تمرین سری دوم تئوری درس پردازش سیگنال های EEG

نام: محمدسینا حسن نیا   شماره دانشجویی: 96108515

سوال 1

می دانیم دو متغیر Y_1 و Y_2 ناهمبسته هستند اگر $E\{Y_1Y_2\}=E\{Y_1\}E\{Y_2\}$ باشد بنابراین داریم: (می دانیم $E\{X_1\}=E\{X_2\}=0$)

$$E\{Y_1\}=E\{\cos(\alpha)X_1+\sin\alpha X_2\}=\cos\alpha\, E\{X_1\}+\sin\alpha\, E\{X_2\}=0$$

$$E\{Y_2\}=E\{-\sin\alpha X_1+\cos\alpha X_2\}=-\sin\alpha\, E\{X_1\}+\cos\alpha\, E\{X_2\}=0$$

$$\Longrightarrow E\{Y_1Y_2\}=0$$

$$E\{Y_1Y_2\}=E\{(\cos\alpha X_1+\sin\alpha X_2)(-\sin\alpha X_1+\cos\alpha X_2)\}$$

$$=E\{-\cos\alpha\sin\alpha X_1^2+\cos^2\alpha X_1X_2-\sin^2\alpha X_1X_2+\sin\alpha\cos\alpha X_2^2\}$$

$$=-\sin\alpha\cos\alpha\, E\{X_1^2\}+\cos^2\alpha\, E\{X_1X_2\}-\sin^2\alpha\, E\{X_1X_2\}+\sin\alpha\cos\alpha\, E\{X_2^2\}$$

$$=-\sin\alpha\cos\alpha\,(E\{X_1^2\}-E\{X_2^2\})+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\,E\{X_1X_2\}$$

$$=-\sin\alpha\cos\alpha\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\,\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$=\frac{-1}{2}\sin2\alpha\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)+(\cos2\alpha)\,\rho\sigma_1\sigma_2=0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\sin2\alpha\,(\sigma_1^2-\sigma_2^2)=(\cos2\alpha)\,\rho\sigma_1\sigma_2\Longrightarrow \tan(2\alpha)=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\right)}$$

سؤال ۲) الف

برای حل این سؤال داریم:

$$\Psi_Y(w) = \ln \Phi_Y(w) = \ln\left(E\{e^{JwY}\}\right) = \ln\left(E\{e^{Jw(X+c)}\}\right)$$

$$= \ln\left(E\{e^{JwX} e^{Jwc}\}\right) = \ln\left(E\{e^{JwX}\} e^{Jwc}\right)$$

$$= \ln\left(E\{e^{JwX}\}\right) + \ln\left(e^{Jwc}\right) = \ln\left(\Phi_X(w)\right) + Jwc$$

$$\Longrightarrow cum(Y) = (-J)^1 \left.\frac{d\Psi_Y(w)}{dw}\right|_{w=0} =$$

از طرفی می دانیم $cum(X) = (-J) \left.\frac{d\ln\Phi_X(w)}{dw}\right|_{w=0}$ می باشد بنابراین داریم:

$$cum(Y) = (-J)\left.\frac{d\Psi_Y(w)}{dw}\right|_{w=0} = (-J)\left.\frac{d\left(\ln\Phi_X(w) + Jwc\right)}{dw}\right|_{w=0}$$

$$= (-J)\left.\frac{d\left(\ln\Phi_X(w)\right)}{dw}\right|_{w=0} + (-J)\left.\frac{d(Jwc)}{dw}\right|_{w=0}$$

$$= cum(X) + (-)(J)^2 c = cum(X) + c$$

ب) برای حل این قسمت داریم:

$$cum(Y^n) = (-J)^n \left.\frac{d^n \ln\Phi_Y(w)}{dw^n}\right|_{w=0} = (-J)^n \frac{d^n\left(\ln(\Phi_X(w)) + Jwc\right)}{dw^n}$$

$$= (-J)^n \left.\frac{d^n\left(\ln(\Phi_X(w))\right)}{dw^n}\right|_{w=0} + (-J)^n \left.\frac{d^n(Jwc)}{dw^n}\right|_{w=0}$$

می دانیم $\mathrm{cum}(X^n) = (-J)^n \left.\dfrac{d^n \ln(\phi_X(w))}{dw^n}\right|_{w=0}$ بنابراین داریم:

$$\mathrm{cum}(Y^n) = \mathrm{cum}(X^n) + 0 \qquad n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{cum}(Y^n) = \mathrm{cum}(X^n) \qquad n \geq 2}$$

