MODUL PRAKTIKUM 5

Analisis Algoritma

Disusun oleh :

Sina Mustopa (140810180017)

S1 TEKNIK INFORMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PADJADJARAN

Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Tititk Terdekat (Closest Pair of Points)

Tugas:

1) **Buatlah program untuk menyelesaikan problem closest pair of points menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++**

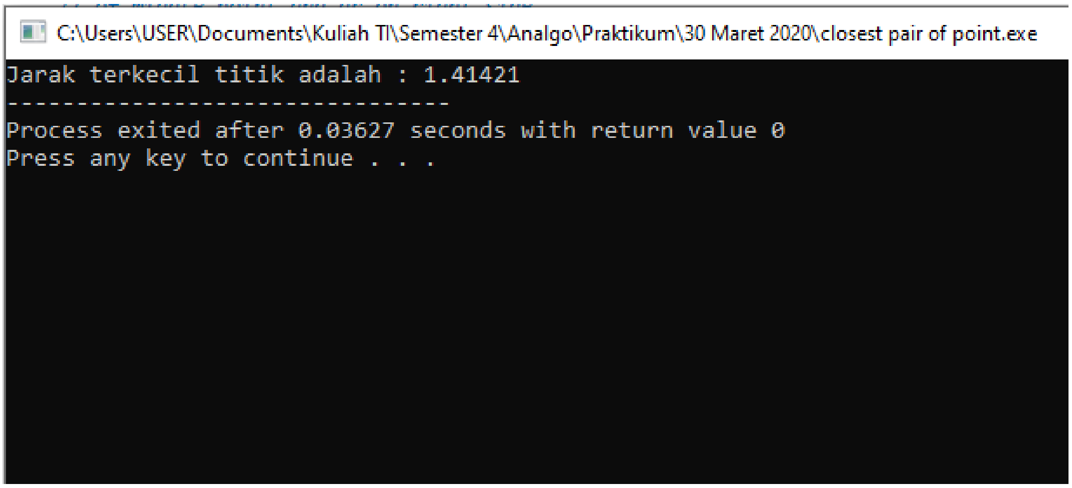
Source Code :

```
// A divide and conquer program in C++
// to find the smallest distance from a
// given set of points.

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

// A structure to represent a Point in 2D plane
class Point
{
 public:
 int x, y;
};

/* Following two functions are needed for library function qsort().
Refer: http://www.cplusplus.com/reference/clibrary/cstdlib/qsort/ */

// Needed to sort array of points
// according to X coordinate
int compareX(const void* a, const void* b)
{
 Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
 return (p1->x - p2->x);
}

// Needed to sort array of points according to Y coordinate
int compareY(const void* a, const void* b)
{
 Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
 return (p1->y - p2->y);
}

// A utility function to find the
// distance between two points
float dist(Point p1, Point p2)
{
 return sqrt( (p1.x - p2.x)*(p1.x - p2.x) +
                   (p1.y - p2.y)*(p1.y - p2.y)
             );
}

// A Brute Force method to return the
// smallest distance between two points
// in P[] of size n
```

```
float bruteForce(Point P[], int n)
{
 float min = FLT_MAX;
 for (int i = 0; i < n; ++i)
       for (int j = i+1; j < n; ++j)
             if (dist(P[i], P[j]) < min)
                   min = dist(P[i], P[j]);
 return min;
}

// A utility function to find
// minimum of two float values
float min(float x, float y)
{
 return (x < y)? x : y;
}


// A utility function to find the
// distance beween the closest points of
// strip of given size. All points in
// strip[] are sorted accordint to
// y coordinate. They all have an upper
// bound on minimum distance as d.
// Note that this method seems to be
// a O(n^2) method, but it's a O(n)
// method as the inner loop runs at most 6 times
float stripClosest(Point strip[], int size, float d)
{
 float min = d; // Initialize the minimum distance as d

 qsort(strip, size, sizeof(Point), compareY);

 // Pick all points one by one and try the next points till the
difference
 // between y coordinates is smaller than d.
 // This is a proven fact that this loop runs at most 6 times
 for (int i = 0; i < size; ++i)
       for (int j = i+1; j < size && (strip[j].y - strip[i].y) < min;
++j)
             if (dist(strip[i],strip[j]) < min)
                   min = dist(strip[i], strip[j]);

 return min;
}

// A recursive function to find the
// smallest distance. The array P contains
// all points sorted according to x coordinate
float closestUtil(Point P[], int n)
{
 // If there are 2 or 3 points, then use brute force
 if (n <= 3)
```

```
      return bruteForce(P, n);

 // Find the middle point
 int mid = n/2;
 Point midPoint = P[mid];

 // Consider the vertical line passing
 // through the middle point calculate
 // the smallest distance dl on left
 // of middle point and dr on right side
 float dl = closestUtil(P, mid);
 float dr = closestUtil(P + mid, n - mid);

 // Find the smaller of two distances
 float d = min(dl, dr);

 // Build an array strip[] that contains
 // points close (closer than d)
 // to the line passing through the middle point
 Point strip[n];
 int j = 0;
 for (int i = 0; i < n; i++)
      if (abs(P[i].x - midPoint.x) < d)
            strip[j] = P[i], j++;

 // Find the closest points in strip.
 // Return the minimum of d and closest
 // distance is strip[]
 return min(d, stripClosest(strip, j, d) );
}

// The main functin that finds the smallest distance
// This method mainly uses closestUtil()
float closest(Point P[], int n)
{
 qsort(P, n, sizeof(Point), compareX);

 // Use recursive function closestUtil()
 // to find the smallest distance
 return closestUtil(P, n);
}

// Driver code
int main()
{
 Point P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10}, {3, 4}};
 int n = sizeof(P) / sizeof(P[0]);
 cout << "Jarak terkecil titik adalah : " << closest(P, n);
 return 0;
}
```

