

Podstawy matematyki finansowej

Katarzyna Penar

Czego dowiemy się dzisiaj?

1. Procent

1.1. Procent a stopa procentowa

1.2. Procent prosty

1.3. Procent złożony (kapitalizacja z góry i z dołu)

2. Realna stopa procentowa

3. Lokaty

4. Wkłady oszczędnościowe

5. Kredyty (stała/malejąca rata, konsolidacja, koszty)

Procent a stopa procentowa

Pożyczamy od rodziców 1000zł na zakup laptopa. Po miesiącu zwracamy całą kwotę, a w dowód wdzięczności dajemy rodzicom prezent o wartości 100zł.

$$K_0 = 1000\text{zł}$$

$$K_1 = 1100\text{zł}$$

$$I = K_1 - K_0 = 100\text{zł}$$

Procent a stopa procentowa

- Procent – kwota, którą otrzymuje wierzyciel od dłużnika za wypożyczenie pieniędzy
- Stopa procentowa – stosunek procentu do wartości początkowej

$$r = \frac{I}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}$$
$$I = r * K_0$$

Deponujemy w banku kwotę 200 zł, a po 6 miesiącach, likwidując depozyt otrzymujemy 220zł. Jakie oprocentowanie zaoferował bank?

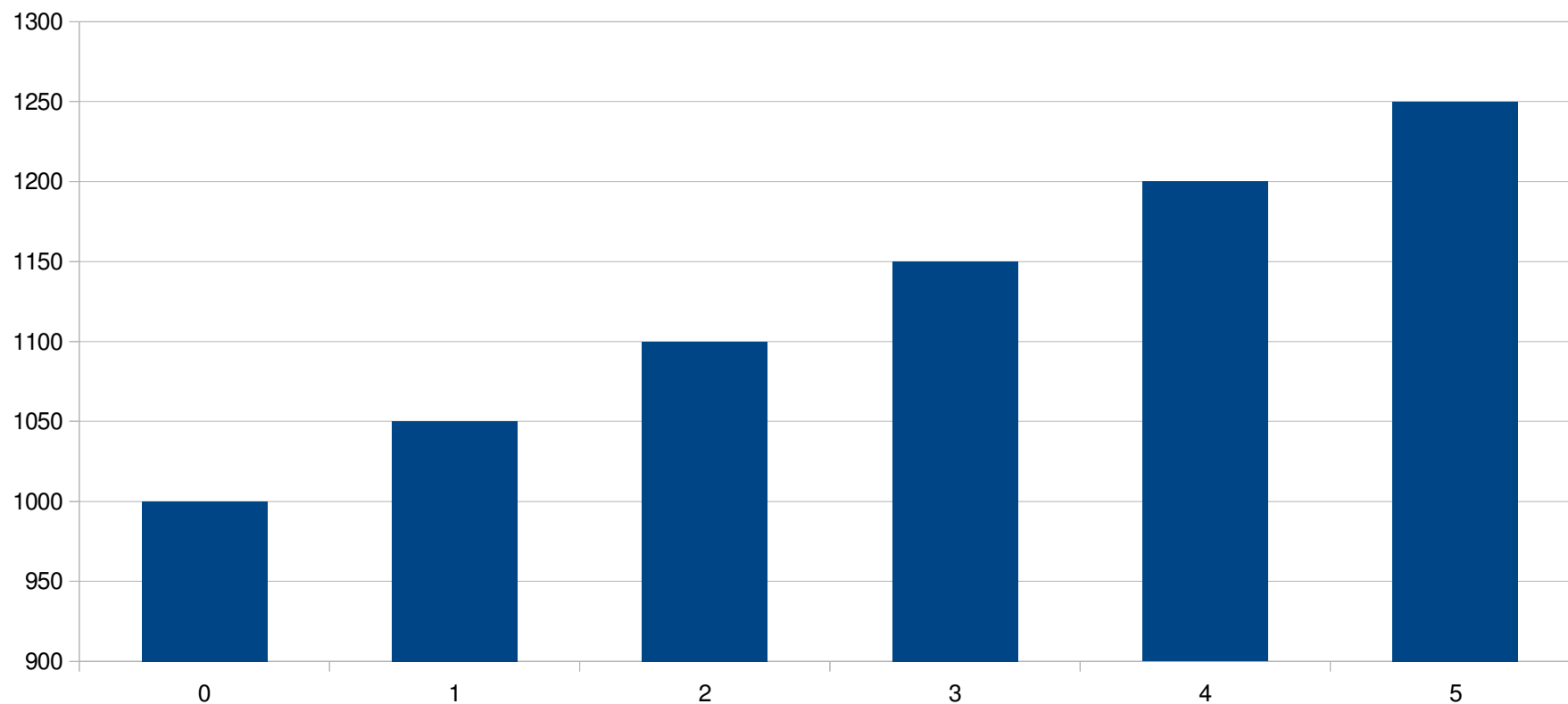
Okres bazowy, stopa bazowa

- **Okres bazowy** to jednostka czasu względem, której mierzymy upływ czasu
- Stopa procentowa, której okres jest równy okresowi bazowemu nazywamy **bazową stopą procentową**
- Doliczanie procentu do kapitału nazywamy **kapitalizacją**