ج) برای حل این سؤال ابتدا Ψ را به دست می آوریم و سپس از آن خواسته ی سؤال را محاسبه می کنیم:

$$\Psi_{(X_1+Y_1, X_2+Y_2, \dots, X_m+Y_m)}(w_1, w_2, \dots, w_m) = \ln\left(\phi_{(X_1+Y_1, X_2+Y_2, \dots, X_m+Y_m)}(w_1, w_2, \dots, w_m)\right)$$

$$= \ln\left(E\left\{e^{Jw_1(X_1+Y_1) + Jw_2(X_2+Y_2) + \dots + Jw_m(X_m+Y_m)}\right\}\right)$$

$$= \ln\left(E\left\{e^{Jw_1X_1 + Jw_2X_2 + \dots + Jw_mX_m}\, e^{Jw_1Y_1 + Jw_2Y_2 + \dots + Jw_mY_m}\right\}\right)$$

$$= \ln\left(E\left\{e^{Jw_1X_1 + Jw_2X_2 + \dots + Jw_mX_m}\right\} E\left\{e^{Jw_1Y_1 + Jw_2Y_2 + \dots + Jw_mY_m}\right\}\right)$$

$$= \ln\left(E\left\{e^{Jw_1X_1 + Jw_2X_2 + \dots + Jw_mX_m}\right\}\right) + \ln\left(E\left\{e^{Jw_1Y_1 + Jw_2Y_2 + \dots + Jw_mY_m}\right\}\right)$$

$$\mathrm{cum}(X_1+Y_1, X_2+Y_2, \dots, X_m+Y_m) = (-J) \left.\frac{\partial^m \Psi_{(X_1+Y_1, X_2+Y_2, \dots, X_m+Y_m)}(w_1, w_2, \dots, w_m)}{\partial w^m}\right|_{w=0}$$

$$= (-J) \left.\frac{\partial^m \ln\left\{E\left\{e^{Jw_1X_1 + Jw_2X_2 + \dots + Jw_mX_m}\right\}\right\}}{\partial w^m}\right|_{w=0} + (-J) \left.\frac{\partial^m \ln\left\{E\left\{e^{Jw_1Y_1 + Jw_2Y_2 + \dots + Jw_mY_m}\right\}\right\}}{\partial w^m}\right|_{w=0}$$

$$= \mathrm{cum}(X_1, X_2, \dots, X_m) + \mathrm{cum}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

سوال 3

می دانیم فرآیند $X(t)$ ، WSS می باشد بنابراین متوسط آن مستقل از زمان می باشد یعنی $E\{X(t)\}=\eta_x=$ ثابت همچنین همبستگی برای آن تا جایی از دو لحظه است یعنی داریم:

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=R_X(t_1-t_2) \quad *$$

$$R_{yy}(t_1,t_2)=E\{Y(t_1)\,Y(t_2)\}$$

$$=E\Big\{\big(X(at_1+b)+X(at_1-b)\big)\big(X(at_2+b)+X(at_2-b)\big)\Big\}$$

$$=E\{X(at_1+b)\,X(at_2+b)\}+E\{X(at_1+b)\,X(at_2-b)\}$$

$$+E\{X(at_1-b)\,X(at_2+b)\}+E\{X(at_1-b)\,X(at_2-b)\}$$

$$\xRightarrow{(*)} R_{yy}(t_1,t_2)=R_{xx}\big(a(t_1-t_2)\big)+R_{xx}\big(a(t_1-t_2)+2b\big)$$

$$+R_{xx}\big(a(t_1-t_2)-2b\big)+R_{xx}\big(a(t_1-t_2)\big)$$

$$\xRightarrow{t_1-t_2=\tau} R_{yy}(t_1,t_2)=2R_{xx}(a\tau)+R_{xx}(a\tau+2b)+R_{xx}(a\tau-2b)$$

$\Longleftarrow$ محاسبه شد ✓

سوال 4

می دانیم دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ متقابلا WSS می باشند اگر تک تک WSS باشند و همچنین ممان متقابل آن ها نیز مستقل از زمان باشد. بنابراین حال که $X(t)$ و $Y(t)$ متقابلا WSS می باشند داریم:

$$E\{X(t)\} = \mu_x \quad , \quad R_X(t_1, t_2) = E\{x(t_1)\, x(t_2)\} = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$$

$$E\{Y(t)\} = \mu_y \quad , \quad R_Y(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)\, Y(t_2)\} = R_Y(t_1 - t_2) = R_Y(\tau)$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\, Y(t_2)\} = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(\tau)$$

