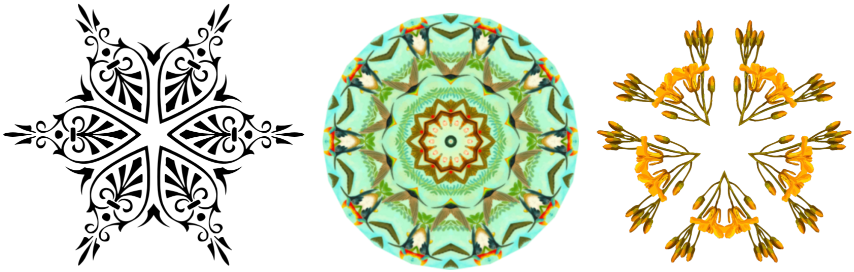
0.1 Symmetri



Bilder hentet fra freesvg.org.

Mange figurer kan deles inn i minst to deler hvor den éne delen bare er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av den andre. Dette kalles *symmetri*. De tre kommende regelboksene definerer de tre variantene for symmetri, men merk dette: Symmetri blir som regel intuitivt forstått ved å studere figurer, men er omstendelig å beskrive med ord. Her vil det derfor, for mange, være en fordel å hoppe rett til eksemplene.

0.1 Translasjonssymmetri (parallellforskyvning)

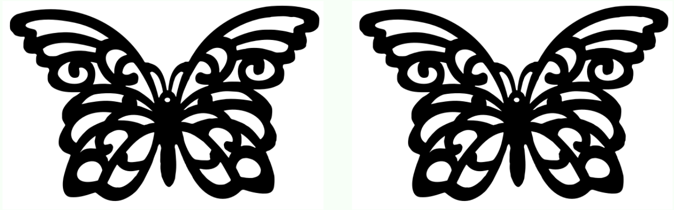
En symmetri hvor minst to deler er forskjøvne utgaver av hverandre kalles en *translasjonssymmetri*.

Når en form forskyves, blir hvert punkt på formen flyttet langs den samme vektoren[1].

[1] En vektor er et linjestykke med retning.

Eksempel 1

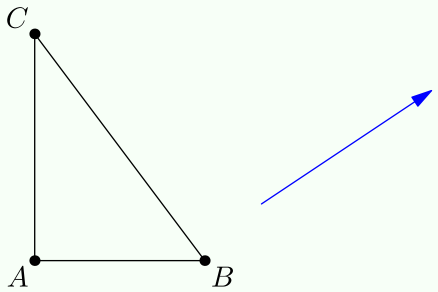
Figuren under viser en translasjonssymmetri som består av to sommerfugler.



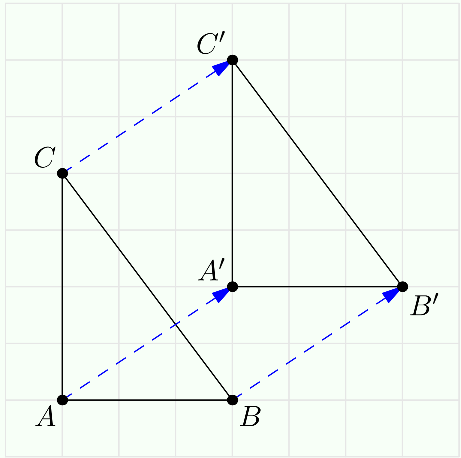
Bilde hentet fra freesvg.org.

Eksempel 2

Under vises $\triangle ABC$ og et blått linjestykke.



Under vises $\triangle ABC$ forskjøvet med den blå vektoren.



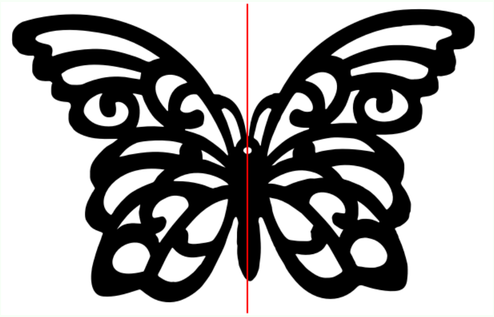
0.2 Speiling

En symmetri hvor minst to deler er vendte utgaver av hverandre kalles en *speilingssymmetri* og har minst én *symmetrilinje* (*symmetriakse*).

