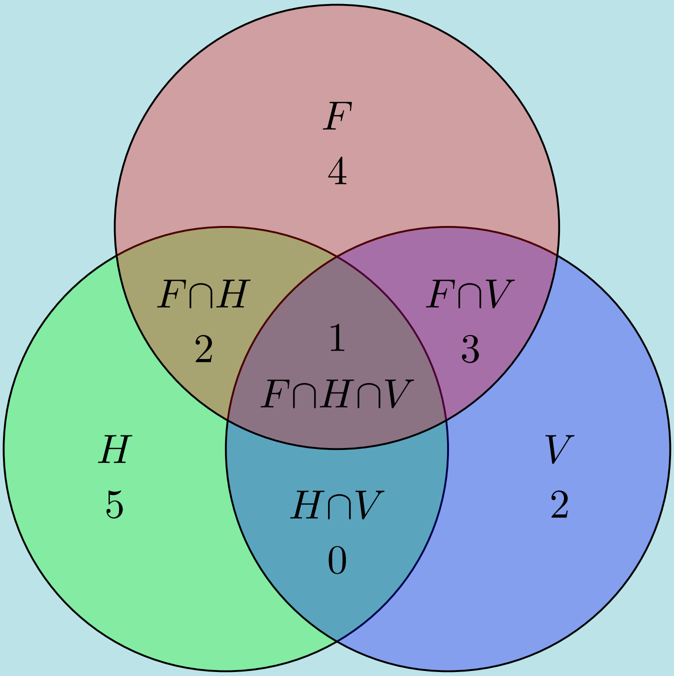
Matematikk 1P



Sindre Sogge Heggen

"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt"

"Det er ikke kunnskapen, men læringen, ikke besittelsen, men ervervelsen, ikke oppholdet, men ankomsten, som gir den største gleden."

— Carl Friedrich Gauss

Alt innhold er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i LaTeX og figurene er lagd vha. LaTeX, GeoGebra og Asymptote.

28.08.2017

Innhold

Kapittel 1

Regneregler

- gjere overslag over svar, rekne praktiske oppgåver, med og utan digitale verktøy, presentere resultata og vurdere kor rimelege dei er

1.1 Regler for regneartene

1.1 Regneregler for + og −

$$
\begin{aligned}
+- &= - \\
-- &= + \\
+\cdot - &= - \\
-\cdot - &= - \\
+ : - &= - \\
- : - &= +
\end{aligned}
$$

Eksempel 1

Regn ut:

a) $3 - -2$ **b)** $3 \cdot (-2)$ **c)** $(-4) \cdot (-5)$ **d)** $8 : (-4)$

Svar:

a)

$$
\begin{aligned}
3 - -2 &= 3 + 2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

b)

$$3 \cdot (-2) = -6$$

c)

$$(-4) \cdot (-5) = 20$$

d)

$$8 : (-4) = -2$$

1.2 Regnerekkefølge

1.2 Regnerekkefølge

1. Regnestykker inni paranteser
2. Potenser
3. Ganging og deling
4. Pluss og minus

Eksempel 1

$$2 \cdot (-3) + 4 = -6 + 4 \qquad \cdot \text{ før } + \text{ eller } -$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^2 &= 4 \cdot 9 && \text{Potenser før ganging} \\ &= 36 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} (2+4) \cdot (-2)^2 &= 6 \cdot 4 && \text{Paranteser før potenser} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned} &(2 - -5) \cdot 2^3 - 4 \cdot 3 + 2 && \text{Paranteser først} \\ &= 7 \cdot 2^2 - 10 : (-2) + 2 && \text{Potenser etterpå} \\ &= 7 \cdot 4 - 10 : (-2) + 2 && \text{Så} \cdot \text{og} : \\ &= 28 - -5 + 2 && + \text{ og } - \text{ til slutt} \\ &= 28 + 5 + 2 \\ &= 35 \end{aligned}$$

1.3 Overslagsregning

Det er ikke alltid vi trenger å vite svaret på regnestykker helt nøyaktig, noen ganger er det viktigere at vi fort kan avgjøre hva svaret omtrent blir. Når vi finner svar som omtrent er riktige, sier vi at vi gjør et *overslag*. Poenget med overslag er å endre på tallene som inngår i regnestykker, slik at vi greier å greier å finne svaret ved hoderegning.

Si nå at vi skal gjøre et overslag på regnestykket:

$$98{,}2 + 24{,}6$$

Vi ser at 98,2 ca. er lik 100. Skriver vi 100 istedenfor 98,2 i regnestykket vårt, får vi noe som er litt mer enn det nøyaktige svaret. Skal vi endre på 24,6 bør vi derfor gjøre det til et tall som er litt mindre. 24,6 er ganske nærme 20, så vi kan skrive at:

$$\begin{aligned} 98{,}2 + 24{,}6 &\approx 100 + 20 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Når vi gjør overslag på tall som legges sammen bør vi altså prøve å gjøre det ene tallet større (runde opp) og et tall mindre (runde ned).

Det samme gjelder også hvis vi har ganging, for eksempel:

$$1689 \cdot 12$$

Her er det fristenede å endre 12 til 10. For å ”veie opp” for at svaret da blir litt mindre enn det egentlige, endrer vi 1689 opp til 1700. Da får vi:

$$\begin{aligned} 1689 \cdot 12 &\approx 1700 \cdot 10 \\ &= 17000 \end{aligned}$$

Skal et tall trekkes fra et annet blir det litt annerledes. La oss gjør et overslag på:

$$186{,}4 - 28{,}9$$

Hvis vi runder 186,4 opp til 190 får vi et svar som er større enn det egentlige, derfor bør vi også trekke ifra noe. Det kan vi gjøre ved også å runde 28,9 oppover (til 30):

$$\begin{aligned} 186{,}4 - 28{,}9 &\approx 190 - 30 \\ &= 160 \end{aligned}$$

Samme prinsippet gjelder for deling:

$$145 : 17$$

Det er fristenede å runde 17 opp til 20. Deler vi noe med 20 istedenfor 17, blir svaret mindre. Derfor bør vi også runde 145 oppover (til 150):

$$\begin{aligned} 145 : 17 &\approx 150 : 20 \\ &= 75 \end{aligned}$$

1.3 Overslagsregning

$+$ $\cdot$	Et tall opp, et tall ned.
$-$ $:$	Begge tall opp, eller begge tall ned.

Fremste siffer bør helst ikke endres med mer enn 1:

$$8{,}5 \approx 9 \qquad \text{O.K}$$
$$8{,}5 \approx 10 \qquad \text{ikke O.K}$$

Eksempel

Rund av og finn omtrentlig svar for regnestykkene.

a) $23{,}1 + 174{,}7$ **b)** $11{,}8 \cdot 107{,}2$

c) $37{,}4 - 18{,}9$ **d)** $1054 : 209$

Svar:

a)

$$\begin{aligned} 32{,}1 + 174{,}7 &\approx 30 + 170 \\ &= 200 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 11{,}8 \cdot 107{,}2 &\approx 10 \cdot 110 \\ &= 1100 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 37{,}4 - 18{,}9 &\approx 40 - 20 \\ &= 20 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 1054 : 209 &\approx 1000 : 200 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Avrunding av π

π er det vi kaller et irrasjonelt tall, noe som betyr at det har uendelig mange desimaler!

$$\pi = 3{,}14159265359...$$

Skal vi skrive π som et desimaltall, må vi derfor alltid gjøre en avrunding. På Del 1 (som er uten hjelpemidler) på eksamen kan vi tillate oss å si at:

$$\pi \approx 3$$

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Regn ut:

a) $-4 - -8$ **b)** $8 \cdot (-6)$ **c)** $(-10) \cdot (-9)$ **d)** $40 : (-5)$

1.2.1

Regn ut:

a) $4(9-3)+7$ **b)** $5 - 2^2 \cdot 3$

c) $8 : 4 + 2(3 \cdot 4 - 10)$ **d)** $(-3)(3^2 - 5 \cdot 2) \cdot 2 - 3$

1.3.1

a) Skriv ned de tre dyreste kjøpene du gjør ca hver dag. (Hvis du ikke kommer på noe, så tenk på tre ting du gjerne *ville* kjøpt hver dag).

b) Gjør et overslag av hvor mye de tre kjøpene koster til sammen.

c) Gjør et overslag av hvor mye penger du bruker i måneden på disse kjøpene.

d) Tenk at hele klassen (vi er nå 23 stk.) skulle spleise på dine månedlige utgifter. Gjør et overslag av hvor mye hver person måtte betalt?

e) *Hvis du har jobb*: Gjør et overslag av hvor mye du tjener i måneden. Dekker lønnen din utgiftene du regnet ut i opg. c)?

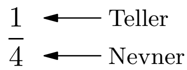
Hvis du ikke har jobb: Tenk at du tjener 1104 kr i uken. Hvor mye har du i månedslønn (det er ca 4,3 uker i måneden)? Gjør et overslag av hvor mye du tjener i måneden. Dekker lønnen din utgiftene du regnet ut i opg. c)?

Kapittel 2

Brøkregning

2.1 Grunnprinsippet

Brøker er rett og slett en omskriving av delestykker. Ønsker vi for eksempel å skrive $1:4$ som en brøk, får vi:



Tallet over streken kaller vi *telleren*, mens tallet under streken kaller vi *nevneren*. Brøken forteller oss nettopp at 1 skal deles med 4, og vi sier gjerne "én av fire", "én over fire" eller rett og slett "én delt på fire".

Hva er vitsen?

Etterhvert skal vi se at

$$0{,}125 \cdot 16$$

og

$$\frac{1}{8} \cdot 16$$

Er samme regnestykke. Forhåpentligvis vil du da være enig i at det nederste er mye enklere å regne ut for hand.

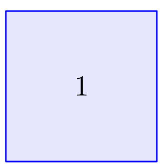
2.1 Brøk som omskrivning av delestykke

$$a : b = \frac{a}{b}$$

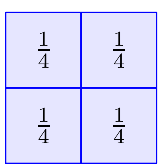
a kalles teller og b kalles nevner.

Brøk som figur

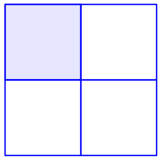
La oss prøve å se for oss brøken $\frac{1}{4}$ som en figur. Vi starter med å tenke på tallet 1 som en kvadratisk boks:



Vi deler så boksen inn i fire mindre bokser som er like store. Hver av disse boksene blir da én firedel (én av fire):

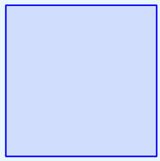


Tar man én slik rute har man altså én firedel:

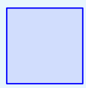
 $= \frac{1}{4}$

Obs!

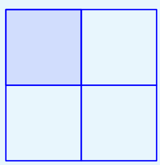
I vårt tilfelle har vi bestemt oss for at figuren



er det samme som 1. På mange måter kan man derfor si at skal vi tegne $\frac{1}{4}$, får vi denne figuren:



Men når vi nå skal se på mange forskjellige brøker blir det veldig trasig å se hvor store de er hvis vi tegner dem slik, og derfor tegner vi også de "tomme" delene:



Verdien til en brøk

Fra før er vi trolig vant med å alltid regne ut verdien til delestykker, det litt spesielle med brøker er at vi ofte lar dem stå som de er. Men skulle vi ønske å finne verdien av en brøk, så deler vi telleren med nevneren.

2.2 Verdien til en brøk

Verdien til en brøk finner vi ved å dele telleren med nevneren.

Eksempel

Finn verdien til $\frac{1}{4}$.

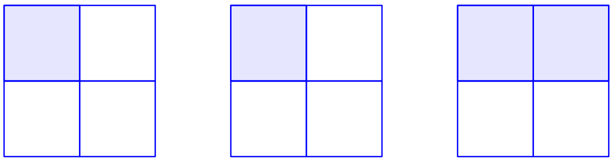
Svar:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

2.2 Brøk ganget med enkelttall

Hvis vi har to eksemplarer av $\frac{1}{4}$ og legger dem sammen, får vi $\frac{2}{4}$:

$$\frac{1}{4} \qquad + \qquad \frac{1}{4} \qquad = \qquad \frac{2}{4}$$



Men å legge sammen to eksemplarer av $\frac{1}{4}$ er akkurat det samme som å gange $\frac{1}{4}$ med 2. Derfor må $\frac{1}{4} \cdot 2$ bli $\frac{2}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot 2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{4} \end{aligned}$$

2.3 Brøk ganget med enkelttall

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1 \cdot 4}{3} = \frac{4}{3}$$

Eksempel 2

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

Tips 1

Ved ganging og deling har rekkefølgen ingenting å si. For eksempel blir $\frac{5}{2} \cdot 3$ akkurat det samme som $3 \cdot \frac{5}{2}$.

