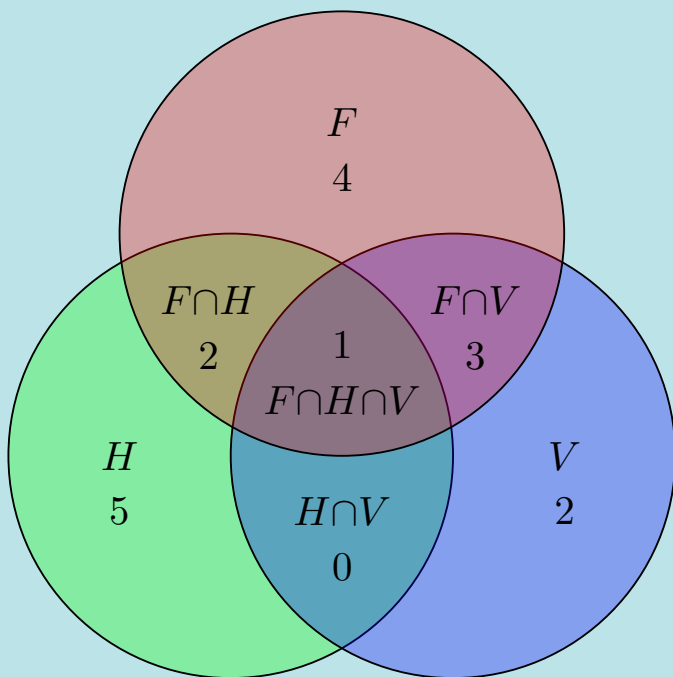


# Anvendt matematikk for grunnskule og VGS



*”Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,  
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,  
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,  
was den grössten Genuss gewährt”*

*”Det er ikke å vite, men å lære,  
ikke å eie, men å tilegne seg,  
ikke å være til stede, men å komme dit,  
som gir den største gleden.”*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X og figurane er lagd vha. Asymptote.

*Matematikkens byggesteiner by Sindre Sogge Heggen is licensed under  
CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>*

30.06.2021

# Innhold

<b>1</b>	<b>Geometri</b>	<b>4</b>
1.1	Størrelser, enheter og prefikser . . . . .	4
1.2	Volum . . . . .	7
1.3	Omkrets, areal og volum med enheter . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Brøkgregning</b>	<b>12</b>
2.1	Brøkdelers av helheter . . . . .	13
2.2	Prosent . . . . .	15
2.2.1	Prosentvis endring . . . . .	18
2.2.2	Vekstfaktor . . . . .	20
2.2.3	Prosentpoeng . . . . .	25
2.3	Forhold . . . . .	28
	Oppgaver . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Likninger og funksjoner</b>	<b>36</b>
3.1	Å lage ligninger . . . . .	36
3.2	Formler . . . . .	39
3.3	Omgjøring av formler . . . . .	41
	Oppgaver . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Økonomi</b>	<b>47</b>
4.1	Indeksregning . . . . .	48
4.1.1	Konsumprisindeks og basisår . . . . .	48
4.1.2	Kroneverdi . . . . .	50
4.1.3	Reallønn og nominell lønn . . . . .	51
4.1.4	Regning med indekser . . . . .	52
4.2	Lån og prosentvis endring over tid . . . . .	54
4.2.1	Lån . . . . .	54
4.2.2	Prosentvis endring over tid . . . . .	57
4.3	Skatt . . . . .	61
4.3.1	Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag . . . . .	61
4.3.2	Trygdeavgift . . . . .	62
4.3.3	Trinnskatt . . . . .	63
4.3.4	Nettolønn . . . . .	63
4.4	Budsjett og regnskap . . . . .	65
4.4.1	Budsjett . . . . .	65
4.4.2	Regnskap . . . . .	66
	Oppgaver . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Sannsynlighet</b>	<b>71</b>

5.1	Grunnprinsippet . . . . .	71
5.2	Hendelser med og uten felles utfall . . . . .	73
5.2.1	Hendelser uten felles utfall . . . . .	73
5.2.2	Summen av alle sannsynligheter er 1 . . . . .	74
5.2.3	Felles utfall . . . . .	75
5.2.4	Venn diagram . . . . .	79
5.2.5	Krysstabell . . . . .	82
5.3	Gjentatte trekk . . . . .	83
5.3.1	Kombinasjoner . . . . .	83
5.3.2	Sannsynlighet ved gjentatte trekk . . . . .	85
5.3.3	Valgtre . . . . .	86
	Oppgaver . . . . .	90
<b>Excel</b>		<b>93</b>
E.1	Introduksjon . . . . .	94
E.2	Cellereferanser . . . . .	95
E.3	Kopiering av celler . . . . .	96
E.4	Småtriaks . . . . .	99
	Oppgaver . . . . .	100
<b>GeoGebra</b>		<b>104</b>
G.1	Skrive inn en funksjon . . . . .	105
G.2	Finne verdien til en funksjon/linje . . . . .	107
G.3	Finne skjæringspunkt . . . . .	108
G.4	Finne nullpunkt . . . . .	109
G.5	Finne topp- eller bunnpunkt . . . . .	110
G.6	Tegne linjen mellom to punkt . . . . .	111
G.7	Tegne graf på gitt intervall . . . . .	112
G.8	Oppgaver . . . . .	113

# Kapittel 1

## Geometri

### 1.1 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelser*. Videre har vi *størrelser med dimensjoner* og *dimensjonsløse størrelser*.

Et eksempel på en størrelse med dimensjon er ”2 meter”. Dimensjonen er da ’lengde’, som vi gjerne måler i meter. Vi sier at meter er en *enhet* for dimensjonen lengde.

Et eksempel på en størrelse uten dimensjon er ”to hester”. Mens det bare finnes én lengde som er ”2 meter”, ”to hester” se veldig forskjellig ut, avhengig av hvile to hester det er snakk om.

#### Regning med dimensjoner

Når vi regner med størrelser med dimensjoner må vi passe på at alle enhetene er like, hvis ikke gir ikke regnestykkene våre mening. I denne boka skal vi se på disse enhetene:

Enhet	Forkortelse
meter	m
gram	g
liter	L

Noen ganger har vi veldig store eller veldig små størrelser, for eksempel er det ca 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanlig å bruke en *prefiks*, da kan vi si at det er ca 40 075 km rundt ekvator. Her står ’km’ for ’kilometer’ og ’kilo’ betyr ’1 000’. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer. Her er de viktigste prefiksene:

Prefiks	Forkortelse	Betydning
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med enhetene kan vi for eksempel se at:

$$1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$$

$$0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$$

$$0,01 \text{ L} = 1 \text{ cL}$$

Enda ryddigere kan vi få det hvis vi lager en vannrett tabell, med meter, gram eller liter lagt til i midten:

| kilo | hekto | deka | m/g/L | desi | centi | milli |

Vi har sett hvordan prefiksene egentlig bare betyr et tall, og m, g eller L kan vi si har et 1-tall foran seg ( $4 \cdot 1 \text{ m}$  er jo det samme som  $4 \text{ m}$ ).

Vi kan da legge merke til at for å komme fra én rute til en annen i tabellen, er det bare snakk om å flytte komma:

### 1.1 Omgjøring av prefiks

Når vi skal endre prefikser kan vi bruke denne tabellen:

| kilo | hekto | deka | m/g/L | desi | centi | milli |

Komma må flyttes like mange ganger som antall bokser vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

*Obs!* For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil er 10 000 m). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

### Eksempel 1

Gjør om 23,4 mL til L.

**Svar:**

Vi skriver tabellen vår med L i midten og legger merke til at vi må *tre bokser til venstre* for å komme oss fra mL til L:

| kilo | hekto | deka | L | desi | centi | milli |

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til venstre for å gjøre om mL til L:

$$23,4 \text{ mL} = 0,0234 \text{ L}$$

## Eksempel 2

Gjør om 30 hg til cg.

### Svar:

Vi skriver tabellen vår med g i midten og legger merke til at vi må *fire bokser til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

| kilo | **hekto** | deka | g | desi | **centi** | milli |

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plasser til høyre for å gjøre om hg til cg:

$$30 \text{ mg} = 300\,000 \text{ cg}$$

## Eksempel 3

Gjør om 12 500 dm til mil.

### Svar:

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må *fem bokser til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

| **mil** | kilo | hekto | deka | m | **desi** | centi | milli |

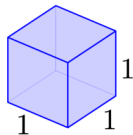
Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plasser til høyre for å gjøre om mil til cg:

$$30 \text{ dm} = 3\,000\,000 \text{ mil}$$

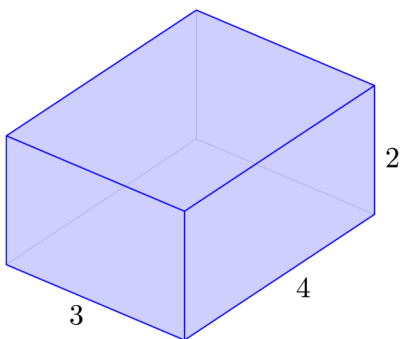
*Merk:* 'mil' er en egen enhet, ikke en prefiks. Vi skriver derfor ikke 'milm', men bare 'mil'.

## 1.2 Volum

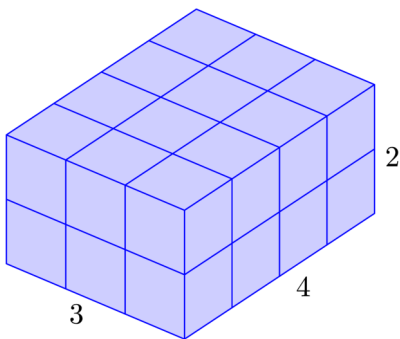
Når vi ønsker å si noe om hvor mye det er plass til inni en gjenstand, snakker vi om *volumet* av den. Som et mål på volum tenker vi oss *en kube* som har 1 som både bredde, lengde og høyde:



En slik kube kan vi kalle "enhetskuben". Si vi har en firkantet boks med bredde 3, lengde 4 og høyde 2:



Vi kan må merke oss at vi har plass til akkurat 24 enhetskuber i denne boksen:



Og dette kunne vi ha regnet ut slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

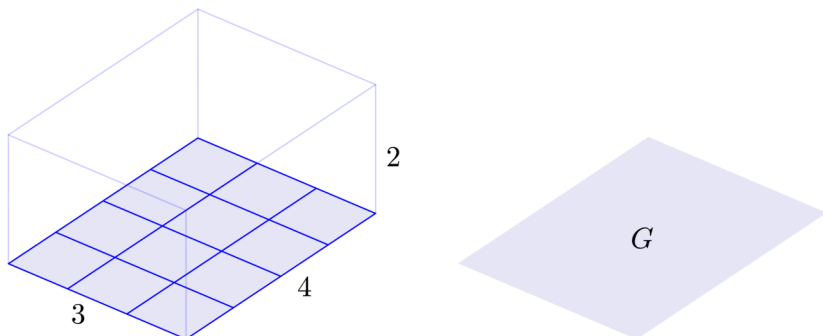
Altså:

$$\text{bredde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høyde}$$



## Grunnflate

For å regne ut volumet av de mest elementære figurene vi har, kan det være lurt å bruke begrepet *grunnflate*. Slik som for en grunnlinje, er det vårt valg av grunnflate som bestemmer hvordan vi skal regne ut høyden. For en slik boks som vi akkurat så på, er det naturlig å velge flaten som "ligger ned" til å være grunnflaten, og for å indikere dette brukes ofte  $G$ :



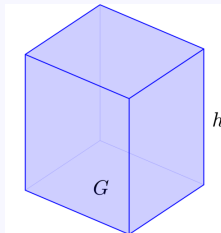
Grunnflaten har arealet  $3 \cdot 4 = 12$ , mens høyden er 2. Volumet av hele boksen er grunnflaten ganger høyden:

$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= 12 \cdot h \\ &= 24 \end{aligned}$$

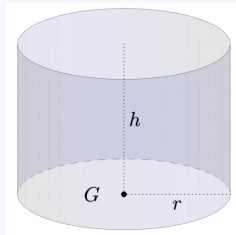
## 1.2 Volum

Volumet  $V$  av en firkantet boks eller en sylinder med grunnflate  $G$  og høyde  $h$  er:

$$V = G \cdot h$$



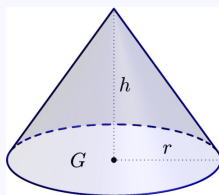
Boks



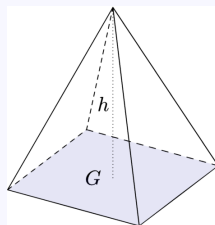
Sylinder

Volumet  $V$  av en kjegle eller en pyramide med grunnflate  $G$  og høyde  $h$  er:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



Kjegle



Pyramide

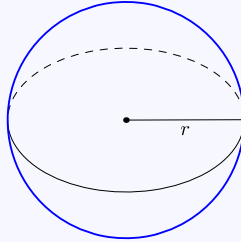
### Volumet av ei kule

Som vanlig skiller ting seg ut når vi snakker om renit sirkelformede figurer, og ei *kule* er ikke noe unntak. For den spesielt interesserte kan et bevis for volumformelen leses [her](#), men det er altså helt lov til å bykse rett på formelen:

### 1.3 Volumet av ei kule

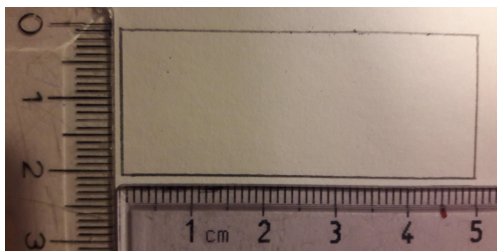
Volumet  $V$  av ei kule med radius  $r$  er:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



### 1.3 Omkrets, areal og volum med enheter

Når me måler lengder med linjal eller liknande må me passe på å ta med eininga i svaret vårt:



$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} \\ &= 14 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \\ &= 2 \cdot 5 \text{ cm}^2 \\ &= 10 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

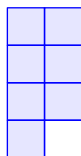
Vi skriv  $\text{cm}^2$  fordi vi har ganga saman 2 lengder som vi har målt i cm.