Når en et punkt speiles, blir det forskjøvet vinkelrett på symmetrilinja fram til det nye og det opprinnelige punktet har samme avstand til symmetrilinja.

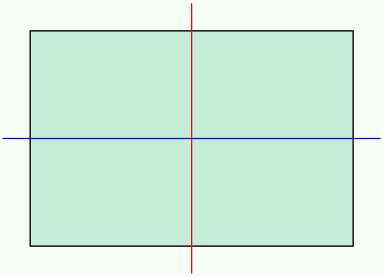
Eksempel 1

Sommerfuglen er en speilsymmetri, med den røde linja som symmetrilinje.



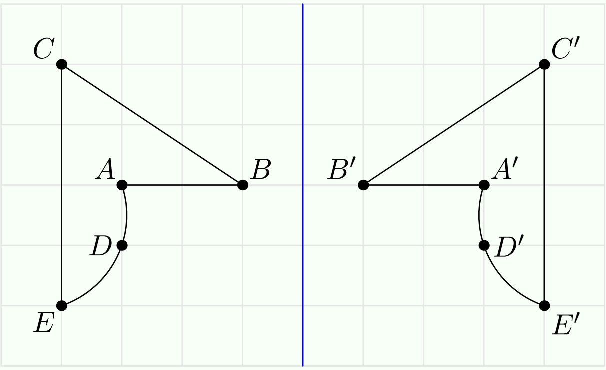
Eksempel 2

Den røde linja og den blå linja er begge symmetrilinjer til det grønne rektangelet.



Eksempel 3

Under vises en form laget av punktene A, B, C, D, E og F, og denne formen speilet om den blå linja.



0.3 Rotasjonssymmetri

En symmetri hvor minst to deler er en rotert utgave av hverandre kalles en *rotasjonssymmetri* og har alltid et tilhørende *rotasjonspunkt* og en *rotasjonsvinkel*.

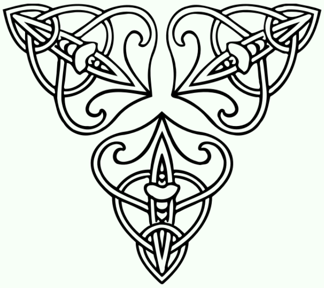
Når et punkt roteres vil det nye og det opprinnelige punktet

- ligge langs den samme sirkelbuen med sentrum i rotasjonspunktet.
- med rotasjonspunktet som toppunkt danne rotasjonsvinkelen.

Hvis rotasjonsvinkelen er et positivt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *mot* klokka. Hvis rotasjonsvinkelen er et negativt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *med* klokka.

Eksempel 1

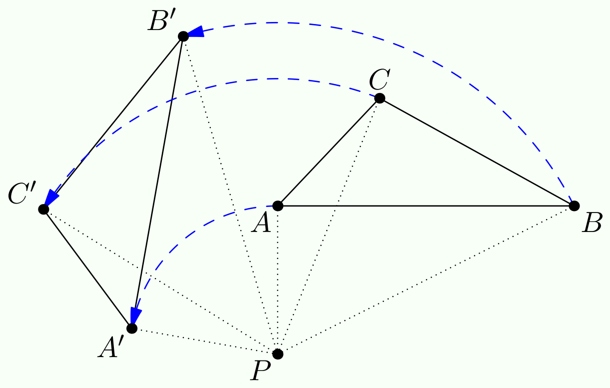
Mønsteret under er rotasjonssymmetrisk. Rotasjonssenteret er i midten av figuren og rotasjonsvinkelen er 120°



Bilder hentet fra freesvg.org.

Eksempel 2

Figuren under viser $\triangle ABC$ rotert $80°$ om rotasjonspunktet P.



