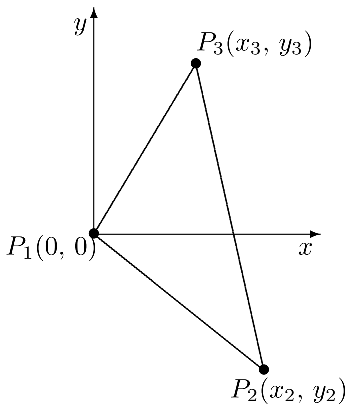
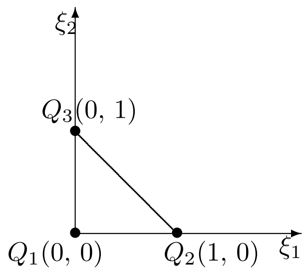
NMMa3 Serie 4

Aufgabe 1

Bilden Sie das Dreieck $P_1P_2P_3$ auf das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ ab.





Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich:

$\mathcal{F}_1$: Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$
$\mathcal{F}_2$: Spiegelung an der Ebene $x_1 = 0$
$\mathcal{F}_3$: Drehung um die x_3-Achse um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen A_k bzgl. der Standardbasis Σ_e der Abbildungen $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, 3$.

b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Matrizen A_1, A_2 und A_3 die Gleichung

$$\mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$$

geometrische Interpretaion

Aufgabe 3

Wir betrachten die *lineare* Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, welche die drei Basisvektoren e_1, e_2 und e_3 des $\mathbb{R}^3$ wie folgt abbildet:

$$\mathcal{F}(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Bild P' des Punktes $P(6,\, 2,\, 3)$ unter $\mathcal{F}$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, die auf $Q'(2,\, 1)$ abgebildet werden.

c) Geben Sie den *Kern*, d.h. $\mathcal{F}(x) = 0$ von $\mathcal{F}$ an.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende *lineare* Abbildungen im $\mathbb{R}^3$ bzgl. der Standardbasis Σ_e

a) Spiegelung S an der $xz-$Ebene.

b) Drehung D_x um die $x-$Achse, Drehwinkel φ_x
Drehung D_y um die $y-$Achse, Drehwinkel φ_y
Drehung D_z um die $z-$Achse, Drehwinkel φ_z

c) Zusammensetzung: zuerst Spiegelung S, dann D_z, dann D_x und schliesslich D_y, speziell für $\varphi_x = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi_y = \varphi_z = \frac{\pi}{2}$

NMMa3 Lösungen Serie 4

Lösung 1

Diese Abbildung (Grundaufgabe der Methode der finiten Elemente) hat die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} y_3 & -x_3 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \qquad d := x_2\, y_3 - x_3\, y_2$$

Lösung 2

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Bilder von $e_k,\ k = 1, 2, 3$

b)

$$A_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2 \cdot A_1 \quad \text{Reihenfolge!} = \text{Drehung um die } x_3\text{–Achse, Drehwinkel } \varphi = \tfrac{\pi}{2}$$

Lösung 3

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } \Sigma_e$$

$$\text{a) } F(P) = P',\ P'(19, 5) \quad \text{b) } g:\ r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } Fx = 0:\ Kern(F) = span\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

Lösung 4

$$\text{a) } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^2 = I_3$$

$$\text{b)} D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix} \quad D_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix} \quad D_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D_y \cdot D_x \cdot D_z \cdot S$$