## Kapittel 2

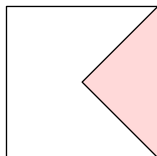
# Brøkregning

## 2.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35-47) har vi sett hvordan brøker er definert ut ifra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a)



(b)

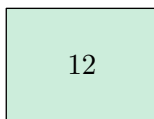


(c)

- (a) Helheten er 8 ruter.  $\frac{7}{8}$  av rutene er blå.
- (b) Helheten er et kvadrat.  $\frac{1}{4}$  av kvadratet er rødt.
- (c) Helheten er 5 kuler.  $\frac{3}{5}$  av kulene er svarte.

### Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.

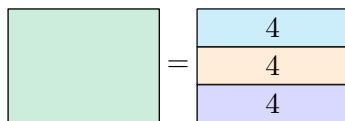


Når vi sier " $\frac{2}{3}$  av 12" mener vi at vi skal

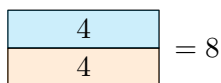
- a) dele 12 inn i 3 like grupper
- b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

- a) 12 delt inn i 3 grupper er lik  $12 : 3 = 4$ .



- b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen  $2 \cdot 4 = 8$ .



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne  $\frac{2}{3}$  av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med  $\frac{2}{3}$  (se [MB](#), s. 45 og 50).

## 2.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

### Eksempel 1

Finn  $\frac{2}{5}$  av 15.

**Svar:**

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

### Eksempel 2

Finn  $\frac{7}{9}$  av  $\frac{5}{6}$ .

**Svar:**

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

## 2.2 Prosent

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er lett å se (omtrent) hvor mye  $\frac{3}{5}$  eller  $\frac{7}{12}$  av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.



Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Brøker med denne nevneren er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

### 2.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

### Språkboksen

% uttales *prosent*. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

### Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

### Eksempel 2

$$12,7\% = \frac{12,7}{100}$$

*Merk:* Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).



### Eksempel 3

Gjør om brøkene til prosenttall.

a)  $\frac{34}{100}$

b)  $\frac{203}{100}$

**Svar:**

a)  $\frac{34}{100} = 34\%$

b)  $\frac{203}{100} = 203\%$

### Eksempel 4

Finn 50% av 800. Av [Regel 2.1](#) og [Regel 2.2](#) har vi at

**Svar:**

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

### Eksempel 5

Finn 2% av 7,4.

**Svar:**

$$2\% \text{ av } 7,4 = \frac{2}{100} \cdot 7,4 = 0,148$$

### Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi foretar utregninger. I *Eksempel 5* over kunne vi har regnet slik:

$$2\% \text{ av } 7,4 = 0,02 \cdot 7,4 = 0,148$$

## Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som  $\frac{15}{20}$  av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om  $\frac{15}{20}$  til en brøk med 100 i nevner. Siden  $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$ , utvider vi brøken vår med  $\frac{100}{20} = 5$ :

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Det er verdt å merke seg at vi kunne fått 75 direkte ved utregningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

### 2.3 Antall prosent $a$ utgjør av $b$

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b}$$

#### Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

**Svar:**

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjør 85% av 400.

#### Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

**Svar:**

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23,8$$

119 utgjør 23,8% av 500.

#### Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utregningen. *Eksempel 2* over kunne vi da

regnet slik:

$$\frac{119}{500} = 0,238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500.

(Her regner man i hodet at  $0,238 \cdot 100 = 23,8$ .)

### 2.2.1 Prosentvis endring

#### Minkende størrelse

I mange situasjoner har noe økt eller minket med en viss prosent. I en butikk kan man for eksempel komme over en skjorte som originalt kostet 500 kr, men selges med 40% *rabatt*. Dette betyr at vi skal trekke ifra 40% av originalprisen.



Her er to måter vi kan tenke på for å finne prisen:

- Vi starter med å finne det vi skal trekke ifra:

$$\begin{aligned} 40\% \text{ av } 500 &= \frac{40}{100} \cdot 500 \\ &= 200 \end{aligned}$$

Videre er

$$500 - 200 = 300$$

Altså må vi betale 300 kr for skjorten.

- Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale 60% av 500:

$$100\% - 40\% = 60\%$$

$$\begin{aligned} 60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Svaret blir selvsagt det samme, vi må betale 300 kr for skjorten.

## Økende størrelse

Det er ikke alltid vi er så heldige at vi får rabatt på et produkt, ofte må vi faktisk betale et tillegg. **Mervardiavgiften** er et slikt tillegg. I Norge må vi betale 25% i mervardiavgift på mange varer. Det betyr at vi må betale et tillegg på 25%, altså 125% av originalprisen.

Mervardiavgift  
forkortes til mva.

$$100\% + 25\% = 125\%$$

For eksempel koster øreklokkene på bildet 999,20 kr *eksludert* mva. Men *inkludert* mva. må vi betale

$$\begin{aligned} 125\% \text{ av } 999,20 &= \frac{125}{100} \cdot 999,20 \\ &= 1249 \end{aligned}$$

Altså 1249 kr.



## Oppsummering

### 2.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse synker med  $a\%$ , ender vi opp med  $(100\% - a\%)$  av størrelsen.
- Når en størrelse øker med  $a\%$ , ender vi opp med  $(100\% + a\%)$  av størrelsen.

### Eksempel 1

Hva er **210** senket med **70%**?

**Svar:**

$100\% - 70\% = 30\%$ , altså er

$$\begin{aligned} \text{210 senket med 70\%} &= 30\% \text{ av } 210 \\ &= \frac{30}{100} \cdot 210 \\ &= 63 \end{aligned}$$

### Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

**Svar:**

$100\% + 124,5\% = 224,5\%$ , altså er

208,9 økt med 124,5 = 224,5% av 208,9

$$= \frac{224,5}{100} \cdot 208,9$$

### 2.2.2 Vekstfaktor

På side 18 ble prisen til en skjorte redusert med 40%, og da endte vi opp med å betale 60% av originalprisen. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 0,6. På side 19 måtte vi legge til 25% mva., og da endte vi med å betale 125% av originalprisen. Da er vekstfaktoren 1,25.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse synker, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

### 2.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med  $a\%$ , er vekstfaktoren verdien til<sup>1</sup>  $100\% \pm a\%$ .

---

<sup>1</sup>  $\pm$  betyr at man skal velge enten + eller -.

### Eksempel 1

En størrelse skal økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

**Svar:**

$100\% + 15\% = 115\%$ , altså er vekstfaktoren 1,15.

### Eksempel 2

En størrelse skal reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

**Svar:**

$100\% - 19,7\% = 80,3\%$ , altså er vekstfaktoren 80,3%

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 19, hvor 210 skulle senkes med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0,3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 senket med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

## 2.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endret originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

### Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

**Svar:**

a) Siden det er 20% rabatt, må vi betale

$$100\% - 20\% = 80\%$$

av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0,8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr.

### Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Hva koster sjokoladen inkludert mva?

**Svar:**

a) Med 15% i tillegg må man betale

$$100\% + 15\% = 115\%$$

av prisen ekskludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)

$$1,15 \cdot 9.90 = 12,25$$

Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omskrive likningen fra [Regel 2.6](#) for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

## 2.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

### Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent av en helhet. Denne helheten man har som utgangspunkt er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tente 10 000 kr i 2019 og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet ”Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020 i prosent?”. Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med ’kr’ i utregningene):

- Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på  $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$ . Videre er (se [Regel 2.3](#))

$$\begin{aligned} \text{Antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1,2$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se [Regel 2.7](#)). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se [Regel 2.5](#)). Det betyr at lønnen økte med 20%.

## 2.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man i steden regne ut 'originalverdi – endret original'

### Kommentar

*Regel 2.8* kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått seksjon ??, kan du uten å bruke denne formelen finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgende eksempler viser vi derfor både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

### Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

#### Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

*Løsningsmetode 1; trinnvis metode*

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det  $20 - 12 = 8$  som sluttet. Vi har at

$$\text{Antall prosent 4 utgjør av } 20 = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

*Løsningsmetode 2; formel*

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{20 - 12}{20} \cdot 100 \\ &= \frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= 40\end{aligned}$$



I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

## 2.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100 \left( \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}} - 1 \right)$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man "snu" regnestykket inni parentes til  $1 - \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$ .

### Merk

[Regel 2.8](#) og [Regel 2.9](#) gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge hvilken man liker best. Som allerede nevnt angående [Regel 2.8](#), er også [Regel 2.9](#) en litt kronglete formel, og man trenger den ikke hvis man har forstått seksjon ?? og ??. Her vil vi også i påfølgende eksempler vise to løsningsmetoder.

### Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

#### Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

*Løsningsmetode 1; trinnvis metode*

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, da har vi at (se [Regel 2.7](#))

$$\text{vekstfaktor} = \frac{12}{20} = 0,6$$

En vekstfaktor lik 0,6 tilsvarer en endring på 40% (se [Regel 2.5](#)). I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

*Løsningsmetode 2; formel*

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede

verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100 \left( 1 - \frac{12}{20} \right) \\ &= 100 (1 - 0,6) \\ &= 100 \cdot 0,4 \\ &= 40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

### 2.2.3 Prosentpoeng

Ofte snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier. For å forenkle setningene har vi begrepet *prosentpoeng*.



Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, og deretter med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

$$80\% - 30\% = 50\%$$

*Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?*

Si at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50% får vi  $300 \cdot 1,5 = 450$ , og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi har to forskjellige originalverdier som utgangspunkt:

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%.”

*Forklaring:* ”Rabatten” er en størrelse vi regner ut i fra originalprisen til solbrillene. Når vi sier ”prosentpoeng” viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med  $1\,000 \text{ kr} \cdot 0,3 = 300 \text{ kr}$  i rabatt. Når vi legger til 50 *prosentpoeng*,

legger vi til 50% av originalprisen, altså  $1\,000 \text{ kr} \cdot 0,5 = 500 \text{ kr}$ . Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%.”

*Forklaring:* ”Rabatten” er en størrelse vi regner ut i fra originalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300 \text{ kr} \text{ økt med } 50\% = 300 \text{ kr} \cdot 1,5 = 450 \text{ kr}$$

og

$$\text{Antall prosent } 450 \text{ utgjør av } 1\,000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er streng tatt ikke nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten

$$30\% + 50\% = 80\%$$

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten

$$30\% \cdot 1,5 = 45\%$$

## 2.10 Prosentpoeng

$a\%$  økt/minket med  $b$  prosentpoeng  $= a\% \pm b\%$ .

$a\%$  økt/minket med  $b\% = a\% \cdot (1 \pm b\%)$

### Merk

Andre linje i [Regel 2.10](#) er egentlig identisk med [Regel 2.6](#).

### Eksempel

En dag var 5% av elevene på en skole borte. Dagen etter var

7,5% av elevene borte.

a) Hvor mye økte fraværet i prosentpoeng?

b) Hvor mye økte fraværet i prosent?

**Svar:**

a)  $7,5\% - 5\% = 2,5\%$ , derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.

b) Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Dette er det samme som å finne hvor mye 2,5 utgjør av 5. (Se tilbake til ligning (??)). 1% av 5 er 0,05, derfor får vi:

$$\begin{aligned}\text{Antall prosent 2,5 utgjør av 5} &= \frac{2,5}{0,05} \\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

## 2.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den éne størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler i en bolle, sier vi at:

$$\text{forholdet mellom antall røde og blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som  
1 : 5. Verdien til dette regnestykket er:

$$1 : 5 = 0,2$$

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

0,2 kalles *forholdstallet*.

Hvis vi isteden har 4 røde kuler og 20 blå kuler, er fortsatt forholdstallet 0,2. dette betyr at forholdet mellom antall røde og blå kuler ikke har forandret seg.

### 2.11 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Forholdstallet får vi ved å regne ut hva  $a : b$  er. To forhold med samme forholdstall er like.