Da er

$$PA =' PA \quad , \quad PB = PB' \quad , \quad PC = PC'$$

og

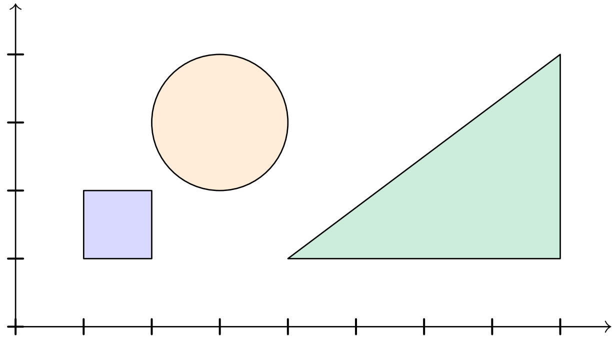
$$\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC' = 80°$$

Språkboksen

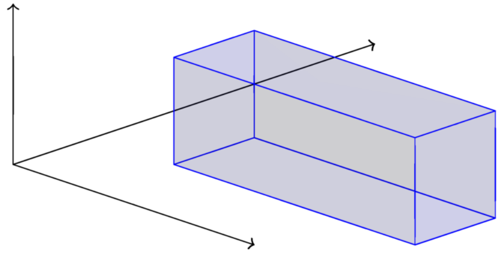
En form som er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av en annen form, kalles en *kongruensavbilding*.

0.2 Tredimensjonal geometri

I MB har vi sett på todimensjonale figurer som trekanter, firkler, sirkler o.l. Alle todimensjonale figurer kan tegnes inn i et koordinatsystem med to akser.

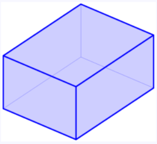


For å tegne inn *tredimensjonale* figurer trengs derimot tre akser:

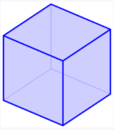


Området som "ligger utenpå" en tredimensjonal figur kaller vi *overflaten*. Overflaten til figuren over består av 6 rektangler. Rektangler eller trekanter som er deler av en overflate kalles *sideflater*.

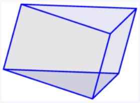
0.4 Tredimensjonale figurer



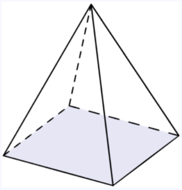
Firkantet prisme
Har to like og fire like rektangler som sideflater. Alle sideflatene som er i kontakt, står vinkelrette på hverandre.



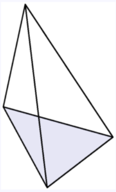
Kube
Firkantet prisme med kvadrater som sideflater.



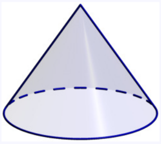
Trekantet prisme
To av sideflatene er like trekanter som er parallelle. Har tre sideflater som er trekanter.



Firkantet pyramide
Har ett rektangel og fire trekanter som sideflater.



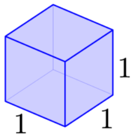
Trekantet pyramide
Har fire trekanter som sideflater.



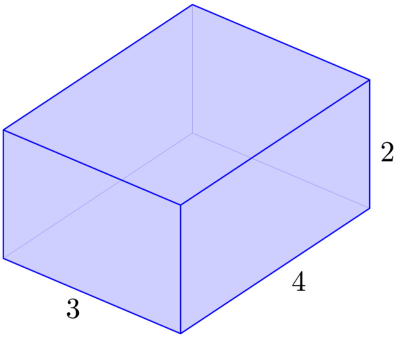
Kjegle
Den éne delen av overflaten er en sirkel, den andre er en sammenbrettet sektor.

