetzten Grenzen voneinander subtrahieren. $I = F(b) - F(a)$

3.6.2 Unbestimmtes Integral

1. Stammfunktion der Funktion $f(x)$ bilden
2. Lösung des Integrals: Stammfunktion + Integrationskonstante C

3.7 Wichtige Integrale

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
$\int 0dx$	C
$\int 1dx$	$x + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx$	$ln\lvert x\rvert + C$
$\int ln(x)dx$	$-x + x \cdot ln(x) + C$

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
$\int sin(x)dx$	$-cos(x) + C$
$\int cos(x)dx$	$sin(x) + C$
$\int tan(x)dx$	$-ln(\lvert cos(x)\rvert) + C$

3.8 Rechenregeln

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - (-1) \cdot \int_a^0 f(x)dx$

3.9 Partielle Integration

Sobald ich ein Produkt zweier Funktionen habe und davon das Integral berechnen möchte, bietet sich die **"Partielle Integration"** an.
Wie gehe ich vor:

1. Von der einen Funktion die Stammfunktion bilden
2. Multiplikation mit der anderen Funktion
3. Das Produkt wird subtrahiert mit dem Integral von der Stammfunktion mal die Ableitung der anderen Funktion

Bsp.: $\int x \cdot sin(x)dx = \int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx = -x \cdot cos(x) - \int 1 \cdot (-cos(x))dx = \underline{\underline{-x \cdot cos(x) + sin(x) + C}}$

3.10 Substitution

Hierzu ein erklärendes Beispiel:

Bsp.: $f(x) = 2x \cdot ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot ln(x^2)dx$

Lösung des Integrals durch Substitution:

1. Substitution $u(x) = x^2$
2. dx ersetzen $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$
3. Substitution der Grenzen:
   - untere Grenze: $u(1) = 1$
   - obere Grenze: $u(2) = 4$
4. In das Integral einsetzen und auflösen:
   $\int_1^4 2x \cdot ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 ln(u)du = \left[u \cdot ln(u) - u\right]_1^4 = \left[4 \cdot ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2.545}}$

3.11 Mittelwerte mittels Integral berechnen

Linearer Mittelwert	**Quadratischer Mittelwert**
$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$	$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)^2 dx}$

3.12 Einige unbestimmte Integrale

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x+\frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2 + 2bx + c$
$\int \sin^2 axdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 axdx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n axdx = -\frac{sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n axdx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan axdx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot axdx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n \sin axdx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n \cos axdx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln xdx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha\cdot\ln xdx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	

4 Potenzen und Logarithmen Bronstein s.8

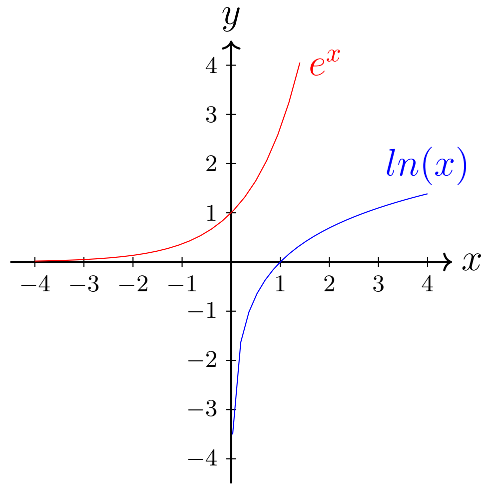
4.1 Potenzen

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ $\quad$ $a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$



4.2 Logarithmen

$a^x = b \rightarrow x = \log_a(b)$

$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ $\quad$ $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

$\log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x)$ $\quad$ $\log_b(\frac{x}{y}) = -\log_b(\frac{y}{x})$

$\log_b(x^r) = r \log_b(x)$ $\quad$ $\log_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_b(x)$

$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ $\quad$ $\log_e(x) = \ln(x)$

4.3 dB-Rechnung

Linear nach Dezibel(dB):

Leistung

$$P_{dB} = 10 \cdot log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Amplituden

$$A_{dB} = 20 \cdot log\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

Dezibel(dB) nach Linear:

Leistung

$$\frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{P_{dB}}{10}}$$

Amplituden

$$\frac{A_2}{A_1} = 10^{\frac{A_{dB}}{20}}$$

dB	P_2/P_1	A_2/A_1
100	10^{10}	10^5
20	100.0	10.00
10	10.00	3.162
6.0	3.981	1.995
3.0	1.995	1.413
0.0	1.000	1.000
-3.0	0.501	0.708
-6.0	0.251	0.501
-10	0.100	0.316
-20	0.010	0.100
-100	10^{-10}	10^{-5}

5 Komplexe Zahlen

5.1 Definition

Die Menge der reellen Zahlen wird auf die Menge der komplexen Zahlen erweitert. $\Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Komplexe Zahl in Normalform:

$$\boxed{z = \underbrace{z_1}_{\text{Realteil}} + \underbrace{z_2}_{\text{Imaginärteil}} \cdot j}$$

j = imaginäre Einheit

Komplexe Zahl in Polarform:

$$\boxed{z = \underbrace{|z|}_{Betrag} \cdot \underbrace{[cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi)]}_{Winkel} = r \cdot cjs(\varphi)}$$

φ = Argument $arg(z)$ $\qquad r = |z|$ = Betrag

Umrechnung Normal → Polar: ($Z_1 \in \mathbb{R}$, $Z_2 \in \mathbb{I}$)

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

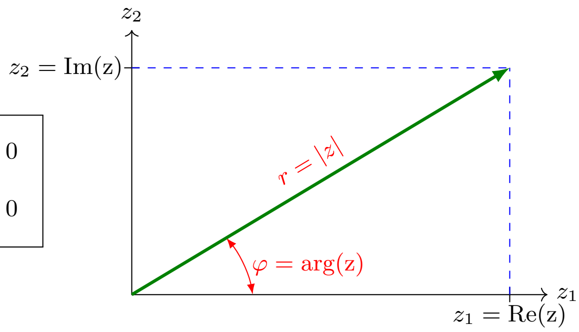
$$\boxed{|z| = r = \sqrt{z \cdot \overline{z}}}$$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right) & \text{für: } z_1 \geq 0 \\ arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \pi & \text{für: } z_1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} arctan\left(\frac{z_1}{r}\right) & \text{für: } z_2 \geq 0 \\ -arctan\left(\frac{z_1}{r}\right) & \text{für: } z_2 < 0 \end{cases}}$$

Umrechnung Polar → Normal:

$$\boxed{z_1 = r \cdot cos(\varphi)} \quad \boxed{z_2 = r \cdot sin(\varphi)}$$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} arctan\left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{R}}\right) & \text{für: } \mathbb{R} \geq 0 \\ arctan\left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{R}}\right) + \pi & \text{für: } \mathbb{R} < 0 \end{cases}}$$



Sonstige Formeln:

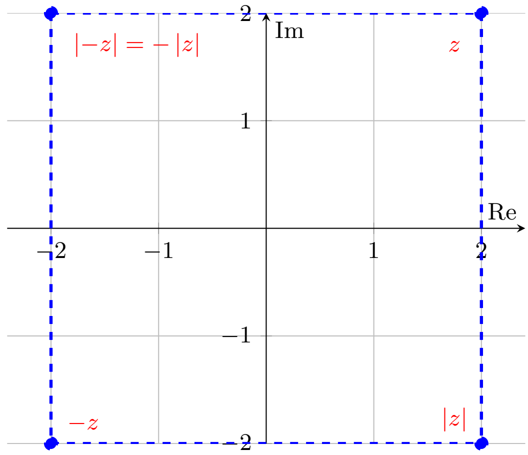
Moivre'sche Formel	$cjs^n(\varphi) = (cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi))^n = cos(n\varphi) + j \cdot sin(n\varphi) \quad (n \in \mathbb{R})$

Euler Formel	$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$ $e^{jn\pi} = e^{-jn\pi} = (-1)^n$	$e^{j2\pi} = e^{-j2\pi} = 1$ $e^{j3\pi} = e^{-j3\pi} = -1$	$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$	$j^j = e^{-\frac{\pi}{2}} + 2\pi k$	
Potenzen von j	$j = \sqrt{-1}$ $j^{-1} = -j$	$(-j)^2 = j^2 = -1$ $j^{-2} = -1$	$j^3 = -j$ $j^{-3} = j$	$(-j)^4 = j^4 = 1$ $j^{-4} = 1$	$j^5 = j^1$ $j^{-5} = j^{-1}$

5.2 Konjugierte-komplexe Zahlen

$z = z_1 + j \cdot z_2 \xrightarrow{konjugieren} \overline{z} = z_1 - j \cdot z_2$

$\overline{\overline{a}}$	$=$	a	$\overline{-a}$	$=$	$-\overline{a}$
$\overline{a+b}$	$=$	$\overline{a}+\overline{b}$	$\overline{a-b}$	$=$	$\overline{a}-\overline{b}$
$\overline{a \cdot b}$	$=$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$\overline{a : b}$	$=$	$\overline{a} : \overline{b}$
$\frac{a+\overline{a}}{2}$	$=$	$Re(a)$	$\frac{a-\overline{a}}{2j}$	$=$	$Im(a)$
$z \cdot \overline{z}$	$=$	$\lvert z\rvert^2$	$(x+jy) \cdot (x-jy)$	$=$	x^2+y^2



5.3 Addition, Subtraktion

Normalform:

$\boxed{a + b = (a_1 + b_1) + j \cdot (a_2 + b_2)}$

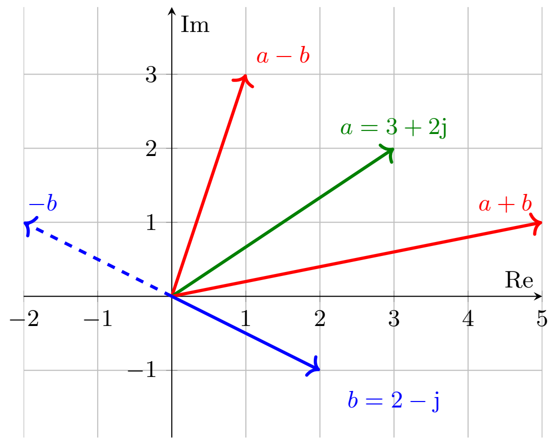
$\boxed{a - b = (a_1 - b_1) + j \cdot (a_2 - b_2)}$

5.4 Multiplikation, Division

Normalform:

$\boxed{a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)}$

$$\boxed{a : b = \frac{(a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2)}{b_1^2 + b_2^2} + j \cdot \frac{(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)}{b_1^2 + b_2^2}}$$