Regnestykket $\frac{5}{2} \cdot 3$ kan vi se på som ”$\frac{3}{2}$ lagt sammen tre ganger”, altså:

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Regnestykket $3 \cdot \frac{5}{2}$ kan vi derimot se på som ”3 lagt sammen 5 ganger og etterpå delt med 2”:

$$\begin{aligned} \text{3 lagt sammen 5 ganger} &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 15 \\ \text{Etterpå delt med 2} &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Tips 2

Legg merke til at å gange et tall med brøken $\frac{1}{a}$, er det samme som å dele tallet med a.

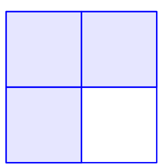
Eksempel:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{1}{7} &= \frac{5}{7} \\ &= 5 : 7 \end{aligned}$$

2.3 Brøk delt med enkelttall

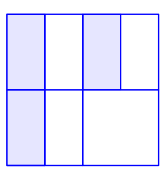
Hva nå om vi har $\frac{3}{4}$ og skal dele denne brøken med 2?

$$\frac{3}{4}$$

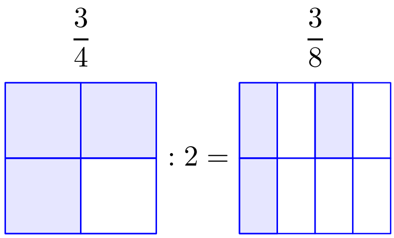


$: 2 = ?$

Vi må da ta bort halvparten fra hver av de tre firedelene:



Deler vi også den ”tomme” firerdelen i to, ser vi at vi sitter igjen med $\frac{3}{8}$:



Når vi deler hver firedel i to, sitter vi altså igjen med $4 \cdot 2 = 8$ deler. Istedenfor å bruke figurer, kunne vi skrevet:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} : 2 &= \frac{3}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

2.4 Brøk delt med enkelttall

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} : 6 &= \frac{5}{3 \cdot 6} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

2.4 Brøk ganget med brøk

Hva nå om vi skal regne ut hva

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

blir? Ifølge *Regel 2.3* er $\frac{3}{2}$ det samme som $3 \cdot \frac{1}{2}$, derfor kan vi skrive om regnestykket til:

$$\frac{5}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Vi har også sett (se *Tips 2*, s. 13) at å gange med $\frac{1}{2}$ er det samme som å dele med 2:

$$\frac{5}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot 3 : 2$$

Vi fortsetter derfor regnestykket vårt med å gange $\frac{5}{4}$ med 3, og etterpå dele på 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{4} \cdot 3 : 2 &= \frac{5 \cdot 3}{4} : 2 \\
&= \frac{15}{4} : 2 \\
&= \frac{15}{4 \cdot 2} \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

Istedenfor å regne så trinnvis som over, kunne vi samlet regnestykket vårt slik:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} &= \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \\
&= \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

2.5 Brøk ganget med brøk

$$
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} &= \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9} \\
&= \frac{24}{63}
\end{aligned}
$$

Tips

I dagligtale bruker vi ofte uttrykk som "$\frac{3}{4}$ av ...". Å finne $\frac{3}{4}$ av et tall, er det samme som å gange tallet med brøken $\frac{3}{4}$ (vi deler tallet i 4 like biter og tar 3 av dem).

Eksempel 1:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} \text{ av } 20 &= \frac{3}{4} \cdot 20 && \color{blue}{20 = 4 \cdot 5} \\
&= \frac{3 \cdot \cancel{4} \cdot 5}{\cancel{4}} \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Eksempel 2:

$$\frac{3}{4} \text{ av } \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{11}$$
$$= \frac{15}{44}$$

2.5 Kansellering av faktorer

Når telleren og nevneren i en brøk er det samme tallet, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{25}{25} = 1$ osv. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

La oss prøve å forenkle regnestykket

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Fordi $8 \cdot 5$ er det samme som $5 \cdot 8$, kan vi liksågodt skrive:

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett, er dette det samme som:

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Og fordi $\frac{8}{8} = 1$, får vi at:

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{5}{9} \cdot 1$$
$$= \frac{5 \cdot 1}{9}$$
$$= \frac{5}{9}$$

Å omrokkere brøkene, slik vi har gjort over, er egentlig unødvendig. For det samme resultatet får vi ved å *kansellere faktorer* som er like over og under brøkstreker. Man setter da en strek over to og to like faktorer for å indikere at de utgjør en brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat så på skriver man da som:

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

Tall som er med i gangestykker kaller vi faktorer. I regnestykket

$$2 \cdot a \cdot 5 + 7 - 3$$

er 2, a og 5 faktorer.

2.6 Kansellering av faktorer

To og to faktorer som finnes både over og under brøkstreken kan kanselleres.

Eksempel 1

Kanseller alle mulige faktorer i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Svar:

$$\frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 4 \cdot \cancel{12}} = \frac{3}{4}$$

Brøk forenkler utregninger

Som nevnt i *Seksjon 2.1*, er litt av vitsen med brøker at de forenkler regnestykkene våre. Desmialtallet 0,125 kan vi for eksempel skrive som brøken $\frac{1}{8}$ (fordi $1 : 8 = 0{,}125$). Regnestykket

$$0{,}125 \cdot 16$$

vil for de fleste av oss ta en stund å løse for hand med vanlige mulitplikasjonsregler. Men bruker vi brøkuttrykket får vi at:

$$\begin{aligned} 0{,}125 \cdot 16 &= \frac{1}{8} \cdot 16 \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2.6 Forkorting og utviding av brøker

Forkorting av brøker

Når vi *forkorter* en brøk prøver vi å skrive om telleren og nevneren til faktorer vi kan kansellere. Har vi for eksempel brøken $\frac{27}{18}$, legger vi merke til at $27 = 9 \cdot 3$ og at $18 = 9 \cdot 2$. Derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\frac{27}{18} &= \frac{\cancel{9} \cdot 3}{\cancel{9} \cdot 2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Dette forteller oss at verdien til $\frac{27}{18}$ er den samme som $\frac{3}{2}$:

$$\frac{27}{18} = 27 : 18 = \frac{3}{2} = 3 : 2 = 1{,}5$$

2.7 Forkorting av brøker

Når vi forkorter brøker faktoriserer vi teller og nevner, og kansellerer like faktorer. Verdien til brøken endres ikke.

Eksempel 1

Forkort brøken $\frac{12}{42}$.

Svar:

$$\begin{aligned}\frac{12}{42} &= \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Forkort brøken $\frac{30}{15}$.

Svar:

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{15} \cdot 2}{\cancel{15}} &= \frac{2}{1} \\ &= 2\end{aligned}$$

Merk: Hvis alle faktorer er kansellert i teller eller nevner, er dette det samme som at tallet 1 står der.

Tips

Et tall som 3000 kan vi skrive som $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, mens 700 kan vi skrive som $7 \cdot 10 \cdot 10$. Brøken $\frac{3000}{700}$ kan vi derfor forkorte slik:

$$\begin{aligned}\frac{3000}{700} &= \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot 10}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{7} \\ &= \frac{30}{7}\end{aligned}$$

I praksis er dette det samme som *å stryke nuller*:

$$\frac{30\cancel{00}}{7\cancel{00}} = \frac{30}{7}$$

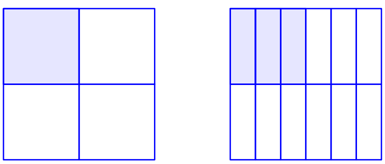
Obs! Nuller er de eneste sifrene vi kan stryke på denne måten. For eksempel kan man vi ikke forkorte $\frac{123}{13}$ på noen som helst måte.

Utviding av brøk

Når vi forkorter en brøk, ender vi med en teller og nevner som er mindre enn de var. Noen ganger ønsker vi faktisk å gjøre det omvendte, nemlig å *utvide* en brøk. Da ender vi med en teller og nevner som er større enn opprinnelig, men også ved utviding forblir verdien til brøken den samme.

Si at vi ønsker å utvide $\frac{1}{4}$ til en brøk med 12 som nevner. Fordi vi allerede har 4 i nevneren, får vi 12 om vi ganger med 3. Men for at verdien til brøken ikke skal endre seg, må vi også gange telleren med 3:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} \\ &= \frac{3}{12}\end{aligned}$$



$$\frac{1}{4} \qquad = \qquad \frac{3}{12}$$

2.8 Utviding av brøk

Når vi utvider en brøk, ganger vi teller og nevner med det samme tallet. Verdien til brøken endres ikke.

Eksempel 1

Utvid brøken $\frac{3}{5}$ til en brøk med 20 som nevner.

Svar:

Fordi $5 \cdot 4 = 20$, må vi gange med 4 både over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{12}{20} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Utvid brøken $\frac{150}{50}$ til en brøk med 100 i nevner.

Svar:

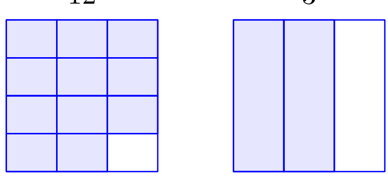
a) Fordi $50 \cdot 2 = 100$, må vi gange med 2 både over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned} \frac{150}{50} &= \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{300}{100} \end{aligned}$$

2.7 Brøker lagt sammen og trekt ifra hverandre

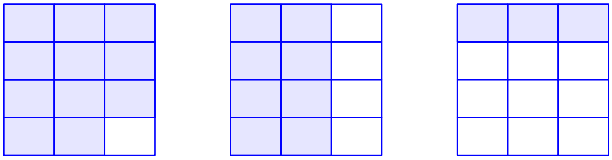
La oss prøve å finne hva $\frac{11}{12}$ fratrekt $\frac{1}{3}$ blir:

$$\frac{11}{12} \qquad - \qquad \frac{2}{3} \qquad = \quad ?$$



For å komme oss videre gjør vi, ved hjelp av figuren, denne observasjonen: Hver tredel utgjør 4 tolvdeler, så 2 tredeler er $2 \cdot 4 = 8$ tolvdeler. Derfor kan vi skrive om regnestykket til:

$$\frac{11}{12} \quad - \quad \frac{8}{12} \quad = \quad \frac{3}{12}$$



Det vi rett og slett har gjort, er å utvide den ene brøken slik at begge brøkene har samme nevner (nemlig 12). Når nevnerene i brøker er den samme, er brøkdelene like store, og vi kan da trekke ifra eller legge sammen tellerene:

$$\begin{aligned}\frac{5}{12} - \frac{2}{3} &= \frac{5}{12} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{11}{12} - \frac{8}{12} \\ &= \frac{3}{12}\end{aligned}$$

Når brøker har samme nevner kan vi også sette dem på en felles brøkstrek:

$$\begin{aligned}\frac{11}{12} - \frac{8}{12} &= \frac{11-8}{12} \\ &= \frac{3}{12}\end{aligned}$$

I vårt regnestykke kalles 12 en *fellesnevner*. Dette er fordi det fins et heltall vi kan gange nevnerene våre med som gir oss tallet 12:

$$\begin{aligned}12 \cdot 1 &= 12 \\ 3 \cdot 4 &= 12\end{aligned}$$

Hvis vi ganger sammen alle nevnerene i et regnestykk finner vi alltid en fellesnevner:

$$\begin{aligned}12 \cdot 3 &= 36 \\ 3 \cdot 12 &= 36\end{aligned}$$

Men vi sparer oss store tall hvis vi finner den minste fellesnevneren.

2.9 Brøker lagt sammen og trekt ifra hverandre

Når vi skal legge sammen eller trekke ifra brøker, må vi utvide brøkene slik at alle brøkene har samme nevner.

Eksempel 1

Regn ut:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

Svar:

Alle nevnerene kan bli 16 hvis vi ganger med riktig heltall, vi utvider derfor til brøker med 16 i nevner.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}-\frac{5}{8}+\frac{10}{4} &= \frac{3\cdot 8}{2\cdot 8}-\frac{5\cdot 2}{8\cdot 2}+\frac{10\cdot 4}{4\cdot 4}\\ &= \frac{24}{16}-\frac{10}{16}+\frac{40}{16}\\ &= \frac{54}{16}\end{aligned}$$

2.8 Deling med brøk

Brøk delt på brøk

Vi er endelig klare til å sette kronen på brøkverket; vi skal se hvordan vi kan regne ut hva tall delt på brøker blir.