0.3 Volum

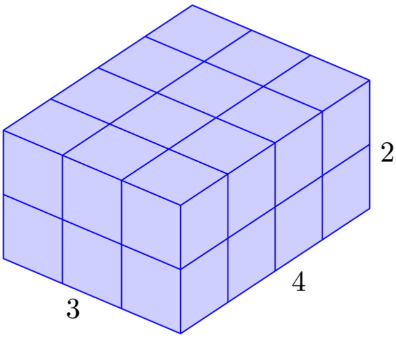
Når vi ønsker å si noe om hvor mye det er plass til inni en gjenstand, snakker vi om *volumet* av den. Som et mål på volum tenker vi oss *en kube* som har 1 som både bredde, lengde og høgde:



En slik kube kan vi kalle"enhetskuben". Si vi har en firkantet boks med bredde 3, lengde 4 og høgde 2:



Vi kan må merke oss at vi har plass til akkurat 24 enhetskuber i denne boksen:



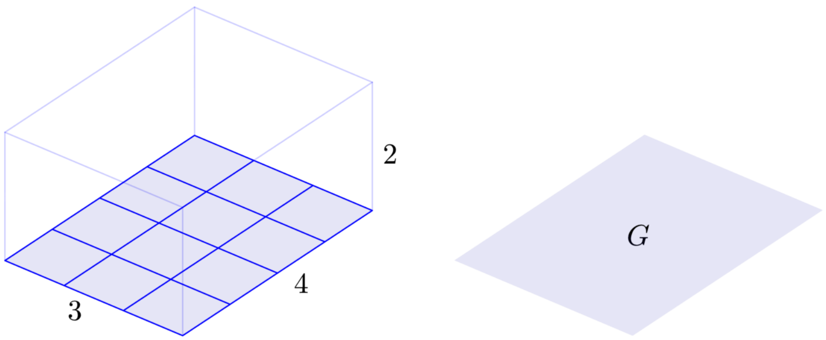
Og dette kunne vi ha regnet ut slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Altså:

$$\text{bredde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høgde}$$

Grunnflate
For å regne ut volumet av de mest elementære figurene vi har, kan det være lurt å bruke begrepet *grunnflate*. Slik som for en grunnlinje, er det vårt valg av grunnflate som bestemer hvordan vi skal regne ut høgden. For en slik boks som vi akkurat så på, er det naturlig å velge flaten som ”ligger ned” til å være grunnflaten, og for å indikere dette brukes ofte G:



Grunnflaten har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høgden er 2. Volumet av hele boksen er grunnflatens areal ganger høgden:

$$\begin{aligned} V &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= G \cdot 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

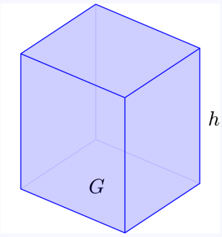
Grunnflaten eller grunnflatearealet?

I teksten over har vi først kalt selve grunnflaten for G, og deretter brukt G for *grunnflatearealet*. I denne boka er begrepet grunnflate så sterkt knyttet til grunnflatearealet at vi ikke kommer til å skille mellom disse to begrepene.

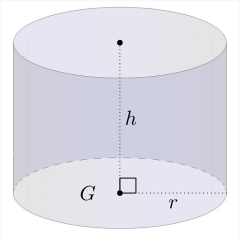
0.5 Volum

Volumet V til en firkantet prisme eller en sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



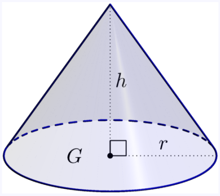
Firkantet prisme



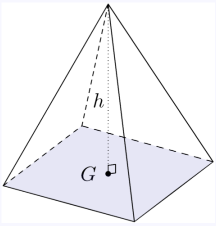
Sylinder

Volumet V til en kjegle eller en pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



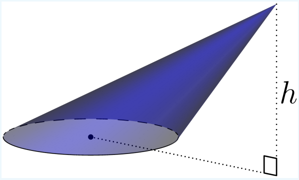
Kjegle



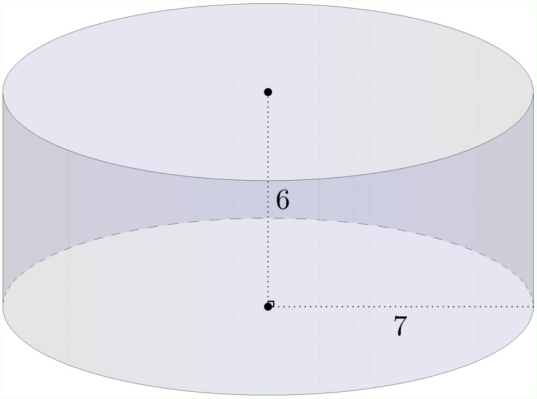
Firkantet pyramide

Obs!