برای آن که ثابت کنیم فرآیند تصادفی $Z(t)$ یک فرآیند WSS است باید ثابت کنیم که

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1- متوسط مستقل از زمان است} \\ \text{2- همبستگی تابعی از تفاضل دو لحظه است} \end{array}\right.$$

بنابراین داریم:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

$$1)\ E\{Z(t)\} = E\{X(t) + Y(t)\} = E\{X(t)\} + E\{Y(t)\} = \mu_x + \mu_y$$

$$2)\ R_Z(t_1, t_2) = E\{Z(t_1)\, Z(t_2)\} = E\{(X(t_1) + Y(t_1))(X(t_2) + Y(t_2))\}$$

$$= E\{X(t_1)\, X(t_2)\} + E\{X(t_1)\, Y(t_2)\} + E\{Y(t_1)\, X(t_2)\} + E\{Y(t_1)\, Y(t_2)\}$$

$$= R_X(t_1 - t_2) + R_{XY}(t_1 - t_2) + R_{XY}(t_2 - t_1) + R_Y(t_1 - t_2)$$

$$\xlongequal{t_1 - t_2 = \tau} R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{XY}(-\tau) + R_Y(\tau)$$

$$\Longleftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{1- متوسط مستقل از زمان است زیرا برابر } \mu_x + \mu_y \text{ شد} \\ \text{2- } R_Z(t_1, t_2) \text{ تابعی از تفاضل 2 لحظه می باشد} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{بنابراین } Z(t) \text{ هم WSS است.}$$

سؤال 5

می دانیم برای $X \sim N(m, \sigma^2)$ اگر $Z \sim (0, 1)$ داریم:

$$X = \sigma Z + m$$

همچنین می دانیم برای متغیر $Z \sim N(0, 1)$ خواهیم داشت:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \quad \text{for all } z \in \mathbb{R}$$

بنابراین برای محاسبه تابع مشخصه برای متغیر تصادفی گاوسی $X \sim N(m, \sigma^2)$ خواهیم داشت:

$$\Phi_X(w) = E\{e^{Jw X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Jwx} f_X(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \Phi_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Jw(\sigma Z + m)} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}}\, dZ$$

$$= e^{Jwm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{Jw\sigma Z}\, e^{\frac{-Z^2}{2}}\, dZ$$

$$= e^{Jwm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(Z - J\sigma w)^2 - \frac{\sigma^2 w^2}{2}}$$

$$= e^{Jwm - \frac{\sigma^2 w^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(Z - J\sigma w)^2}\, dZ \quad (*)$$

می دانیم برای هر متغیر تصادفی $X(\mu, \sigma^2)$ داریم: (می دانیم برای هر متغیر تصادفی $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \xrightarrow[\mu = J\sigma w]{\sigma = 1} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(x - J\sigma w)^2}\, dx$$

$$= 1 \quad (**)$$

Scanned with CamScanner

بنابراین از (*) و (**) خواهیم داشت:

$$\boxed{\phi_X(w) = e^{jwm - \frac{\sigma^2 w^2}{2}}} \Longrightarrow \boxed{\Psi_X(w) = \ln \phi_X(w) = jwm - \frac{\sigma^2 w^2}{2}}$$

ب) می دانیم بسط تیلور یک تابع (حقیقی یا مختلط) $f(x)$ حول نقطه‌ی a برابر است با:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

می دانیم $\Psi_X(w) = \ln \phi_X(w)$ می باشد بنابراین داریم

$$\Psi_X(w) = \Psi_X(0) + \Psi'_X(0)(w) + \frac{1}{2!}\Psi''_X(0)(w)^2 + \frac{1}{3!}\Psi^{(3)}_X(0)(w)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_X^{(n)}(0)}{n!}(w)^n$$

از طرفی می دانیم $C_k = (-j)^k \left.\frac{d^k \ln \phi_X(w)}{dw^k}\right|_{w=0}$ بنابراین داریم:

$$C_k = (-j)^k \left.\Psi_X^{(k)}(w)\right|_{w=0} = (-j)^k \Psi_X^{(k)}(0) \Longrightarrow \Psi_X^{(k)}(0) = \frac{C_k}{(-j)^k}$$

از طرفی می دانیم $\Psi_X(w) = \ln(\phi_X(w)) = \ln(E[e^{jwX}])$

$$\Longrightarrow \left.\Psi_X(w)\right|_{w=0} = \ln\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_X(x)\, dx\right)\Bigg|_{w=0} = \ln(1) = 0$$

$$\Longrightarrow \Psi_X(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{(w)^n}{n!}$$