La oss først gå til det enkleste, en brøk delt på seg selv. Her må det samme gjelde som for alle andre tall, svaret må bli 1. For eksempel er:

$$\frac{7}{3}:\frac{7}{3}=1$$

Bruker vi brøkstrek istedenfor deletegn, kan vi skrive dette som:

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}}=1$$

Å dele $\frac{7}{3}$ med $\frac{7}{3}$ er det samme som å spørre "Hvilket tall må vi gange $\frac{7}{3}$ med for å få $\frac{7}{3}$?".

Svaret er 1 fordi:

$$\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}$$

La oss med dette gå videre til regnestykket:

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$$

som kan skrives slik:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$$

Vi benytter oss nå av det samme prinsippet som da vi utvidet brøker (se *Regel 2.8*); vi kan gange og dele med det samme tallet over og under brøkstreken, uten at dette forandrer på svaret. Og hvis vi ganger både over og under den miderste brøkstreken med $\frac{3}{7}$, forenkler vi regnestykket vårt betraktelig:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}}$$

$$= \frac{\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}}{\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{7}}}$$

$$= \frac{\frac{14}{15}}{1}$$

Når vi deler et tall på 1, står vi alltid igjen med bare tallet selv:

$$\frac{\frac{14}{15}}{1} = \frac{14}{15}$$

Og som vi kan se av utregningen over, er dette det samme som:

$$\frac{14}{15} = \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}$$

Vi sier derfor at å dele med en brøk, er det samme som å gange med den *omvendte* brøken!

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}$$

I vårt eksempel er $\frac{7}{3}$ det vi kaller den omvendte brøken av $\frac{3}{7}$.

2.10 Deling med brøk

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{8} = \frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}$$
$$= \frac{32}{15}$$

Eksempel 2

$$5 : \frac{2}{9} = 5\cdot\frac{9}{2}$$
$$= \frac{45}{2}$$

Eksempel 3

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$$
$$= \frac{30}{15}$$

Aller helst bør vi her prøve å forkorte brøken:

$$\frac{30}{15} = \frac{2 \cdot \cancel{15}}{15}$$
$$= 2$$

Vi kan også spare oss for store tall hvis vi prøver å kansellere faktorer underveis i utregningen:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}}$$
$$= 2$$

2.9 Brøker med symbol

For å komme fram til alle brøkreglene vi nå har sett på, har vi hele tiden brukt konkrete tall som eksempler, som brøken $\frac{1}{4}$, heltallet 2 osv. Men for å skrive helt generelle regler, som gjelder for alle tall, måtte vi bruke symboler isteden, nemlig bokstavene a, b, c og d. Dette kunne vi gjøre fordi brøkreglene for tall og symboler er de samme.

Eksempel 1

$$\frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{3}$$

Regel 2.3

Eksempel 2

$$\frac{4\pi}{3} : r^2 = \frac{4\pi}{3 \cdot r^2}$$
$$= \frac{4\pi}{3r^2}$$

Regel 2.4

Eksempel 3

$$\frac{b}{4\pi} \cdot \frac{c}{3} = \frac{b \cdot c}{4\pi \cdot 3} \qquad \textit{Regel 2.5}$$

$$= \frac{bc}{12\pi}$$

Eksempel 4

Kanseller alle mulige faktorer i brøken

$$\frac{2b \cdot 9ac}{11a \cdot 5b}$$

Svar:

$$\frac{2\cancel{b} \cdot 9\cancel{a}c}{11\cancel{a} \cdot 5\cancel{b}} = \frac{18c}{55} \qquad \textit{Regel 2.6}$$

Eksempel 5

$$\frac{5\pi}{c} : \frac{b}{a} = \frac{5\pi \cdot a}{c \cdot b} \qquad \textit{Regel 2.10}$$

$$= \frac{5\pi a}{bc}$$

Oppgaver for kapittel 2

2.1.1

Finn verdien til brøkene:

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{1}{4}$ **c)** $\dfrac{1}{5}$ **d)** $\dfrac{10}{5}$ **e)** $\dfrac{6}{8}$

2.2.1

Regn ut:

a) $\dfrac{4}{3}\cdot 5$ **b)** $\dfrac{3}{5}\cdot(-6)$

2.2.2

Finn $\frac{2}{3}$ av 9.

2.3.1

Regn ut:

a) $\dfrac{4}{3} : 5$ **b)** $\dfrac{3}{5} : (-6)$

2.4.1

Regn ut:

a) $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{9}$ **b)** $\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{2}{4}$

2.4.2

Finn $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.

2.6.1

Forkort brøkene:

a) $\dfrac{28}{16}$ **b)** $\dfrac{12}{36}$

2.6.2

a) Uvid $\frac{2}{3}$ til en brøk med 24 som nevner.

b) Utvid $\frac{11}{9}$ til en brøk med 27 som nevner.

2.7.1

Regn ut:

a) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{6}$ **b)** $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}$

2.8.1

Regn ut:

a) $\dfrac{2}{5}:\dfrac{5}{6}$ **b)** $\dfrac{12}{3}\cdot\dfrac{3}{2}$

2.8.2

Se tilbake til svarene i oppgave 2.1.1a)-c). Fyll inn tallet som mangler der det står "_" i setningene under:

(a) Å dele med 0,5 er det samme som å gange med _ .

(b) Å dele med 0,25 er det samme som å gnage med _ .

(c) Å dele med 0,2 er det samme som å gnage med _ .

2.8.3

Regn ut:

a) $\dfrac{1}{2}\cdot h$ **b)** $\dfrac{1}{2}:h$ **c)** $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{a}{b}$

2.8.4

Forkort brøken:

$$\frac{2\pi ac}{4c\pi}$$

Kapittel 3

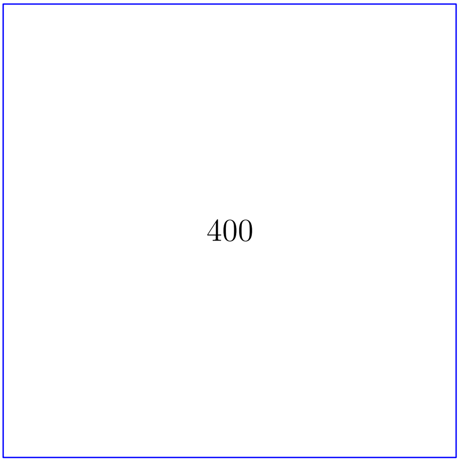
Prosentregning

3.1 Hva er prosent?

Ordet *prosent* betyr rett og slett *av hundre*. Når vi for eksempel sier 30 prosent, er dette derfor det samme som brøken $\frac{30}{100}$. Og istedenfor å skrive "prosent", skriver vi som oftest tegnet %.

Når et tall er gitt i prosent, kalles det et *prosenttall*. 20%, 143,7% osv. er altså prosenttall.

Som et første eksempel skal vi finne 1% av 400. Dette betyr at vi skal dele 400 inn i 100 like store biter, og ta én av dem. Som et bilde på dette kan vi se for oss en boks som har verdien 400:



Denne boksen deler vi inn i 100 like store bokser. Hver boks må da ha verdien $\frac{400}{100} = 4$.

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Verdien til 1% av 400 er det samme som verdien til én av disse 100 boksene:

$$\begin{aligned} 1\% \text{ av } 400 &= \frac{400}{100} \\ &= 4 \end{aligned}$$

3.1 1% av et tall

1% av et tall finner vi ved å dele tallet med 100.

Eksempel 1

Hva er 1% av 900?

Svar:

$$1\% \text{ av } 900 = \frac{900}{100} = 9$$

Eksempel 2

Hva er 1% av 57,8?

Svar:

$$1\% \text{ av } 57{,}8 = \frac{57{,}8}{100} = 0{,}578$$

La oss gå videre til å finne 20% av 400. Dette betyr at vi skal ha 20 ganger mer enn 1% av 400:

$$\begin{aligned}
20\% \text{ av } 400 &= 20 \cdot 1\% \text{ av } 400 \\
&= 20 \cdot 4 \\
&= 80
\end{aligned}$$

4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4

$$20 \cdot \boxed{4} = 80$$

Vi kunne også regnet ut dette direkte ved å skrive 20% som et brøkuttrykk istedenfor:

$$\begin{aligned}
20\% \text{ av } 400 &= \frac{20}{100} \cdot 400 \\
&= \frac{20 \cdot 4\cancel{00}}{1\cancel{00}} \\
&= 20 \cdot 4 \\
&= 80
\end{aligned}$$

3.2 a% av b

$$a\% \text{ av } b = \frac{a \cdot b}{100} \tag{3.1}$$

Eksempel 1

Finn 50% av 800.

Svar:

$$\frac{50 \cdot 800}{100} = 400$$

Eksempel 2

Finn 2% av 7,4.

Svar:

$$\frac{2 \cdot 7{,}4}{100} = 0{,}148$$

3.2 Antall prosent a utgjør av b

Hva nå om vi har tallet 240 og ønsker å finne ut hvor mange prosent dette utgjør av 400?

Vi vet at 1% av 400 har verdien 4. For hver firer som går på 240 har vi derfor 1%. Til sammen går det 60 firere på 240, dette betyr at 240 utgjør 60% av 400.

$\frac{240}{4} = 60.$

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$\boxed{4} \cdot 60 = 240$

En direkte utregning kan vi skrive slik:

$$
\begin{aligned}
\text{Antall prosent 240 utgjør av 400} &= \frac{240}{\text{Verdien til 1\% av 400}} \\
&= \frac{240}{4} \\
&= 60
\end{aligned}
$$

3.3 Antall prosent a utgjør av b

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = \frac{a}{1\% \text{ av } b} \tag{3.2}$$

Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 60 av 200?

Svar:

1% av 200 er $\frac{200}{100} = 2$. Antall prosent 60 utgjør av 200 er derfor:

$$\frac{60}{2} = 30$$

60 er 30% av 200.

Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 13,1 av 12,5?

Svar:

1% av 12,5 er $\frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$. Antall prosent 13,1 utgjør av 12,5 er derfor:

$$\frac{13{,}1}{0{,}125} = 104{,}8$$

13,1 er 104,8% av 12,5.

Eksempel 3

En vare kostet opprinnelig 500 kr, men prisen er satt ned til 350 kr. Hvor mange prosent avslag er gitt?

Svar:

Det er gitt 500 kr − 350 kr = 150 kr i avslag og 1% av 500 er $\frac{500}{100} = 5$. Antall prosent 150 utgjør av 500 er:

$$\frac{150}{5} = 30$$

Avslaget er derfor 30%.

Tips

Man kan også se på prosent som et forhold man alltid uttrykker som en brøk med 100 i nevner. For eksempel er forholdet mellom 40 og 800 lik

$$\frac{40}{800} = 0{,}05$$

Skal vi gjøre om 0,05 til en brøk med 100 i nevener, må vi utvide brøken (Se ??):

$$\begin{aligned}\frac{0{,}05}{1}\cdot\frac{100}{100} &= \frac{5}{100}\\ &= 5\%\end{aligned}$$

40 utgjør altså 5% av 800.

I praksis betyr dette at vi finner forholdet vi ønsker, og flytter komma to plasser til høyre. I *Eksempel 1* kunne vi skrevet:

$$\frac{60}{200} = 0{,}3$$

Altså 30%.

3.3 Prosentfaktor

Vi har sett at når vi snakker om prosent, snaker vi egentlig om brøker med 100 som nevner. Disse brøkene har, som alle andre brøker, en verdi. Og for å i finne verdien til en brøk, deler vi tallet over brøkstreken med tallet under.

Når vi deler på 100, flytter vi komma to plasser til venstre.

Skal vi for eksempel finne verdien av 37,9%, får vi:

$$\begin{aligned}37{,}9\% &= \frac{37{,}9}{100}\\ &= 0{,}379\end{aligned}$$

Vi sier da at 37,7% er skrevet som *prosentfaktor*.

3.4 Prosentfaktor

Verdien av et prosenttall kalles prosentfaktoren.

Eksempel 1

Finn prosentfaktoren til 50%.

Svar:

$$50\% = 0{,}5$$

Prosentfaktoren er 0,5.

Eksempel 2

Finn prosentfaktoren til 3,4%.

Svar:

$$3{,}4\% = 0{,}034$$

Prosentfaktoren er 0,034.