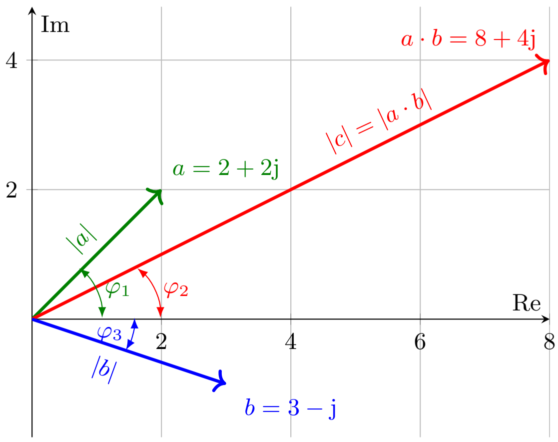


5.5 Multiplikation in Polarform

$c = a \cdot b = |c| \cdot cjs(\varphi_c)$

$\boxed{|c| = |a| \cdot |b| = |a \cdot b|}$ $\boxed{\varphi_c = \varphi_a + \varphi_b}$

$\boxed{arg(c) = arg(a \cdot b) = arg(a) + arg(b)}$

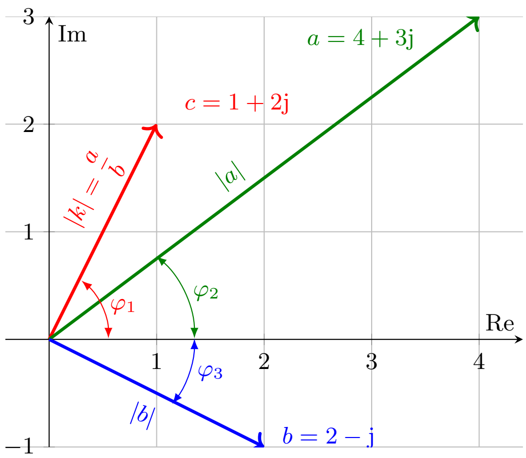


5.6 Division in Polarform

$c = \frac{a}{b} = |c| \cdot cjs(\varphi_c)$

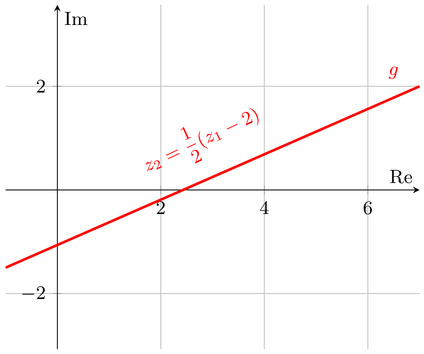
$\boxed{|c| = \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|}$ $\boxed{\varphi_c = \varphi_a - \varphi_b}$

$$\boxed{arg(c) = arg\left(\frac{a}{b}\right) = arg(a) - arg(b)}$$

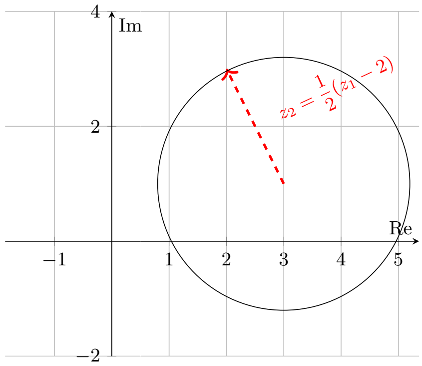


5.7 Planare Geometrie mit komplexen Zahlen

Gerade:



Kreis:

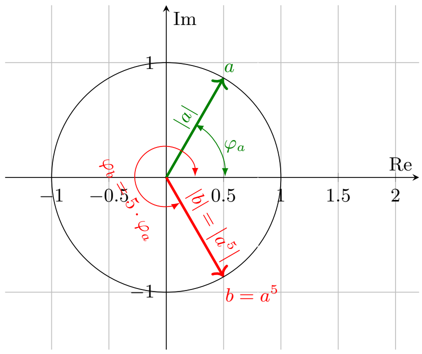


5.8 Potenzen und n-te (Einheits-)Wurzeln

5.8.1 Potenzen

$$\boxed{z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{\text{n-Faktoren}}, \quad z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= |z|^n \cdot [cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi)]^n \\ &= r^n \cdot [cos(n\varphi) + j \cdot sin(n\varphi)] \end{aligned}}$$



5.8.2 n-te Wurzeln

$\boxed{\text{Di herkömmlichen Wurzelgesetze wie z.B. } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ gelten nicht mehr!}}$

$z = \sqrt[n]{a} = |z| \cdot cjs(\varphi)$

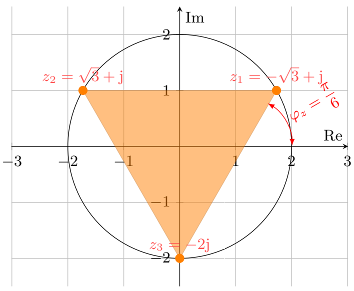
$\boxed{|z| = \sqrt[n]{|a|}}$

$\boxed{\varphi_z = \frac{\varphi_a}{n}}$

$\boxed{\arg(z) = \frac{\arg(a)}{n}}$

$\Rightarrow$ **n-Lösungen!**

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_a}{n}\right) \\ z_2 = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_a}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \\ z_3 = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_a}{n} + 2\frac{2\pi}{n}\right) \\ \dots \\ z_n = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_a}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) \end{cases}$$



5.8.3 n-te Einheitswurzel

$$\boxed{\begin{aligned} &z = \sqrt[n]{1} = |z| \cdot \text{cjs}(\varphi_z) = \\ &|z| \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_z + k2\pi}{n}\right) = \\ &\sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cjs}\left(\frac{\varphi_z + k2\pi}{n}\right) \end{aligned}}$$

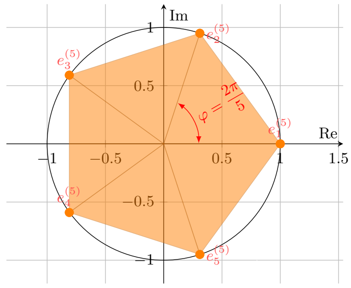
$\Rightarrow$ **n-Lösungen!**

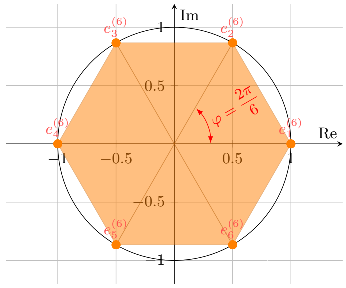
$$\boxed{z_n = e_k^{(n)} = 1 \cdot \text{cjs}\left(\text{(k-1)} \cdot \frac{2\pi}{\text{n}}\right)}$$

mit $k = 1, 2, \cdots, n$

Es gilt:

$e_1^{(n)} = 1$
$e_2^{(n)} = e_n^{(n)}$
$e_3^{(n)} = e_{n-1}^{(n)}$
...





5.9 Nullstellen von Polynomen

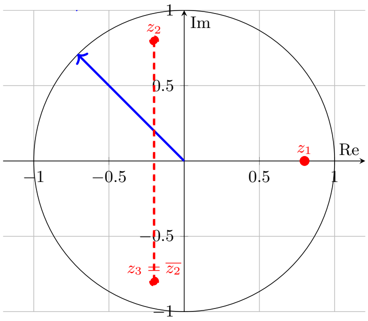
Ein komplexes Polynom $\mathrm{p}(z)$ vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wenn diese in ihrem Vielfachen gezählt werden.
$\Rightarrow \quad p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$
mit: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$

5.9.1 Polynome mit reellen Koeffizienten

- komplexe Nullstellen treten immer als konjugiert-komplexe Paare $(z_0; \overline{z_0})$ mit gleichem Vielfache k auf.
- Für die zwei Faktoren gilt $\Rightarrow \quad (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0) \cdot z + |z_0|^2$
- Im reellen zerfällt p(z) in **reelle Linear- und Quadratfunktionen**.
- Ist das Polynom von **ungeradem Grad** $\Rightarrow$ hat es **mindestens eine reelle Nullstelle**.

5.9.2 Berechnung der Nullstellen

Alle Nullstellen des Polynoms $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ liegen in der Gauss'schen Zahlenebene in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius:
$$r = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| = \left|\frac{a_0}{a_n}\right| + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_n}{a_n}\right|$$



Quadratische Polynome:
$p(z) = az^2 + bz + c = 0$
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Polynome mit $a_n = 1, a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0, a_0 = a$:
$p(z) = z^n + a = 0$
$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \mathrm{cjs}\left(\frac{\varphi_a + \pi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$
mit $k = 1, 2, \ldots, n$

pq-Formel:
$x^2 + px + q = 0$
$$x_{1,2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

5.10 Komplexe Exponential- und Logarithmusfunktionen

5.10.1 e-Funktion

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi) = \mathrm{cjs}(\varphi)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^{z_1 + \mathrm{j}z_2} \\ &= \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}z_2} \\ &= \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{cjs}(z_2) \end{aligned}} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Betrag:} & |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{z_1} \\ \text{Argument :} & \arg(e^z) = z_2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Potenzgesetze gelten weiterhin!
$\mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} \quad | \quad \mathrm{e}^a : \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a-b} \quad | \quad (\mathrm{e}^a)^k = \mathrm{e}^{a \cdot k}$

5.10.2 Logarithmusfunktionen Ln

$z = \mathrm{Ln}(a) = z_1 + \mathbf{j}z_2$

$\boxed{z_1 = \ln(|a|)}$ $\boxed{z_2 = \varphi_a = \arg(a)}$

$\boxed{\Rightarrow \quad \mathrm{Ln}(a) = \ln(|a|) + j\arg(a)}$

Lösungen von Ln sind ∞-wertig:

$\boxed{\mathrm{Ln}(a) = \ln(|a|) + \mathrm{j}(\arg(a) + 2k\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{a := z = z_1 + \mathrm{j}z_2 = x + \mathrm{j}y}$

$\Rightarrow$ Logarithmusgesetze sind problematisch, da es 1-viele Lösungen gibt!
Es können nur noch Kongruenzen aufgestellt werden (stimmen bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi\mathrm{j}$
$\mathrm{Ln}(a \cdot b) \overset{\mathrm{mod}\ 2\pi\mathrm{j}}{\equiv} \mathrm{Ln}(a) + \mathrm{Ln}(b) \quad | \quad \mathrm{Ln}(a : b) \overset{\mathrm{mod}\ 2\pi\mathrm{j}}{=} \mathrm{Ln}(a) - \mathrm{Ln}(b) \quad | \quad \mathrm{Ln}\left(a^k\right) \overset{\mathrm{mod}\ 2\pi\mathrm{j}}{=} k \cdot \mathrm{Ln}(a)$