ج) برای متغیر گاوسی $X \sim N(m, \sigma^2)$ یافتیم:

$$\Psi_X(w) = jwm - \sigma^2 \frac{w^2}{2} \quad (*)$$

از طرفی می دانیم:

$$\Psi_X(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!} = \frac{C_1}{(-j)} w^1 + \frac{C_2}{-1} \frac{w^2}{2!} + \frac{C_3}{(-j)^3} \frac{w^3}{3!} + \cdots$$

با مقایسه رابطه ی بالا با $(*)$ در می یابیم که ضریب w^n به ازای $n \geq 3$ برابر صفر می باشد

$\Longleftarrow$ C_n به ازای $n \geq 3$ برای متغیرهای گاوسی صفر می باشد.

د)

$$\Phi_X(w) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2}{h^2}\left(e^{jwh} - 1 - jwh\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\text{از دو طرف}]{\ln} \Psi_X(w) \leq \frac{\sigma^2}{h^2}\left(e^{jwh} - 1 - jwh\right)$$

$$\xrightarrow{\text{از ب}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!} + \frac{\sigma^2}{h^2} + \frac{\sigma^2}{h^2} jwh \leq \frac{\sigma^2}{h^2} e^{jwh}$$

می دانیم بسط تیلور $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!} + \frac{\sigma^2}{h^2} + \frac{\sigma^2}{h^2} jwh \leq \frac{\sigma^2}{h^2}\left(1 + jwh + \frac{(jwh)^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{h^2}{\sigma^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!}\right) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(jwh)^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \frac{h^2}{\sigma^2} \times \frac{m_1}{(-j)} \frac{w}{1!} + \frac{h^2}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{(-1)} \frac{w^2}{2!} + \frac{h^2}{\sigma^2}\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!}\right) \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(jwh)^n}{n!} - \frac{h^2 w^2}{2!}$$

$$\Longrightarrow \frac{h^2}{\sigma^2} \times \frac{m_1}{(-j)} w + \frac{h^2}{\sigma^2}\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_n}{(-j)^n} \frac{w^n}{n!}\right) \leq \sum_{n=3}^{\infty} (jh)^n \frac{w^n}{n!} \quad (*)$$

می دانیم $\sigma^2 = m_2 - m_1^2 \xRightarrow{m_1^2 \geq 0} \sigma^2 \leq m_2 = \int^h x^2 f_X(x)\,dx = \int^h x^2\,dx = \frac{h^3}{3}$

$\Leftarrow$ با جاگذاری رابطه ی (*) و همچنین داشتن $h \geq m_1$ و $\sigma^2 \leq \frac{h^3}{3}$ رابطه کوچک تر بزرگ تری صحیح می باشد. از طرفی می دانیم که تمامی اعمالی که انجام دادیم یا به صورت خطی بوده است یا اگر که همگی برگشت پذیر می باشد $\Leftarrow$ این رابطه با استفاده از اثبات به روش بازگشتی اثبات شد

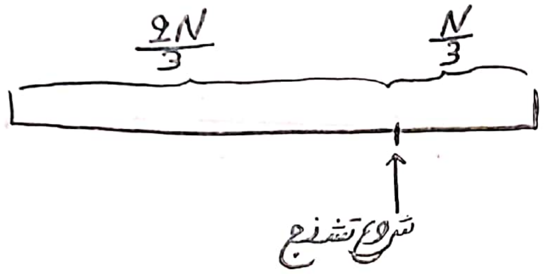
(البته به نظر می رسد از لحاظ موهومی و حقیقی بودن این رابطه چندان صحیح نباشد!)

سؤال 6

می دانیم باند تتا و آلفا برابر 4-13Hz می باشد بنابراین کمترین فرکانس مورد بررسی برابر 4 هرتز می باشد بنابراین برای N_{min} داریم:

$$f_s = 128 \Longrightarrow N_{min} = 3 \times \frac{1}{4} \times 128 = 96$$

برای به دست آوردن N_{max} داریم:



همپوشانی پنجره ها N-1 می باشد.

$$\Longrightarrow \frac{N}{3} \times \frac{1}{128} + \frac{N}{64} < 2 \Longrightarrow \frac{N+6N}{384} < 2$$

$$\Longrightarrow \frac{7N}{384} < 2 \Longrightarrow N < 109/71 \Longrightarrow \boxed{N_{max} = 109}$$

$$\boxed{96 < N < 109}$$ بنابراین $\Longleftarrow$