Procent prosty

Chcemy zdeponować w banku kwotę 1000zł. Bank oferuje nam następujące warunki:
oprocentowanie w skali roku 5%, po każdym roku depozytu naliczane są odsetki od kwoty początkowej. Jaka kwotę otrzymamy po 5 latach?

Procent prosty



Procent prosty

$$K_0 = 1000$$

$$K_1 = K_0 + K_0 * 0.05 = 1050$$

$$K_2 = K_1 + K_0 * 0.05 = 1100$$

$$K_3 = K_2 + K_0 * 0.05 = 1150$$

$$K_4 = K_3 + K_0 * 0.05 = 1200$$

$$K_5 = K_4 + K_0 * 0.05 = 1250$$

Procent prosty

$$K_1 = K_0 + K_0 * r = K_0(1 + r)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + K_0 * r = \\ &= K_0(1 + r) + K_0 * r = K_0(1 + 2 * r) \end{aligned}$$

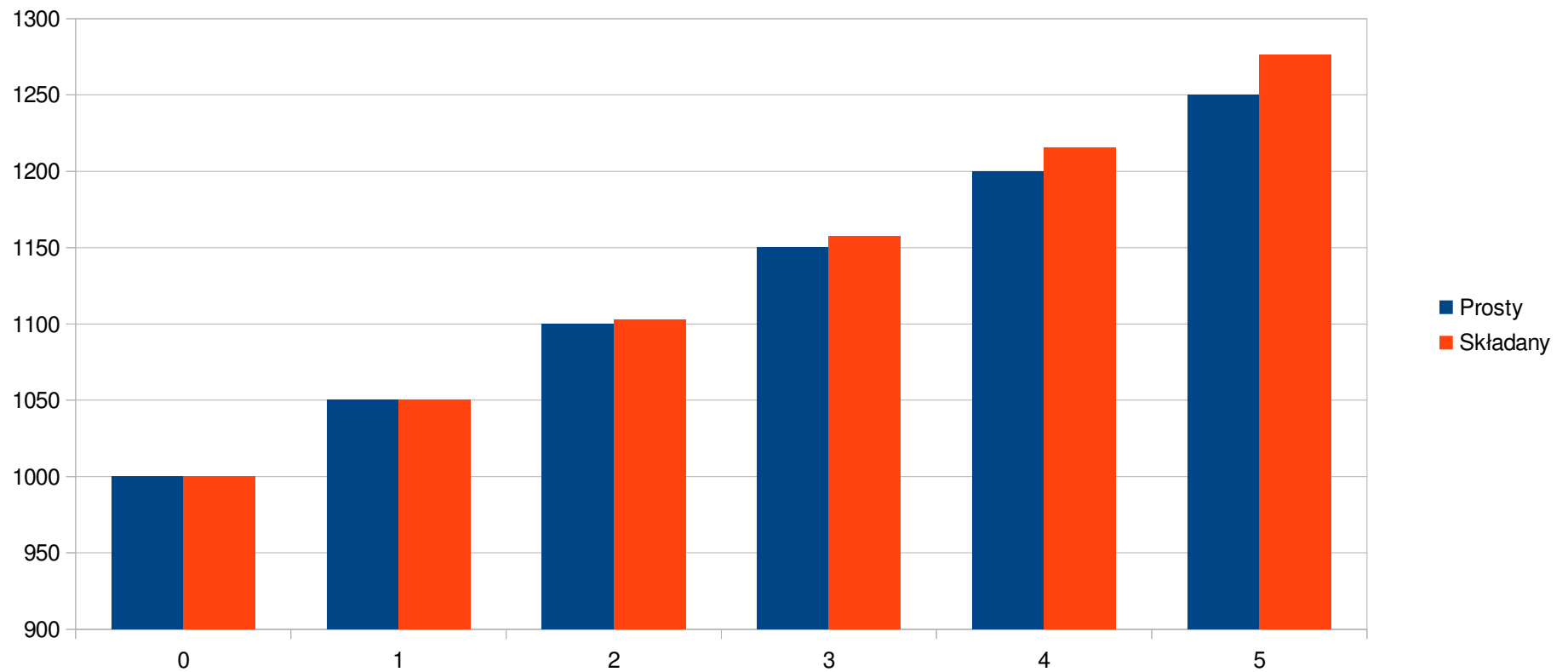
...

$$K_n = K_{(n-1)} + K_0 * r = K_0(1 + n * r)$$

Procent składany

Chcemy zdeponować w banku kwotę 1000zł.
Bank oferuje nam następujące warunki:
oprocentowanie w skali roku 5%, po każdym
pełnym roku naliczone odsetki dopisywane są
do kwoty depozytu. Jaka kwotę otrzymamy po 5
latach?