5.10.3 Allgemeine Potenzen

$\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b\cdot\ln(a)}}$ $\Rightarrow$ **ebenfalls ∞-wertige Lösungen!** $D = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} D > 0: & \text{2 Lösungen} \\ D = 0: & \text{1 Lösung} \\ D < 0: & \text{keine Lösung} \end{cases}$

$$\boxed{z = \mathrm{e}^{\mathrm{Ln}(z)} = \mathrm{e}^{\ln(z)+\mathrm{j}\cdot\arg(z)} = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln(z)}}_{|z|}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\arg(z)}}_{\frac{z}{|z|}} = |z|\cdot\frac{z}{|z|}}$$

5.11 Komplexe Trigonometrische-Funktionen

Trigo: $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}}$ $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}}$ $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -j\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}}$

$\boxed{\sin(\mathrm{j}\alpha) = \mathrm{j}\sinh(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\mathrm{j}\alpha) = \cosh(\alpha)}$

Hyperbel: $\boxed{\sinh(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}}{2}}$ $\boxed{\cosh(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha}}{2}}$ $\boxed{\tanh(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha}}}$

5.12 Komplexe Sinus-Schwingung

Reelle Schwingung:

$\boxed{z(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)}$

Amplitude: A

Nullphasenwinkel: φ

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

Periodendauer: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Komplexe Schwingung

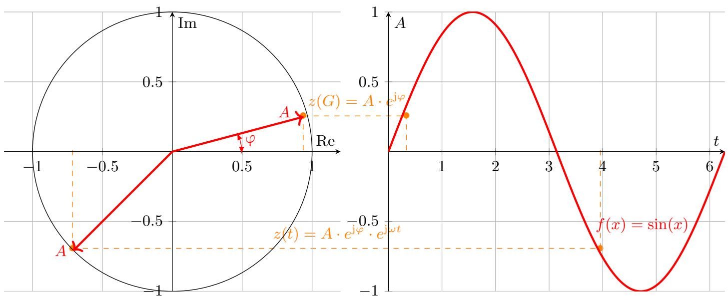
$\boxed{z(t) = \mathrm{Im}\left[A\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right] = \mathrm{Im}\left[A\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]}$

Komplexe Amplitude (zeitunabhängig): $A\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

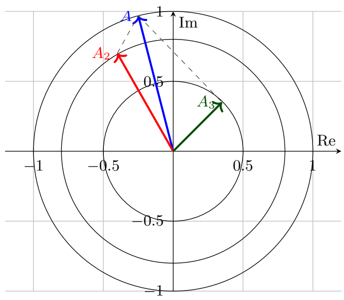
Zeitfunktion (zeitabhängig): $\left|e^{j\omega t}\right| = 1$

5.12.1 Überlagerung von zwei Seiten

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1(t) + z_2(t) \\ &= A_1\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\cdot\sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= \mathrm{Im}\left[A_1\cdot\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_1)}\right] + \mathrm{Im}\left[A_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_2)}\right] \\ &= \mathrm{Im}\left[A_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + A_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ &= \mathrm{Im}\left[\left(A_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + A_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \end{aligned}$$

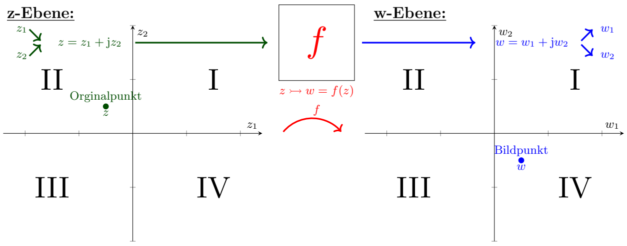


$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{reelle Amplitude} & A = \left|A_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + A_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\right| \\ \text{Nullphasenwinkel} & \varphi = \arg\left(A_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + A_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\right) \end{array}}$$



6 Komplexe Funktion, Abbildungen

6.1 Definition



6.2 Winkeltreue

Komplexe Funktion $f(z)$ ist in allen Punkten winkeltreu, wo gibt: $\boxed{f'(z) \neq 0}$

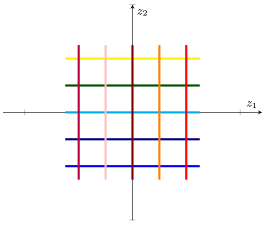
Sie bewirkt **lokal eine Drehstreckung:**

Streckungsfaktor: $\boxed{|f'(z)|}$

Drehwinkel: $\boxed{\arg(z)}$

Verschieben: $\boxed{f'(z)}$

6.3 Parameter- und Koordinatengleichung



waagrechte Gitternetzlinien durch Punkt $(0; c_2)$**:**

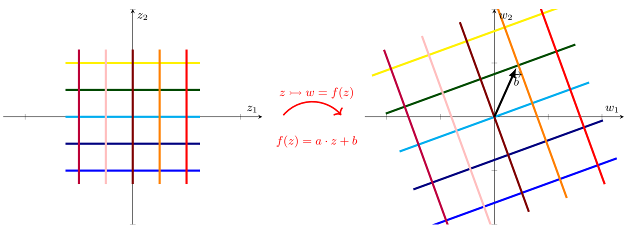
$\boxed{z = \mathrm{z}(r) = r + \mathrm{j}c_2} \xrightarrow{f(z)} \boxed{w = \mathrm{w}(r) = f(\mathrm{z}(r)) = f(r + \mathrm{j}c_2)}$ mit $r \subset \mathbb{R}$

senkrechte Gitternetzlinien durch Punkt $(c_1; 0)$**:**

$\boxed{z = \mathrm{z}(r) = c_1 + \mathrm{j}r} \xrightarrow{f(z)} \boxed{w = \mathrm{w}(r) = f(\mathrm{z}(r)) = f(c_1 + \mathrm{j}r)}$ mit $r \subset \mathbb{R}$

Koordinatengleichung: $\boxed{\left| \begin{array}{l} w_1 = \mathrm{Re}([f(\mathrm{z}(r))]) \\ w_2 = \mathrm{Re}([f(\mathrm{z}(r))]) \end{array} \right|} \Rightarrow$ Parameter r eliminieren, um Koordinatengleichung zu erhalten.

6.4 Lineare Funktion



Die lineare Funktion $w = f(z) = az + b$ bewirkt:

Drehstreckung mit:	Streckungsfaktor	$\lvert a \rvert$
	Drehwinkel	$\arg(a)$
	Zentrum	$\frac{b}{1-a}$
Drehstreckung mit:	Streckungsfaktor	$\lvert a \rvert$
	Drehwinkel	$\arg(a)$
und Translation um:	Ortsvektor	b

Parametergleichung:

Waagrechte $\xrightarrow{f(z)}$ $w = w(r) = \underbrace{(\mathrm{j}ac_2 + b)}_{Startvektor} + \underbrace{r \cdot a}_{Richtungsvektor}$

Senkrechte $\xrightarrow{f(z)}$ $w = w(r) = \underbrace{(ac_1 + b)}_{Startvektor} + \underbrace{r \cdot \mathrm{j}a}_{Richtungsvektor}$

Parametergleichung:

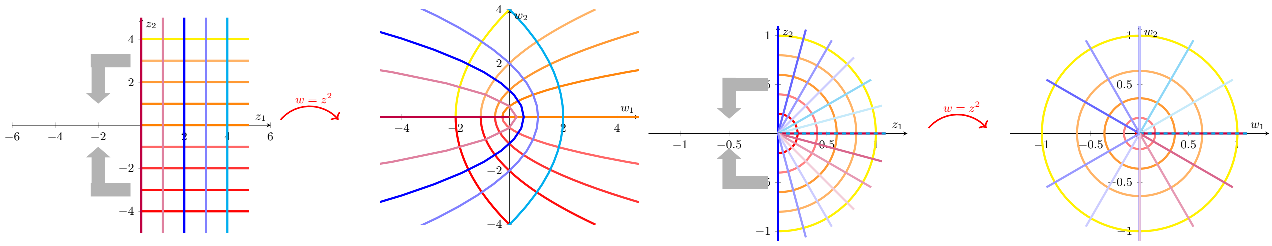
$f'(z) = a$

$\Rightarrow$ für $a \neq 0$ ist $f(z) = az + b$ **überall winkeltreu!**

7 Potenzfunktion und Wurzelfunktion

7.1 Quadratfunktion z^2 und Wurzelfunktion $\sqrt{z}$

Beim Quadrieren wird das **Argument verdoppelt** $\Rightarrow$ halbe z-Ebene füllt bereits die ganze w-Ebene aus.



Die Quadratfunktion $w = f(z) = z^2$ bildet die z-Ebene bijektiv **auf eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche ab.**

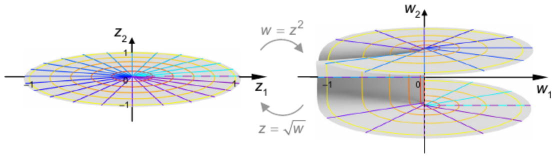


Abbildung 1: Quelle: Skript KomFour

Winkeltreue:

$f'(z) = 2z$	$\Rightarrow$	**winkeltreu** ausser bei $z = 0$
$f^{-1}(w) = \sqrt{w}$	$\Rightarrow$	**winkeltreu** ausser bei $w = 0$

Winkeltreu → Vorgehen:

1. $\frac{d}{dz}(f(z))$
2. $f'(z) = 0$
3. umformen ⇒ Lösung: nicht winkeltreu

7.2 Potenzfunktion z^n und Wurzelfunktion $\sqrt[n]{z}$

Die Potenzfunktion $w = f(z) = z^n$ bildet die z-Ebene bijektiv **auf eine n-blättrige Riemann'sche Fläche ab.**

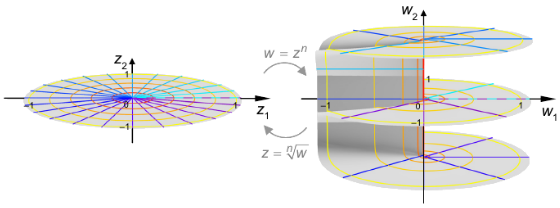


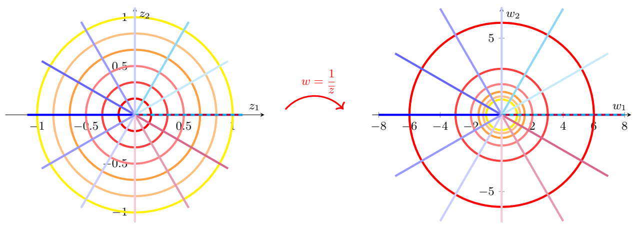
Abbildung 2: Quelle: Skript KomFour

8 Kreisspiegelung

$\boxed{w = \overline{f}(z) = \frac{1}{z}}$ mit: $|w| = \frac{1}{|z|}$; $\quad -\arg(w) = \arg(z)$

