تمرین سری چهارم درس پردازش سیگنال EEG

نام: محمد سینا حسن نیا　　شماره دانشجویی: 96108515

سؤال 1

برای سیگنال EEG داده شده می دانیم:

$$X \in \mathbb{R}^{8 \times 100} \quad , \quad x_i[n] \quad n = 1, 2, \dots, 1000 \quad i = 1, \dots 8$$

الف) برای میانگین هر کانال داریم:

$$m_i = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} x_i[n] \qquad i = 1, \dots, 8$$

ب) برای واریانس هر کانال داریم:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} (x_i[n] - m_i)^2 \qquad i = 1, \dots, 8$$

پ) برای همبستگی بین 2 کانال داریم:

$$C_{iJ} = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{N} (x_i[n] - m_i)(x_J[n] - m_J)$$

ت) برای ممان مرتبه 3 برای هر کانال داریم:

$$m_{3_i} = E\{x_i^3\} = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} x_i^3[n] \qquad i = 1, \dots, 8$$

ث) برای کومولان مرتبه 4 هر کانال داریم:

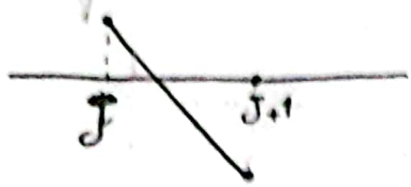
$$m_{4_i} = E\{x_i^4\} = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} x_i^4[n] \qquad m_{2_i} = E\{x_i^2\} = \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} x_i^2[n]$$

$$C_{4_i} = m_{4_i} - 4 m_{3_i} m_{1_i} - 3 m_{2_i}^2 + 12 m_{1_i}^2 m_{2_i} - 6 m_{1_i}^4 \qquad i = 1, \dots, 8$$

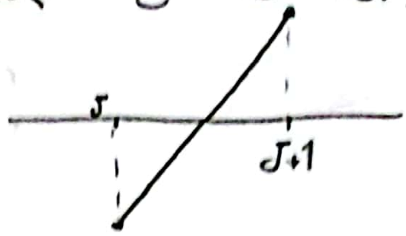
ج) برای تعداد نقاط عبور از صفر هر کانال می دانیم تحت یکی از وضعیت های زیر اتفاق می افتد

$$H(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

بنابراین داریم : (برای راحتی از تابع



یا



$$\begin{cases}H(x[J])=1\\ H(x[J+1])=0\end{cases}\Longrightarrow H(x[J])-H(x[J+1])=1 \qquad \begin{cases}H(x[J])=0\\ H(x[J+1])=1\end{cases}\Longrightarrow H(x[J+1])-H(x[J])=1$$

$$\Longrightarrow \text{تعداد نقاط عبور از صفر}_i=\sum_{n=1}^{999}\left|H(x[J])-H(x[J+1])\right|$$

ج) برای انرژی کل هر کانال داریم:

$$E_i=\sum_{n=1}^{1000}x_i^2[n]$$

ح) برای این کار ابتدا از سیگنال ها DFT می گیریم سپس و براساس قضیه ی پارسوال انرژی در هر باند فرکانسی را بر انرژی کل تقسیم می کنیم. حال برای باندهای مختلف فرکانسی داریم:

$$X_i[k]=\sum_{n=1}^{1000}x_i[n]\,e^{\left(-j\frac{2\pi}{1000}k(n-1)\right)}$$

ح-1) باند δ $\Longleftarrow$ $1-4$

$$\begin{array}{c|c}1000 & f_s\\ \hline \boxed{x=\frac{1000}{f_s}} & 1\end{array}\Longrightarrow \begin{array}{l}k_1=1\times\frac{1000}{f_s}\\ k_2=4\times\frac{1000}{f_s}\end{array}\Longrightarrow E_{i_\delta}=\frac{\text{انرژی باند}\,\delta}{\text{انرژی کل}}=\frac{\sum_{k_1}^{k_2}X_i^2[k]}{\sum_{k=1}X_i^2[k]}$$

ح-2) باند θ $\Longleftarrow$ $4-7$

$$\begin{array}{l}k_1=4\times\frac{1000}{f_s}\\ k_2=7\times\frac{1000}{f_s}\end{array}\Longrightarrow E_{i_\theta}=\frac{\sum_{k_1}^{k_2}X_i^2[k]}{\sum_{k}X_i^2[k]}$$

ج-۳ | باند α ⟸ 8 - 15

$$k_1 = 8 \times \frac{1000}{f_s}, \quad k_2 = 15 \times \frac{1000}{f_s} \Longrightarrow E_{i_\alpha} = \frac{\sum_{k_1}^{k_2} X_i^2[k]}{\sum_k X_i^2[k]}$$