Procent składany



Procent składany

$$K_0 = 1000$$

$$K_1 = K_0 + K_0 * 0.05 = 1050$$

$$K_2 = K_1 + K_1 * 0.05 = 1102.5$$

$$K_3 = K_2 + K_2 * 0.05 = 1157.63$$

$$K_4 = K_3 + K_3 * 0.05 = 1215.51$$

$$K_5 = K_4 + K_4 * 0.05 = 1276.29$$

Procent składany

$$K_1 = K_0 + K_0 * r = K_0(1 + r)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + K_1 * r = K_0(1 + r) + K_0(1 + r) * r = \\ &= K_0(1 + r)(1 + r) = K_0(1 + r)^2 \end{aligned}$$

...

$$K_{(n-1)} = K_0(1 + r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} K_n &= K_{(n-1)} + K_{(n-1)} * r = \\ &= K_0(1 + r)^{n-1} + K_0(1 + r)^{n-1} * r = \\ &= K_0(1 + r)^{n-1}(1 + r) \\ &= K_0(1 + r)^n \end{aligned}$$

Efektywna stopa procentowa

Kapitalizacja prosta

$$r_n = \frac{K_n - K_{n-1}}{K_{n-1}} = \frac{1250 - 1200}{1200} = 0,042$$

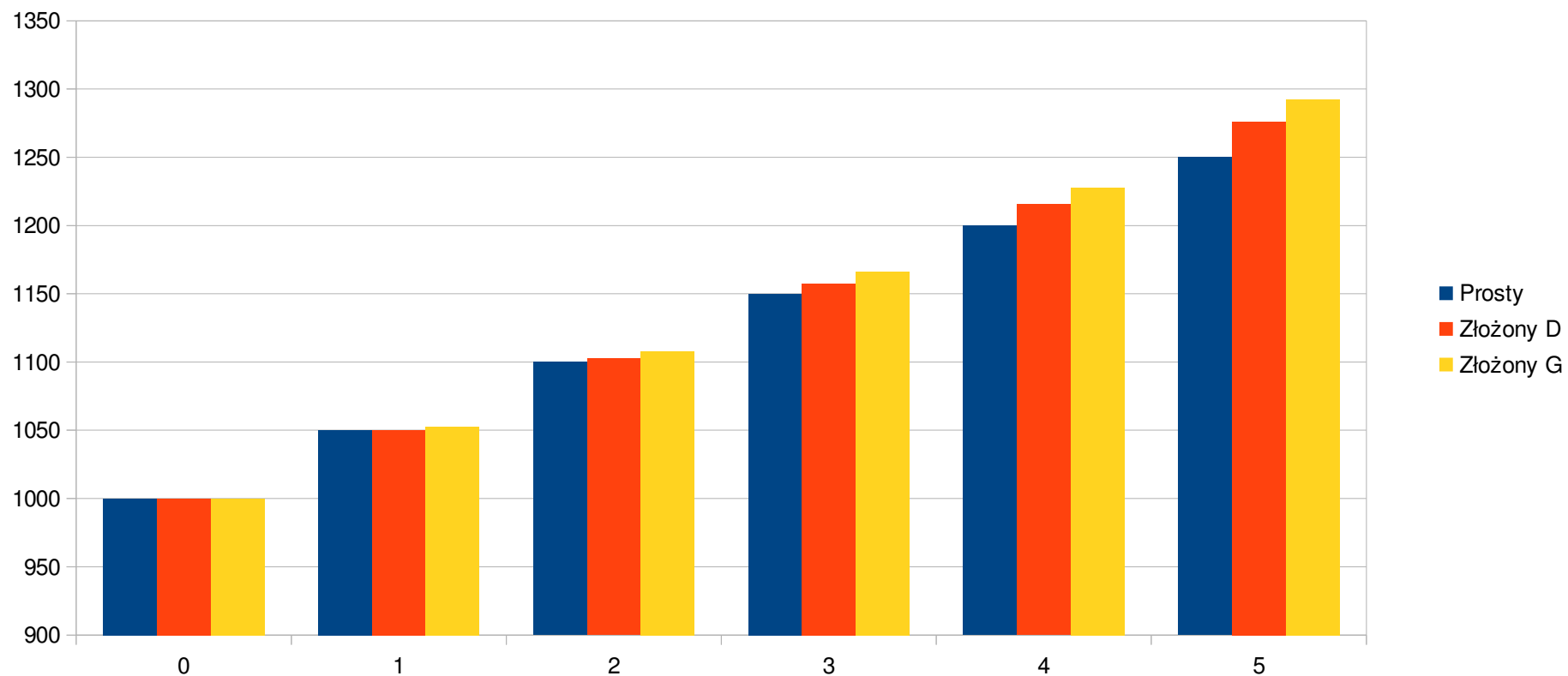
Kapitalizacja złożona

$$r_n = \frac{K_n - K_{n-1}}{K_{n-1}} = \frac{1276,29 - 1215,51}{1215,51} = 0,05$$

Kapitalizacja z góry

Chcemy zdeponować w banku kwotę 1000zł.
Bank oferuje nam następujące warunki:
oprocentowanie w skali roku 5%, na początku
każdego pełnym roku należne odsetki
dopisywane są do kwoty depozytu. Jaka kwotę
otrzymamy po 5 latach?

Kapitalizacja z góry



Kapitalizacja z góry

$$K_1 = K_0 + K_1 * r$$

$$K_1(1 - r) = K_0$$

$$K_1 = \frac{K_0}{(1-r)}$$

$$K_2 = K_1 + K_2 * r$$

$$K_2 = \frac{K_1}{(1-r)} = \frac{K_0}{(1-r)^2}$$

...

$$K_n = \frac{K_{n-1}}{(1-r)} = \frac{K_0}{(1-r)^n}$$

Inflacja

- Indeks cen konsumpcyjnych
- Najczęściej rok do roku
- Realna stopa procentowa

Realna stopa procentowa

- Kapitalizacja zgodna złożona z dołu
- Okres stopy r jest równy okresowi inflacji

$$K^{nom} = K_0(1 + r)$$

$$K^{re} = K_0 * \frac{1+r}{1+i}$$

$$K_0(1 + r_{re}) = K_0 * \frac{1+r}{1+i}$$

$$r_{re} = \frac{r-i}{1+i}$$

Inflacja