Formlene fra *Regel 0.5* gjelder også for prismer, sylindre, kjegler og pyramider som heller (er skjeve). Hvis grunnflaten er plassert horisontalt, er høgden den vertikale avstanden mellom grunnflaten og toppen til figuren.



Eksempel 1



En sylinder har radius 7 og høgde 5. Finn volumet til sylinderen.

a) Finn grunnflaten til sylinderen.

b) Finn volumet til sylinderen.

Svar:

a) Vi har at (se regel ?? i MB):

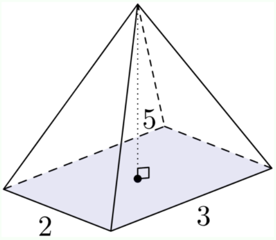
$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= \pi \cdot 7^2 \\ &= 49\pi\end{aligned}$$

b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylinderen} &= 49\pi \cdot 6 \\ &= 294\pi\end{aligned}$$

Eksempel 2

En firkantet pyramide har lengde 2, bredde 3 og høgde 5.



a) Finn grunnflaten til pyramiden.

b) Finn volumet til pyramiden.

Svar:

a) Vi har at (se regel ?? i MB)

$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til pyramiden} &= 6 \cdot 5 \\ &= 30\end{aligned}$$

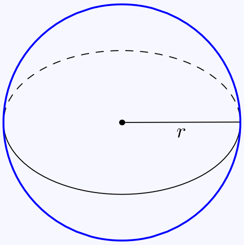
Volumet av ei kule

Som vanlig skiller ting seg ut når vi snakker om renit sirkelformede figurer, og ei *kule* er ikke noe unntak. For den spesielt interesserte kan et bevis for volumformelen leses her, men det er altså helt lov til å bykse rett på formelen:

0.6 Volumet av ei kule

Volumet V av ei kule med radius r er:

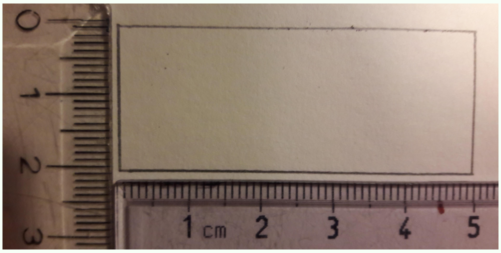
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



0.4 Omkrets, areal og volum med enheter

Når vi måler lengder med linjal eller lignende, må vi passe på å ta med enhetene i svaret vårt.

Eksempel 1



$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 5\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 5\,\text{cm} + 2\,\text{cm} \\ &= 14\,\text{cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 2\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} \\ &= 2 \cdot 5\,\text{cm}^2 \\ &= 10\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Vi skriver cm^2 fordi vi har ganget sammen 2 lengder som vi har målt i cm.

Eksempel 2

En sylinder har radius 4 m og høgde 2 m. Finn volumet til sylinderen.

Svar:

Så lenge vi er sikre på at størrelsene vår har samme enhet (i dette tilfellet meter), kan vi først rekne uten størrelser:

$$\begin{aligned}\text{grunnflate til sylinderen} &= \pi \cdot 4^2 \\ &= 16\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylinderen} &= 16\pi \cdot 2 \\ &= 32\pi\end{aligned}$$

Vi har her ganget sammen tre lengder (to faktorer lik 4 m og én faktor lik 2 m) med meter som enhet, altså er volumet til sylinderen $32\pi\,\mathrm{m}^3$

Merk

Når vi skal finne volumet til gjenstander, måler vi lengder som høgde, bredde, radius osv., men i det daglige oppgir vi gjerne volum i liter. Da er det verdt å ha med seg at

$$1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3$$