#### Eksempel 1

I en klasse er det 10 handballspillere og 5 fotballspillere.

a) Hva er forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere?

b) Hva er forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere?

**Svar:**

a)

$$\frac{10}{5} = 2$$

Forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere er 2.

b)

$$\frac{5}{10} = 0,5$$

Forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere er 0,5.

## Eksempel 2

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er  $\frac{1}{8}$ . Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

### Svar:

Vi vet at:

$$\frac{\text{antall vinnerlodd}}{\text{antall taperlodd}} = \frac{1}{8}$$

Siden *antall vinnerlodd* er ukjent, kaller vi størrelsen for  $x$ , og får da at:

$$\begin{aligned}\frac{x}{160} &= \frac{1}{8} \\ \frac{x}{160} \cdot 160 &= \frac{1}{8} \cdot 160 \\ x &= 20\end{aligned}$$

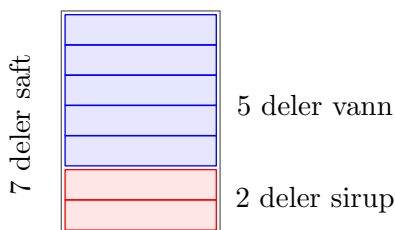
Vi må altså lage 20 vinnerlodd.

## Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold. På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 +5", som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet 2 : 5. Så heller vi 2 dL sirup i en kanne, må vi fylle på med 5 dL vann for å lage saften i riktig forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft :)

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er riktig. For eksempel kan vi blande én bøtte med solbærsirup med fem bøtter vann, og fortsatt være sikker på at forholdet er riktig – selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer! Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. Symbolet "2+5" på sirupflasken leser vi da som "2 deler sirup på 5 deler vann". Dette betyr at saften vår i alt inneholder  $2 + 5 = 7$  deler:



Dette betyr én del utgjør  $\frac{1}{7}$  av blandingen, sirupen utgjør  $\frac{2}{7}$  av blandingen og vann utgjør  $\frac{5}{7}$  av blandingen.

## 2.12 Deler i et forhold

En blanding med forholdet  $a : b$  har til sammen  $a + b$  deler.

- én del utgjør  $\frac{1}{a+b}$  av blandingen.
- $a$  utgjør  $\frac{a}{a+b}$  av blandingen.
- $b$  utgjør  $\frac{b}{a+b}$  av blandingen.

### Eksempel 1

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet  $3 : 7$ , og det er 5 L av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til  $3 : 11$ .

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

**Svar:**

I spannet har vi  $3 + 7 = 10$  deler. Siden det er 5 L i alt, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{én del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5 \text{ L} \\ &= \frac{1 \cdot 5}{10} \text{ L} \\ &= 0,5 \text{ L}\end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi:

$$4 \cdot 0,5 \text{ L} = 2 \text{ L}$$

Vi må helle oppi 2 L rødmaling for å få forholdet  $3 : 11$ .

## Eksempel 2

En kanne som rommer 21 dL er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet 2 : 5.

- a) Hvor mye vann er det kannen?
- b) Hvor mye sirup er det i kannen?

**Svar:**

a) Til sammen består saften av  $2 + 5 = 7$  deler. Fordi 5 av disse er vann, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21 \text{ dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7} \text{ dL} \\ &= 15 \text{ dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som i oppgave a), men det er raskere å merke oss at hvis vi har 15 dL vann av i alt 21 dL, må vi ha  $(21 - 15) \text{ dL} = 6 \text{ dL}$  sirup.

## Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann lik 3 : 5.

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli 1 : 4?

**Svar:**

*Løsningsmetode 1*

Brøken vi ønsker,  $\frac{1}{4}$ , kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså  $\frac{3}{5}$ ):

$$\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

3 : 12 er altså det samme forholdet som 1 : 4. Og 3 : 12 kan vi få hvis vi legger til 7 deler vann i blandingen med forholdet 3 : 5:

$$\frac{3}{5 + 7} = \frac{3}{12}$$

*Løsningsmetode 2*



Vi krever at  $x$  ganger  $\frac{3}{5}$  skal gi oss det samme forholdet som  $\frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cdot x &= \frac{1}{4} \\ x &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Forholdet vi søker er derfor:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3}{12}$$

Som vi får hvis vi legger til 7 deler vann i blandingen med forholdet 3 : 5.

## Oppgaver for kapittel 2

### 2.1.1

Finn verdien til brøkene:

a)  $\frac{1}{2}$    b)  $\frac{1}{4}$    c)  $\frac{1}{5}$    d)  $\frac{10}{5}$    e)  $\frac{6}{8}$

### 2.2.1

Regn ut:

a)  $\frac{4}{3} \cdot 5$    b)  $\frac{3}{5} \cdot (-6)$

### 2.2.2

Finn  $\frac{2}{3}$  av 9.

### 2.3.1

Regn ut:

a)  $\frac{4}{3} : 5$    b)  $\frac{3}{5} : (-6)$

### 2.4.1

Regn ut:

a)  $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}$    b)  $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{4}$

### 2.4.2

Finn  $\frac{2}{3}$  av  $\frac{4}{5}$ .

### 2.6.1

Forkort brøkene:

a)  $\frac{28}{16}$    b)  $\frac{12}{36}$

### 2.6.2

a) Uvid  $\frac{2}{3}$  til en brøk med 24 som nevner.

b) Utvid  $\frac{11}{9}$  til en brøk med 27 som nevner.

### 2.7.1

Regn ut:

a)  $\frac{2}{5} + \frac{5}{6}$     b)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

### 2.8.1

Regn ut:

a)  $\frac{2}{5} : \frac{5}{6}$     b)  $\frac{12}{3} \cdot \frac{3}{2}$

### 2.8.2

Se tilbake til svarene i oppgave 2.1.1a)-c). Fyll inn tallet som mangler der det står "\_\_\_" i setningene under:

- (a) Å dele med 0,5 er det samme som å gange med \_\_\_.
- (b) Å dele med 0,25 er det samme som å gnage med \_\_\_.
- (c) Å dele med 0,2 er det samme som å gnage med \_\_\_.

### 2.8.3

Regn ut:

a)  $\frac{1}{2} \cdot h$     b)  $\frac{1}{2} : h$     c)  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}$

### 2.8.4

Forkort brøken:

$$\frac{2\pi ac}{4c\pi}$$

### 2.9.1

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og griser når vi har:

- a) 5 hester og 2 griser.    b) 12 griser og 4 hester.

### 2.9.2

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:



**Vi anbefaler følgende blandingsforhold:**  
Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:  
**1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin**

Si at vi skal fylle på 2,5 L bensin på motorsage vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

*Merk:* I de to neste oppgavene går vi ut ifra at både 1 dL vann og 1 dL saftsirup veier 100 g.

### 2.9.3

Coca-Cola inneholder 10 g karbohydrater. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Inneholder saften mer eller mindre karbohydrater per 100 g enn Coca-Cola?

### 2.9.4

På *Lærums solbærsirup* står det at 100 g ferdig utblandet saft inneholder 12,5 g sukker. Saften inneholder sirup og vann blandet i forholdet 1 : 5.

Hvor mye sukker inneholder 100 g solbærsirup? (Rent vann inneholder ikke sukker i det hele tatt).

## Kapittel 3

# Likninger og funksjoner

### 3.1 Å lage ligninger

Hver gang vi i hverdagen må utføre en regneoperasjon, løser vi egentlig en ligning!

Tenk for eksempel at du skal kjøpe 2 kg epler i butikken, og eplene koster 10 kr/kg. Regnestykket ditt blir da dette:

$$\textit{hva jeg må betale for eplene} = \textit{antall kg epler} \cdot \textit{kiloprisen for epler}$$

Hvis vi bestemmer oss for at  $x$  betyr det samme som *hva jeg må betale for eplene*, blir ligningen vår seende slik ut:

$$x = \textit{antall kg epler} \cdot \textit{kiloprisen for epler}$$

Og fordi vi vet både *hva antall kg epler* og *kiloprisen for epler* er, kan vi finne svaret:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 10 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Vi må altså betale 20 kr for eplene.

Her kunne vi selvsagt regnet ut prisen for eplene direkte, men for lengre utregninger er det lurt å lage en ligning. Og det blir oftere lettere for oss å lage ligningen hvis vi gjør som i det korte eksempelet med eplene.

### 3.1 Å lage en ligning

Når vi skal beskrive et spørsmål som en ligning kan det være lurt å gjøre følgende:

- Sette opp regnestykket i ord.
- Erstatte den ukjente størrelsen med  $x$ .

#### Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassesetor som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en ligning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseseturen.

b) Løs ligningen.

**Svar:**

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

*pengar allerede skaffet + antall lodd · pengar per lodd = prisen på turen*

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er *antall lodd*. Vi erstatter derfor *antall lodd* med  $x$ , og setter inn verdien til de andre:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$25x = 11\,000 - 2\,000$$

$$25x = 9\,000$$

$$\frac{25x}{25} = \frac{9\,000}{25}$$

$$x = 360$$

$x \cdot 25$  er skrevet om til  $25x$ .

#### Eksempel 2

”Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?”.

**Svar:**

”Broren min er dobbelt så gammel som meg.” betyr at:

$$\textit{brors alder} = 2 \cdot \textit{min alder}$$

”Til sammen er vi 9 år gamle.” betyr at:

$$\textit{brors alder} + \textit{min alder} = 9 \text{ år}$$

Erstatter vi *brors alder* med  $2 \cdot \textit{min alder}$ , får vi:

$$2 \cdot \textit{min alder} + \textit{min alder} = 9 \text{ år}$$

Det som er ukjent for oss er *min alder*:

$$2x + x = 9$$

$$3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

”Jeg” er altså 3 år gammel.

## 3.2 Formler

Tenk at du har en jobb der du tjener 200 kr i timen, og at du jobber 5 timer hver arbeidsdag. Regnestykket for hvor mange kroner du tjener på en arbeidsdag (dagslønnen) er dette:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 200 \cdot 5 \\ &= 1000\end{aligned}$$

Hvis du istedenfor tjener 500 kr i timen og jobber 3 timer hver dag, blir regnestykket seende slik ut:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 500 \cdot 3 \\ &= 1500\end{aligned}$$

Saken er at selv om timelønnen og timetallet forandrer seg, er selve *regnemetode* for dagslønnen akkurat den samme: *Vi ganger timelønnen med timetallet*. Når en regnemetode forblir den samme, selv om tallene forandrer seg, sier vi at vi har en *formel*. En formel forteller oss hvordan vi skal regne ut det vi ønsker å vite. Når vi regnet ut dagslønnen vår ganget vi timelønnen med timeantallet, formelen for dagslønnen kan vi da skrive slik:

$$\text{dagslønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timetall}$$

For å gjøre formlene våre enda kortere bruker vi også å forkorte størrelsene, gjerne med bokstaver som har sammenheng med navnet på størrelsen. For eksempel kan vi kalle dagslønnen for  $D$ , timelønnen for  $L$  og timetallet for  $T$ , da blir formelen vår seende ut som dette

$$D = T \cdot L$$

Fordi  $D$  står alene på den ene siden av ”=”-tegnet, sier vi at dette er en formel for  $D$ .

I de to regnestykkene

$$2 \cdot 3 = 6$$

og

$$4 \cdot 5 = 20$$

er *regnemetoden* den samme (vi ganger to tall), men ikke *resultatet*.

### 3.2 Formler

En formel viser sammenhengen mellom størrelser.



### Eksempel 1

Hvis du kjører med den samme farten hele tiden, finner du lengden du har kjørt ved å gange farten med tiden. Kall lengden du har kjørt for  $l$ , farten for  $f$  og tiden for  $t$ .

Lag en formel for  $l$ .

#### Svar:

Oppgaveteksten forteller oss at vi finner  $l$  ved å gange  $f$  med  $t$ :

$$l = f \cdot t$$

Dette er altså formelen for  $l$ .

### Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall ”antall personer som blir med på å spleise” for  $P$  og ”utgift per person i kroner” for  $U$  og lag en formel for  $U$ .

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

#### Svar:

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli:

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter  $P$  med 20, og får:

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

### 3.3 Omgjøring av formler

Vi har sett (*Eksempel 1*, s. ??) at lengden  $l$  vi har kjørt, farten  $f$  vi har holdt og tiden  $t$  vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen:

$$l = f \cdot t$$

Ut ifra denne formelen kan vi altså finne lengden hvis vi vet hvor fort og hvor lenge vi har kjørt. Men hva om vi isteden vet hvor langt og hvor lenge vi har kjørt, men ikke hvor fort?

Det vi må gjøre, er å skrive om formelen så det blir en formel for  $f$  istedenfor  $l$ . Det vi nå må ha med oss, er at  $l$ ,  $f$  og  $t$  er alle tall, derfor kan vi bruke punktene fra ?? for å gjøre om på ligningen vår. Og fordi vi ønsker en formel for  $f$ , ønsker vi at  $f$  skal stå alene på den ene siden av likhetstegnet:

$$l = f \cdot t$$

$$\frac{l}{t} = \frac{f \cdot t}{t}$$

$$\frac{l}{t} = f$$

#### 3.3 Omforming av formler

Når vi skal omforme en størrelse, bruker vi ligningsreglene fra ?? for å få størrelsen vi ønsker til å stå på én side av likhetstegnet.