Eksempel 3

Finn prosentfaktoren til 123%.

Svar:

$$123\% = 1{,}23$$

Prosentfaktoren er 1,23.

Når vi bruker prosentfaktorer sparer vi oss for å dele med 100 når vi skal finne prosenter av et tall. La oss se tilbake på regnestykket fra side 30, hvor vi fant 20% av 400. Da ganget vi 20 med 400 og delte på 100. Prosentfaktoren til 20% er $\frac{20}{100} = 0{,}2$. Ganger vi denne med 400, får vi akkurat samme resultatet som på side 30:

$$\begin{aligned} \frac{20}{100} \cdot 400 &= 0{,}2 \cdot 400 \\ &= 80 \end{aligned}$$

3.5 *a*% av *b*

$$a\% \text{ av } b = (\text{prosentfaktoren til } a) \cdot b \tag{3.3}$$

Eksempel 1

Finn 30% av 90.

Svar:

Prosentfaktoren til 30% er 0,3, altså får vi:

$$\begin{aligned} 30\% \text{ av } 90 &= 0{,}3 \cdot 90 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn 24,6% av 189,5.

Svar:

Prosentfaktoren til 124,6% er 1,246 , altså får vi:

$$\begin{aligned}124{,}6\% \text{ av } 189{,}5 &= 1{,}246 \cdot 189{,}5\\ &= 236.117\end{aligned}$$

Eksempel 3

Finn 100% av 80.

Svar:

Prosentverdien til 100% er 1, altså får vi:

$$\begin{aligned}100\% \text{ av } 80 &= 1 \cdot 80\\ &= 27\end{aligned}$$

Merk: 100% av et tall er alltid tallet selv!

3.4 Vekstfaktor

I mange dagligdagse situasjoner har noe økt eller minket med en viss prosent. I en butikk kan man for eksempel komme over en skjorte som originalt koster 500 kr, men som er rabbatert med 40%. Dette betyr at vi skal trekke ifra 40% av originalprisen når vi skal betale.

Én måte å regne ut hva vi må betale, er å starte med å finne fratrekket:

$$\begin{aligned}40\% \text{ av } 500 &= 0.4 \cdot 500\\ &= 200\end{aligned}$$

$500 - 200 = 300$, altså må vi betale 300 kr for skjorten.

Et litt annet regnestykke får vi om vi tenker på denne måten: Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale $100\% - 40\% = 60\%$ av 500:

$$\begin{aligned}60\% \text{ av } 500 &= 0.6 \cdot 500\\ &= 300\end{aligned}$$

Svaret blir selvsagt det samme, vi må betale 300 kr for skjorten.

Det er ikke alltid vi er så heldige at vi får rabatt på et produkt, ofte må vi faktisk betale et tillegg. *Mervardiavgiften* er et slikt tillegg. I Norge må vi betale 25% i merverdiavgift på mange varer.

Merverdiavgift forkortes til mva.

Det betyr at vi må betale et tillegg på 25%, altså $100\% + 25\% = 125\%$ av originalprisen.

Eksempel: Øreklokkene på bildet til høyre koster 999,20 kr *ekskludert* mva. Men *inkludert* mva. må vi betale:

$$
\begin{aligned}
125\% \text{ av } 999{,}20 &= 1.25 \cdot 999{,}20 \\
&= 1249
\end{aligned}
$$

Altså 1249 kr.

Mer om merverdiavgiften finner du på skatteetaten.no.

Vi har nå sett på to eksempler: I det ene sank prisen på en vare, mens i det andre økte den. Når prisen sank med 40%, endte vi opp med å betale 60% av originalprisen. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 0,6. Når prisen økte med 25%, endte vi opp med å betale 125% av originalprisen. Da er vekstfaktoren 1,25.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

3.6 Vekstfaktor

- Når en størrelse synker med $a\%$, ender vi opp med $100\% - a\%$ av størrelsen.
- Når en størrelse øker med $a\%$, ender vi opp med $100\% + a\%$ av størrelsen.
- Verdien til $100\% - a\%$ eller $100\% + a\%$ kalles vekstfaktoren.

Eksempel 1

En vare verd 1000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

Svar:

a) Siden det er 20% rabbatt må vi betale $100\% - 20\% = 80\%$ av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Den nye prisen finner vi ved å gange vekstfaktoren med originalprisen:

$$0{,}8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr.

Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Hva koster sjokoladen inkludert mva?

Svar:

a) Med 15% i tillegg må man betale $100\% + 15\% = 115\%$ av prisen eksludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)
$$1{,}15 \cdot 9.90 = 12{,}25$$

Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

3.5 Prosentpoeng

Vi har akkurat sett på størrelser som økte eller minket med en viss prosent. Men hvis størrelsen selv er oppgitt i prosent, må vi holde tunga rett i munnen. La oss bruke størrelsen 10% som et eksempel.

Hvis 10% øker med 5%, får vi:

$$\begin{aligned} 10\% \text{ økt med } 5\% &= 10\% \cdot 1{,}05 \\ &= 10{,}5\% \end{aligned}$$

I forrige seksjon fant vi at å øke en størrelse med 5% er det samme som å gange størrelsen med 1,05

Men hvis 10% istedenfor øker med 5 *prosentpoeng*, ender vi med:

$$\begin{aligned} 10\% \text{ økt med 5 prosentpoeng} &= 10\% + 5\% \\ &= 15\% \end{aligned}$$

10,5% og 15% er to helt forskjellige størrelser!

3.7 Prosentpoeng

$$\text{a\% økt med } b \text{ prosentpoeng} = a\% + b\%$$

$$\text{a\% minket med } b \text{ prosentpoeng} = a\% - b\%$$

Eksempel

En dag var 5% av elevene på en skole borte. Dagen etter var 7,5% av elevene borte.

a) Hvor mye økte fraværet i prosentpoeng?

b) Hvor mye økte fraværet i prosent?

Svar:

a) 7,5% − 5% = 2,5%, derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.

b) Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Dette er det samme som å finne hvor mye 2,5 utgjør av 5. (Se tilbake til ligning (3.2)). 1% av 5 er 0,05, derfor får vi:

$$\begin{aligned}\text{Antall prosent 2,5 utgjør av 5} &= \frac{2{,}5}{0{,}05}\\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

Hva er egentlig forskjellen mellom prosent og prosentfaktor?

Tenk på en skjorte som koster 200 kr. Tenk så at det er gitt 20% rabatt på dene skjorten, altså får man $200\,\text{kr} \cdot 0{,}2 = 40$ kr i avslag. Men si at rabatten blir endret til 50% av originalprisen, da blir avslaget $200\,\text{kr} \cdot 0{,}5 = 100$ kr.

Rabatten har da gått opp fra 20% til 50% av originalprisen, fra 40 kr til 100 kr. En økning på 60 kr. Og nå kommer poenget: Istedenfor å spørre *hvor mange prosent av originalprisen har rabatten økt?*, bruker vi ordet prosentpoeng. Det samme spørsmålet blir da *hvor mange prosentpoeng har rabatten økt?* Svaret blir 50% − 20% = 30%, altså 30 prosentpoeng. (60 utgjør 30% av 200).

Når vi isteden spør *hvor mye har rabatten økt i prosent?*, mener vi *hvor mange prosent av originalrabatten har rabatten økt?*. Dette kan vi finne på to måter:

Metode 1: Originalrabatten var på 40 kr og økte med 60 kr. Hvor mange prosent 60 kr ugjør av 40 kr kan vi regne ut slik:

$$\frac{60}{0{,}4} = 150 \qquad \text{1\% av 40 er 0,4}$$

Rabatten økte altså med 150%.

Metode 2:
Økningen i prosentpoeng er 30, og startrabatten var 20%. Hvor mange prosent 30 utgjør av 20 er:

$$\frac{30}{20} = 1{,}5$$
$$= 150\% \qquad \text{Se tipset på s } \textbf{??}$$

Rabatten økte med 150%.

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Finn 1% av:

a) 600 **b)** 623,4 **c)** 1,34

3.2.1

Hvor mange prosent utgjør:

a) 40 av 200? **b)** 213,6 av 890? **c)** 1.95 av 1.3?

3.2.2

En vare er satt ned fra 800 kr til 600 kr. Hvor mange prosent avslag er gitt på varen?

3.3.1

Finn prosentfaktoren til:

a) 60% **b)** 470,1% **c)** 2,3%

3.3.2

Bruk prosentfaktoren til å finne:

a) 60% av 300 **b)** 470,1% av 58,9 **c)** 2,3% av 0,3

3.4.1

Finn prisen når en vare som originalt koster 1200 er:

a) Satt ned med 50% **b)** Satt ned med 25% **c)** Satt ned med 15%

3.4.2

Under er prisen til tre varer, ekskludert mva. Bruk informasjonen fra skatteetaten.no og finn prisen inkludert mva:

a) T-skjorte: 180 kr

b) Kinobillett til filmen *Annabelle 2*: 118 kr

c) Youghurt: 11,10 kr

3.5.1

En gang var 15% av elevene borte den dagen det var matematikkprøve. Ved neste matematikkprøve var 6,5% av elevene borte.

a) Hvor mye endret fraværet seg fra første prøve til neste prøve, oppgitt i prosentpoeng?

b) Hvor mye endret fraværet seg fra første prøve til neste prøve, oppgitt i prosent?

3.5.2

I denne oppgaven skal du bruke tall fra denne nettsiden:
`http://www.pollofpolls.no/?cmd=Stortinget`.
Når man bruker ordet oppslutning, spør man hvor mange stemmer et parti har fått (oppgitt i antall eller prosent).

a) Hvor mange prosentpoeng har oppslutningen til partiet *Rødt* endret seg med fra august til september?

b) Hvor stor er denne endringen i prosent?

Kapittel 4

Ligninger

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- forenkle uttrykk med flere ledd og løse liginger av første grad og enkle potensligninger

Obs! Hvis du syns du forstår deg på ligninger, men bare trenger litt repetisjon, kan du hoppe til *seksjon 4.5*

4.1 Introduksjon

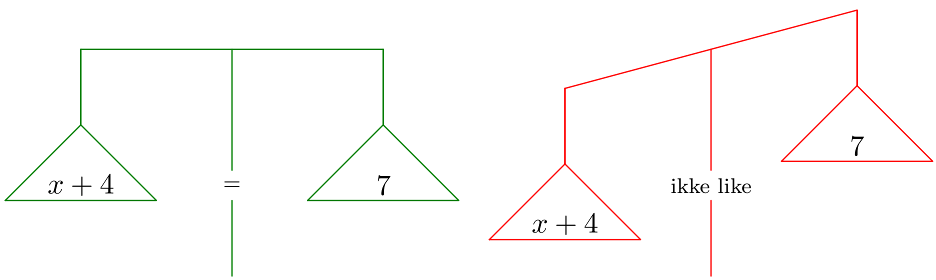
Si at vi ønsker å finne et tall som er slik at hvis vi legger til 3, så får vi 7. Når et tall er ukjent for oss, er det vanlig å kalle det for x. *Ligningen* for dette tallet blir:

$$x + 4 = 7$$

Tegnet "=", som betyr "er lik", gir oss en veldig viktig informasjon. Det forteller oss at *venstresiden er akkurat like stor som høyresiden*, selv om vi ikke vet hva verdien til x er!

$$\underbrace{x + 4}_{\text{venstreside}} \; \underbrace{=}_{\text{er lik}} \; \underbrace{7}_{\text{høyreside}}$$

Som en figur kan vi se for oss en vekt med $x + 4$ på den ene siden og 7 på den andre. "="-tegnet kan vi bruke så lenge vekten er den samme på begge sider.



Når vi skal løse ligninger er det alltid lov til å se eller prøve seg fram til hva som er rett svar. Kanskje har du allerede merket at $x = 3$ er løsningen på vår ligning fordi:

$$3 + 4 = 7$$

Men de fleste ligninger er det vanskelig å se svaret på, derfor skal vi i de fire neste seksjonene se på andre metoder vi kan bruke for å finne verdien til x.

4.2 Tall som skifter side

Første eksempel

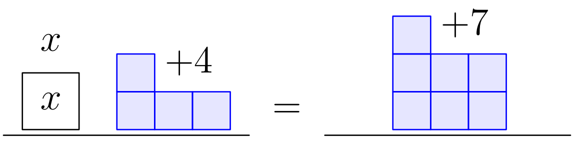
Vi starter med å se hvordan vi kan løse ligningen

$$x + 4 = 7$$

ved at et *tall skifter side*.