Screenshot :



2) Tentukan rekurensi dari algoritma tersebut, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode recursion tree untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O (n lg n)

Jawab :

Kompleksitas Waktu

Biarkan kompleksitas waktu dari algoritma di atas menjadi T (n). Mari kita asumsikan bahwa kita menggunakan algoritma pengurutan O (nLogn). Algoritma di atas membagi semua titik dalam dua set dan secara rekursif memanggil dua set. Setelah membelah, ia menemukan strip dalam waktu O (n), mengurutkan strip dalam waktu O (nLogn) dan akhirnya menemukan titik terdekat dalam strip dalam waktu O (n). Jadi T (n) dapat dinyatakan sebagai berikut

$T (n) = 2T (n / 2) + O (n) + O (nLogn) + O (n)$

$T (n) = 2T (n / 2) + O (nLogn)$

$T (n) = T (n \times Logn \times Logn)$

Catatan

1) Kompleksitas waktu dapat ditingkatkan menjadi O (nLogn) dengan mengoptimalkan langkah 5 dari algoritma di atas.

2) Kode menemukan jarak terkecil. Dapat dengan mudah dimodifikasi untuk menemukan titik dengan jarak terkecil.

3) Kode ini menggunakan pengurutan cepat yang bisa O (n ^ 2) dalam kasus terburuk. Untuk memiliki batas atas sebagai O (n (Logn) ^ 2), algoritma pengurutan O (nLogn) seperti pengurutan gabungan atau pengurutan tumpukan dapat digunakan

Studi Kasus 6: Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat

Tugas:

1) **Buatlah program untuk menyelesaikan problem fast multiplication menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan (Algoritma Karatsuba). Gunakan bahasa C++**

Jawab :