##### Eksempel 1

*Ohms lov* sier at strømmen  $I$  gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen:

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor  $U$  er spenningen og  $R$  er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for  $R$ .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm ( $\Omega$ ).

b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

**Svar:**

a) Vi gjør om formelen slik at  $R$  står alene på én side av likhet-sregnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot R}{R}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a) og får at:

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså  $6 \Omega$ .

## Eksempel 2

Si vi har målt en temperatur  $T_C$  i grader Celsius ( $^{\circ}C$ ). Temperaturen  $T_F$  målt i Fahrenheit ( $^{\circ}F$ ) er da gitt ved formelen:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for  $T_C$ .

b) Hvis en temperatur er målt til  $59^{\circ}F$ , hva er da temperaturen målt i  $^{\circ}C$ ?

**Svar:**

a)

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

$$T_F - 32 = \frac{9}{5} \cdot T_C$$

$$5(T_F - 32) = \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C$$

$$5(T_F - 32) = 9T_C$$

$$\frac{5(T_F - 32)}{9} = \frac{9T_C}{9}$$

$$\frac{5(T_F - 32)}{9} = T_C$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at:

$$T_C = \frac{5(59 - 32)}{9}$$

$$= \frac{5(27)}{9}$$

$$= 5 \cdot 3$$

$$= 15$$

## Oppgaver for kapittel 3

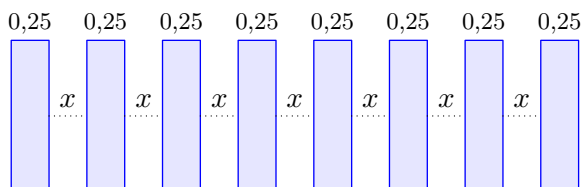
### 3.2.1

Ola og Kari tilbyr et matematikk-kurs. For hvert kurs tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for hvert kurs?

### 3.2.2

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under:



Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene. Hvor lang er denne avstanden?

### 3.2.3

Etter å ha blitt satt ned med 35%, koster en vare nå 845 kr. Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

### 3.2.4

For å regne ut et veldig kjent tall kan vi starte med å gjøre dette:

1. Start med tallet 2.
2. Gang så med to 2ere og del med 1 ganger 3.
3. Gang så med to 4ere og del med 3 ganger 5.
4. Gang så med to 6ere og del med 5 ganger 7.

Verdien til tallet vi søker får vi hvis vi fra punkt 4 fortsetter uendelig mange punkt videre!

a) Skriv opp punkt 5 og 6.

b) Gjør som punkt 1 til 6 sier. Hvilket tall tror du vi snakker om?

### 3.2.5

*Makspuls* er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden [trening.no](http://trening.no) kan man lese dette:

”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for  $m$  og ”alder” for  $a$  og lag en formel for  $m$ , som beskrevet i sitatet.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik:

”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for  $m$ , som beskrevet i sitatet.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

- Hopp opp og ned opp og ned i ca. 10 sekunder (da vil hjertet ditt omtrent slå så raskt det kan en liten stund etter).
- Tell hjerteslag umiddelbart etter hoppingen.
- Tell i 15 sekunder.

e) Kall ”antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder” for  $A$  og lag en formel for  $m$ .

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f), er de like eller forskjellige?

### 3.3.1

På nettsiden [viivilla.no](http://viivilla.no) får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

”2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter).”

a) Kall ”trinnhøyden” for  $h$  og ”trinndybden” for  $d$  og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

- b) Sjekk trappene på skolen, er formelen oppfylt eller ikke?
- c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?
- d) Skriv om formelen til en formel for  $h$ .

### 3.3.2

Effekten  $P$  (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor  $R$  er motstanden og  $I$  er strømmen i kretsen.

- a) Hvis  $R = 5 \Omega$  og  $I = 10 A$ , hva er da effekten?
- b) Skriv om formelen til en formel for  $I^2$ .

### 3.3.3

På [klikk.no](http://klikk.no) finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

*For jenter:*

1. Legg sammen mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm
3. Del tallet på to

*For gutter:*

1. Legg sammen mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til 13 cm
3. Del tallet på to

Kall barnets (fremtidige) høyde for  $B$ , mors høyde for  $M$  og fars høde for  $F$ .

- a) Lag en formel for  $B$  når barnet er ei jente.
- b) Lag en formel for  $B$  når barnet er en gutt.
- c) Gjør om formelen fra a) til en formel for  $F$ .
- d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Når jenta er utvokst kommer hun til å bli 171 cm. Hvor høy er faren til jenta?

# Kapittel 4

## Økonomi

**Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:**

- gjøre greie for og regne med prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og beregne inntekt, skatt og avgifter
- vurdere forbruk og bruk av kredittkort og sette opp budsjett og regnskap ved hjelp av regneark
- undersøke og vurdere ulike former for lån og sparing



## 4.1 Indeksregning

Innenfor økonomi er *indekser* forholdstall som forteller oss hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kroneisen 0,75 kr (!) da den ble lansert i 1953, mens den i 2017 kostet ca 27 kr . Forholdet mellom prisen i 2017 og i 1953 er altså:

$$\frac{\text{pris 2018}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0,75} = 36$$



Dette forteller oss at prisen for kroneis har blitt 36 ganger mer enn den var. Eller vi kan si at den nye prisen utgjør 3600% av den originale. I denne sammenhengen kunne vi kalt både 36 og 3600% for en *indeks*, siden begge tallene forteller noe om hvordan prisen for kroneis har endret seg fra 1953 til 2017. Velger man å bruke prosenttall som indeks er det vanlig å kutte prosentsymbolet, i vårt eksempel ville da indeksen blitt 3600.

### 4.1.1 Konsumprisindeks og basisår

*Konsumprisindeksen* (KPI) er en indeks som beskriver prisnivået på varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i løpet av et år. Disse varene er:

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Andre varer og tjenester

For å sammenligne noe må man alltid starte med noe å sammenligne med, og konsumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene i året 2015. 2015 kalles derfor *basisåret*, og i dette

året er indeksen bestemt til å være 100.

## 4.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er basisåret 2015.

Tabellen under er hentet fra SSB sine nettsider og viser KPI (konsumprisindeks) for de 7 siste årene:

År	KPI
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Table 4.1: Kunsumprisindeksen for årene 2010-2017

Ut ifra tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Fordi KPI for 2017 er 105,5 har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Fordi KPI i 2011 er 93,3 var prisene 7,7% lavere i 2011 enn i 2015.

## 4.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

### Eksempel

I 2017 var prisindeksen for en vare 109. Hvor mye har prisen endret seg siden basisåret?

**Svar:**

$$109 - 100 = 9$$

Prisen har altså endret seg 9% siden basisåret.

### 4.1.2 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2018. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; Prisen på kroneisen har gått opp blant annet fordi kroneverdien har gått ned – du fikk altså kjøpt mindre varer for hver 1-krone i 2017 enn i 1953.

Verdien av 1 krone, altså kroneverdien ved et år, beregner vi ut ifra konsumprisindeksen. Vi tar da konsumprisindeksen til basisåret (100) og deler med KPI for året vi ønsker å finne kroneverdien til. For eksempel var KPI i 1953 lik 6,9, mens den i 2017 105,5. Kroneverdien for disse årene blir derfor:

Kroneverdien i basisåret (2015) er alltid lik 1.

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 2017} &= \frac{100}{105,5} \\ &\approx 0,94\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 1953} &= \frac{100}{6,9} \\ &\approx 14,49\end{aligned}$$

Dette forteller oss at 1 kr i 2017 er verd 0,94 ganger *mindre* enn 1 kr i 2015, mens 1 kr i 1953 er verd 14,49 ganger *mer*.

Om man ganger med et tall som er mindre enn 1, får man et svar som er mindre enn utgangspunktet.

### 4.3 Kroneverdi

$$\text{Kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

#### Eksempel

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012.

**Svar:**

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93,9} \\ &\approx 1,06\end{aligned}$$

Å betale 1 kr i 2012 ville vært dete samme som å betale 1,06 kr i

2015 (basisåret).

### 4.1.3 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk nå at hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2011, 2015 og 2017. *Tabell 4.1* forteller oss at du hadde du best råd i 2011 – fordi da var prisnivået lavest (siden KPI var mindre enn for de to andre årene). I praksis ville dette betydd at selv om lønnen din var den samme alle årene, ville du kunne kjøpt flere varer i 2011 siden de da var billigere. I denne sammenhengen sier vi at *reallønnen* din var høyere i 2011 enn i 2015 og 2017.

At prisnivået har blitt høyere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. For å regne ut selve verdien til reallønnen, ganger vi den nominelle lønnen med kroneverdien (se ??:

Nominell lønn er lønnen du får fra arbeidsgiveren din, altså det vi som oftest bare kaller lønnen.

$$\begin{aligned}\text{Reallønn i 2017} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{105,5} \text{ kr} \\ &\approx 473\,934 \text{ kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Reallønn i 2015} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{100} \text{ kr} \\ &\approx 500\,000 \text{ kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Reallønn i 2011} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{93,3} \\ &\approx 535\,905 \text{ kr}\end{aligned}$$

Legg merke til at reallønnen i basisåret 2015 alltid vil ha samme verdi som den nominelle lønnen!

## 4.4 Reallønn

$$\text{reallønn} = \text{nominell lønn} \cdot \text{kronverdien}$$

### Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens han i 2012 tjente 420 000 kr. I 2016 var KPI = 103,6, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

**Svar:**

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd, sjekker vi hvilket år han hadde høyest reallønn (KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*):

$$\begin{aligned}\text{Reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103,6} \text{ kr} \\ &\approx 434\,363 \text{ kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93,9} \\ &\approx 447\,284 \text{ kr}\end{aligned}$$

Vi ser at reallønnen til Per var høyest i 2012, derfor hadde han bedre råd dette året enn i 2016.

#### 4.1.4 Regning med indekser

Vi har sett hvordan både verdien av en pris eller en reallønn forandrer seg når KPI øker eller minker. Hvis en verdi har forandret seg, men forholdet mellom verdien og indeksen forblir det samme, sier vi at *verdien har fulgt indeksen*.

#### 4.5 Verdi som følger indeks

Hvis en verdi følger indeksen, forblir forholdet mellom verdi og indeksen det samme:

$$\frac{\text{verdi 1}}{\text{indeks 1}} = \frac{\text{verdi 2}}{\text{indeks 2}}$$

#### Eksempel 1

I 2013 fikk Sofie 600 000 kr i lønn. I 2013 var KPI 95,9, mens den i 2017 var 105,5. Hva måtte Sofie få i lønn i 2017 for at lønnen skulle fulgt indeksen? (Obs! Dette er det samme som å si at reallønnen skal forbli den samme).

**Svar:**

Skal lønnen følge indeksen, må forholdet mellom lønnen og KPI være lik for de to årene:

$$\frac{\text{lønn i 2017}}{\text{KPI i 2017}} = \frac{\text{lønn i 2013}}{\text{KPI i 2013}}$$

Siden lønnen i 2017 er ukjent, kaller vi denne for  $x$  i den videre utregningen:

$$\begin{aligned}\frac{x}{105,5} &= \frac{600\,000}{95,9} \\ &= \frac{600\,000}{95,9} \cdot 105,5 \\ &\approx 660\,000\end{aligned}$$

Lønnen til Sofie bør altså være 660 000 kr for at lønnen skal følge konsumprisindeksen.

## Eksempel 2

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen. I 2005 var KPI 82,3. Hva var den i 2014?

### Svar:

Skal prisen følge indeksen må forholdet mellom pris og indeks være det samme:

$$\frac{\text{pris i 2014}}{\text{KPI i 2014}} = \frac{\text{pris i 2005}}{\text{KPI i 2005}}$$

Siden KPI i 2014 er ukjent, kaller vi denne for  $x$ . Vi utnytter også at vi for en ligning med én brøk på hver side kan "snu brøkene på hodet":

$$\begin{aligned}\frac{x}{\text{pris i 2014}} &= \frac{\text{KPI i 2005}}{\text{pris i 2005}} \\ \frac{x}{1784} &= \frac{82,3}{1500} \\ x &= \frac{82,3}{1500} \cdot 1784 \\ &\approx 97,9\end{aligned}$$

KPI i 2014 var altså 97,9.

## 4.2 Lån og prosentvis endring over tid

### 4.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*. La oss se på et eksempel for å prøve å holde styr på alle disse begrepene:

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da blir lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- *Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen.*

For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli  $\frac{100\,000}{5}$  kr = 20 000 kr.