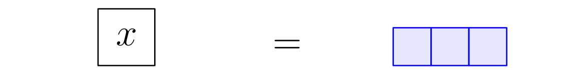
Vi skal fortsatt bruke figurer av ligningene våre, men det blir tungvint å måtte tegne vekter hele tiden. Isteden tegner vi nå ligningen vår slik:

På høyesiden i figuren har vi skrevet $+7$, men det er vanligst å bare skrive 7 (slik som i ligningen).



Prinsippet er likevel det samme som før: Vi må hele tiden passe på at begge sider veier like mye.

Det blir tydelig hva vekten til x er hvis x står alene på én av sidene. x blir for seg selv på venstresiden hvis vi tar bort de 4 rutene som står der. Men skal vi ta bort 4 ruter fra venstresiden må vi ta bort 4 ruter fra høyresiden også (for at begge sider skal veie like mye):



Dette skriver vi som:

$$x + \overbrace{4 - 4}^{0} = 7 - 4$$
$$x = 3$$

Men fordi $4 - 4 = 0$, er det egentlig unødvendig å skrive dette. Hele veien til løsningen skriver vi da slik:

$$x + 4 = 7$$
$$x = 7 - 4$$
$$x = 3$$

Mellom første og andre linje er det vanlig å si at *4 har skiftet side, og derfor også fortegn (fra $+$ til $-$).*

Andre eksempel

La oss gå videre til å se på en litt vanskeligere ligning:

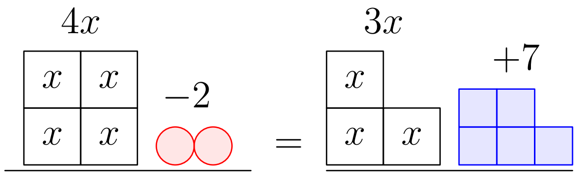
$$4x - 2 = 3x + 5$$

Vi har forsatt lyst til å bruke figurer for å hjelpe oss med å forstå hvordan vi kan løse ligningen, men hvordan kan vi tegne -2? Jo, vi tenker oss at rosa kuler er ballonger som løfter vekten vår oppover.

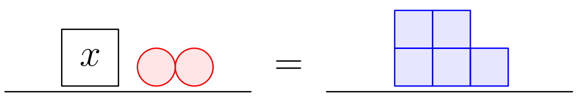
Tenk på de rosa kulene som heliumballonger.

Én rosa kule er akkurat nok til å løfte én blå rute, altså: *Én blå rute legger til 1 på vekten vår, mens én rosa kule trekker ifra 1*. Ligningen blir da seende slik ut:

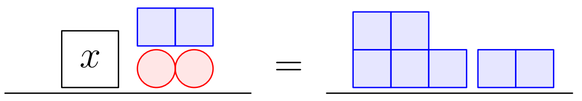
Å trekke ifra 1 er det samme som å skrive -1.



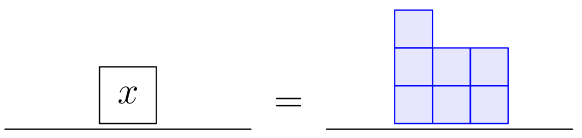
Vi kan først legge merke til at vi kan ta bort tre x-er på begge sider:



For å utligne ballongene, legger vi til to ruter på venstre side. Da må vi også legge til to ruter på høyre side:



Men fordi de to rutene og de to ballongene til sammen veier 0, kan vi liksågodt ta dem bort:



Det vi har tegnet i figurene våre kan vi oppsummere slik:

$$\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur}\\
4x - \color{red}{3x} - 2 &= 3x - \color{red}{3x} + 5 &&\\
x - 2 &= 5 && \text{2. figur}\\
x - 2 + \color{blue}{2} &= 5 + \color{blue}{2} && \text{3. figur}\\
x &= 7 && \text{4. figur}
\end{aligned}$$

Fordi $3x - \color{red}{3x} = 0$ og $-2 + \color{blue}{2} = 0$ kunne vi droppet å skrive disse leddene. Isteden sier vi altså at $3x$ og 2 har skiftet side, og derfor også fortegn. Dette skiftet gjør vi helst samtidig for at utregningen skal bli kortere:

$$\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5\\
4x - \color{red}{3x} &= 5 + \color{blue}{2}\\
x &= 7
\end{aligned}$$

4.1 Flytting av tall over likhetstegnet

I en ligning ønsker vi å samle alle x-er og alle kjente tall på hver sin side av likhetstegnet. Når side skiftes, må også fortegn skiftes.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$3x + 3 = 2x + 5$$

Svar:

$$3x - 2x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

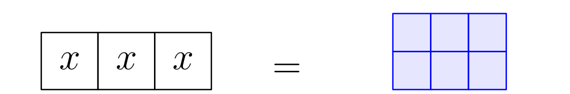
Svar:

$$-4x + 5x = 12 + 3$$
$$x = 15$$

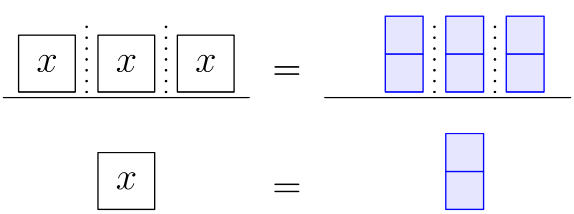
4.3 Deling på begge sider av likhetstegnet

Hittil har vi sett på ligninger hvor vi endte opp med én x på den ene siden. Andre ganger ender vi med flere x-er, som for eksempel i ligningen:

$$3x = 6$$



Deler vi venstresiden vår i tre like biter, får vi én x i hver bit. Om vi også deler høyresiden i tre like biter blir det tydeligere hva x må være:



Figurene vi har tegnet over skriver vi som:

$$3x = 6 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \text{2. figur}$$

$$x = 2 \qquad \text{3. figur}$$

Fra *Regel 2.6* husker du kanskje også at vi gjerne skriver:

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

4.2 Deling på begge sider av likhetstegnet

Hvis vi har et tall ganget med x på én side av en ligning, kan vi dele begge sider med tallet for å finne x.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$4x = 20$$

Svar:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$2x + 6 = 3x - 2$$

Svar:

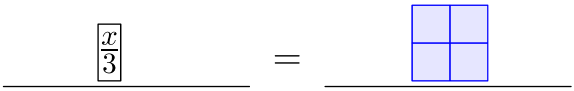
$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad -x = -1x$$
$$x = 8$$

4.4 Multiplikasjon på begge sider av likhetstegnet

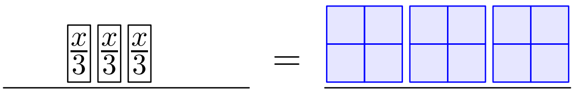
Det siste tilfellet vi skal se på, er når ligninger forteller oss noe om brøkdeler av den ukjente, som for eksempel denne:

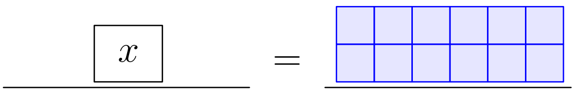
$$\frac{x}{3} = 4$$

Som vi tegner slik:



Igjen er ligningen vår løst hvis én x-rute står alene, noe vi får om vi legger til to stykker av $\frac{x}{3}$ på venstresiden. Og ligningen forteller oss at $\frac{x}{3}$ er det samme som 4; for hver $\frac{x}{3}$ vi legger til på venstresiden, må vi derfor legge til 4 ekstra på høyresiden for at sidene skal veie det samme:





Legg nå merke til at $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ og at $4 \cdot 3 = 12$, figurene vi har tegnet kan vi derfor skrive som:

$$\frac{x}{3} = 4 \qquad \text{1. figur}$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3 \qquad \text{2. figur}$$

$$x = 12 \qquad \text{3. figur}$$

4.3 Brøker med x som teller

Hvis vi har en brøkdel av x på den éne siden i en ligning, kan vi gange begge sider med nevneren for å finne x.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar:

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$

$$x = 10$$

4.5 Løsningsmetodene oppsummert

En ligning er løst når vi har x alene på én side av likhetstegnet, og vi har mange veier vi kan gå for å få til dette. Det vi har prøvd å skape et bilde av i de tre forrige seksjonene er at: *Vi kan legge til, trekke ifra, gange eller dele med et hvilket som helst tall, så lenge vi gjør det på begge sider av likhetstegnet.*

Vi har også sett at istedenfor å legge til eller trekke ifra det samme tallet på begge sider, flytter vi tall vi allerede har fra den éne siden til den andre. Og da må vi huske å skifte fortegnet til tallet.

Obs! Husk at x også er et tall.

4.4 Løsningsmetoder for ligninger

I en ligning kan vi alltid:

- Flytte tall fra den ene siden til den andre, så lenge vi også skifter fortegn på leddet.
- Dele både venstre og høyre side med det samme tallet.
- Gange både venstre og høyre side med det samme tallet.

Eksempel

Løs ligningen:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar:

Får å unngå brøker, ganger vi begge sider med fellesnevneren 12:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 &= \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12 \\
\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 &= \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \qquad (*) \\
4x + 2 &= 5x + 24 \\
4x - 5x &= 24 - 2 \\
-x &= 22 \\
\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} &= \frac{22}{-1} \\
x &= -22
\end{aligned}$$

Tips

Noen liker å lage regelen om at *vi kan gange eller dele alle ledd* *med det samme tallet*. I eksempelet over kunne vi da hoppet direkte til andre linje i utregningen (markert med $(*)$).

Eksempel

Løs ligningen:

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{x}$$

Svar:

I alle ligninger ønsker vi å få x alene på én side og over aller brøkstreker. For få x over alle brøkstreker, ganger vi med x i alle ledd:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - \frac{6}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} &= 2 \cdot x + \frac{5}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \\ 3x - 6 &= 2x + 5 \end{aligned}$$

Nå er veien kort til å få x på én side:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 5 + 6 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

4.6 Potensligninger

Noen ganger har vi ligninger der x er ganget flere ganger med seg selv, som for eksempel denne:

$x \cdot x$ skriver vi som x^2

$$x^2 = 9$$

Fordi x er grunntallet i en potens, kaller vi dette en *potensligning*. Spørsmålet vårt blir nå: *Hvilket tall ganget med seg selv blir 9*? Svaret er *både* 3 og (-3)! Lignigen har altså to løsninger. Derfor sier vi at både $x = 3$ og $x = -3$ er løsninger av ligningen.

Hva med ligningen:

$$x^3 = 8$$

Her er $x = 2$ eneste løsning, for det er bare hvis vi ganger sammen tre 2ere at vi får 8.

Potensligninger kan selvsagt se mye verre ut enn de to vi har sett på, men heldigvis kan vi bruke akkurat de samme reglene som i *Regel 4.4*:

4.5 Potensligninger

En ligning med uttrykket x^n kalles en potensligning. Ligningen løses ved å bruke metodene fra *Regel 4.4* for å isolere x^n på én side av likhetstegnet.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Fordi $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$ er både $x = 4$ og $x = -4$ løsninger av ligningen.

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$5x^3 - 35 = 4x^3 - 8$$

Svar:

$$\begin{aligned} 5x^3 - 35 &= 4x^3 - 8 \\ 5x^3 - 4x^3 &= -8 + 35 \\ x^3 &= 27 \end{aligned}$$

Fordi $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ er $x = 3$ løsningen av ligningen.

4.7 Å lage ligninger

Hver gang vi i hverdagen må utføre en regneoperasjon, løser vi egentlig en ligning!

Tenk for eksempel at du skal kjøpe 2 kg epler i butikken, og eplene koster 10 kr/kg. Regnestykket ditt blir da dette:

$$\textit{hva jeg må betale for eplene} = \textit{antall kg epler} \cdot \textit{kiloprisen for epler}$$

Hvis vi bestemmer oss for at x betyr det samme som *hva jeg må betale for eplene*, blir ligningen vår seende slik ut:

$$x = \textit{antall kg epler} \cdot \textit{kiloprisen for epler}$$

Og fordi vi vet både hva *antall kg epler* og *kiloprisen for epler* er, kan vi finne svaret:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 10 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Vi må altså betale 20 kr for eplene.

Her kunne vi selvsagt regnet ut prisen for eplene direkte, men for lengre utregninger er det lurt å lage en ligning. Og det blir oftere lettere for oss å lage ligningen hvis vi gjør som i det korte eksempelet med eplene.