⇒ **Kreisspiegelung bedeutet: symmetrisch bezüglich des Einheitskreises (Reziprokwert)**

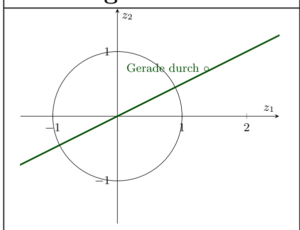
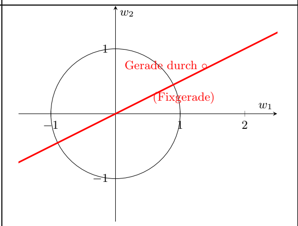
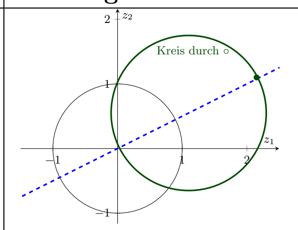
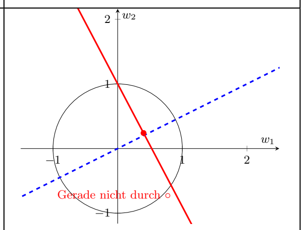
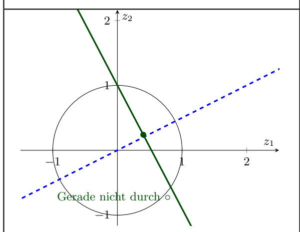
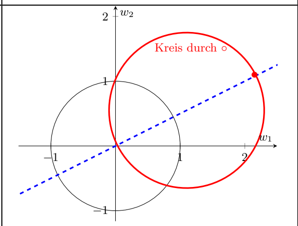
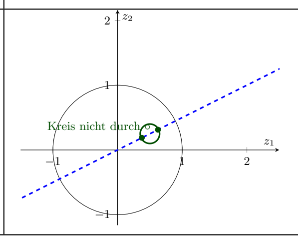
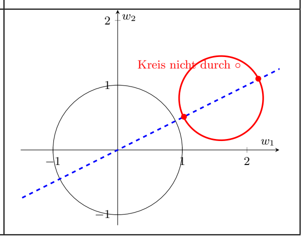
Das Innere des Einheitskreises wird auf das Äussere abgebildet und umgekehrt.



8.1 Regeln bei der Kreisspiegelung

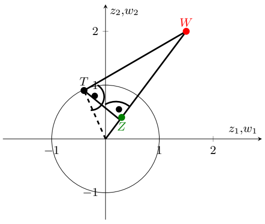
Winkeltreue: Die Kreisspiegelung ist **überall winkeltreu!**

Kreistreue: Die Kreisspiegelung ist kreistreu (Geraden sind Kreise mit $r = \infty$)

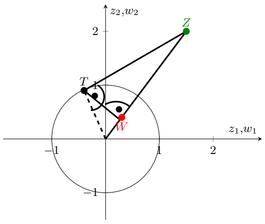
Originalkurve:	Bildkurve:		Originalkurve:	Bildkurve:
				
				

8.2 Konstruktion von Bildpunkten

z innerhalb des Einheitskreises:



z ausserhalb des Einheitskreises:

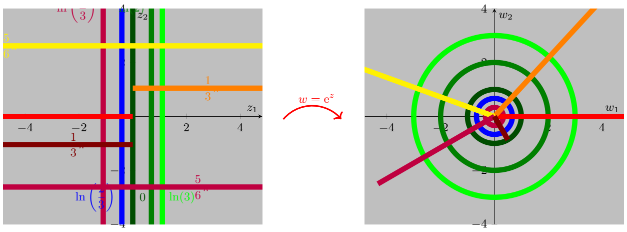


8.3 Exponentialfunktion e^z

$\boxed{\mathrm{e} = \mathrm{e}_1^z + \mathrm{cjs}\,(z_2)}$

Waagrechte $\rightarrow$ **Strahlen**

Senkrechte $\rightarrow$ **Kreise um** O



9 Lineare Algebra

9.1 Wichtige Matrizen

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2 Matrizenprodukt

Die **Bedingung** für eine Matrixmultiplikation ist, dass die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmen muss.

$\boxed{\text{Zeile mal Spalte}}$

Rechenregeln:

- Die Faktoren dürfen nicht vertauscht werden, denn $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Transponieren)
- $(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(B \cdot A)$

9.3 Skalarprodukt

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Der **Winkel** zwischen den Vektoren lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)}$

Sind die Vektoren **Orthogonal** zueinander, dann ist das Skalarprodukt gleich **0**.

9.4 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Zwischenwinkel: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

9.5 Gauss

1. Variable Isolieren * (Zeile dividieren dass eine 1 heraus kommt)
2. Variable Eliminieren * (ein Vielfaches der Zeile von den Anderen abziehen damit eine 0 heraus kommt.)
3. weitermachen bis Einheitsmatrix heraus kommt.

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 10 \\ 6x & + & 5y & + & 4z & = & 32 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 32 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -7 & -14 & -28 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Die Lösung ist somit $x = 3$,$y = 2$ und $z = 1$.

9.6 Determinante

9.6.1 Eigenschaften

- Hat die Matrix A eine Nullzeile/Nullspalte, dann ist die $\det(A) = 0$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten, dann ist $\det(A) = 0$
- Ist A regulär, $det(A) \neq 0$
  Ist A singulär, $det(A) = 0$
- Vertauscht man zwei Zeilen/Spalten, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Beschreibt eine Fläche eines Parallelogrammes (2D) bzw. ein Volumen eines Parallelepipeds (3D).
- Kann nur ermittelt werden, wenn die Matrix exkl. Lösungen quadratisch ist.

9.6.2 Wichtige Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi}_{\text{Sarrus'sche Formel}}$$

9.6.3 Determinante mit Gauss-Verfahren

Die Determinante wird berechnet indem einfach die Pivot-Elemente multipliziert werden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * 1 * (-7) * 1 * 1 = -14$$

Als erstes muss die erste Zeile durch die eingekreiste Zahl dividiert werden. Danach werden die 1. Zeile soviel mal von den Anderen abgezogen, dass überall eine 0 steht.

9.7 Inverse

Eine Matrix kann nur Invertiert werden wenn $\det(A) \neq 0$.

9.7.1 Eigenschaften

- $A \cdot A^{-1} = E$ $\quad$ E ist dabei die Einheitsmatrix
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$
- $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1} \quad c \in \mathbb{R}$
- $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$

9.7.2 Formeln

2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3x3 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22^{-1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

9.8 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wenn eine Abbildung auf denselben Punkt fällt ($\vec{v} = \vec{v}'$), nennt man dies Eigenfixpunkt. Der Eigenvektor $\vec{v}$ zeigt nun in diese Richtung (als Gerade) und der Eigenwert λ gibt den Faktor an, mit der in diese Richtung gezeigt wird.

9.8.1 Eigenwerte berechnen

Um die Eigenwerte zu berechnen muss die folgende Gleichung gelöst werden: $det(A - \lambda E) = 0$.
Die Lösung der Gleichung (λ) sind die Eigenwerte.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = 4$$

9.8.2 Eigenvektoren berechnen

Für jeden Eigenwert λ_i Gleichungssystem aufstellen ($(A - \lambda_i E)\vec{v_i} = 0$) und mit Gauss auflösen $\Rightarrow$ eine Zeile verschwindet $\Rightarrow \infty$ Lösungen $\Rightarrow$ Wert von verschwundener Zeile frei wählbar.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \vec{v_1} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 \cdot x_1 & + & 2 \cdot y_1 & = & 0 \\ 1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot y_1 & = & 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

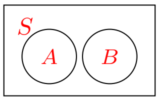
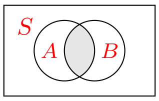
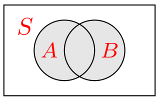
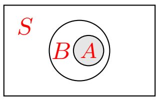
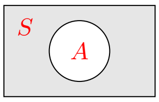
$$\begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \vec{v_2} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot y_2 & = & 0 \\ 1 \cdot x_2 & + & -2 \cdot y_2 & = & 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10 Wahrscheinlichkeit und Statistik

10.1 Zufallsexperiment

Experiment	Beobachtungsprozess, Ergebnis anschliessend ausgewertet. Ergebnis zuvor unbestimmt
Elementarereignis (λ)	Einzelne Resultate des Experiments
Ereignis	Einzelne Versuchsausgänge zusammengefasst (Beispiel Gerade Zahlen)
Ergebnisraum (S)	Alle möglichen Versuchsausgänge
Disjunkt	Ereignisse sind disjunkt, wenn sie keine gemeinsame Elemente beinhalten.

10.2 Verknüpfung von Ereignissen

Begriff	Beschreibung	Bild	Modell
Sicheres Ereignis	tritt immer ein		S
Unmögliches Ereignis	kann nicht eintreten		$\emptyset = \{\}$
Disjunkte Ereignisse	Keine gemeinsame Elemente		$A \cap B = \emptyset$
A und B	Schnittmenge		$A \cap B$
A oder B	Vereinigung		$A \cup B$
A hat B zur folge	A ist in B enthalten		$A \subset B$
nicht A	Komplementär Ereignis		$\bar{A} = S \setminus A$

$\bar{S} = \emptyset$
$\bar{\emptyset} = S$
$S \cup A = S$
$S \cap A = A$
$A \cup \bar{A} = S$
$A \cap \bar{A} = S$
$\bar{\bar{A}} = A$

10.3 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Bei der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen handelt sich um eine Funktion $P(A)$ welche jedem Ereignis $A \subset S$ eine reelle Zahl zuweist.

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}}$$

10.3.1 Axiomen

$P(A) \geq 0$
$P(S) = 1$

falls A und B disjunkt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(\emptyset) = 0$
$B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)$

$P(A) \leq 1$

falls A und B nicht disjunkt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

10.3.2 Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment bei welchem die endliche Anzahl von mögliche Ausgänge alle gleich häufig vorkommen.

$$\boxed{P(\lambda_i) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n}$$

10.3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}} = \underbrace{\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)}_{\text{nur wenn unabhängig}}$$

$P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit das ein das Ereignis B eintritt unter der Voraussetzung das A bereits eingetroffen ist.

10.3.4 Satz von Bayes

Tauscht die Ereignisse der Bedingten Wahrscheinlichkeit.

$$\boxed{P(B \mid A) = P(A \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}}$$

10.3.5 Unabhängige Ereignisse

Für sie gilt: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Die Tatsache, dass A eingetreten ist, hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von B.
Wenn Ereignisse nicht gleichzeitig eintreten können, so sind sie abhängig.

10.3.6 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Die Ereignisse B_i müssen disjunkt sein.