Jaka będzie realna wartość depozytu w wysokości 1000zł przy oprocentowaniu 5% w skali roku, kapitalizacji prostej i inflacji na poziomie 1% po upływie 1 roku?

Lokaty

- Krótkoterminowe (do roku)
- Długoterminowe (powyżej roku)

Lokaty

- Kapitalizacja zgodna – $or = ok$
- Kapitalizacja niezgodna – $or \neq ok$
- Kapitalizacja ciągła

Wkłady oszczędnościowe

- Ciągi wpłat
- Przykłady: Konto emerytalne, fundusz powierniczy...
- Kapitalizacja złożona
- W podokresach możliwa kapitalizacja prosta

Wkłady oszczędnościowe

Oszczędzamy na mieszkanie. Co miesiąc wpłacamy do banku 100zł. Bank oferuje oprocentowanie w wysokości 12% w skali roku i miesięczną kapitalizację. Jaka kwotę uda nam się odłożyć na koncie po 5 latach?

Wkłady oszczędnościowe

$$S_n = W_1(1+r)^{n-1} + \dots + W_n$$

$$S_n^{gr} = W_1(1+r)^n + \dots + W_n(r+1) = S_n(1+r)$$

$$q = 1+r \wedge W = \text{const}$$

$$S_n = W * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n^{gr} = W * q * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kredyt

- Spłata długu
- Rata kapitałowa
- Rata odsetkowa
- Koszt kredytu
- Konsolidacja kredytów

Kredyt

Pożyczamy z banku kwotę 1000 zł na okres jednego roku, przy oprocentowaniu 12% w skali roku. Zakładamy, że będziemy spłacać go w równych ratach kapitałowo-odsetkowych. Ile wyniesie jedna rata kredytu?

Kredyt

$$S_0 q^n = W_1 q^{n-1} + W_2 q^{n-2} + \dots + W_n$$

$$S_n = S_0 q^n = W * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Koszty kredytu

Policzmy zatem koszty kredytu z poprzedniego zadania

Koszty kredytu

- Koszt nominalny
- Koszt efektywny
- Stopa kosztu zadłużenia
- Koszt jednostkowy

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k = (\sum_{k=1}^n W_k) - S_0$$

$$Z_{ef} = (\sum_{k=1}^n W_k^{n-k}) - S_0$$

Konsolidacja kredytów

- Łączymy kilka kredytów w jeden
- Kredyt udzielony na spłatę innych pożyczek
- Opłacalny?

Dziękuję! :)

Pytania?