4.6 Å lage en ligning

Når vi skal beskrive et spørsmål som en ligning kan det være lurt å gjøre følgende:

- Sette opp regnestykket i ord.
- Erstatte den ukjente størrelsen med x.

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en ligning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs ligningen.

Svar:

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\textit{penger allerede skaffet} + \textit{antall lodd} \cdot \textit{penger per lodd} = \textit{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er *antall lodd*. Vi erstatter derfor *antall lodd* med x, og setter inn verdien til de andre:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$
\begin{aligned}
25x &= 11\,000 - 2\,000 \\
25x &= 9\,000 \\
\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\
x &= 360
\end{aligned}
$$

$x \cdot 25$ er skrevet om til $25x$.

Eksempel 2

"Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?".

Svar:

"Broren min er dobbelt så gammel som meg." betyr at:

$$brors\ alder = 2 \cdot min\ alder$$

"Til sammen er vi 9 år gamle." betyr at:

$$brors\ alder + min\ alder = 9\ år$$

Erstatter vi *brors alder* med "$2 \cdot min\ alder$", får vi:

$$2 \cdot min\ alder + min\ alder = 9 \text{ år}$$

Det som er ukjent for oss er *min alder*:

$$
\begin{aligned}
2x + x &= 9 \\
3x &= 9 \\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

"Jeg" er altså 3 år gammel.

Oppgaver for kapittel 4

4.2.1

Løs ligningene:

a) $x - 4 = 9$ **b)** $3x - 7 = 2x - 12$

4.3.1

Løs ligningene:

a) $5x = 100$ **b)** $3x + 8 = 24 - x$

4.4.1

Løs ligningene:

a) $\dfrac{x}{7} = 3$ **b)** $\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{3}$ **c)** $\dfrac{3x}{5} = 9$

4.5.1

Løs ligningene (skriv svarene som hele tall eller brøk):

a) $3x - (2 - 2x) = 8x - 3(2^2 + 4)$ **b)** $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{4}{10} = \dfrac{2x}{10} + 2$

c) $\dfrac{1}{2}(x - 6) = \dfrac{1}{6}(5x + 12)$ **d)** $\dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{5}{x}$

4.6.1

Samarbeid minimum to og to:

- Hver person lager et regnestykke med nummeret til dagen de har bursdag på. Regnestykket må ha med minst to regnearter ($+$, $-$,$\cdot$ og :).

  Eksempel: Har du bursdag 9. mars kan et regnestykke være: *Dagen min ganget med 4, og etterpå fratrekt 6, blir 30.*

- Hver person lager et regnestykke med nummeret til måneden de har bursdag på. Regnestykk må ha med minst to regnearter.

- Gi regnestykkene til hverandre. Sett opp regnestykkene som ligninger og finn bursdagene.

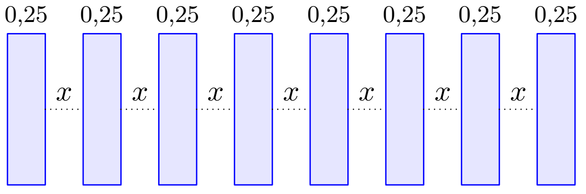
4.6.2

Ola og Kari tilbyr et matematikk-kurs for dårlige lærere. For hvert kurs tjener de 12000 kr. Ola er assistenten til Kari, og skal Kari ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for hvert kurs?

4.6.3

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under:



Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene. Hvor lang er denne avstanden?

4.6.4

Etter å ha blitt satt ned med 35%, koster en vare nå 845 kr. Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

Kapittel 5

Størrelser og forhold

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- rekne med forhold, prosent, prosentpoeng og vekstfaktor
- rekne med ulike måleiningar, bruke ulike målereiskapar, vurdere kva for målereiskapar som er formålstenlege, og vurdere kor usikre målingane er
- tolke, lage og bruke skisser og arbeidsteikningar på problemstillingar frå kultur- og yrkesliv og presentere og grunngje løysingar

5.1 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelser*. Videre har vi *størrelser med dimensjoner* og *dimensjonsløse størrelser*.

Et eksempel på en størrelse med dimensjon er "2 meter". Dimensjonen er da 'lengde', som vi gjerne måler i meter. Vi sier at meter er en *enhet* for dimensjonen lengde.

Et eksempel på en størrelse uten dimensjon er "to hester". Mens det bare finnes én lengde som er "2 meter", kan være "to hester" se ekstremt forskjellig ut, avhengig av hvile to hester vi velger ut.

Regning med dimensjoner

Når vi jobber med størrelser med dimensjoner må vi passe på at alle enhetene er like, hvis ikke gir ikke regnestykkene våre mening. I denne boka skal vi se på disse enhetene:

Enhet	**Forkortelse**
meter	m
gram	g
liter	L

Noen ganger har vi veldig store eller veldig små størrelser, for eksempel er det ca 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanlig å bruke en *prefiks*, da kan vi si at det er ca 40 075 km rundt ekvator. Her står 'km' for 'kilometer' og 'kilo' betyr '1 000'. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer. Her er de viktigste prefiksene:

Prefiks	**Forkortelse**	**Betydning**
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med enhetene kan vi for eksempel se at:

$$1000\,\text{g} = 1\,\text{kg}$$

$$0{,}1\,\text{m} = 1\,\text{dm}$$

$$0{,}01\,\text{L} = 1\,\text{cL}$$

Enda ryddigere kan vi få det hvis vi lager en vannrett tabell, med meter, gram eller liter lagt til i midten:

kilo	hekto	deka	m/g/L	desi	centi	milli

Vi har sett hvordan prefiksene egentlig bare betyr et tall, og m, g eller L kan vi si har et 1-tall foran seg ($4 \cdot 1\,\text{m}$ er jo det samme som $4\,\text{m}$). Vi kan da legge merke til at for å komme fra én rute til en annen i tabellen, er det bare snakk om å flytte komma:

5.1 Omgjøring av prefiks

Når vi skal endre prefikser kan vi bruke denne tabellen:

kilo	hekto	deka	m/g/L	desi	centi	milli

Komma må flyttes like mange ganger som antall bokser vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

Obs! For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil er $10\,000\,\text{m}$). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

Eksempel 1

Gjør om $23{,}4\,\text{mL}$ til L.

Svar:

Vi skriver tabellen vår med L i midten og legger merke til at vi må *tre bokser til venstre* for å komme oss fra mL til L:

kilo	hekto	deka	L	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til venstre for å gjøre om mL til L:

$$23{,}4\,\text{mL} = 0{,}0234\,\text{L}$$

Eksempel 2

Gjør om $30\,\text{hg}$ til cg.

Svar:

Vi skriver tabellen vår med g i midten og legger merke til at vi må *fire bokser til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

kilo	hekto	deka	g	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plasser til høyre for å gjøre om hg til cg:

$$30\,\text{mg} = 300\,000\,\text{cg}$$

Eksempel 3

Gjør om 12 500 dm til mil.

Svar:

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må *fem bokser til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

mil	kilo	hekto	deka	m	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plasser til høyre for å gjøre om mil til cg:

$$30\,\text{dm} = 3\,000\,000\,\text{mil}$$

Merk: 'mil' er en egen enhet, ikke en prefiks. Vi skriver derfor ikke 'milm', men bare 'mil'.

5.2 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den éne størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler i en bolle, sier vi at:

$$\text{forholdet mellom antall røde og blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som 1 : 5. Verdien til dette regnestykket er:

$$1 : 5 = 0{,}2$$

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

0,2 kalles *forholdstallet*.
Hvis vi isteden har 4 røde kuler og 20 blå kuler, er fortsatt forholdstallet 0,2. dette betyr at forholdet mellom antall røde og blå kuler ikke har forandret seg.

5.2 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Forholdstallet får vi ved å regne ut hva $a : b$ er. To forhold med samme forholdstall er like.

Eksempel 1

I en klasse er det 10 handballspillere og 5 fotballspillere.

a) Hva er forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere?

b) Hva er forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere?

Svar:

a)

$$\frac{10}{5} = 2$$

Forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere er 2.

b)

$$\frac{5}{10} = 0{,}5$$

Forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere er 0,5.

Eksempel 2

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er $\frac{1}{8}$. Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

Svar:

Vi vet at:

$$\frac{\text{antall vinnerlodd}}{\text{antall taperlodd}} = \frac{1}{8}$$

Siden *antall vinnerlodd* er ukjent, kaller vi størrelsen for x, og får da at:

$$\frac{x}{160} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{x}{\cancel{160}} \cdot \cancel{160} = \frac{1}{8} \cdot 160$$

$$x = 20$$

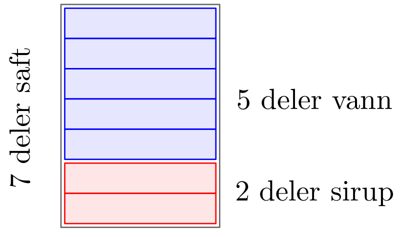
Vi må altså lage 20 vinnerlodd.

Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold.
På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 +5", som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet $2:5$. Så heller vi $2\,\mathrm{dL}$ sirup i en kanne, må vi fylle på med $5\,\mathrm{dL}$ vann for å lage saften i riktig forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft :)

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er rikitig. For eksempel kan vi blande én bøtte med solbærsirup med fem bøtter vann, og fortsatt være sikker på at forholdet er riktig – selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer! Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. Symbolet "2+5" på sirupflasken leser vi da som "2 deler sirup på 5 deler vann". Dette betyr at saften vår i alt inneholder $2 + 5 = 7$ deler:



Dette betyr én del utgjør $\frac{1}{7}$ av blandingen, sirupen utgjør $\frac{2}{7}$ av blandingen og vann utgjør $\frac{5}{7}$ av blandingen.

5.3 Deler i et forhold

En blanding med forholdet $a:b$ har til sammen $a+b$ deler.

- én del utgjør $\frac{1}{a+b}$ av blandingen.
- a utgjør $\frac{a}{a+b}$ av blandingen.
- b utgjør $\frac{b}{a+b}$ av blandingen.

Eksempel 1

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet $3:7$, og det er $5\,\mathrm{L}$ av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til $3:11$.

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

Svar:

I spannet har vi $3 + 7 = 10$ deler. Siden det er $5\,\text{L}$ i alt, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{én del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5\,\text{L} \\ &= \frac{1 \cdot 5}{10}\,\text{L} \\ &= 0{,}5\,\text{L}\end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi:

$$4 \cdot 0{,}5\,\text{L} = 2\,\text{L}$$

Vi må helle oppi $2\,\text{L}$ rødmaling for å få forholdet $3 : 11$.

Eksempel 2

En kanne som rommer $21\,\text{dL}$ er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet $2 : 5$.

a) Hvor mye vann er det kannen?

b) Hvor mye sirup er det i kannen?

Svar:

a) Til sammen består saften av $2 + 5 = 7$ deler. Fordi 5 av disse er vann, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21\,\text{dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7}\,\text{dL} \\ &= 15\,\text{dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som i oppgave a), men det er raskere å merke oss at hvis vi har $15\,\text{dL}$ vann av i alt $21\,\text{dL}$, må vi ha $(21 - 15)\,\text{dL} = 6\,\text{dL}$ sirup.

Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann lik $3 : 5$.

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli 1 : 4?

Svar:

Løsningsmetode 1

Brøken vi ønsker, $\frac{1}{4}$, kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså $\frac{3}{5}$):

$$\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

3 : 12 er altså det samme forholdet som 1 : 4. Og 3 : 12 kan vi få hvis vi legger til 7 deler vann i blandingen med forholdet 3 : 5:

$$\frac{3}{5+7} = \frac{3}{12}$$

Løsningsmetode 2

Vi krever at x ganger $\frac{3}{5}$ skal gi oss det samme forholdet som $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \cdot x &= \frac{1}{4} \\ x &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Forholdet vi søker er derfor:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3}{12}$$

Som vi får hvis vi legger til 7 deler vann i blandingen med forholdet 3 : 5.

Oppgaver for kapittel 5

5.2.1

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og griser når vi har:

a) 5 hester og 2 griser. **b)** 12 griser og 4 hester.

5.2.2

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:

Vi anbefaler følgende blandingsforhold:
Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:
1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin

Si at vi skal fylle på 2,5 L bensin på motorsage vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

Merk: I de to neste oppgavene går vi ut ifra at både 1 dL vann og 1 dL saftsirup veier 100 g.