ج-۴ | باند B ⟸ 16 - 31

$$k_1 = 16 \times \frac{1000}{f_s}, \quad k_2 = 31 \times \frac{1000}{f_s} \Longrightarrow E_{i_B} = \frac{\sum_{k_1}^{k_2} X_i^2[k]}{\sum_k X_i^2[k]}$$

خ | در متلب می‌توان با استفاده از دستور meanfreq(xi,fs) فرکانس میانگین را بدست آورد

همچنین به صورت دستی خواهیم داشت:

$$mean\_frequency = \frac{\sum_{i=0}^{n} |X(f_i)|^2 f_i}{\sum_{i=0}^{n} |X(f_i)|^2}$$

د | در متلب با استفاده از دستور medfreq(xi,fs) می‌توان فرکانس میانه را بدست آورد

همچنین برای به دست آوردن دستی ابتدا تبدیل فوریه می‌گیریم و مقدار $a = \frac{\sum |X(f)|}{2}$ را به دست می‌آوریم و در نهایت فرکانسی را انتخاب می‌کنیم که $|X(f)|$ تجمیعی ($\sum |X(f)|$ تا آن فرکانس) از a بیشتر باشد.

سؤال ۹

برای هر یک از متغیرهای گفته شده تعاریف زیر را می‌دانیم:

$$sensitivity = TPR = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$specificity = TNR = \frac{TN}{TN+FP} = 1 - FPR$$

$$Acc = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN}$$

$$FPR = \frac{FP}{TN+FP}$$

حال برای حالت های گفته شده داریم:

1) $TPR=100$ و $TNR=100$

$$\begin{array}{l} TPR=100 \longrightarrow \boxed{FN=0} \\ TNR=100 \Longrightarrow \boxed{FP=0} \end{array} \Longrightarrow Acc = \frac{TP+TN}{TP+TN+\underbrace{FP+FN}_{0}} = 1$$

$\Longleftarrow$ در این حالت دقت 100 درصد است

---

2) $TNR=100$ و $FPR=0 \Longrightarrow$ این دو شرط معادل هم هستند زیرا $TNR=1-FPR$ به هر حال داریم

$$\begin{array}{l} TNR=100 \Longrightarrow FP=0 \\ FPR=0 \Longrightarrow FP=0 \end{array} \Longrightarrow Acc = \frac{TP+TN}{TP+TN+\underbrace{FP}_{0}+FN} = \frac{TP+TN}{TP+TN+FN}$$

در مورد FN اطلاعاتی نداریم $\Longleftarrow$ پس در مورد دقت نمی‌توان نظر داد

---

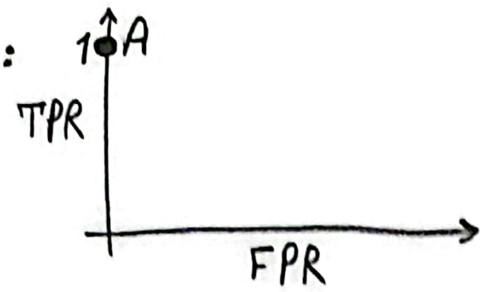
3) $TPR=100$ و $FPR=0$

$$\begin{array}{l} TPR=100 \Longrightarrow FN=0 \\ FPR=0 \Longrightarrow FP=0 \end{array} \Longrightarrow Acc = \frac{TP+TN}{TP+TN+\underbrace{FP+FN}_{0}} = 1$$

$\Longleftarrow$ در این حالت دقت 100 درصد است.

برای هر یک از حالت ها منحنی ROC داریم. (A نقطه ی متناظر)

حالت 1 :



حالت 2 :

* در حالت 2 در مورد FN اطلاعاتی نداریم و فقط می دانیم FPR=0 است پس روی محور عمودی هر نقطه ای می تواند باشد FPR=0 و $0 \leq TPR \leq 1$.

حالت 3 :

سوال 5

الف) می دانیم PCA یک روش بدون سرپرست است یعنی لیبل ها را در نظر گرفته نمی شود.