10.4 Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X(\lambda)$ ist eine Funktion die jedem Ergebnis λ_i eine reelle Zahl zuweist.

10.4.1 Zweidimensionale Zufallsvariable

Die zwei Zufallsvariablen $X(\lambda)$ und $Y(\lambda)$ weisen jedem Ergebnis λ_i des Ergebnisraums S zwei reelle Zahlen zu. Diese zwei Zufallsvariablen können voneinander abhängig oder unabhängig sein. Bsp: Prüfungsnote und Erfolgserlebnis der Studenten.

10.4.2 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ gibt an, welcher statistische Anteil von Ergebnissen der Zufallsvariable $X(\lambda)$ einen kleineren Wert als x aufweist.

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)} \qquad \text{für } -\infty < x < \infty$$

Eigenschaften:

$0 \leq F_X(x) \leq 1$
$F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ für $x_1 < x_2$

$F_X(-\infty) = 0$
$F_X(+\infty) = 1$

10.4.3 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Stetige Zufallsvariable:
Die Dichtefunktion für eine Stetige Zufallsvariable ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

Eigenschaften:
$f_X(x)$ ist stückweise Stetig
$f_X(x) \geq 0$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
$P(a < X \leq b) = \int\limits_{a^+}^{b} f_X(x)dx$

Diskrete Zufallsvariable:
Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von diskreten Zufallsvariablen weist Sprungstellen auf für diese Stellen existiert dann keine Ableitung. Dieses Problem wird mit Dirac-Implusen welche gerade mit der Sprunghöhe von $F_X(x)$ gewichtet wird.

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{1}^{n}(F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)) \cdot \delta(x - x_i)}$$

10.4.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert μ_X gibt den Mittelwert der Zufallsvariable $X(\lambda)$ wieder wobei die Werte $X(\lambda) = x$ mit den Auftretungswahrscheinlichkeit $p_X(x) = P(X = x)$ gewichtet werden.

Diskret

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i)}$$

Stetig

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx}$$

10.4.5 Zweites und n-tes Moment

Diskret

$$\boxed{E[X^2] = \sum_i {x_i}^2 \cdot p_X(x_i)}$$

$$E[X^n] = \sum_i {x_i}^n \cdot p_X(x_i)$$

Stetig

$$\boxed{E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx}$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\,dx$$

10.4.6 Varianz und Standartabweichung

Bei der Varianz handelt es sich um ein statistisches Leistungsmass, welche die mittlere Abweichung vom Erwartungswert ausdrückt.

$$\boxed{\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu_X)^2]}$$

Diskret

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_X(x_i)$$

Stetig

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

Standartabweichung:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{Var[X]}}$$

10.4.7 Korrelation

Korrelation ist ein statistische Kennwert zweier Zufallsvariablen X und Y, welcher einen allfälligen linearen Zusammenhang ausdrückt. Die Korrelation ist eine statistische Kreuzleistung.

Diskret

$$\boxed{m_{11} = E[X \cdot Y] = \sum_i \sum_k x_i \cdot y_k \cdot p_{XY}(x_i, y_k)}$$

Stetig

$$\boxed{m_{11} = E[X \cdot Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X Y(x, y)\,dx\,dy}$$

Eigenschaften:

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind zueinander orthogonal falls $m_{11} = 0$ ist
Wenn X und Y beide Mehrheitlich das gleiche Vorzeichen haben, dann ist m_{11} positiv. Ist das Vorzeichen mehrheitlich verschieden, dann ist m_{11} negativ.

10.4.8 Kovarianz

Die Kovarianz ist grundsätzlich das selbe wie bei der Korrelation. Nur werden die Zufallszahlen durch ihren Erwartungswert bereinigt

$$\boxed{\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]}$$

Diskret

$$\sigma_{XY} = \sum_k \sum_i (x_i - \mu_X) \cdot (y_K - \mu_Y) \cdot p_{XY}(x_i, y_k)$$

Stetig

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot f_{XY}(x, y)\,dx\,dy$$

10.5 Wahrscheinlichkeitsverteilung

10.5.1 Gleichverteilung

Diskret

$$\boxed{p_X(x_i) = \frac{1}{n}}$$

Stetig

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{b - a}}$$

10.5.2 Binomialverteilung

Wird angewendet bei einem Experiment mit nur zwei Ausgängen (Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p tritt ein, Ereignis tritt nicht ein) zu beschreiben. Die Binomialverteilung gibt an wie Wahrscheindlich es ist, mit n Versuche k-mal erfolgreich zu sein.

$$\boxed{\begin{array}{l} p_X(k) = P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} \\ \mu_X = n \cdot p \\ \sigma^2 = \mathrm{var}(X) = n \cdot p(1-p) \end{array}}$$

n: Versuche k: k-mal erfolgreich p: Wahrscheinlichkeit

Achtung!: Für seltene Ereignisse Poissonverteilung verwenden!

10.5.3 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung entspricht der Binomialverteilung für seltene Ereignisse (n sehr gross und die Wahrscheinlichkeit p sehr klein).

$$\boxed{p_X(k) = P(X=k) = e^{-n \cdot p} \cdot \frac{(n \cdot p)^k}{k!}} \qquad E(X) = \mu_X = n \cdot p \qquad var(X) = \sigma^2 = n \cdot p$$

10.5.4 Gaussverteilung

Gaussverteilung oder Normalverteilung

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Die Verteilungsfunktion $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tilde{x}$ lässt sich nicht analytisch berechnen. Deshalb muss dies numerisch über Tabellen ausgelesen werden.
In Nat2 wird dies über die Fehlerfunktion oder über die Q-Funktion gelöst (siehe Skript Nat1&2 s137-140)
Ansonsten muss die Verteilung standardisiert werden $\sigma^2 = 1$ & $\mu = 0$. Dies geschieht mit folgender Formel: $\frac{x-\mu}{\sigma}$
Danach kann man den Wert aus der Tabelle auslesen

10.5.5 Verteilungsfunktion der Normalverteilung

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

11 Fourierreihen periodischer Funktionen

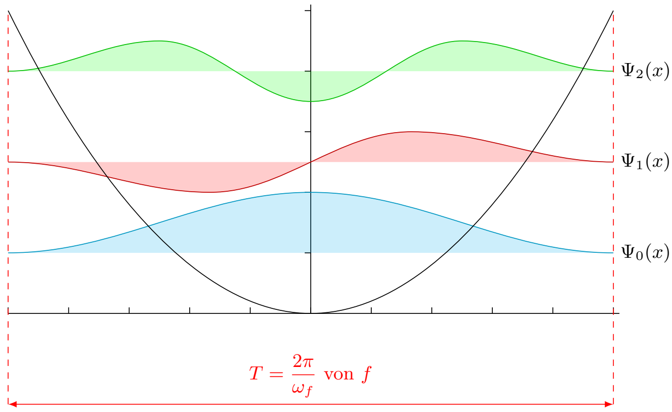
11.1 Bausteine

Idee:

T-Periodische, mit Limes stückweise stetigen Funktionen, durch Aufsummieren ebenfalls periodischer Basisfunktionen (sin, cos) zu approximieren.

Basisfunktionen:

Konstante:	$cos(0 \cdot \omega_f t) = 1$		
$1\times$ Frequenz f:	$\cos(1 \cdot \omega_f t)$	;	$\sin(1 \cdot \omega_f t)$
$2\times$ Frequenz f:	$\cos(2 \cdot \omega_f t)$	;	$\sin(2 \cdot \omega_f t)$
$3\times$ Frequenz f:	$\cos(3 \cdot \omega_f t)$	;	$\sin(3 \cdot \omega_f t)$
usw.			



Frequenz:	$f = \frac{1}{T}$
Kreisfrequenz:	$\omega_f = 2\pi f$
Periodendauer:	$T = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{1}{f}$
Nullphasenwinkel:	φ

11.2 Berechnung der Fourierkoeffizienten (in $\mathbb{R}$)

Die Funktion $f(t)$ soll durch folgende Linearkombination dargestellt werden:

$$\boxed{FR[f(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)]}$$

Berechnung von a_0, a_n und b_n (Fourierkoeffizienten):

$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_0^T f(t)dt$	$n = 0$
$b_0 = 0$	$n = 0$
$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_f t)dt$	$n = 0, 1, 2, \cdots$
$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_f t)dt$	$n = 1, 2, 3, \cdots$

Orthogonalitätsbeziehungen:

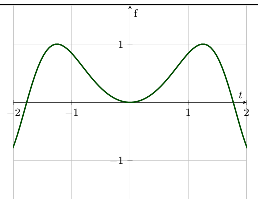
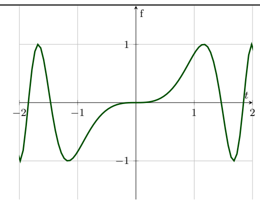
$$\int\limits_0^T \cos(m\omega_f t) \cdot \cos(n\omega_f t)dt = \begin{cases} T & \text{für: } m = n = 0 \\ \frac{T}{2} & \text{für: } m = n > 0 \\ 0 & \text{für: } m \neq n \end{cases}$$

$$\int\limits_0^T \sin(m\omega_f t) \cdot \sin(n\omega_f t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{für: } m = n > 0 \\ 0 & \text{für: } m \neq n \end{cases}$$

$$\int\limits_0^T \sin(m\omega_f t) \cdot \sin(n\omega_f t)dt = 0$$

11.3 Sätze zur Berechnung der Fourierkoeffizienten

11.3.1 Symmetrie

Gerade Funktion	**Ungerade Funktion**
	
achsensymmetrisch $f(t) = f(-t)$	punktsymmetrisch $f(t) = -f(-t)$
Beispiel: cos	Beispiel: sin
$\int\limits_0^T f(t)dt = 2 \cdot \int\limits_0^{T/2} f(t)dt$	$\int\limits_0^T f(t)dt = 0$

Rechnen mit geraden und ungeraden Funktionen:

gerade	$\cdot$	gerade	$=$	gerade
ungerade	$\cdot$	ungerade	$=$	gerade
gerade	$\cdot$	ungerade	$=$	ungerade

Fourierkoeffizienten a_n, b_n:

$f(t)$	a_n, b_n
gerade	$b_n = 0 \; ; \quad a_n = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_f t)dt$
ungerade	$a_n = 0 \; ; \quad b_n = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_f t)dt$

11.3.2 Linearität

$f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ sind T-periodische Funktionen.

Wenn gilt: $\boxed{h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)}} \; \boxed{b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)}} \qquad r,\, s \in \mathbb{R}$

11.3.3 Streckung / Stauchung

$f(t)$ ist eine T-periodische Funktion und $g(t)$ eine $\frac{T}{r}$-periodische Funktion.