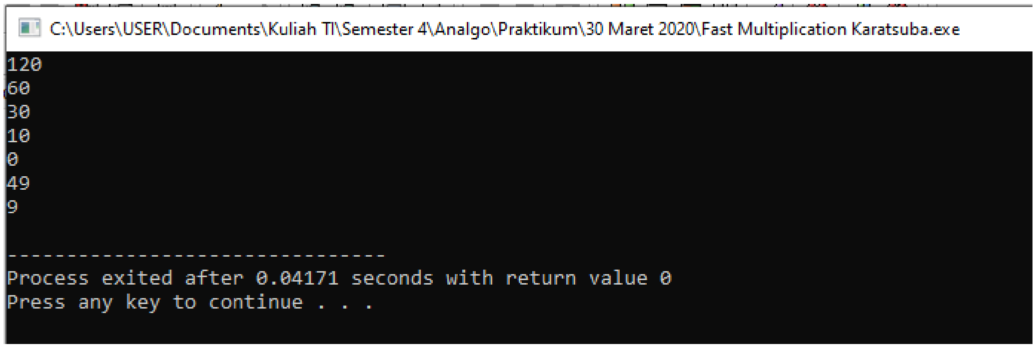
Program :

```
// C++ implementation of Karatsuba algorithm for bit string
multiplication.
#include<iostream>
#include<stdio.h>

using namespace std;

// FOLLOWING TWO FUNCTIONS ARE COPIED FROM http://goo.gl/q0OhZ
// Helper method: given two unequal sized bit strings, converts them to
// same length by adding leading 0s in the smaller string. Returns the
// the new length
int makeEqualLength(string &str1, string &str2)
{
 int len1 = str1.size();
 int len2 = str2.size();
 if (len1 < len2)
 {
       for (int i = 0 ; i < len2 - len1 ; i++)
             str1 = '0' + str1;
       return len2;
 }
 else if (len1 > len2)
 {
       for (int i = 0 ; i < len1 - len2 ; i++)
             str2 = '0' + str2;
 }
 return len1; // If len1 >= len2
}

// The main function that adds two bit sequences and returns the addition
string addBitStrings( string first, string second )
{
 string result; // To store the sum bits

 // make the lengths same before adding
 int length = makeEqualLength(first, second);
 int carry = 0; // Initialize carry

 // Add all bits one by one
 for (int i = length-1 ; i >= 0 ; i--)
 {
       int firstBit = first.at(i) - '0';
       int secondBit = second.at(i) - '0';

       // boolean expression for sum of 3 bits
```

```
        int sum = (firstBit ^ secondBit ^ carry)+'0';

        result = (char)sum + result;

        // boolean expression for 3-bit addition
        carry = (firstBit&secondBit) | (secondBit&carry) |
(firstBit&carry);
 }

 // if overflow, then add a leading 1
 if (carry) result = '1' + result;

 return result;
}

// A utility function to multiply single bits of strings a and b
int multiplyiSingleBit(string a, string b)
{ return (a[0] - '0')*(b[0] - '0'); }

// The main function that multiplies two bit strings X and Y and returns
// result as long integer
long int multiply(string X, string Y)
{
 // Find the maximum of lengths of x and Y and make length
 // of smaller string same as that of larger string
 int n = makeEqualLength(X, Y);

 // Base cases
 if (n == 0) return 0;
 if (n == 1) return multiplyiSingleBit(X, Y);

 int fh = n/2; // First half of string, floor(n/2)
 int sh = (n-fh); // Second half of string, ceil(n/2)

 // Find the first half and second half of first string.
 // Refer http://goo.gl/lLmgn for substr method
 string Xl = X.substr(0, fh);
 string Xr = X.substr(fh, sh);

 // Find the first half and second half of second string
 string Yl = Y.substr(0, fh);
 string Yr = Y.substr(fh, sh);

 // Recursively calculate the three products of inputs of size n/2
 long int P1 = multiply(Xl, Yl);
 long int P2 = multiply(Xr, Yr);
 long int P3 = multiply(addBitStrings(Xl, Xr), addBitStrings(Yl, Yr));

 // Combine the three products to get the final result.
 return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 - P1 - P2)*(1<<sh) + P2;
}

// Driver program to test aboev functions
int main()
{
 printf ("%ld\n", multiply("1100", "1010"));
 printf ("%ld\n", multiply("110", "1010"));
```

```
 printf ("%ld\n", multiply("11", "1010"));
 printf ("%ld\n", multiply("1", "1010"));
 printf ("%ld\n", multiply("0", "1010"));
 printf ("%ld\n", multiply("111", "111"));
 printf ("%ld\n", multiply("11", "11"));
}
```