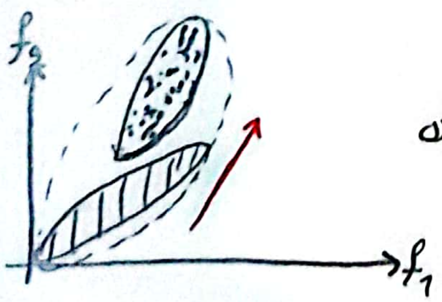
PCA ⟸ در جهت بیشترین پراکندگی و بدون سرپرست

ب) این روش یک روش با سرپرست است و در این جا باید داده ها را روی خطی نگاشت کنیم که به گونه ای دو کلاس بیشترین تفکیک پذیری را داشته باشند. یعنی می خواهیم در فضای جدید:

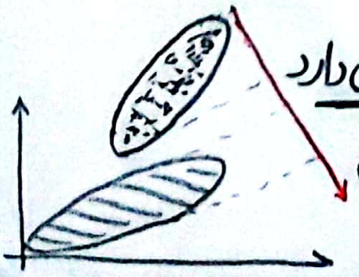
1- واریانس کلاس ها کم باشد 2- میانگین کلاس ها تا حد ممکن از هم فاصله داشته باشد

ج) در این روش ها پس پخش باید ببینیم f_1 بیشترین تفکیک روی دو کلاس را دارد یا f_2. یعنی داده ها را روی f_1 یا f_2 تصویر می کنیم و ببینیم کدام بیشترین تفکیک را بین 2 کلاس دارد

حال برای شکل های الف - ب - ج داریم:

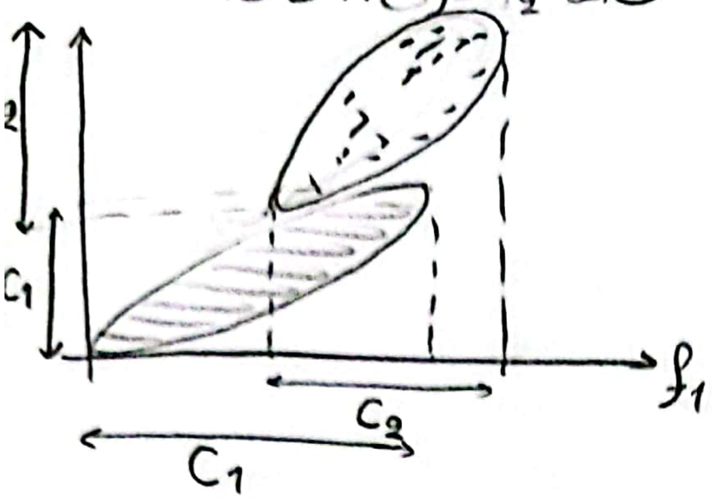


الف) PCA ⟵ بدون سرپرست ⟸ از بیضی نقطه چین استفاده می کنیم. در جهت بیشترین واریانس داده ها را تصویر می کنیم



ب) روش ترکیبی یا fisher LDA ⟸ جهتی که بیشترین تفکیک را برای دو کلاس دارد ⟸ در جهت نشان داده شده واریانس کلاس ها کم و میانگین کلاس ها تا حد ممکن فاصله دارند

ج) برای این قسمت همانطور که در شکل زیر مشخص است f_2 ویژگی بهتری می باشد



همانطور که می بینیم با تصویر بر f_2 تفکیک پذیری بهترین داریم

سوال 6

الف) شروط اصلی عبارتند از:

1- به شرایط اولیه حساس باشد و کراندار باشد 2- نمای لیاپانوف بزرگ تر از صفر داشته باشیم و کراندار باشد

3- نمای لیاپانوف منفی داشته باشیم و قدرت آن از نماهای مثبت بیشتر باشد

اگر سیستم عصبی مغز یک سیستم آشوبی درنظر گرفته شود آن گاه هنگامی که neural activity مغز بیشتر باشد مغز آشوب بیشتری دارد. از آن جا که مغز در هنگام بیداری فعالیت عصبی بیشتری دارد بنابراین مطابق آن چه که گفته شد سیگنال خروجی آن آشوب بیشتری دارد. بنابراین اگر از معیارهایی استفاده کنیم که آشوبی بودن سیگنال را می سنجند آن گاه می توان سیگنال ی مغزی را در دو حالت خواب و بیداری طبقه بندی کرد. یعنی در واقع براساس کم یا زیاد بودن این معیارها احتمال خواب یا بیداری نیز تغییر کند.