5.2.3

Coca-Cola inneholder 10 g karbohydrater. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Inneholder saften mer eller mindre karbohydrater per 100 g enn Coca-Cola?

5.2.4

På *Lærums solbærsirup* står det at 100 g ferdig utblandet saft inneholder 12,5 g sukker. Saften inneholder sirup og vann blandet i forholdet 1 : 5.

Hvor mye sukker inneholder 100 g solbærsirup? (Rent vann inneholder ikke sukker i det hele tatt).

Kapittel 6

Formler

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- tolke og bruke formler som gjelder dagligliv og yrkesliv

6.1 Generelt

Tenk at du har en jobb der du tjener 200 kr i timen, og at du jobber 5 timer hver arbeidsdag. Regnestykket for hvor mange kroner du tjener på en arbeidsdag (dagslønnen) er dette:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 200 \cdot 5\\ &= 1000\end{aligned}$$

Hvis du istedenfor tjener 500 kr i timen og jobber 3 timer hver dag, blir regnestykket seende slik ut:

$$\begin{aligned}\text{dagslønn} &= 500 \cdot 3\\ &= 1500\end{aligned}$$

Saken er at selv om timelønnen og timetallet forandrer seg, er selve *regnemetode* for dagslønnen akkurat den samme: *Vi ganger timelønnen med timetallet*. Når en regnemetode forblir den samme, selv om tallene forandrer seg, sier vi at vi har en *formel*. En formel forteller oss hvordan vi skal regne ut det vi ønsker å vite. Når vi regnet ut dagslønnen vår ganget vi timelønnen med timeantallet, formelen for dagslønnen kan vi da skrive slik:

I de to regnestykkene

$$2 \cdot 3 = 6$$

og

$$4 \cdot 5 = 20$$

er *regnemetoden* den samme (vi ganger to tall), men ikke *resultatet*.

$$\text{dagslønn} = \text{timelønnn} \cdot \text{timetall}$$

For å gjøre formlene våre enda kortere bruker vi også å forkorte størrelsene, gjerne med bokstaver som har sammenheng med navnet på størrelsen. For eksempel kan vi kalle dagslønnen for D, timelønnen for L og timetallet for T, da blir formelen vår seende ut som dette

$$D = T \cdot L$$

Fordi D står alene på den ene siden av "="-tegnet, sier vi at dette er en formel for D.

6.1 Formler

En formel viser sammenhengen mellom størrelser.

Eksempel 1

Hvis du kjører med den samme farten hele tiden, finner du lengden du har kjørt ved å gange farten med tiden. Kall lengden du har kjørt for l, farten for f og tiden for t.

Lag en formel for l.

Svar:

Oppgaveteksten forteller oss at vi finner l ved å gange f med t:

$$l = f \cdot t$$

Dette er altså formelen for l.

Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall "antall personer som blir med på å spleise" for P og "utgift per person i kroner" for U og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar:

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli:

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får:

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

6.2 Omgjøring av formler

6.1 Vi har sett (*Eksempel 1*, s. 68) at lengden l vi har kjørt, farten f vi har holdt og tiden t vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen:

$$l = f \cdot t$$

Ut ifra denne formelen kan vi altså finne lengden hvis vi vet hvor fort og hvor lenge vi har kjørt. Men hva om vi isteden vet hvor langt og hvor lenge vi har kjørt, men ikke hvor fort?

Det vi må gjøre, er å skrive om formelen så det blir en formel for f istedenfor l. Det vi nå må ha med oss, er at l, f og t er alle tall, derfor kan vi bruke punktene fra *Regel 4.4* for å gjøre om på ligningen vår. Og fordi vi ønsker en formel for f, ønsker vi at f skal stå alene på den ene siden av likhetstegnet:

$$l = f \cdot t$$

$$\frac{l}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$

$$\frac{l}{t} = f$$

6.2 Omforming av formler

Når vi skal omforme en størrelse, bruker vi ligningsreglene fra *Regel 4.4* for å få størrelsen vi ønsker til å stå på én side av likhetstegnet.

Eksempel 1

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen:

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

Svar:

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetsregnet:

$$
\begin{aligned}
I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\
I \cdot R &= U \\
\frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\
R &= \frac{U}{I}
\end{aligned}
$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a) og får at:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I} \\
&= \frac{12}{2} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 2

Si vi har målt en temperatur T_C i grader Celsius ($^\circ C$). Temperaturen T_F målt i Fahrenheit ($^\circ F$) er da gitt ved formelen:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til $59^\circ F$, hva er da temperaturen målt i $^\circ C$?

Svar:

a)

$$
\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}
$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at:

$$
\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Oppgaver for kapittel 6

6.1.1

For å regne ut et veldig kjent tall kan vi starte med å gjøre dette:

1. Start med tallet 2.
2. Gang så med to 2ere og del med 1 ganger 3.
3. Gang så med to 4ere og del med 3 ganger 5.
4. Gang så med to 6ere og del med 5 ganger 7.

Verdien til tallet vi søker får vi hvis vi fra punkt 4 fortsetter uendelig mange punkt videre!

a) Skriv opp punkt 5 og 6.

b) Gjør som punkt 1 til 6 sier. Hvilket tall tror du vi snakker om?

6.1.2

Makspuls er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden trening.no kan man lese dette:

”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for m og ”alder” for a og lag en formel for m, som beskrevet i sitatet.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik:

”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for m, som beskrevet i sitatet.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

- Hopp opp og ned opp og ned i ca. 10 sekunder (da vil hjertet ditt omtrent slå så raskt det kan en liten stund etter).
- Tell hjerteslag umiddelbart etter hoppingen.
- Tell i 15 sekunder.

e) Kall "antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder" for A og lag en formel for m.

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f), er de like eller forskjellige?

6.2.1

På nettsiden viivilla.no får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

"2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter)."

a) Kall "trinnhøyden" for h og "trinndybden" for d og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

b) Sjekk trappene på skolen, er formelen oppfylt eller ikke?

c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?

d) Skriv om formelen til en formel for h.

6.2.2

Effekten P (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor R er motstanden og I er strømmen i kretsen.

a) Hvis $R = 5\,\Omega$ og $I = 10\,A$, hva er da effekten?

b) Skriv om formelen til en formel for I^2.

6.2.3

På klikk.no finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

For jenter:

1. Legg sammen mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm
3. Del tallet på to

For gutter:

1. Legg sammen mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til 13 cm
3. Del tallet på to

Kall barnets (fremtidige) høyde for B, mors høyde for M og fars høde for F.

a) Lag en formel for B når barnet er ei jente.

b) Lag en formel for B når barnet er en gutt.

c) Gjør om formelen fra a) til en formel for F.

d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Når jenta er utvokst kommer hun til å bli 171 cm. Hvor høy er faren til jenta?

Kapittel 7

Geometri

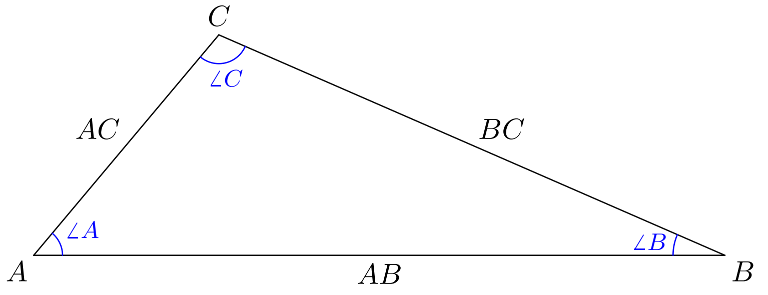
Innhold

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

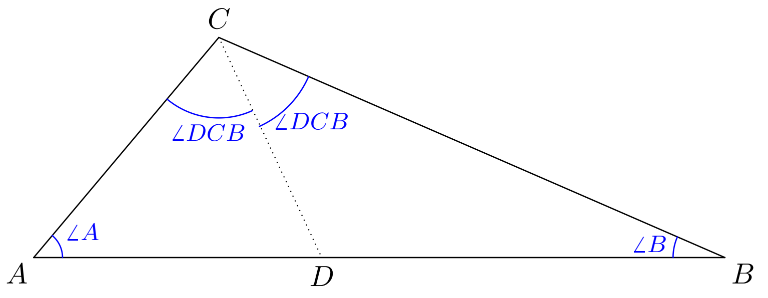
- bruke og begrunne bruken av formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning til beregninger og i praktisk arbeid
- løse problemer som gjelder lengde, vinkel, areal og volum
- regne med ulike måleenheter, bruke ulike måleredskaper, vurdere hvilke måleredskaper som er hensiktsmessige, og vurdere måleusikkerheten
- tolke, lage og bruke skisser og arbeidstegninger på problemstillinger fra kultur- og yrkesliv og presentere og begrunne løsninger

7.1 Repetisjon av begreper om trekanter

Vi navngir punkt på trekanter med store bokstaver fra alfabetet (A, B, C, osv). En trekant som går mellom punktene A, B og C skriver vi som $\triangle ABC$. Vi kaller siden mellom A og B for AB, siden mellom B og C for BC og siden mellom A og C for AC. Videre kaller vi gjerne vinkelen tilhørende A for $\angle A$, vinkelen tilhørende B for $\angle B$ og vinkelen tilhørende C for $\angle C$.



Men noen ganger har vi flere enn tre punkt i trekanten vi ønsker å studere, slik som i denne figuren:



For å være helt tydelig på hvilken vinkel vi mener, bruker vi da tre bokstaver:

- $\angle DCB$ betyr vinkelen mellom siden DC og BC.
- $\angle ACD$ betyr vinkelen mellom siden DC og AC.

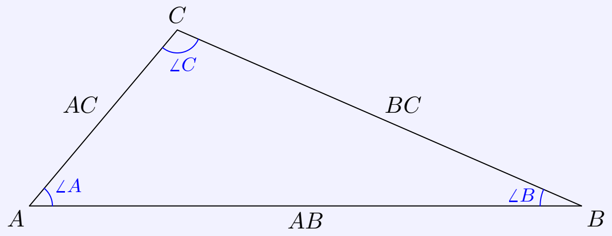
Vinkelverdier

Vinkler måler vi i *grader*. Hvis vi har at $\angle A = 30°$ sier vi at *vinkelverdien* til $\angle A$ er $30°$. Og én ting må vi virkelig huske angående vinklene i en trekant, nemlig dette:

7.1 Summen av vinklene i en trekant

I alle trekanter er summen av vinklelverdiene 180°. For en trekant med vinklene $\angle A$, $\angle B$ og $\angle C$ kan vi altså skrive:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



7.2 Formlike trekanter

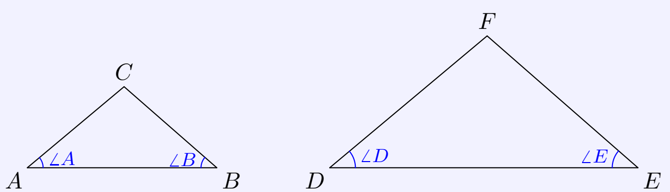
7.2 Formlike trekanter I

Hvis tre vinkelrverdier finnes i både $\triangle ABC$ og $\triangle CDE$, så er trekantene *formlike*.

En fantastisk sak med *Regel 7.1* er at hvis vi vet verdien til to vinkler i en trekant, så vet vi verdien til den siste vinkelen også! Dette betyr at hvis vi kan finne to vinkelverdier i to forskjellige trekanter, må den "siste" vinkelen også finnes i begge trekantene!

7.3 Formlike trekanter II

Trekanter er formlike hvis de har to vinkler som er like.



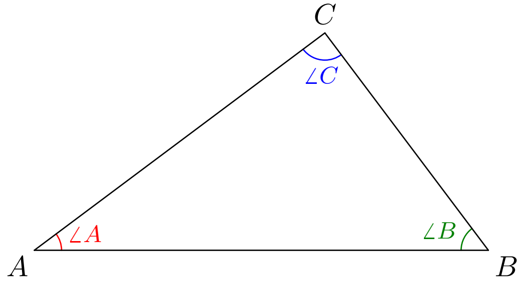
$\triangle ABC$ er formlik med $\triangle DEF$ hvis:

- $\angle A = \angle D$ eller $\angle A = \angle E$
- $\angle B$ er lik den av $\angle D$ og $\angle E$ som $\angle A$ eventuelt *ikke* er lik.