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(t) = f(r \cdot t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n^{(g)} = a_n^{(f)}} \; \boxed{b_n^{(g)} = b_n^{(f)}} \qquad 0 < r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases} r < 1 \rightarrow \text{Streckung} \\ r > 1 \rightarrow \text{Streckung} \end{cases} \quad \text{und} \quad \boxed{\omega_g = \frac{2\pi r}{T} = \omega_f \cdot r}$$

11.3.4 Verschiebung

$g(t)$ ist eine von $f(t)$ um t_0 verschobene T-periodische Funktion $\Rightarrow \begin{cases} f(t + t_0) \rightarrow \text{Verschiebung nach links} \\ f(t - t_0) \rightarrow \text{Verschiebung nach rechts} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(t) = f(t + t_0)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n^{(g)} = \cos(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)}} \; \boxed{b_n^{(g)} = -\sin(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)}} \quad ; \quad \boxed{b_0 = 0}$$

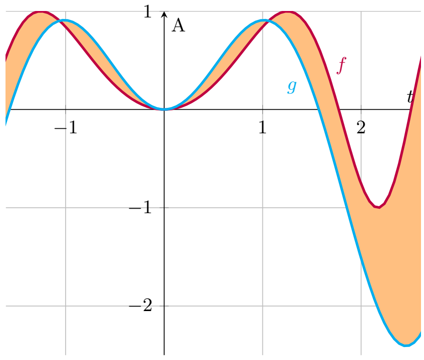
11.4 Konvergenz der Fourierreihen

11.4.1 Optimalität der Fourierreihe (Approximation)

Abstand zwischen zwei Funktionen f und g:

$$\boxed{||f-g|| = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^T [f(t)-g(t)]^2\,dt}}$$

Abstand $||f-g||$ zweier Funktionen kann klein sein, obschon sich die Funktionswerte stellenweise stark unterscheiden!



Qualität der Approximation mit endlicher Fourierreihe:

Die abbrechende Fourierreihe $s_m(t)$ approximiert f hinsichtlich des Abstandes am besten!

$$\Rightarrow \quad ||s_m(t)-f(t)|| = \left\|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cdot\cos(n\omega_f t)+b_n\cdot\sin(n\omega_f t)]-f(t)\right\| \quad \rightarrow \quad \text{wird minimal!}$$

Es gilt sogar:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}[a_n\cdot\cos(n\omega_f t)+b_n\cdot\sin(n\omega_f t)]-f(t)\right\| = 0$$

Parseval'sche Gleichung:

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2) = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T [f(t)]^2dt = ||f||^2}$$

Gliedweises Differenzieren und Integrieren:

Funktion f ist 2-mal stetig differenzierbar
$\Rightarrow$ man darf Fourierreihe von f:

- **gliedweises integrieren**
- $(k-2)$**-mal gliedweise differenzieren**

Nullfolgen a_n und b_n:

Die Fourierkoeffizienten a_n und b_n bilden eine Nullfolge:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega_f t)dt = 0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega_f t)dt = 0}$$

$\Rightarrow$ Je häufiger f stetig differenzierbar ist, desto schneller gehen a_n bzw. b_n gegen 0!

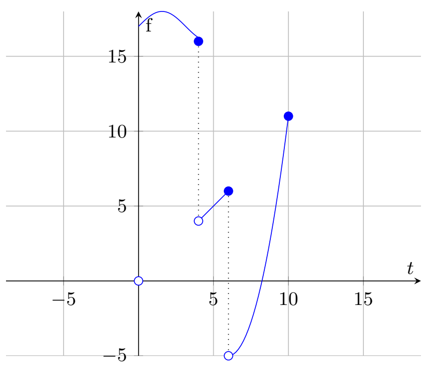
$\boxed{|a_n| \le \frac{c}{n^{k+1}}}$ $\boxed{|b_n| \le \frac{c}{n^{k+1}}}$ $c\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$(k-1)$-mal stetig differenzierbar
k-te Ableitung stückweise mit Limes stetig, monoton

11.4.2 Punktweise Kovergenz von Fourierreihen (Satz von Dirichlet)

- Funktion $f(t)$ ist T-periodisch und stückweise stetig mit Limes.
- Rechts- und linksseitige Ableitungen $\lim\limits_{t\downarrow t_0} f'(t)$, $\lim\limits_{t\uparrow t_0} f'(t)$ existierten.

$$\Rightarrow \boxed{FR[f(t_0)] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lim\limits_{t\downarrow t_0} f(t)+\lim\limits_{t\uparrow t_0} f(t)}{2}}$$



11.4.3 Gibbs-Phänomen

Gibbs'sches Phänomen:

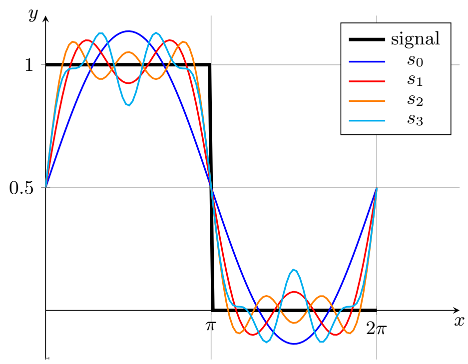
"Über- und Unterschiessen" vor und nach einer Sprungstelle.

Höhe der grössten überschwingenden Welle:

Etwa 9% (8.94%) der gesamten Sprunghöhe.

Anzahl Summanden $m \to \infty$:

Grösste überschwingende Welle ≈ 9%, **klingt aber schneller aus.**



11.5 Komplexe Darstellung der Fourierreihen (in $\mathbb{C}$)

Komplexe Fourierreihe:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_f t}}$$

Umrechungsformeln (a_n, $b_n \to c_n$):

$$\boxed{c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}} \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \cdots (b_0 = 0)$$

$$\boxed{c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + jb_n}{2}} \text{ für } n = 1, 2, 3, \cdots (b_0 = 0)$$

Komplexe Fourierkoeffizienten:

$$\boxed{c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{(jn\omega_f t)} dt} \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Umrechnungsformeln ($c_n \to a_n$, b_n):

$$\boxed{a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = c_n + c_{-n}} \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$\boxed{b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = j(c_n + c_{-n})} \text{ für } n = 1, 2, 3, \cdots$$

11.5.1 Sätze zur Berechnung komplexer Fourierkoeffizienten

Symmetrie:

$f(t)$	c_k	$arg(c_k)$
gerade	$\mathrm{Im}[c_k] = 0;$	$arg(c_k) = 0$ oder π
ungerade	$\mathrm{Re}[c_k] = 0;$	$arg(c_k) = \pm\frac{\pi}{2}$

Linearität:

Wenn gilt: $\boxed{h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{c_k^{(k)} = r \cdot c_k^{(f)} + s \cdot c_k^{(g)}} \; r,\, s \in \mathbb{R}$$

Streckung / Stauchung:

Wenn gilt: $\boxed{g(t) = f(r \cdot t)}$ $0 < r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{c_k^{(g)} = c_k^{(f)}} \text{ und } \boxed{\omega_g = \frac{2\pi r}{T} = \omega_f \cdot r}$$

Verschiebung:

Wenn gilt: $\boxed{g(t) = f(t + t_0)}$

$$\Rightarrow \boxed{c_k^{(g)} = e^{jk\omega_f t_0} \cdot c_k^{(f)}} \; k \in \mathbb{Z}$$

11.5.2 Optimalität komplexer Fourierreihe (Approximation)

Parseval'sche Gleichung:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

Qualität der Approximation:

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{m} c_k \cdot e^{jk\omega_f t} - f(t) \right\| = 0}$$

Nullfolge c_k, bzw. c_n:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \overline{c_{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{(-jn\omega_f t)} dt = 0}$$

⇒ Je häufiger f stetig differenzierbar ist, desto schneller gehen c_k bzw. c_n gegen 0!

12 Integral-Transformation

12.1 Fouriertransformation Bronstein s.798

Die Fouriertransformation kann als Verallgemeinerung der Fourierreihe angesehen werden. Sie soll möglichst beliebige Funktionen in den Frequenzbereich übersetzen können um diese so zu analysieren.

12.1.1 Fouriertransformation und Rücktransformation

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

12.1.2 Wichtige Begriffe

Spektraldichte /-darstellung	$F(\omega)$	KEINE absoluten Werte für Amplitude & Phase
Amplitudendichte	$\lvert F(\omega)\rvert$	f reell $\rightarrow \lvert F(\omega)\rvert$ symetrisch zur Y-Achse
Phasendichte	$\arg(F(\omega))$	f reell $\rightarrow \arg(F(\omega))$ punktsymetrisch zum Ursprung
Kosinusamplitudendichte	$R(\omega)$	f reell $\rightarrow R(\omega)$ gerade
Sinusamplitudendichte	$X(\omega)$	f reell $\rightarrow X(\omega)$ ungerade
Amplitudengang	$A(\omega) = \lvert H(\omega)\rvert$	$= \sqrt{H(\omega) \cdot \overline{H(\omega)}} \begin{cases} < 1 \text{ Dämpfung} \\ > 1 \text{ Verstärkung} \end{cases}$ $\overline{H(\omega)}$ bilden durch +/ - Tausch vor j-Term
Dämpfung	$\frac{1}{A(\omega)} = \lvert\frac{1}{H(\omega)}\rvert$	
Phasenverschiebung	$\Phi(\omega) = \arg(H(\omega))$	$= \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(\omega))}{\mathrm{Re}(H(\omega))}\right)$
Systemantwort	$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$	

12.1.3 Eigenschaften der Fouriertransformation

Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$
Zeitumkehrung (Spiegelung an der Y-Achse)	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(-\omega) = F^*(w)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung	$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ $F(\alpha\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
Verschiebung im Frequenzbereich (Modulationstheorem)	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega \mp \omega_0)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (j\omega)^n F(\omega) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
Integration im Zeitbereich	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(\omega)}{j\omega} + F(0)\pi\delta(\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j^n \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega^n}$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) \cdot G(\omega)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
Vertauschungssatz (Dualität)	$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ $F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \cdot f(-\omega)$
Modulation	$\cos(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot [F(\omega - \alpha) + F(\omega + \alpha)]$ $\sin(\alpha t) \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2j} \cdot [F(\omega - \alpha) - F(\omega + \alpha)]$

12.2 δ-Funktion Bronstein s.788

Die δ-Funktion ist auch als Impulsfunktion oder DIRAC bekannt.

