

## 0.1 Likninger, formler og funksjoner

Likninger, formler og funksjoner (og uttrykk) er begreper som dukker i forskjellige sammenhenger, men i bunn og grunn handler de om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*.

Formler og funksjoner bruker vi for å finne størrelser, enten direkte eller indirekte.

### 0.1.1 Å finne størrelser direkte

#### Når formelen er kjent

Når formler er kjente, er det snakk om å sette inn verdier og regne ut. Formler har vi brukt i mange kapitler allerede, omtrent alle regelbøkene i boka inneholder en formel. Men så langt har vi brukt formler med dimensjonsløse størrelser. Når vi har størrelser med enheter er det helt avgjørende at vi passer på at enhetene som er involvert er de samme.

#### Eksempel 1

Hvis du kjører med konstant fart, er strekningen du har kjørt etter en viss tid gitt ved formelen

$$\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}$$

- a) Hvor langt kjører en bil som holder farten 50 km/h i 3 timer?
- b) Hvor langt kjører en bil som holder farten 90 km/h i 45 minutt?

#### Svar:

- a) I formelen er nå farten 50 og tiden 3, og da er

$$\text{strekning} = 50 \cdot 3 = 150$$

Altså har bilen kjørt 150 km

- b) Her har vi to forskjellige enheter for tid involvert; timer og minutt. Da må vi enten gjøre om farten til km/min eller

tiden til timer. Vi velger å gjøre om minutt til timer:

$$\begin{aligned}45 \text{ minutt} &= \frac{45}{60} \text{ timer} \\ &= \frac{3}{4} \text{ timer}\end{aligned}$$

I formelen er nå farten 90 og tiden  $\frac{3}{4}$ , og da er

$$\text{strekning} = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$$

Altså har bilen kjørt 67.5 km.

## Eksempel 2

*Kiloprisen* til en vare er hva en vare koster per kg. For en hvilken som helst vare har vi at

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}}$$

- a) 10 kg tomater koster 35 kr. Hva er kiloprisen til tomatene?
- b) Safran går for å være verdens dyreste krydder, 5 g kan koste 600 kr. Hva er da kiloprisen på safran?

**Svar:**

- a) I formelen er nå prisen 35 og vekten 10, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{35}{10} = 3,5$$

Altså er kiloprisen på tomater 3,5 kr/kg

- b) Her har vi to forskjellige enheter for vekt involvert; kg og gram. Vi gjør om antall g til antall kg (se ??):

$$5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$$

I formelen vår er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{600}{0,005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 kr/kg.

## Merk

I de to eksemplene over har vi brukt fulle ord i formlene våre, men det lønner seg å bli vant til å bare bruke enkeltbokstaver. I *Eksempel 1* kunne vi kalt farten  $f$ , strekningen  $s$ , og tiden  $t$ . Da ville formelen sett slik ut:

$$s = f \cdot t$$

Legg også merke til at du i seksjon ?? og ?? allerede har reknet mye med formler gitt ved enkeltbokstaver!

## Når formelen er ukjente

Når vi bare får en beskrivelse av en situasjon, må vi selv lage formlene. Da gjelder det å identifisere hvilke størrelser som er ukjente, og finne relasjonen mellom dem.

### Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
  - I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.
- a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.
- b) Hva koster en taxitur på 17 km?

### Svar:

- a) Her er det to ukjente størrelser; *kostnaden for taxituren* og *antall kilometer kjørt*. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

- b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

### 0.1.2 Å finne størrelser indirekte

Omgjøring av formler

Tenk for eksempel at du skal kjøpe 2 kg epler i butikken, og eplene koster 10 kr/kg. Regnestykket ditt blir da dette:

$$\text{hva jeg må betale for eplene} = \text{antall kg epler} \cdot \text{kiloprisen for epler}$$

Hvis vi bestemmer oss for at  $x$  betyr det samme som *hva jeg må betale for eplene*, blir ligningen vår seende slik ut:

$$x = \text{antall kg epler} \cdot \text{kiloprisen for epler}$$

Og fordi vi vet både hva *antall kg epler* og *kiloprisen for epler* er, kan vi finne svaret:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 10 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Vi må altså betale 20 kr for eplene.

Her kunne vi selvsagt regnet ut prisen for eplene direkte, men for lengre utregninger er det lurt å lage en ligning. Og det blir oftere lettere for oss å lage ligningen hvis vi gjør som i det korte eksempelet med eplene.

### 0.1 Å lage en ligning

Når vi skal beskrive et spørsmål som en ligning kan det være lurt å gjøre følgende:

- Sette opp regnestykket i ord.
- Erstatte den ukjente størrelsen med  $x$ .

#### Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassesetor som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en ligning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klassesetoren.

b) Løs ligningen.

**Svar:**

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\text{penger allerede skaffet} + \text{antall lodd} \cdot \text{penger per lodd} = \text{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er *antall lodd*. Vi erstatter derfor *antall lodd* med  $x$ , og setter inn verdien til de andre:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$25x = 11\,000 - 2\,000$$

$$25x = 9\,000$$

$$\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} = \frac{9\,000}{25}$$

$$x = 360$$

$x \cdot 25$  er skrevet om til  $25x$ .

## Eksempel 2

”Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?”.