- *Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.*

Startgjelden er 100 000, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden 100 000 kr – 20 000 kr = 80 000 kr. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden 80 000 kr – 20 000 kr = 60 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- *Renter skal beregnes av gjelden.*

Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale (se ??)  $100\,000 \text{ kr} \cdot 0,10 = 10\,000 \text{ kr}$  i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale  $80\,000 \text{ kr} \cdot 0,10 = 8\,000 \text{ kr}$ . Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- *Terminbeløpet er summen av avdrag og renter.*

Av første og tredje punkt får vi at terminbeløpet for de to første årene blir:

	1. år	2. år
Terminbeløp	20 000 kr + 10 000 kr	20 000 kr + 8 000 kr
	=	=
	30 000 kr	28 000 kr

Og slik fortsetter det de neste tre årene.

## Serielån og annuitetslån

To veldig vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like

Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre store. minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hver gang.

*Merk:* Du har alltid rett til å betale resterende gjeld når du selv ønsker det. Da avsluttes lånet og du betaler hverken flere avdrag eller renter.

## Kredittkort

Kredittkort er et bankkort som virker slik at hvis du f.eks bruker kortet for å betale for 10 000 kr i en butikk, så blir ikke 10 000 kr trekt fra kontoen din – isteden låner du pengene fra banken. Etter en tid som er avtalt med banken vil banken kreve renter av gjelden din. Hvordan du betaler

denne gjelden er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høye renter, så det lureste er å betale før rentekravet engang har startet!





## 4.6 Lån

<b>Lånesum</b>	Beløpet vi låner av banken.
<b>Gjeld</b>	Det vi til enhver tid skylder banken.
<b>Rente</b>	Prosent av gjeld som skal betales.
<b>Avdrag</b>	Det vi betaler ned på gjelden.  Summen av avdragene tilsvarer lånesummen.  $\text{Ny gjeld} = \text{Gammel gjeld} - \text{Avdrag}$
<b>Renter</b>	$\text{Gjeld} \cdot \text{Rente}$
<b>Terminbeløp</b>	$\text{Avdrag} + \text{Renter}$
<b>Serielån</b>	Lån hvor avdragene er like store.
<b>Annuitetslån</b>	Lån hvor terminbeløpene er like store.
<b>Kredittkort</b>	Bankkort hvor man låner penger istedenfor å trekke dem ifra kontoen.

### Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?
- b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?
- c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?
- d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

**Svar:**

a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget:

$$\frac{300\,000 \text{ kr}}{5} = 60\,000 \text{ kr}$$

b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er:

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

c) Ut ifra oppgave b) vet vi at gjelden er 180 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da:

$$180\,000 \cdot 0,03 = 5\,400$$

Altså 5 400 kr.

d) Terminbeløpet tilsvarer avdrag pluss renter. Ut ifra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir:

$$60\,000 \text{ kr} + 5\,400 \text{ kr} = 65\,400 \text{ kr}$$

### Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

#### Svar:

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0,064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Siden  $\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter}$ , må  $\text{avdrag} = \text{terminbeløp} - \text{avdrag}$ :

$$= 24\,000 - 6\,400 = 17\,600$$

Altså må du betale 17 600 i avdrag det første året.

## 4.2.2 Prosentvis endring over tid

Vi har sett hvordan vi må betale renter når vi låner penger, men hvis vi isteden sparer penger i en bank *får* vi renter. Renten kalles da *sparerente*. Hvis den årlige sparerenten f. eks. er 10%, betyr dette at vi hvert år skal få 10% av beløpet vi har spart i banken.

Si nå at vi setter 15 000 kr inn i en bank som gir nettopp 10% sparerente. Etter å ha spart i 1 år skal vi altså motta 10% av 15 000, og legge dette til de 15 000 vi allerede har. Dette blir det samme som å øke 15 000 med 10% (se ??):

Per dags dato er 10% sparerente veldig urealistisk, tallet er valgt for å gjøre utregninger enkle.

$$\text{Antall kr etter 1 år} = 15\,000 \cdot 1,10 = 16\,500$$

Sparer vi også disse 16 500 kronene i et år, skal vi ha 10% av denne pengesummen. Det betyr at vi 2 år etter at vi startet å spare har:

$$\text{Antall kr etter 2 år} = 16\,500 \cdot 1,10 = 18\,150$$

Sparer vi også disse 18 150 kronene i et år, får vi at:

$$\text{Antall kr etter 3 år} = 18\,150 \cdot 1,10 = 19\,965$$

Utrekningen for de to første årene går helt greit, men hva om vi ønsker å vite hvor mye penger vi har i banken om 20 år? Da blir det ganske kjipt å regne seg skritt for skritt fram til svaret. Men om vi skriver opp utregningen for de tre første årene kan vi oppdage en vakkert mønster. Det vi legger merke til er at alle regnestykkene består av forrige års pengesum ganger 1,10. Om vi nå skriver selve regnestykkene for pengesummene istedenfor svaret, får vi dette:

$$\text{Antall kr etter 1 år} = \overbrace{15\,000}^{\text{startbeløp}} \cdot 1,10 = 16\,500$$

$$\text{Antall kr etter 2 år} = \overbrace{15\,000 \cdot 1,10}^{1 \text{ år}=16\,500} \cdot 1,10 = 18\,150$$

$$\text{Antall kr etter 3 år} = \overbrace{15\,000 \cdot 1,10 \cdot 1,10}^{2 \text{ år}=16\,500} \cdot 1,10 = 19\,965$$

Og bruker vi skrivemåten for potenser blir mønsteret enda tydeligere:

$$\text{Antall kr etter 1 år} = 15\,000 \cdot 1,10^1 = 16\,500$$

$$\text{Antall kr etter 2 år} = 15\,000 \cdot 1,10^2 = 18\,150$$

$$\text{Antall kr etter 3 år} = 15\,000 \cdot 1,10^3 = 19\,965$$

Mønsteret er altså at for å vite hvor mange penger vi har i banken tar vi startverdien og ganger med vekstfaktoren, opphøyd i antall år. F. eks. kan vi da finne at:

$$\text{Antall kr etter 20 år} = 15\,000 \cdot 1,10^{20} \approx 100\,912$$

Det samme mønsteret vil dukke opp i alle tilfeller hvor vi snakker om at noe endrer seg med et bestemt prosenttall over en viss tid:

#### 4.7 Vekst eller nedgang over tid

$$\text{ny verdi} = \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{tid}}$$

##### Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% i årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

##### Svar:

Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Startverdien er 20 000 og tiden er 8:

$$20\,000 \cdot 1,02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

##### Eksempel 2

Du betaler 27 000 kr med et kredittkort som krever 1,4% rente for hver måned du betaler for seint.

a) Hvor mye har du i gjeld to år etter for sein betaling?

b) Hva er den årlige renten ved for sein betaling?

##### Svar:

a) Siden renten er 1,4%, er vekstfaktoren 1,014. Siden renten er månedlig må vi måle tiden i måneder, og to år er  $2 \cdot 12 = 24$  måneder. Siden startverdien er 27 000, får vi:

$$27\,000 \cdot 1,014^8 \approx 37\,649$$

Etter to år har du altså ca 37 649 kr i gjeld.

b) Siden ett år er det samme som 12 måneder blir vekstfaktoren gitt ved:

$$1,014^{12} \approx 1.182$$

##### Eksempel 3

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% de neste fire årene. Hva er bilen i så fall verd om fire år?

**Svar:**

Siden den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88.  
Starverdien er 300 000 og tiden er 4:

$$300\,000 \cdot 0,88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca 179 908 kr om fire år.

### 4.3 Skatt

Om du har en inntekt må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

Obs! I eksamensoppgaver vil du oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi valgt å presentere skattereglene for 2018. Det viktigste er likevel ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene *bruttolønn*, *fradrag*, *skattegrunnlag*, *tyrgrdeavgift* og *nettolønn*.

#### 4.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler *fagforeningskontingent* eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontingent er det du betaler for å være med i en [fagforening](#).

#### 4.8 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

	Bruttolønn
–	Fradrag
=	Skattegrunnlag

#### Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag 97 600 kr i minstefradrag, i tillegg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

**Svar:**

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	Bruttolønn
–	56 000	Personfradrag
–	97 600	Minstefradrag
–	1 000	Fagforeningskontigent
=	345 400	Skattegrunnlag

### 4.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsinntakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke [Folketrygden](#). Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

#### 4.9 Trygdeavgift

Alder	Trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
Under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

#### Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

- a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?
- b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

**Svar:**

- a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% i trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 1 230 kr i trygdeavgift. Fordi Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% i trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

### 4.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

#### 4.10 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 – 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 – 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 – 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt betales av bruttolønnen.

#### Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Fordi hele lønnen ligger over 237 900 kr, må du betale 1,4% av (237 900 – 169 000) kr = 68 900 kr. Skatt for trinn 1 blir altså 68 900 kr · 0,014 ≈ 965 kr.
Trinn 2	Siden 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale 3,3% av (550 000 – 237 900) kr = 312 100 kr. Skatt for trinn 2 blir altså 312 100 kr · 0,033 ≈ 10 299 kr.
Totalt	Totalt må du betale 965 kr + 10 299 kr = 11 264 kr i trinnskatt.

### 4.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontingent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:



#### 4.11 Nettolønn

	Bruttolønn
—	Fagforeningskontigent
—	23% skatt
—	Trygdeavgift
—	Trinnskatt
<hr/>	
=	Nettolønn
<hr/>	

#### Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforening) og har 409 900 som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til hennes?

**Svar:**

	550 000	Bruttolønn
—	1 500	Fradrag for fagforening
—	93 127	23% av skattegrunnlaget
—	45 100	8,2% av bruttolønn
—	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
<hr/>		
=	399 009	Nettolønn
<hr/>		

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra *delseksjon 4.3.3.*)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

## 4.4 Budsjett og regnskap

### 4.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter, en slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

#### Eksempel

Lisa prøver å tenke på sine månedlige inntekter og utgifter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på en gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar:

Inntekter	Budsjett
Lønn	4 000
Stipend	4 360
<i>Sum</i>	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
<i>Sum</i>	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

## 4.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *antatte* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* inntekter og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut *regnskap – budsjett*, mens man for utgifter regner ut *budsjett – regnskap*. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

### Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (4.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utfitene hennes:

- Hun ble så opphengt i å lese om funksjoner at hun ikke fikk jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble derfor 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

**Svar:**

	<b>Inntekter</b>	Budsjett	Regnskap	Avvik
	Lønn	4 000	3 500	−500
	Stipend	4 360	4 360	0
	Bursdagsgave	0	2 000	2 000
	<i>Sum</i>	8 360	9 860	2 000
<b>Utgifter</b>				
	Mat	4 500	4 200	300
	Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	−2 400
	<i>Sum</i>	5 700	7 800	1 900
	<b>Resultat</b>	2 660	2 060	−600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut ifra budsjettet.

## Oppgaver for kapittel 4

År	KPI	År	KPI
2017	105,5	2007	84.8
2016	103,6	2006	84.2
2015	100	2005	82.3
2014	97,9	2004	81
2013	95,9	2003	80.7
2012	93,9	2002	78.7
2011	93,3	2001	77.7
2010	92.1	2000	75.5
2010	92.1	1999	73.2
2009	89.9	1998	71.5
2008	88	1997	69.9

### 4.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

a) 1998      b) 2014      c) 2017

### 4.1.2 (H)

I 2016 var KPI 103,6. Hvor mye høyere var prisnivået i 2016 enn i 2015?

### 4.1.3

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var  $KPI = 105,5$ , mens i 2012 var  $KPI = 93,9$ . I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

### 4.1.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

I 2010 var konsumprisindeksen 92,1. I 2014 var konsumprisindeksen 97,9. Helene hadde like stor kjøpekraft i 2014 som i 2010. I 2014 hadde hun en nominell lønn på 540 000 kroner. Hva var den nominelle lønna hennes i 2010?

### 4.1.5 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, Del 1).

I 2006 var indeksen for en vare 125. Varen kostet da 1 000 kroner. I 2016 var indeksen for den same varen 150. Hvor mye kostet

varen i 2016 dersom prisen har fulgt indeksen?

#### 4.2.1 (H)

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?
- b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjetten terminbeløp?
- c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløp?
- d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

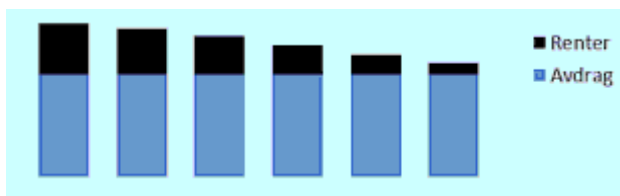
#### 4.2.2 (H)

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

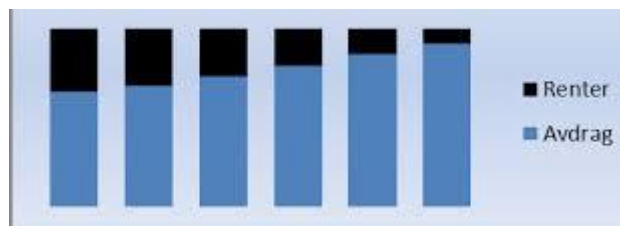
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

#### 4.2.3 (H)

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

#### 4.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

#### 4.2.5 (H)

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn måneder som 30 dager).