12.2.1 Definition

$$\delta(t) = 0 \text{ für alle } t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \varphi(t)dt = \varphi(0)$$

12.2.2 Verschiebung

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-t_0\right) \varphi(t)dt = \varphi\left(t_0\right)$

12.2.3 Multiplikation

$s(t)\delta\left(t-t_0\right) = s\left(t_0\right)\delta\left(t-t_0\right)$

12.2.4 Ableitung der Deltafunktion

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}\left(t-t_0\right) f(t)dt = (-1)^k f^{(k)}\left(t_0\right)$

12.2.5 Ableitung des Einheitssprung

$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$

12.3 Faltungsprodukt Bronstein s.803

12.3.1 Definition

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u)du$$

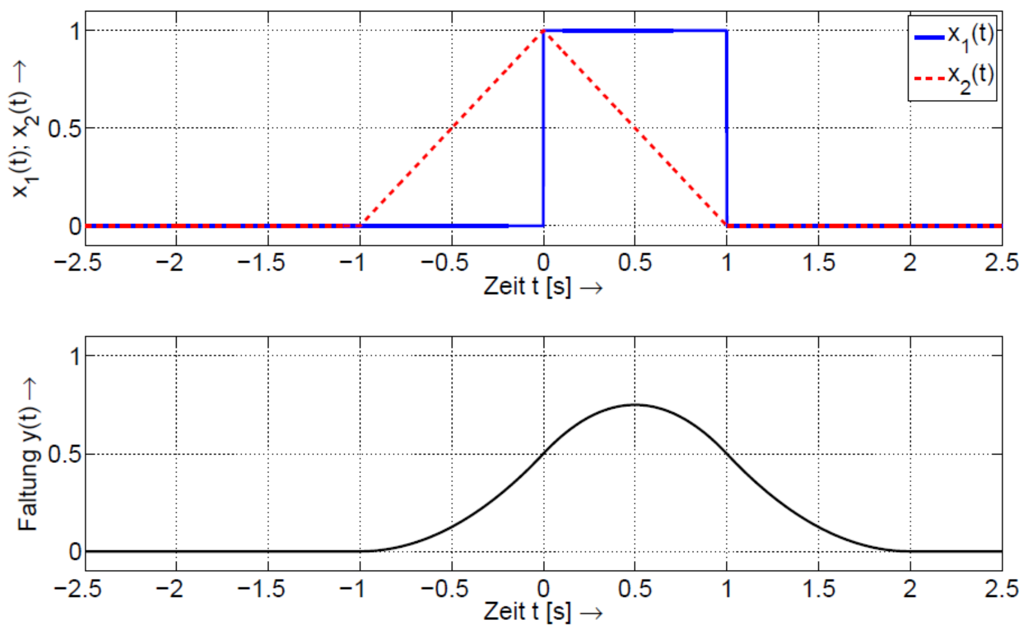


Abbildung 3: Quelle: Skript SigSys

12.3.2 Rechenregeln

Kommutativität
$f * (g * h) = (f * g) * h$

Assoziativität
$f * (g * h) = (f * g) * h$

Distributivität
$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

12.3.3 Faltung mit der δ-Funktion

$f(t) * \delta\left(t-t_0\right) = f\left(t-t_0\right)$

12.4 Laplacetransformation Bronstein s.784

Gegenüber jω bei der Fourier-Transformation ist bei der Laplace-Transformation s verallgemeinert zu $s = \sigma + j\omega$. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ durch die Laplace-Transformation $F(s)$ ausgedrückt werden kann.

$$\boxed{f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt} \quad \boxed{s=\sigma+j\omega} \quad \begin{cases}\sigma=0 \rightarrow \text{Amplitude bleibt gleich}\\ \sigma>0 \rightarrow \text{Amplitude explodiert für } 0<t\rightarrow\infty\\ \sigma<0 \rightarrow \text{Amplitude klingt für } 0<t\rightarrow\infty \text{ auf 0 ab}\end{cases}$$

- Definitionsbereich nur für kausale Systeme $t \geq 0$
- Wachstum kleiner als der von einer Exponentialfunktion

12.4.1 Eigenschaften der Laplacetransformation

Linearität	$\alpha \cdot f(t)+\beta \cdot g(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\alpha \cdot F(s)+\beta \cdot G(s)$
Ähnlichkeit / Streckung im Zeitbereich	$f(\alpha t)\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t)\circ\!\!-\!\!\bullet G(s)\cdot F(s)$
1te Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial}{\partial t}f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet sF(s)-f(0^+)$
2te Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$
nte Ableitung im Zeitbereich	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\circ\!\!-\!\!\bullet s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-s^{n-1}\frac{\partial f(0^+)}{\partial t}-\ldots-s^0\frac{\partial^{n-1}f(0^+)}{\partial t^{n-1}}$
Multiplikation mit t	$t\cdot f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-\partial F(s)}{\partial s}$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-t)^n f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\partial^n F(s)}{(\partial s)^n}$
Verschiebung im Zeitbereich nach rechts	$\sigma(t-a)f(t-a)\circ\!\!-\!\!\bullet F(s) * e^{-as}$
Verschiebung im Zeitbereich nach links	$\sigma(t-a)f(t+a)\circ\!\!-\!\!\bullet e^{as}\cdot[F(s)-\int\limits_0^a f(t)\cdot e^{-st}dt]$
Verschiebung im Frequenzbereich (Dämpfungssatz)	$f(t)e^{\pm\alpha t}\circ\!\!-\!\!\bullet F(s\mp\alpha)$
Integration im Originalbereich (Sprungantwort)	$\int\limits_0^t f(u)du\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\cdot F(s)$
Anfangswert	$\lim_{t\rightarrow 0^+} f(t)=\lim_{s\rightarrow\infty} sF(s)$, wenn $\lim_{t\rightarrow 0} f(t)$ existiert.
Endwert	$\lim_{t\rightarrow\infty} f(t)=\lim_{s\rightarrow 0} sF(s)$, wenn $\lim_{t\rightarrow\infty} f(t)$ existiert.

12.4.2 Laplace-Tabelle

$\sigma(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$\delta(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$1(s)$
$\sigma(t)\cdot t$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$\delta(t-\alpha)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-\alpha s}$
$\sigma(t)\cdot t^2$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{s^3}$	$\sigma(t-\alpha)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\cdot e^{-\alpha s}$
$\sigma(t)\cdot t^n$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma(t)\cdot\sin(\omega t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sigma(t)\cdot e^{\alpha t}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\sigma(t)\cdot\cos(\omega t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sigma(t)\cdot t\cdot e^{\alpha t}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$\sigma(t)\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin(\omega t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sigma(t)\cdot t^2\cdot e^{\alpha t}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{(s-\alpha)^3}$	$\sigma(t)\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos(\omega t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sigma(t)\cdot t^n\cdot e^{\alpha t}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$\sigma(t)\cdot t\cdot\frac{\sin(\alpha t)}{2\alpha}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$\sigma(t)\cdot\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\sigma(t)\cdot\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\sigma(t)\cdot\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\sigma(t)\cdot\frac{(\alpha-\beta)+\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\sigma(t)\cdot\frac{1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t}}{\alpha^2}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\sigma(t)\cdot\frac{e^{-\beta t}(\alpha\cos(\alpha t)-\beta\sin(\alpha t))}{\alpha}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$

13 Spektren

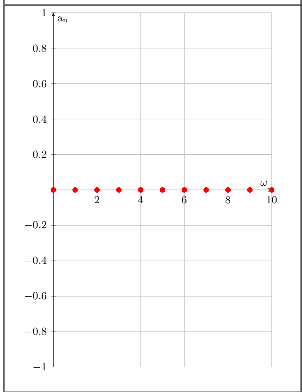
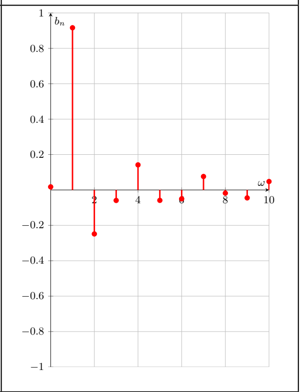
13.1 Spektraldarstellung

Spektrum: Fourierkoeffizienten einer Funktion.

Fourierreihe des abgebildeten Beispiels:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \sin((2k-1) \cdot t)$$

13.2 (1) Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Kosinus-Amplituden	Sinus-Amplituden
	

Werte der reelen Fourierkoeffizienten a_n und b_n werden als "Säulen" dargestellt.

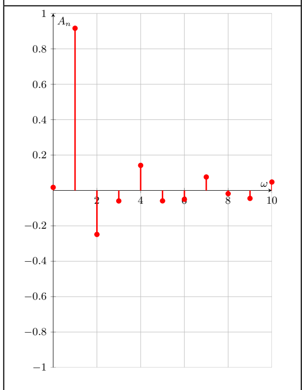
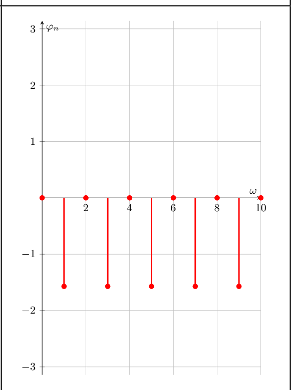
Reelle Fourierkoeffizienten (a_n, b_n) können direkt abgelesen werden.

$$\boxed{a_n = A_n \cdot \cos(\varphi_n) = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n)}$$

$$\boxed{b_n = -A_n \cdot \sin(\varphi_n) = A_n \sin(-\varphi_n) = -2 \cdot \mathrm{Re}(c_n)}$$

Nachteil: Diagramme sind vom Ort des Nullpunktes auf der Zeitachse abhängig.