**Svar:**

”Broren min er dobbelt så gammel som meg.” betyr at:

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

”Til sammen er vi 9 år gamle.” betyr at:

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9 \text{ år}$$

Erstatter vi *brors alder* med ” $2 \cdot \text{min alder}$ ”, får vi:

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9 \text{ år}$$

Det som er ukjent for oss er *min alder*:

$$2x + x = 9$$

$$3x = 9$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

”Jeg” er altså 3 år gammel.

## 0.2 Formler

Tenk at du har en jobb der du tjener 200 kr i timen, og at du jobber 5 timer hver arbeidsdag. Regnestykket for hvor mange kroner du tjener på en arbeidsdag (dagslønnen) er dette:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 200 \cdot 5 \\ &= 1000\end{aligned}$$

Hvis du istedenfor tjener 500 kr i timen og jobber 3 timer hver dag, blir regnestykket seende slik ut:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 500 \cdot 3 \\ &= 1500\end{aligned}$$

Saken er at selv om timelønnen og timetallet forandrer seg, er selve *regnemetode* for dagslønnen akkurat den samme: *Vi ganger timelønnen med timetallet*. Når en regnemetode forblir den samme, selv om tallene forandrer seg, sier vi at vi har en *formel*. En formel forteller oss hvordan vi skal regne ut det vi ønsker å vite. Når vi regnet ut dagslønnen vår ganget vi timelønnen med timeantallet, formelen for dagslønnen kan vi da skrive slik:

$$\text{dagslønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timetall}$$

For å gjøre formlene våre enda kortere bruker vi også å forkorte størrelsene, gjerne med bokstaver som har sammenheng med navnet på størrelsen. For eksempel kan vi kalle dagslønnen for  $D$ , timelønnen for  $L$  og timetallet for  $T$ , da blir formelen vår seende ut som dette

$$D = T \cdot L$$

Fordi  $D$  står alene på den ene siden av "="-tegnet, sier vi at dette er en formel for  $D$ .

I de to regnestykkene

$$2 \cdot 3 = 6$$

og

$$4 \cdot 5 = 20$$

er *regnemetoden* den samme (vi ganger to tall), men ikke *resultatet*.

### 0.2 Formler

En formel viser sammenhengen mellom størrelser.

### Eksempel 1

Hvis du kjører med den samme farten hele tiden, finner du lengden du har kjørt ved å gange farten med tiden. Kall lengden du har kjørt for  $l$ , farten for  $f$  og tiden for  $t$ .

Lag en formel for  $l$ .

#### Svar:

Oppgaveteksten forteller oss at vi finner  $l$  ved å gange  $f$  med  $t$ :

$$l = f \cdot t$$

Dette er altså formelen for  $l$ .

### Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall ”antall personer som blir med på å spleise” for  $P$  og ”utgift per person i kroner” for  $U$  og lag en formel for  $U$ .

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

#### Svar:

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli:

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter  $P$  med 20, og får:

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.



## 0.3 Omgjøring av formler

Vi har sett (*Eksempel 1*, s. ??) at lengden  $l$  vi har kjørt, farten  $f$  vi har holdt og tiden  $t$  vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen:

$$l = f \cdot t$$

Ut ifra denne formelen kan vi altså finne lengden hvis vi vet hvor fort og hvor lenge vi har kjørt. Men hva om vi isteden vet hvor langt og hvor lenge vi har kjørt, men ikke hvor fort?

Det vi må gjøre, er å skrive om formelen så det blir en formel for  $f$  istedenfor  $l$ . Det vi nå må ha med oss, er at  $l$ ,  $f$  og  $t$  er alle tall, derfor kan vi bruke punktene fra ?? for å gjøre om på ligningen vår. Og fordi vi ønsker en formel for  $f$ , ønsker vi at  $f$  skal stå alene på den ene siden av likhetstegnet:

$$l = f \cdot t$$

$$\frac{l}{t} = \frac{f \cdot t}{t}$$

$$\frac{l}{t} = f$$

### 0.3 Omforming av formler

Når vi skal omforme en størrelse, bruker vi ligningsreglene fra ?? for å få størrelsen vi ønsker til å stå på én side av likhetstegnet.

#### Eksempel 1

*Ohms lov* sier at strømmen  $I$  gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen:

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor  $U$  er spenningen og  $R$  er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for  $R$ .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm ( $\Omega$ ).

b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

**Svar:**

a) Vi gjør om formelen slik at  $R$  står alene på én side av likhet-sregnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a) og får at:

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså  $6 \Omega$ .

## Eksempel 2

Si vi har målt en temperatur  $T_C$  i grader Celsius ( $^{\circ}C$ ). Temperaturen  $T_F$  målt i Fahrenheit ( $^{\circ}F$ ) er da gitt ved formelen:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for  $T_C$ .

b) Hvis en temperatur er målt til  $59^{\circ}F$ , hva er da temperaturen målt i  $^{\circ}C$ ?

**Svar:**

a)

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

$$T_F - 32 = \frac{9}{5} \cdot T_C$$

$$5(T_F - 32) = \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C$$

$$5(T_F - 32) = 9T_C$$

$$\frac{5(T_F - 32)}{9} = \frac{9T_C}{9}$$

$$\frac{5(T_F - 32)}{9} = T_C$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at:

$$T_C = \frac{5(59 - 32)}{9}$$

$$= \frac{5(27)}{9}$$

$$= 5 \cdot 3$$

$$= 15$$