- a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?
- b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?
- c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

#### 4.2.6

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2016, Del 2).

Christoffer har kjøpt ny båt til ein verdi av 850 000 kroner. Tenk deg at båten vil falle i verdi med 20 % det første året og så med 3,5 % per år de neste fem åra.

Hva vil verdien av båten vere etter 6 år?

#### 4.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontingent.

- a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.
- b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

#### 4.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Hvem av de to betaler mest trygdeavgift (i antall kroner)?

#### 4.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgave 4.3.1 og 4.3.2).

#### 4.3.4

Beregn nettolønningen til Børge (nevnt i oppgave 4.3.1-4.3.3).

#### 4.4.1 (H)

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

#### Grubleoppgave

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

Basisåret for konsumprisindeksen er nå 2015. Tidligere var basisåret 1998.

Da 1998 ble brukt som basisår, var konsumprisindeksen 139,8 i 2015 og 144,8 i 2016.

a) Vis at konsumprisindeksen i 1998 nå er 71,5.

b) Hva er nå konsumprisindeksen i 2016?

# Kapittel 5

## Sannsynlighet

### 5.1 Grunnprinsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør oss hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall*. Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse:

$$\text{sannsynlighet for en hendelse} = \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi det *å få en sekser* for en hendelse. Og fordi en terning har seks forskjellige sider, sier vi at det er seks mulige utfall. Av disse sidene er det bare én som er en sekser, derfor har vi ett gunstig utfall.



Sannsynligheten for å få en sekser er altså  $\frac{1}{6}$ :

$$\begin{aligned}\text{sannsynlighet for å få en sekser} &= \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}} \\ &= \frac{\text{sider med sekser på}}{\text{totalt antall sider}} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi ofte enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive *få en sekser*, kan vi bruke bokstaven  $S$ , og for å indikere at vi spør om sannsynligheten for en hendelse bruker



vi bokstaven  $P$ . Når vi skriver  $P(S)$  betyr dette *sannsynligheten for å få en sekser*:

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* få en sekser? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen *å ikke få en sekser* skriver vi altså som  $\bar{S}$ . *Å ikke få en sekser* er det samme som *å få enten en ener, en toer, en treer, en firer eller en femmer*, derfor har denne hendelsen fem gunstige utfall. Det betyr at:

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

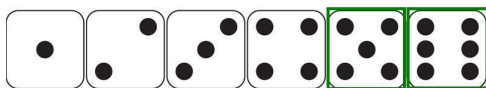
## 5.2 Hendelser med og uten felles utfall

### 5.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss nå i tillegg kalle hendelsen å få en femmer for  $F$ . Hendelsen å få en femmer eller en sekser skriver vi da som  $F \cup S$ . Det er to av seks sider på en terning som er fem eller seks, sannsynligheten for å få en femmer eller en sekser er derfor  $\frac{2}{6}$ :

Symbolet  $\cup$  kalles *union*.

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret hadde vi fått ved å legge sammen sannsynlighetene  $P(F)$  og  $P(S)$ :

$$P(F \cup S) = P(F) + P(S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne  $P(F \cup S)$  ved å legge sammen  $P(F)$  og  $P(S)$  kan vi gjøre fordi  $F$  og  $S$  ikke har noen felles utfall.  $F$  og  $S$  har ingen felles utfall på grunn av dette: Hvis man får en femmer, kan man umulig ha fått en sekser samtidig. Og får man en sekser, kan man umulig ha fått en femmer samtidig.

### 5.1 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser  $A$  og  $B$  som ikke har noen felles utfall, er sannsynligheten for  $A$  eller  $B$  lik sannsynligheten for  $A$  pluss sannsynligheten for  $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød ( $R$ ) eller en blå ( $B$ ) kule?

**Svar:**

- Det er i alt fire mulige utfall.
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hen-

delsene  $R$ ,  $B$  eller  $G$  som har felles utfall.

- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er:  $P(R) = \frac{1}{4}$
- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er:  $P(B) = \frac{2}{4}$ .

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule blir derfor:

$$\begin{aligned}P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\&= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\&= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

### 5.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk nå at vi kaster en terning og at vi godtar hendelsen *å få en sekser* ( $S$ ) eller hendelsen *å ikke få en sekser* ( $\bar{S}$ ). Vi har tidligere sett at  $P(S) = \frac{1}{6}$  og at  $P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$ . Av ?? vet vi at sannsynligheten for *å få en sekser eller å ikke få en sekser* er:

$$\begin{aligned}P(S \cup \bar{S}) &= P(S) + P(\bar{S}) \\&= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\&= 1\end{aligned}$$

Dette er egentlig ikke så overraskende, for kaster vi en terning er det to ting som kan skje: Enten får vi en sekser, eller så får vi det ikke. Summen  $P(S) + P(\bar{S})$  er derfor summen av sannsynlighetene for alle hendelser som kan skje. Hvis vi "godtar" alle hendelser, så er alle utfall gunstige. Antall gunstige utfall blir derfor det samme som antall mulige utfall, og forholdet mellom dem blir da 1:

Alle hendelser som kan skje? Hva med *få en ener*, *få en toer* osv.? Jo, de ligger alle innbakt i  $\bar{S}$ .

### 5.2 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle hendelser er alltid lik 1.

Slik som i tilfellet av *å få en sekser/å ikke få en sekser*, vil det alltid være slik at en hendelse  $A$  og den motsatte hendelsen  $\bar{A}$  til sammen

utgjør alle hendelser. Av ?? har vi da at:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

### 5.3 Motsatte hendelser

Sannsynligheten for at en hendelse  $A$  ikke vil skje er gitt som:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

#### Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. En elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

- a) Hva er sannsynligheten for at en gutt ( $G$ ) blir trukket?
- b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

**Svar:**

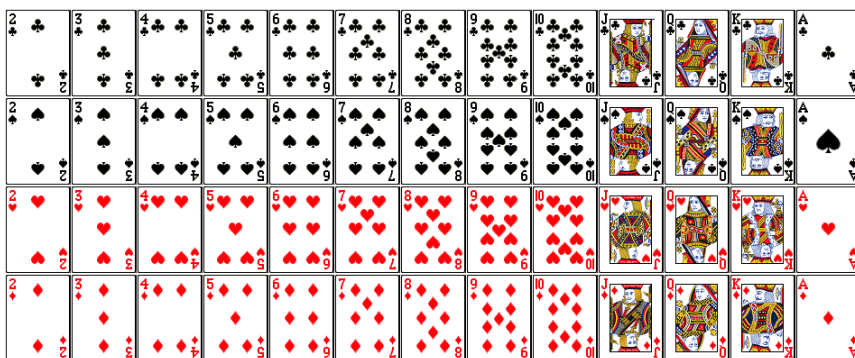
- a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er:  $P(G) = \frac{13}{25}$
- b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er:

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

*Merk:* At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

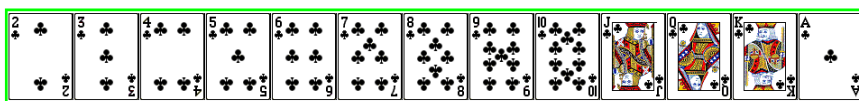
#### 5.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av arten knekt, dame, kong eller ess kalles honnørkort.

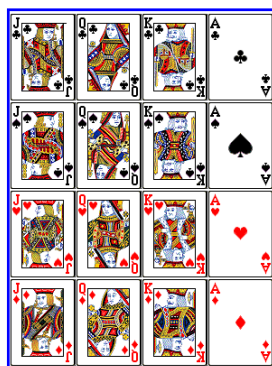


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for at kortet som trekkes er kløver *eller* honnør *eller* begge deler. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort og finner at antallet er 13.

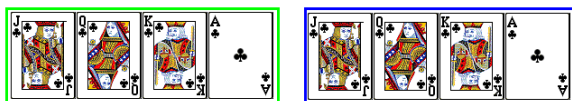
Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler: både kløverkort og honnørkort.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort og finner at antallet er 16.

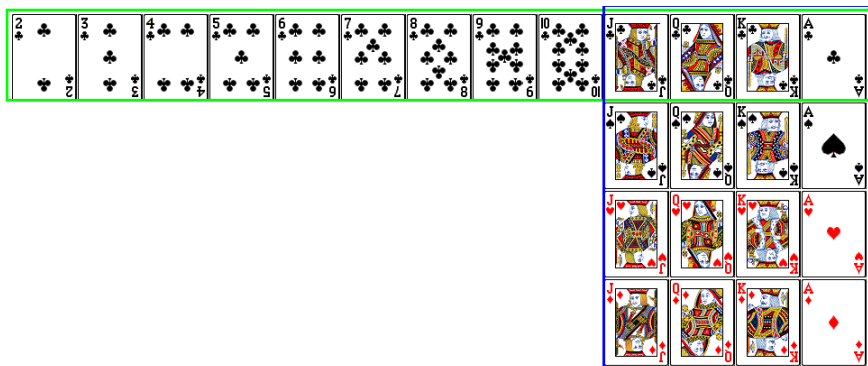


Så vi har altså telt opp  $13 + 16 = 29$  gunstige utfall. Men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Men det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver, honnør eller begge deler — ja, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La nå  $K$  være hendelsen *trekke et kløverkort* og  $H$  være hendelsen *trekke et honnørkort*. Siden det er 25 kort som er kløver, honnør eller begge deler av i alt 52, får vi:

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at:

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er både kløver og honnørkort, dette skriver vi som:

$$K \cap H = 4$$

Symbolet  $\cap$   
kalles *snitt*.

Vi sier da at  $K$  og  $H$  har fire *felles utfall*. Sannsynligheten for  $K \cap H$  blir:

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet  $P(K)$ ,  $P(H)$  og  $P(K \cup H)$  kan vi igjen finne  $P(K \cap H)$  på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

## 5.4 Hendelser med felles utfall

For to hendelser  $A$  og  $B$  er sannsynligheten for  $A$  eller  $B$ , lik sannsynligheten for  $A$  pluss sannsynligheten for  $B$ , fratrasket sannsynligheten for *både*  $A$  og  $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball ( $F$ ), og 10 personer spiller handball ( $H$ ). Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Tenk deg at du trekker ut én person fra klassen. Hva er sjansen for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

#### Svar:

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er:  $P(F) = \frac{7}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller handball er:  $P(H) = \frac{10}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er:  $P(F \cap H) = \frac{4}{20}$

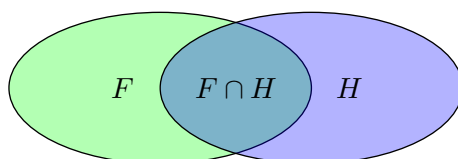
Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor:

$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

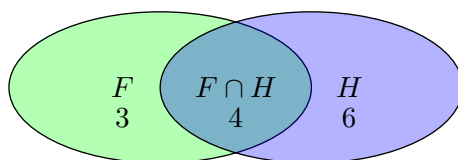
Sjansen er altså  $\frac{13}{20}$ .

### 5.2.4 Venndiagram

Noen ganger blir vi bedt om å sette opp informasjonen vi får i et *venndiagram*. Målet med et venndiagram er å lage en figur som beskriver antallet av de enkelte utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet over til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen (strekt sirkel) representerer de som spiller fotball ( $F$ ) og den blå de som spiller handball ( $H$ ). Fordi noen spiller *begge* sportene ( $F \cap H$ ), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Nå vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og fire av disse gjør *begge* deler. Dette kan vi skrive inn i diagrammet vårt på følgende måte:



Diagrammet forteller slik at tre personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. Men så er det fire stykker som spiller *både* fotball og handball, til sammen er det derfor syv som spiller fotball og ti som spiller handball.

#### Eksempel 1

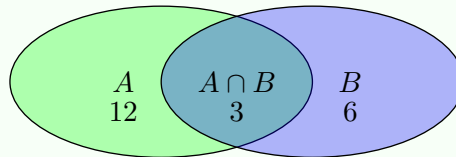
I en matematikkklasse på Akademiet VGS Ålesund er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

- Sett opp et venndiagram som beskriver informasjonen som er gitt.
- Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss eller båt til skolen?