Screenshot :



2) Rekurensi dari algoritma tersebut adalah T (n) = 3T (n / 2) + O (n), dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode substitusi untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O (n lg n)

Jawab :

- Let's try divide and conquer.
  - Divide each number into two halves.
    - $x = x_H r^{n/2} + x_L$
    - $y = y_H r^{n/2 +} y_L$
  - Then:

    $xy = (x_H r^{n/2} + x_L)\ y_H r^{n/2 +} y_L$

    $= x_H y_H r^n + (x_H y_L + x_L y_H) r^{n/2} + x_L y_L$
  - Runtime?
    - T(n) = 4 T(n/2) + O(n)
    - T(n) = O(n^2)
- Instead of 4 subproblems, we only need 3 (with the help of clever insight).
- Three subproblems:
  - $a = x_H\, y_H$
  - $d = x_L\, y_L$
  - $e = (x_H + x_L)\,(y_H + y_L) - a - d$
- Then $xy = a\, r^n + e\, r^{n/2} + d$
- T(n) = 3 T(n/2) + O(n)
- $T(n) = O(n^{\log 3}) = O(n^{1.584...})$

Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tilling Problem)

Tugas:

1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem tilling menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++
Jawab :

Program :

Screenshot :

// n adalah ukuran kotak yang diberikan, p adalah lokasi sel yang hilang
Tile (int n, Point p)

1) Kasus dasar: n = 2, A 2 x 2 persegi dengan satu sel yang hilang tidak ada apa-apanya tapi ubin dan bisa diisi dengan satu ubin.

2) Tempatkan ubin berbentuk L di tengah sehingga tidak menutupi subsquare n / 2 * n / 2 yang memiliki kuadrat yang hilang. Sekarang keempatnya subskuen ukuran n / 2 x n / 2 memiliki sel yang hilang (sel yang tidak perlu diisi). Lihat gambar 2 di bawah ini.

3) Memecahkan masalah secara rekursif untuk mengikuti empat. Biarkan p1, p2, p3 dan p4 menjadi posisi dari 4 sel yang hilang dalam 4 kotak.
a) Ubin (n / 2, p1)
b) Ubin (n / 2, p2)
c) Ubin (n / 2, p3)
d) Ubin (n / 2, p3)

2) Relasi rekurensi untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta. T (n) = 4T (n / 2) + C. Selesaikan rekurensi tersebut dengan Metode Master

Jawab :

Kompleksitas Waktu:

Relasi perulangan untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.

$T(n) = 4T(n / 2) + C$

Rekursi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Master dan kompleksitas waktu adalah $O(n^2)$

Bagaimana cara kerjanya?

Pengerjaan algoritma Divide and Conquer dapat dibuktikan menggunakan Mathematical Induction. Biarkan kuadrat input berukuran 2k x 2k di mana k> = 1.

Kasus Dasar: Kita tahu bahwa masalahnya dapat diselesaikan untuk k = 1. Kami memiliki 2 x 2 persegi dengan satu sel hilang.

Hipotesis Induksi: Biarkan masalah dapat diselesaikan untuk k-1.

Sekarang perlu dibuktikan untuk membuktikan bahwa masalah dapat diselesaikan untuk k jika dapat diselesaikan untuk k-1. Untuk k, ditempatkan ubin berbentuk L di tengah dan memiliki empat subsqure dengan dimensi 2k-1 x 2k-1 seperti yang ditunjukkan pada gambar 2 di atas. Jadi jika dapat menyelesaikan 4 subskuares, dapat menyelesaikan kuadrat lengkap.