ب) به نظر بنده می توان از نمای لیاپانوف استفاده کرد زیرا برای رفتار آشوبی مقدار بزرگ تر از صفر و منظم مقدار ی صفر (پریودیک) دارد و هرچقدر از آشوبی بودن فاصله بگیریم مقدار کمتری دارد

سوال ۴

$X_k^{(i)} \in R^{32\times 1000}$, $k=1,2$, $i=1,\dots,50$

$$\arg\max_{w} J(w) = \frac{w^T \overbrace{\sum_{i=1}^{50} X_1^{(i)} X_1^{(i)T}}^{C_1} w}{w^T \underbrace{\sum_{i=1}^{50} X_2^{(i)} X_2^{(i)T}}_{C_2} w}$$

مسئله ی بالا در واقع ماکزیمم کردن یک نسبت رایلی است بنابراین داریم:

$$eig(C_1, C_2) \Longrightarrow w_1, w_2, \dots, w_{32} , \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{32}$$

2F فیلتر انتخاب می شوند که $\begin{cases} \text{F تا متناسب با بزرگ ترین مقدار ویژه} \\ \text{F " " کمترین مقدار ویژه} \end{cases}$. حال برای بدست آوردن داده های فیلتر شده داریم:

$$y_k^{(i)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_F \\ w_{32-F} \\ \vdots \\ w_{32} \end{bmatrix} \times X_k^{i}$$

می خواهیم کانال های نامطلوب تا آن جا که ممکن است انتخاب نشوند. برای F فیلتر متناظر با کلاس اول داریم. حال ابتدا ماتریس Λ را می سازیم. این ماتریس یک ماتریس قطری است که در درایه هایی که شماره آن ها در ch_{noise} وجود دارد یک قرار می دهیم بنابراین داریم:

$$\arg\max_{w} J_1(w) = \frac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w + \underbrace{\lambda \sum_{j \in ch_{noise}} w_j^2}_{\text{ترم regularization}}} = \frac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w + \lambda w \Lambda w}$$

$$= \frac{w^T C_1 w}{w^T (C_2 + \lambda \Lambda)}$$

در این جا به دلیل عدم تقارن مسئله را در دو مرحله حل می کنیم و هر بار F بردار ویژه متناظر با F تا بردار ویژه بزرگ تر را انتخاب می کنیم. یعنی داریم

1) define C_1

2) define C_2

3) $[V_1, D_1] = GEVD(C_1, C_2 + \lambda \Lambda)$

4) $W_1 = V_1(:, 1:F)$

5) $[V_2, D_2] = GEVD(C_2, C_1 + \lambda \Lambda)$

6) $W_2 = V_2(:, 1:F)$

7) $W = [W_1, W_2]$

8) $y_{k_i} = W^T X_k^{(i)}$

سوال 8

$X_k^{(i)} \in R^{10 \times 1000} \qquad i = 1, \dots, 50 \qquad k = 1, 2$

$$\begin{cases} \underset{w}{\arg\max}\ J(w) = \dfrac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w} \\ C_1 = \sum_{i=1}^{50} X_1^{(i)} X_1^{(i)T} \\ C_2 = \sum_{i=1}^{50} X_2^{(i)} X_2^{(i)T} \end{cases}$$

(فیلتر شده) $y_k^{(i)} = W^T X_k^{(i)}$

ب) برای آن که قید نرم بودن را اضافه کنیم داریم:

$$y'_k[n] = (y_k[n+1] - y_k[n]) f_s \Longrightarrow y_k^{(d)(i)} = f_s \left(y_k^{(i)}(2 : \text{lenght}(y_k^{(i)})) - y_k^{(i)}(1 : \text{lenght}(y_k^{(i)})) \right)$$

$$y_k^{(d)(i)} = W^T X_k^{(d)(i)}$$

$$\min \left(\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{50} \underbrace{y_k^{(d)(i)}}_{(W^T X_k^{(d)(i)})} \underbrace{y_k^{(d)(i)T}}_{(X_k^{(d)(i)T} W)} \right) = \min \left(W^T \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{50} X_k^{(d)(i)} X_k^{(d)(i)T} \right)}_{L} W \right)$$

بنابراین این ترم را در مخرج استفاده می کنیم

$$\underset{}{\operatorname{argmax}} J_1(w) = \frac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w + \lambda w^T L w} = \frac{w^T C_1 w}{w^T (C_2 + \lambda L) w} \Longrightarrow eig(C_1, C_2 + \lambda L) \quad *$$

$$\operatorname{argmax} J_2(w) = \frac{w^T C_2 w}{w^T C_1 w + \lambda w^T L w} = \frac{w^T C_2 w}{w^T (C_1 + \lambda L) w} \Longrightarrow eig(C_2, C_1 + \lambda L) \quad **$$

برای این قسمت داریم

$$\xrightarrow{*} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{10} \quad w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{10} \Longrightarrow y_k^{(i)} = w_1^T X_k^{(i)} \Longrightarrow Y_k^{i} = [y_k^{(i)} \; y_k'^{(i)}]^T$$

$$\xrightarrow{**} \lambda_1' \geq \dots \geq \lambda_{10}' \quad w_1' \geq \dots \geq w_{10}' \Longrightarrow y_k'^{(i)} = w_1'^T X_k^{(i)}$$