**Svar:**



a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det  $15 - 3 = 12$  som *bare* tar buss og  $9 - 3$  som *bare* tar båt. Vi lar  $A$  bety *tar buss* og  $B$  bety *tar båt*, venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



b) Sannsynligheten for at en person tar buss eller båt kan vi skrive som  $P(A \cup B)$ . Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt  $15 + 9 - 3 = 21$  elever som tar buss eller båt. Siden det er 31 elever i alt å velge mellom, får vi at:

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

## Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 10 elever spiller fotball
- 8 elever spiller handball
- 6 elever spiller volleyball
- 2 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- ingen elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

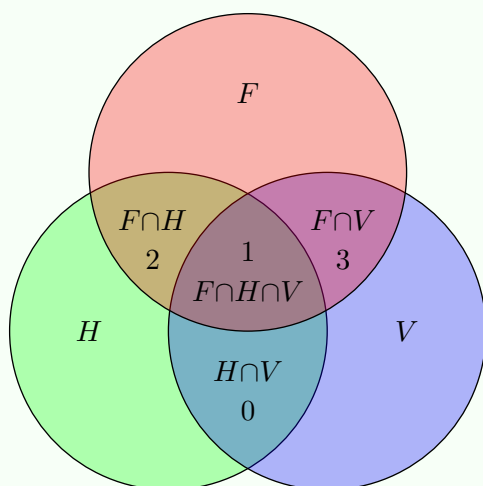
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen. La  $F$  bety *spiller fotball*,  $H$  bety *spiller handball* og  $V$  bety *spiller volleyball*.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

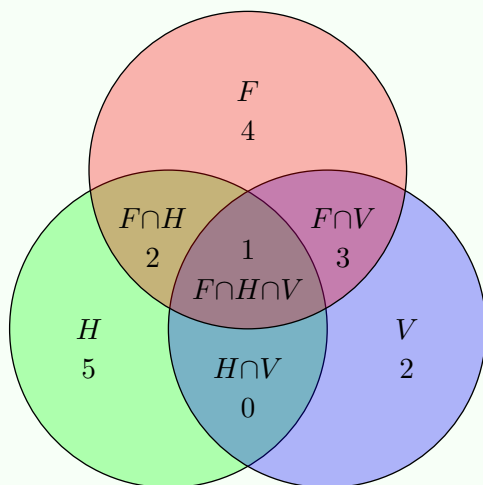
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

**Svar:**

Når vi skal lage et venndiagram er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at  $10 - 2 - 1 - 3 = 4$  elever spiller *bare* fotball,  $8 - 2 - 1 = 5$  spiller *bare* handball og  $6 - 3 - 1 - 0 = 2$  spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er  $5 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2 + 0 = 17$  uniker elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å

trekke én av disse 17 i en klasse med 29 elever er  $\frac{17}{29}$ .

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 10 som spiller fotball, er det  $2 + 1 = 3$  som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor  $\frac{3}{7}$ .

### 5.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar  $M$  bety *får melk* og  $E$  bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
$E$			
$\bar{E}$			
sum			

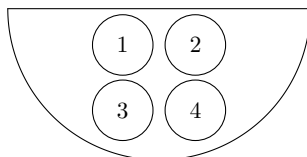
Deretter fyller vi inn tabellen ut ifra informasjonene vi har:

- får *både* melk og eple:  $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple:  $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk:  $E \cap \bar{M} = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple:  $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
$E$	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

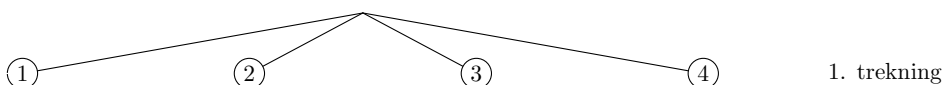
## 5.3 Gjentatte trekk

### 5.3.1 Kombinasjoner

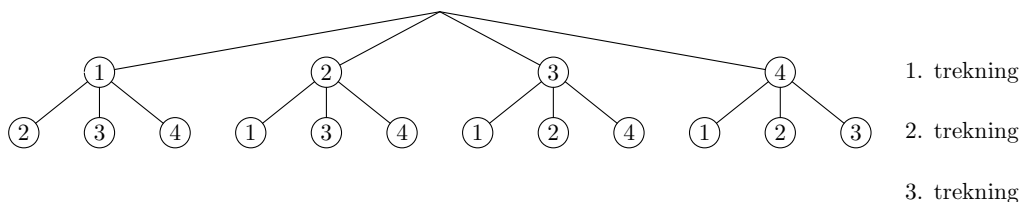


La oss tenke oss at vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp én og én kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Etterpå leser vi opp *kombinasjonen* vi har fått. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi kombinasjonen 2 4 3.

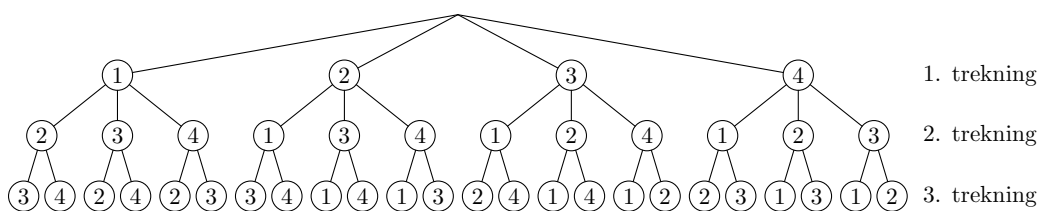
Legger vi kulene tilbake og foretar trekningen på nytt, får vi kanskje kombinasjonen 1 3 4, eller kanskje 4 1 2, eller en helt annen kombinasjon. Så hvor mange forskjellige kombinasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss. Før første trekning ligger det fire kuler i bollen, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp legger vi ut av bollen og trekker så andre gang. For hver av de fire veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå tre nye veier å følge – altså har vi nå  $3 \cdot 4 = 12$  veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier blir derfor  $12 \cdot 2 = 24$ .



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dette fordi vi har fire veier å gå i første trekning, for hver av disse tre veier å gå i andre trekning og for hver av disse to veier å gå i tredje trekning. Vi sier da at vi har 24 mulige kombinasjoner.

## 5.5 Kombinasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige kombinasjoner ved å gange sammen de mulige utfallene i hver trekning.

### Eksempel

I en klasse med 15 personer trekker vi tilfeldig ut tre elever som skal danne et klasseråd. Hvor mange forskjellige klasseråd kan dannes?

**Svar:**

Å trekke ut tre personer kan sees på som en trekning hvor vi tilfeldig tar ut én og én, fram til vi har tre personer. Antall forskjellige klasseråd som da kan oppstå er:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{14}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{13}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 2730$$

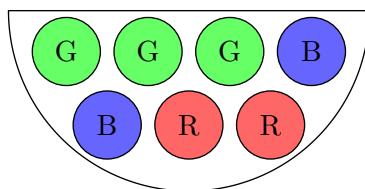
### Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange mulige utfall har vi da?

**Svar:**

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

### 5.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk



La oss tenke at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Vi spør oss nå hva sannsynligheten er for at vi trekker opp to grønne kuler. Hvis vi lar  $G$  bety *trekke en grøn kule*, kan vi skrive denne sannsynligheten som  $P(GG)$ .

For å komme fram til et svar, starter vi med å spørre oss hvor mange *gunstige* kombinasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi  $3 \cdot 2 = 6$  gunstige kombinasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* kombinasjoner er derfor  $7 \cdot 6 = 42$ . Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da:

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42}$$

La oss nå i hver trekning se på sannsynligheten for å få en grøn kule, med krav om at dette skal skje i begge trekninger. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, dermed får vi at:

$$P(G \text{ i første trekning}) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grøn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

Symbolet  $|$  betyr *gitt at ... har skjedd*.  $P(G|G)$  er derfor en forkortelse for *sannsynligheten for å trekke en grøn kule, gitt at en grøn kule er trukket*.

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Hvis vi nå ganger sammen sannsynligheten fra første trekning, med sannsynligheten fra andre trekning, ser vi at regnestykket blir det samme som i ligning (5.3.2):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

## 5.6 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at  $A$  vil skje, gitt at  $B$  har skjedd, skrives som  $P(A|B)$ .

Sannsynligheten for at  $A$  trekkes først, deretter  $B$ , deretter  $C$  og så videre (...) er:

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot \dots$$

### Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi lar  $B$  bety *blå kule trekkes* og  $R$  bety *rød kule trekkes*. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå kule, deretter en rød, og til slutt en blå?

#### Svar:

Sannsynligheten for først en blå, så en rød, så en blå kule, kan vi skrive som  $P(BRB)$ .

- Sannsynligheten for  $B$  i første trekning er:  $P(B) = \frac{2}{4}$ .
- Sannsynligheten for  $R$  i andre trekning, gitt  $B$  i første er:  $P(R|B) = \frac{2}{3}$ .
- Sannsynligheten for  $B$  i tredje trekning, gitt  $B$  i første og  $R$  i andre er:  $P(B|RB) = \frac{1}{2}$ .

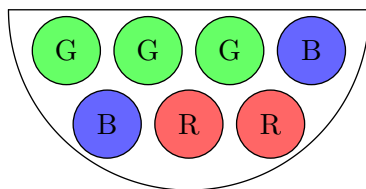
Vi får dermed:

$$\begin{aligned} P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{24} \end{aligned}$$

### 5.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte ?? for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 5.3, men

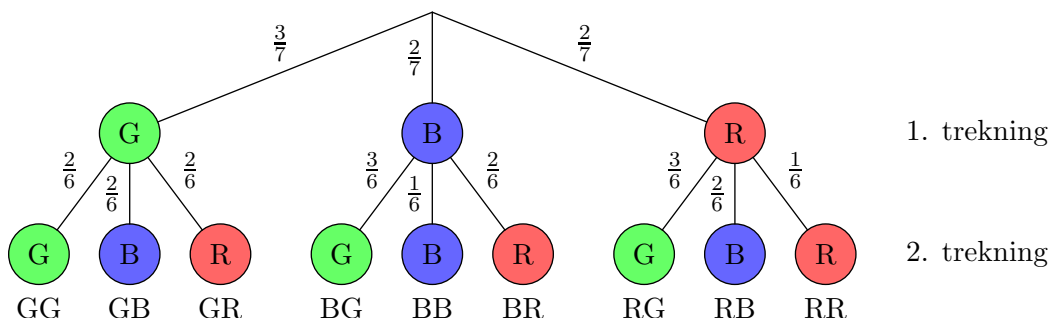
langs alle veier skriver vi nå på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene  $G$ ,  $B$  og  $R$ .

Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule  $\frac{3}{7}$ , derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til  $G$ . Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik  $\frac{2}{6}$ . Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra  $G$  til  $G$ .

Og sånn fortsetter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei:



For å få en rask oversikt over de forskjellige kombinasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet: La oss nå bruke valgtret over for å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule.  $GB$  og  $BG$  er da de gunstige kombinasjonene. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til  $GB$ , finner vi at:

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne  $P(BG)$ :

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$



Sannsynligheten for at  $GB$  eller  $BG$  inntreffer blir (se [Regel 5.1](#)):

$$\begin{aligned}P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\&= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\&= \frac{12}{42}\end{aligned}$$

## 5.7 Kobinasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en kombinasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til kombinasjonen.

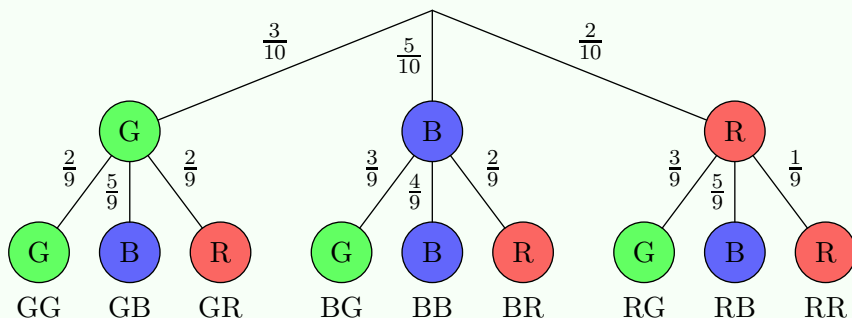
### Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuer grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La  $G$ ,  $B$  og  $R$  henholdsvis bety å trekke en blå, grønn eller rød kule.

- a) Tegn et valgtre som skisserer hvilke kombinasjoner av  $B$ ,  $G$  og  $R$  du kan få.
- b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?
- c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?
- d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå eller én grønn kule?

**Svar:**

a)



**b)** Av valgtreet vårt ser vi at:

$$\begin{aligned}P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\&= \frac{2}{90} \\&= \frac{1}{45}\end{aligned}$$

**c)** Både kombinasjonen  $GB$  og  $BG$  gir oss én blå og én grønn kule. Vi starter med å finne sannsynligheten for hver av dem:

$$\begin{aligned}P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\&= \frac{15}{90} \\&= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\&= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Sannsynligheten for  $GB$  eller  $BG$  er summen av  $P(GB)$  og  $P(BG)$ :

$$\begin{aligned}P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\&= \frac{2}{6} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

**d)** For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for kombinasjonene  $GG$ ,  $GB$ ,  $GR$ ,  $BG$ ,  $BB$ ,  $BR$ ,  $RG$  og  $RB$ , men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sjansen for dette, å få to røde

kuler, fant vi i oppgave b). Av *Regel 5.3* har vi at:

$$\begin{aligned}P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\&= 1 - \frac{1}{45} \\&= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\&= \frac{44}{45}\end{aligned}$$

Sjansen for å få *minst* én blå eller én grønn kule er altså  $\frac{44}{45}$ .