13.3 (2) Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

Amplituden	Phasen
	

Gleichfrequente Schwingungen werden zu phasenverschobenen Kosinusschwingungen zusammengefasst: $a_n \cdot \cos(n\omega_f t) + b_n \cdot \sin(n\omega_f t) = A_n \cdot \cos(n\omega_f t + \varphi_n)$

$$\boxed{\varphi_n = \arg(a_n - \mathrm{j}b_n) = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ oder } \varphi_n = \arg(c_n)}$$

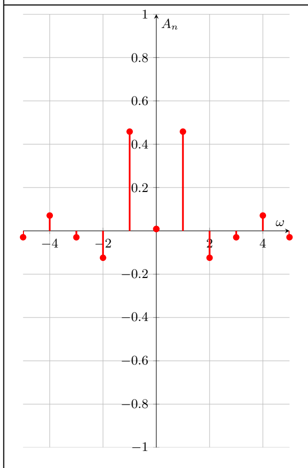
$$\boxed{A_n = |a_n - \mathrm{j}b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ oder } A_n = 2 \cdot |c_n|}$$

Spezialfall: $n = 0$

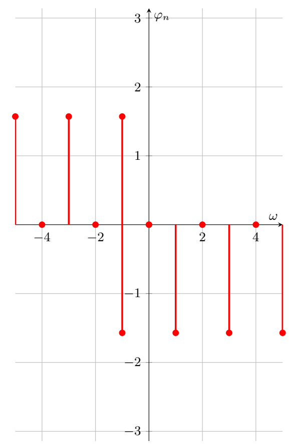
$$\boxed{A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|} \quad \boxed{\varphi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}}$$

13.4 (3) Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm (komplexes Spektrum)

Amplituden (I)



Phasen (II)



Polarkoordinaten der komplexen Fourierkoeffizienten c_k werden in zwei Diagrammen dargestellt:

$\boxed{\text{Amplitude} = |c_k|}$ $\boxed{\text{Phase} = \arg(c_k)}$

(I) Amplituden → Achensymmetrisch $\boxed{|c_n| = |c_{-n}|}$

(II) Phasen → Punktsymmetrisch $\boxed{\arg(c_n) = \arg(c_{-n})}$

Verknüpfung zum Einseitigen Amplituden-/Phasendiagramm: für $n \geq 0$ gilt:

$\boxed{\varphi_n \text{ gleich wie (2)}}$ $\boxed{\varphi_n = \arg(c_n)}$

$\boxed{|c_n| = \frac{1}{2} \cdot A_n}$ $\boxed{A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| = |c_0|}$

Umrechnung von Sinus- und Kosinusdiagramm (1):

$\boxed{c_n = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}}$ $\boxed{\varphi_n = \arg(a_n - \mathrm{j}b_n)}$

13.5 Spezialfälle (zu den Phasendiagrammen: 1, 2, 3)

Funktion f gerade	(1) Sinusphasendiagramm überall 0
	(2, 3) Phasendiagramm enthält nur die Werte 0 und π
Funktion f ungerade	(1) Kosinusphasendiagramm überall 0
	(2, 3) Phasendiagramm enthält nur die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$
	(oder 0 falls Amplitudenwert = 0)
Ähnlichkeit $g(t) = f(r \cdot t)$	(1, 2, 3) Das Spektrum von g ist das horizontal mit dem Faktor r
	gestrecktes Spektrum vom f
Zeitverschiebung $g(t) = f(t + t_0)$	(1) (siehe auch 3.4.4, Zeitverschiebung (S. 4))
	(2, 3) Amplitudendiagramme sind identisch.
	(2, 3) Phasendiagramme: Die Säule der Frequenz $k\omega_0$ wächst um $k\omega_0 t_0$
Weisses Rauschen	Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen
	mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen.

13.6 Zeitbereich und Frequenzbereich

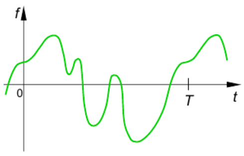
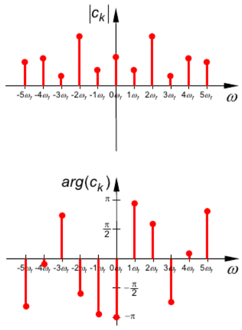
Aussage im Zeitbereich	Aussage im Frequenzbereich
Funktion $f(t)$ 	(z. B. komplexes) Spektrum von f 
$f(t)$ $\xrightarrow{\text{Fourier-Analyse}}$	$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jk\omega_f t}\,dt$
$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(c_k e^{jk\omega_f t}\right)$ $\xleftarrow{\text{Fourier-Synthese}}$	c_k

Abbildung 4: Quelle: Skript KomFour

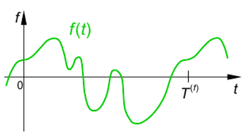
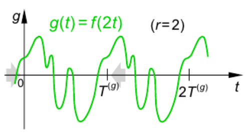
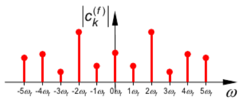
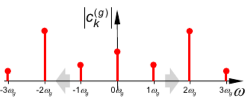
Aussage im Zeitbereich	Aussage im Frequenzbereich
Funktion f gerade $[\,f(-t) = f(t)\,]$	①: Sinusphasendiagramm überall 0. ②, ③: In den Phasendiagrammen kommen nur die Werte 0 oder π vor.
Funktion f ungerade $[\,f(-t) = -f(t)\,]$	①: Kosinusphasendiagramm überall 0. ②, ③: In den Phasendiagrammen kommen nur die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ vor (oder 0, falls der zugehörige Amplitudenwert $=0$ ist).
Überlagerung $h(t) = r\cdot f(t) + s\cdot g(t)$	①: Für die entsprechenden Säulenhöhen gilt die analoge Gleichung. ②, ③: Keine Aussage möglich [wohl aber für den Koeffizient $c_k^{(h)}$ selbst: $c_k^{(h)} = r\cdot c_k^{(f)} + s\cdot c_k^{(g)}$].
Ähnlichkeit $g(t) = f(r\cdot t)$ [der Graph von g ist der mit Faktor r ges*tauchte* Graph von f]  	① – ③: Das Spektrum von g ist das horizontal mit dem Faktor r ges*treckte* Spektrum von f.  (Phasendiagramm entsprechend)  (Phasendiagramm entsprechend)
Zeitverschiebung $g(t) = f(t+t_0)$	①: Für $n = 0,1,2,\ldots$ bzw. $n = 1,2,\ldots$ $a_n^{(g)} = \cos(n\omega_f t_0)\cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega_f t_0)\cdot b_n^{(f)}$, $b_n^{(g)} = -\sin(n\omega_f t_0)\cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega_f t_0)\cdot b_n^{(f)}$. ②, ③: Das Amplitudendiagramm ist für f und g identisch. Die zur Frequenz $k\omega_f$ gehörige Säule des Phasendiagramms von g wächst um $k\omega_f t_0 \pmod{2\pi}$.

Abbildung 5: Quelle: Skript KomFour

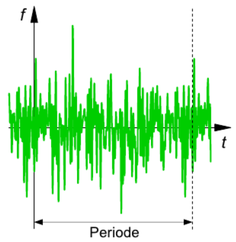
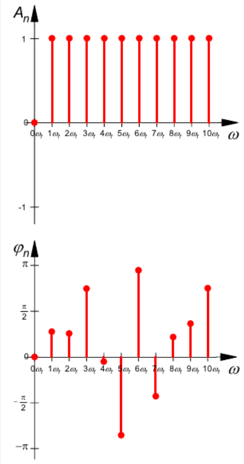
Aussage im Zeitbereich	Aussage im Frequenzbereich
„Weisses Rauschen“ 	(Periodisches) weisses Rauschen ist eine Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen: 
(Idealer) Pass	Ein (idealer) Pass ist ein System, welches die sinusförmigen Anteile eines Signales unverändert passieren lässt, wenn sie eine gewisse Frequenz besitzen, alle anderen Anteile jedoch vollständig wegfiltert. Das lässt sich im Frequenzbereich sehr einfach beschreiben mit Hilfe einer komplexen Funktion $H:\omega \mapsto H(\omega) \in \mathbb{C}$, *Frequenzgang* genannt, welche durch die Gleichung $c_k^{(output)} = H(k\omega_f)\cdot c_k^{(input)}$ definiert ist. Beipiele:
Tiefpass (lässt Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz ω_1 passieren)	Hier ist $H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lvert\omega\rvert \leqq \omega_1 \\ 0, & \text{falls } \lvert\omega\rvert > \omega_1 \end{cases}$. Ein Tiefpass hat also die nach der Kreisfrequenz ω_1 abgebrochene Fourierreihe des Eingangssignals als Ausgangssignal. Das kann bei Sprungstellen im Signal problematisch sein, da dann das Gibb'sche Phänomen auftritt.
Hochpass (lässt Frequenzen ab einer Grenzfrequenz ω_2 passieren)	$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lvert\omega\rvert \geqq \omega_2 \\ 0, & \text{falls } \lvert\omega\rvert < \omega_2 \end{cases}$. Ein Hochpass unterdrückt also die ersten Summanden der Fourierreihe des Eingangssignals.
Bandpass (lässt Frequenzen zwischen ω_1 und ω_2 passieren)	$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_1 \leqq \lvert\omega\rvert \leqq \omega_2 \\ 0, & \text{falls sonst} \end{cases}$. Nur mittelfrequentige Summanden der Fourierreihe des Eingangsignals passieren einen Bandpass.
Datenkompression durch Herausfiltern schwacher sinusförmiger Anteile	Datenkompressionsverfahren wie MP3 oder JPEG (vgl. Seite 88) speichern Signalanteile, deren *Amplituden* im Vergleich zu den grössten Anteilen klein sind, gar nicht ab. Im dekodierten Signal sind diese zahlreichen fehlenden Teile fast nicht bemerkbar (da von geringem Einfluss), es wird aber meist eine beachtliche Datengrössenreduktion erreicht.

Abbildung 6: Quelle: Skript KomFour

14 Tabellen

14.1 Griechisches Alphabet

Majuskel	**Minuskel**	**Aussprache**	**Häufigste Verwendung in Technik**
A	α	Alpha	α = Winkel, Winkelbeschleunigung, allgemeiner Faktor
B	β	(Alt: Beta), (Neu: Feta)	β = Winkel, Bandbreite
Γ	γ	Gamma	Γ = Reflexionsfaktor, γ = Winkel
Δ	δ	Delta	Δ = Differenz, δ = Dirac-Funktion
E	ϵ, ε	Epsilon	ε = Permittivität
Z	ζ	Zeta	ζ = Dämpfungsgrad
H	η	Eta	η = Wirkungsgrad, Rauschleistung
Θ	θ, ϑ	Theta	Θ = Magnetische Durchflutung, θ = Winkel, Wärmewiderstand, ϑ = (Celsius-)Temperatur
I	ι	Iota	
K	κ, $\varkappa$	Kappa	κ = Gaskonstante
Λ	λ	Lambda	Λ = Logarithmisches Dekrement, λ = Wellenlänge, Eigenwerte
M	μ	Mu	μ = Permeabilität
M	ν	Nu	ν = Frequenz, Poisson-Zahl
Ξ	ξ	Xi	ξ = Störglied in der Analysis, Zufallsvariable
O	o	Omikron	
Π	π, ϖ	Pi, Bi	Π = Produktzeichen, π = Kreiszahl
P	ρ, ϱ	Rho	ρ = Spezifischer Widerstand, (Ladungs-)Dichte
Σ	σ, ς	Sigma	Σ = Summenzeichen, σ = Elektrische Leitfähigkeit, Standardabweichung
T	τ	Tau	τ = Zeitkonstante der passiven Reaktanz-Elemente
Υ	υ	Ypsilon	
Φ	ϕ, φ	Phi	Φ = Magnetischer Fluss, ϕ = Winkel, φ = (Polarkoordinaten) Winkel, Phasenverschiebung, elektrisches Potential
X	χ	Chi	
Ψ	ψ	Psi	Ψ = Elektrischer Fluss
Ω	ω	Omega	Ω = Widerstand-, Impedanz-Einheit, ω = Kreisfrequenz