## Oppgaver for kapittel 5

### 5.2.1 (H)

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?
- b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?
- c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er et kløverkort?  
Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

### 5.2.2 (H)

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?
- b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?
- c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?
- d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

### 5.2.3 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, del 1. Besvar denne oppgaven ved hjelp av et venndiagram.)

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50 % leser papiraviser, og 2 % leser ikke aviser.

- a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i et venndiagram eller i en krystabell.
- b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev ved skolen leser aviser på nett.

- c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven ikke leser papiraviser.

### 5.2.4 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2015, del 1)

Forskere skal prøve ut en ny test for å avgjøre om en person er smittet av en bestemt sykdom.

Testen skal prøves ut på 360 personer. På forhånd vet forskerne at 60 av disse personene er smittet av sykdommen, mens resten ikke er smittet.

Det viser seg at 68 av personene tester positivt (det vil si at testen viser at de er smittet av sykdommen). Av disse 68 er det 10 personer som forskerne vet ikke er smittet.

- a) Tegn av og fyll ut krysstabellen nedenfor.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			
Tester ikke positivt			
Sum			

- b) Bestem sannsynligheten for at en person som er smittet, tester positivt.  
c) Bestem sannsynligheten for at en person som tester positivt, ikke er smittet.

### 5.3.1 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2015, del 1)



Tenk deg at du har ni flasker med smoothie i kjøleskapet, to «Surf», tre «Jump» og fire «Catch». Du tar tilfeldig to flasker.

- a) Bestem sannsynligheten for at du ikke tar en «Jump»-smoothie.  
b) Bestem sannsynligheten for at du tar én «Surf»- og én «Catch»-smoothie.

# Excel

**Mål for opplæringen er at eleven skal kunne**

- gjøre greie for og regne med prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og beregne inntekt, skatt og avgifter
- vurdere forbruk og bruk av kredittkort og sette opp budsjett og regnskap ved hjelp av regneark
- undersøke og vurdere ulike former for lån og sparing

## E.1 Introduksjon

Når du åpner et Excelark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.).Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende

for å forstå Excel. I figuren har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3* og *kolonne B* krysser hverandre:

	A	B	C
1			
2			
3			
4			

I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

Ukelønnen til Ole er *timelønn · timer i uka*. Denne utregningen kan vi gjøre ved å skrive `=250*7` i celle B4:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

## E.2 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive `=B2*B3`:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

*Merk:* Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist [her](#).



## E.3 Kopiering av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage et ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne [videoen](#). Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi  $=7$  i celle B4. Etterpå kopierer vi (det er helt avgjørende at man trykker musepekeren helt nede i høyre hjørne) cellen *bortover* til C2 og D2.
2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.
3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
2	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
2	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i [videoen](#) og figurene over kan vi ta med oss tre generelle regler:

1. For å kopiere tall må man skrive = foran.
2. Hver gang man kopierer en i formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)
3. Hver gang man kopierer en formel i én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

## Låsing av celler

Når man kopierer celler er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemetoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi \$ foran B i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne [videoen](#), og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
4	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		<b>Ole</b>	<b>Dole</b>	<b>Doffen</b>	
4	Timelønn	300	200	500	<b>Sum</b>
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=\$B1*B6	=\$B1*C6	=\$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* isteden må vi sette dollaren foran rad-nummeret, slik som vist [her](#). Resultatet blir dette:

	A	B	C
1	Låst celle	10	
2			
3	Tall 1	15	150
4	Tall 2	25	250
5	Tall 3	35	350

	A	B	C
1	Låst celle	10	
2			
3	Tall 1	15	=B\$1*B3
4	Tall 2	25	=B\$1*B4
5	Tall 3	35	=B\$1*B5

## E.4 Småtriaks

- Sum bort og sum ned
- Justere bredde på rad/kolonne
- Sette inn rad/kolonne
- Formelvisning
- Regne med prosenttall
- Endre antall desimaler

## Oppgaver for Excel

### E.1

Gjør oppgave 4.3.4 og 4.4.1 i Excel.

### E.2

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

### E.3

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave E.2b, hvilket lån koster mest penger?

### E.4

Sjekk at du i oppgave E.2 og E.3 har fått samme svar som nettsiden [laanekalkulator.no](http://laanekalkulator.no). (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

## E.5

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen høsten 2017.)

Per har deltidsjobb i en matvarebutikk. Han er ikke sikker på hvor mye han kommer til å tjene i løpet av 2017. Han kan velge mellom to alternative skattetrekk.

### Alternativ 1 – Frikort

Han kan tjene inntil 55 000 kroner uten skattetrekk. Dersom han tjener mer enn 55 000 kroner, får han et skattetrekk på 50 % av den delen av lønna som er over 55 000 kroner.

### Alternativ 2 – Prosentkort

Han får et skattetrekk på 10 % av alt han tjener.

Anta at Per kommer til å tjene 60 000 kr i 2017.

- a) Bestem Pers nettolønn med hvert av alternativene ovenfor.

Per ønsker å lage en oversikt i et regneark for å finne ut hvor mye han vil få i nettolønn ved ulike inntekter etter de to alternativene ovenfor. I regnearket nedenfor har vi lagt inn ulike mulige inntekter for Per i 2017.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5							
6		Inntekt					
7		kr 56 000					
8		kr 57 000					
9		kr 58 000					
10		kr 59 000					
11		kr 60 000					
12		kr 61 000					
13		kr 62 000					
14		kr 63 000					
15		kr 64 000					
16		kr 65 000					
17		kr 66 000					
18		kr 67 000					
19		kr 68 000					
20		kr 69 000					
21		kr 70 000					
22		kr 71 000					
23		kr 72 000					
24		kr 73 000					
25		kr 74 000					
26		kr 75 000					

- b) Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formel i de blå cellene og beregne skattetrekk og nettolønn.
- c) Hvor mye må Per tjene for at de to alternativene skal gi nøyaktig like stort skattetrekk?

## E.6

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen våren 2016.)

Fra og med måneden etter at et barn blir født, og til og med måneden før barnet fyller 18, får foreldrene utbetalt barnetrygd. Satsen for barnetrygd har vært 970 kroner per barn per måned siden 1996.

Stian ble født i september 1996.

- a) Hvor mye fikk foreldrene hans totalt utbetalt i barnetrygd?

Tabellen til høyre viser konsumprisindeksen hvert år fra 1996 til 2015.

Stian mener at satsen for barnetrygd burde vært regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

- b) Vis at satsen for barnetrygd da skulle vært 1 423 kroner per barn per måned i 2015.
- c) Lag et regneark som viser hvor mye Stians foreldre totalt ville fått utbetalt dersom satsen for barnetrygd hvert år hadde blitt regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

År	KPI
1996	95,3
1997	97,8
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4
2012	131,4
2013	134,2
2014	136,9
2015	139,8

## E.7

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen våren 2016.)

I regnearket nedenfor har vi lagt inn timelønn, skatteprosent og antall timer Sara, Vilde og Peder arbeidet i juli.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid			
6	Lønn for overtidсарbeid			
7	Bruttolønn			
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,3 %		

- a) Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formler i de blå cellene og beregne bruttolønn, skattetrekk og nettolønn.

Sara har regnet ut at hun i gjennomsnitt betalte 20,3 % i skatt av bruttolønner hun hadde i juli. Hun har derfor satt opp at hun har en gjennomsnittlig skatteprosent på 20,3.

- b) Vis hvilke beregninger Sara har gjort. Legg inn formler i de røde cellene i siste rad i regnearket fra oppgave a), slik at du også får med gjennomsnittlig skatteprosent for Vilde og Peder.



# GeoGebra

**Mål for opplæringen er at eleven skal kunne**

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og utan digitale verktøy
- redegjøre for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempel, også digitalt

## G.1 Skrive inn en funksjon

### Funksjon

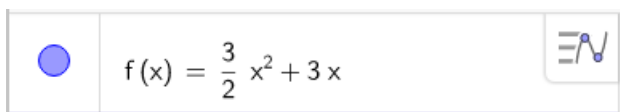
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 3$$

For å bruke  $f(x)$  i GeoGebra, skriver vi:

$$3/2x^2+3x$$

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet  $f$ . I algebrafeltet får vi derfor:



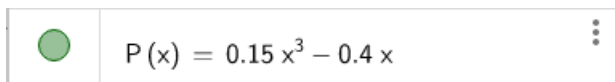
Hvis vi istedenfor har funksjonen

$$P(x) = 0,15x^3 - 0,4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra. Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet  $P(x)$ . Vi skriver da:

$$P(x) = 0.15x^3 - 0.4x$$

og får:



**ADVARSEL:** Man kan aldri gi funksjoner navnet  $y(x)$  i GeoGebra.  $y$  kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså  $y = ax + b$ , hvor  $a$  og  $b$  er to valgfrie tall.

### Linje

Si vi har dette uttrykket for ei linje:

$$y = 2x + 4$$

I GeoGebra lager vi denne linjen ved å skrive akkurat det samme:

$$2x+4$$

Og får dette:

	$f : y = 2x + 4$	
---	------------------	---

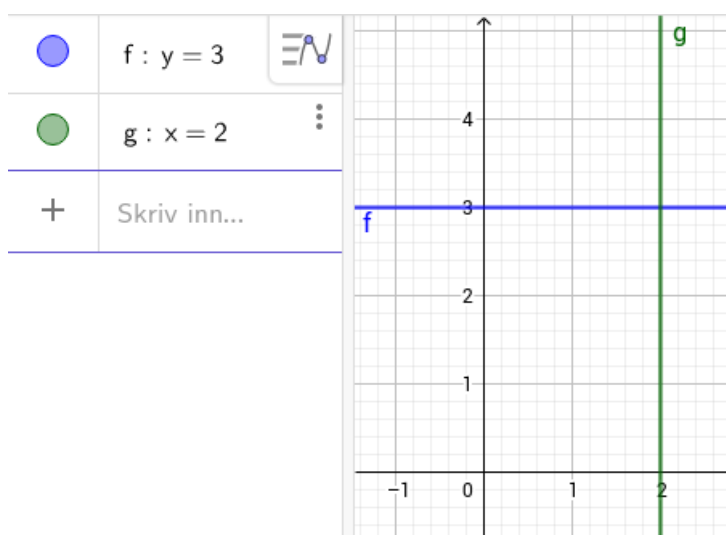
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på  $y$ -aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på  $x$ -aksen skriver vi:

$$y = 3$$

og

$$x = 2$$

Da får vi denne figuren:



## G.2 Finne verdien til en funksjon/linje

### Funksjon





Si vi har funksjonen

$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis ønsker å vite hva  $H(2)$  er, skriver vi

$$H(2)$$

som resulterer i dette:

	$H(x) = x^2 + 3x - 3$	
	$a = H(2)$ $\rightarrow 7$	

Da vet vi at  $H(2) = 7$ .


### Linje

Skriver vi inn ei linje blir saken litt annerledes, noe vi her skal vise ved å bruke de to linjene gitt ved uttrykkene:



$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse linjene inn i GeoGebra og får:

	f: $y = x - 3$	
	g: $y = -2x + 1$	

Ønsker vi nå å finne hva verdien til  $y = x - 3$  er når  $x = 2$ , må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for  $f$ . Svaret vi søker får vi da ved å skrive  $f(2)$ . Ønsker vi samtidig å vite hva  $y = -2x + 1$  er når  $x = 0$  må vi skrive  $g(0)$ :

	$a = f(2)$ $\rightarrow -1$	
	$b = g(0)$ $\rightarrow 1$	

## G.3 Finne skjæringspunkt

Se videoen [skj.](#)

## G.4 Finne nullpunkt

Se videon [nullpkt.](#)

## G.5 Finne topp- eller bunnpunkt

Se videoen [ekstrmpkt](#).

## G.6 Tegne linjen mellom to punkt

Se videoen [linpkt](#).



## G.7 Tegne graf på gitt intervall

I denne [videoen](#) her vi tegnet inn funksjonen:

$$f(x) = 0.00013x^3 - 0.59x^2 + 61x + 2000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

## G.8 Oppgaver

### G.1

- a) Skriv den lineære funksjonen  $f(x) = 2x + 4$  og linja  $y = 2x + 2$  inn i GeoGebra. Lag  $f(x)$  blå og  $y$  grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?
- b) Finn verdien til  $f(x)$  når  $x = 4$ .
- c) Finn verdien til  $y$  når  $x = -3$ .

### G.2

- a) Tegn punktene  $(-1,2)$  og  $(2,8)$ .
- b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

### G.3

- a) Skriv inn funksjonen  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .
- b) Finn  $f(4)$ .
- c) Finn nullpunktene til  $f(x)$ .
- d) Finn bunnpunktet til  $f(x)$ .
- e) Finn skjæringspunktet mellom  $f(x)$  og linja  $y = 5$ .