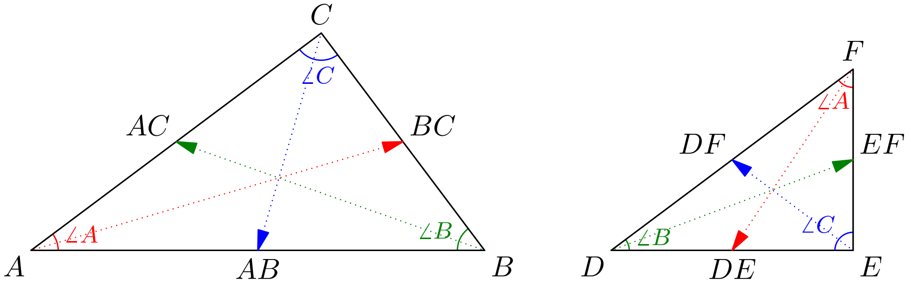
7.3 Samsvar og forhold i formlike trekanter

Samsvarende sider

Det vil ofte være slik at formlike trekanter ikke er rotert likens. For eksempel er trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ i figuren under formlike, men rotert forskjellig:



Noen ganger er det viktig å holde styr på hvilken side som "hører til" hvilken vinkel. Dette ser vi lettest ved å tegne en pil fra vinkelhjørnet og over til motsatt side:



For de to trekantene observerer vi nå dette:

Trekant $\triangle ABC$	Trekant $\triangle DEF$
• BC hører til $\angle A$.	• DE hører til $\angle A$.
• AC hører til $\angle B$.	• EF hører til $\angle B$.
• AB hører til $\angle C$.	• DF hører til $\angle C$.

Sider som hører til de samme vinklene kaller vi *samsvarende* sider:

- BC og DE er samsvarende sider fordi begge hører til $\angle A$.
- AC og EF er samsvarende sider fordi begge hører til $\angle B$.
- AB og DE er samsvarende sider fordi begge hører til $\angle C$.

7.4 Samsvarende sider

Sidene som hører til de samme vinklene i formlike trekanter, kaller vi samsvarende sider.

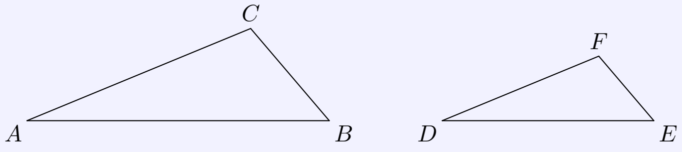
Forhold i formlike trekanter

En viktig grunn til at vi er så opptatt av samsvarende sider, er at vi vet noe om forholdet mellom dem:

7.5 Forhold i formlike trekanter

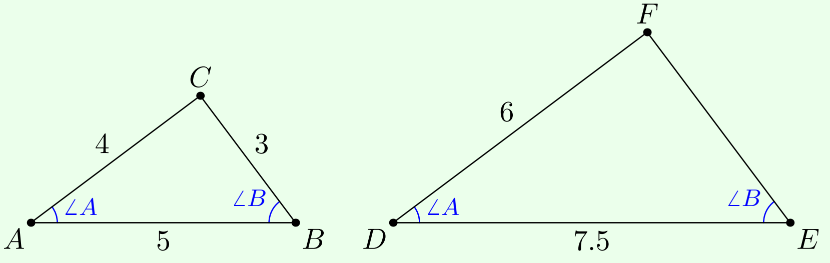
I to trekanter som er formlike, er forholdet mellom samsvarende sider det samme:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengden til EF.



Svar:

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC

med DF. Det betyr at:

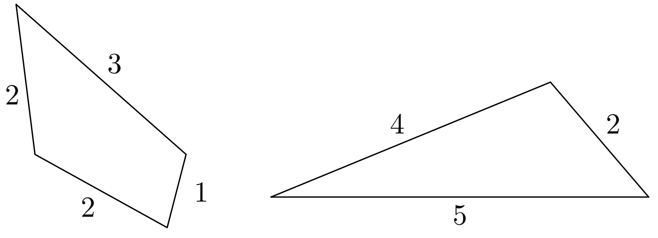
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$
$$\frac{7{,}5}{5} = \frac{EF}{3}$$
$$\frac{7{,}5}{5} \cdot 3 = \frac{EF}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$$
$$4{,}5 = EF$$

7.4 Omkrets

Mangekanter

Hvor langt det er rundt en figur, kaller vi *omkretsen* til figuren. For figurer som består bare av rette kanter, legger vi sammen lengden av sidene for å finne omkretsen.

Samlebetegnelsen for trekanter, firkanter, femkanter osv. er *mangekanter*.



(a) (b)

Dette betyr at:

- I figur (a) er omkretsen $2 + 1 + 3 + 2 = 9$
- I figur (b) er omkretsen $5 + 2 + 4 = 11$

7.6 Omkrets av mangekanter

Omkretsen av en mangekant finner vi ved å legge sammen lengden av alle sidene.

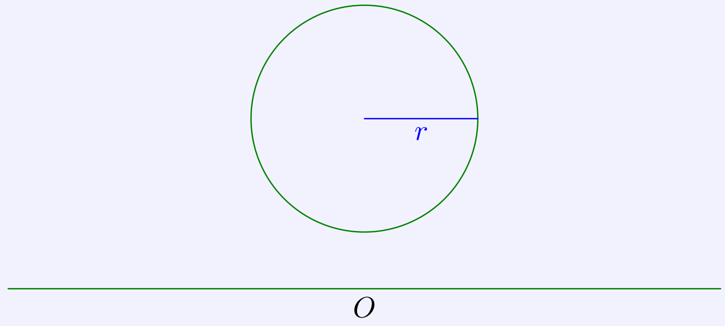
Sirkler

For sirkler er det å finne omkretsen litt verre, for her har vi ingen sider vi kan legge sammen! Da må vi isteden ty til en formel:

7.7 Omkretsen av en sirkel

Omkretsen O av en sirkel med radius r er:

$$O = 2\pi r$$



Eksempel 1

Finn omkretsen til en sirkel med radius 3.

Svar:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi r \\ &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Omkretsen er 6π.

Eksempel 2

En sirkel har omkretsen 22π. Hvor lang er radiusen til sirkelen?

Svar:

Vi starter med å gjøre om formelen for omkretsen til en formel for radiusen:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi r \\ \frac{O}{2\pi} &= \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} \\ \frac{O}{2\pi} &= r \end{aligned}$$

Så setter vi omkretsen inn i den nye formelen vår:

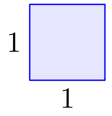
$$\begin{aligned} r &= \frac{22\pi}{2\pi} \\ &= 11 \end{aligned}$$

Radiusen til sirkelen er altså 11.

7.5 Areal

Overalt rundt oss kan vi se det vi kaller *overflater*. Gulvet vi går på, pulten vi sitter ved eller arket vi skriver på har alle overflater det er lett å legge merke til. Når vi ønsker å si noe om hvor stor en overflate er, bruker vi begrepet *areal*. Idéen bak begrepet areal er denne:

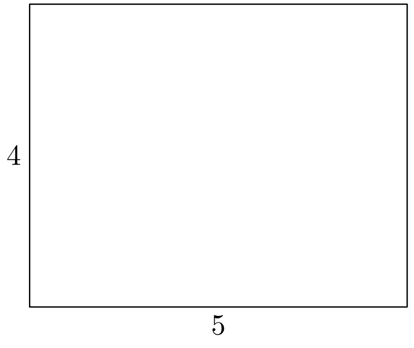
Vi tenker oss et kvadrat med bredde 1 og høyde 1, som vi kan kalle for "enerkvadradet".



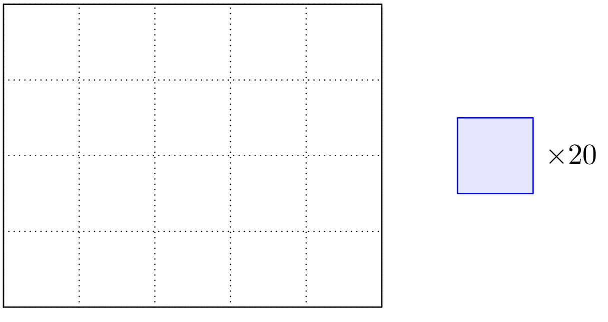
Så ser vi på overflaten vi ønsker å finne arealet av og spør oss:

Hvor mange enerkvadrat er det plass til i denne overflaten?

Si nå at vi har et rektangel med 5 som bredde og 4 som høyde:



Hvis vi inni rektangelet streker opp linjer som har 1 i avstand bortover og 1 i avstand oppover, observerer vi at vi får plass til 20 enerkvadrat i rektangelet vårt:



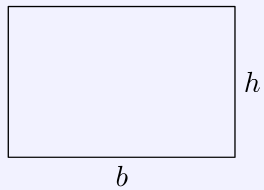
Dette betyr at arealet av rektangelet er 20, noe vi kunne regnet ut slik:

$$5 \cdot 4 = 20$$

7.8 Arealet av rektangler

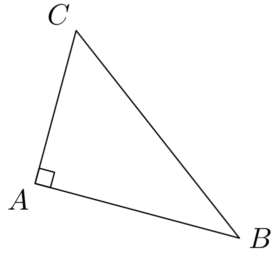
Arealet A av et rektangel med bredde b og høyde h er:

$$A = b \cdot h$$

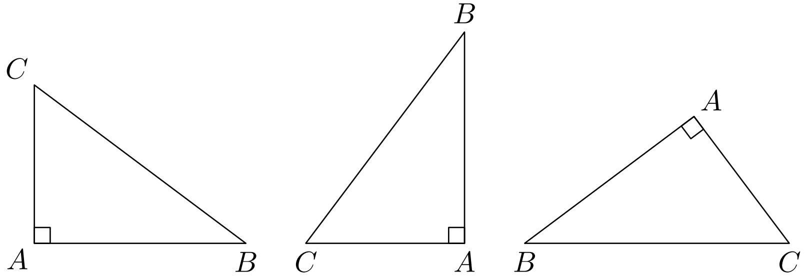


Høyden i en trekant

Når vi vet hvordan å finne arealet av en firkant, er ikke veien lang til å finne arealet av en trekant. Men først må vi forstå hva vi mener med *høyden, grunnlinjen* og *toppunktet* i en trekant.



Vi kan alltids rotere en trekant slik at den éne siden ligger rett horisontalt, trekanten $\triangle ABC$ over kan vi rotere slik:



(a) (b) (c)

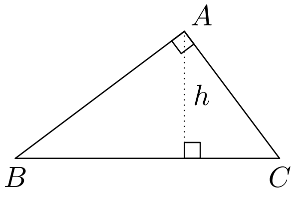
Da er dette gjeldende:

- I figur (a) er AB grunnlinjen og C toppunktet.

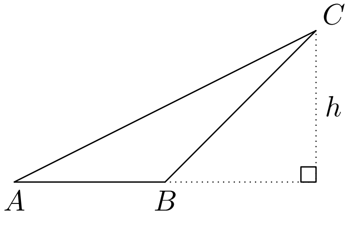
- I figur (b) er CA grunnlinjen og B toppunktet.
- I figur (c) er BC grunnlinjen og A toppunktet.

Med høyden i en trekant mener vi den vertikale avstanden mellom toppunktet og grunnlinjen:

- I figur (a) er AC høyden.
- I figur (b) er CA høyden.
- I figur (c) kan vi tegne inn høyden h som i figuren under:

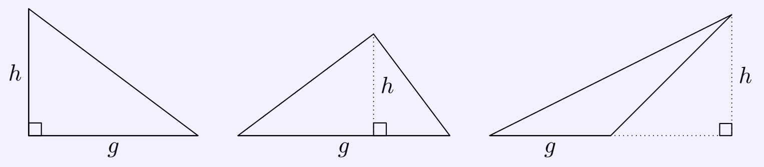


- I trekanter hvor toppunktet ligger bortenfor grunnlinjen kan vi tegne inn høyden h slik:



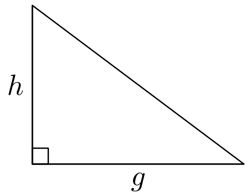
7.9 Høyden i en trekant

Høyden h i en trekant er den vertikale avstanden mellom grunnlinja g og toppunktet.

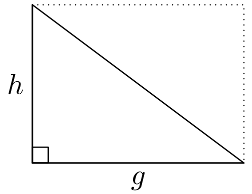


Arealet av en trekant

La oss starte med en rettvinklet trekant som er plassert slik at 90°-graderen "ligger" på grunnlinja:



Av slike trekanter kan vi alltid tegne et rektangel med bredde g og høyde h:

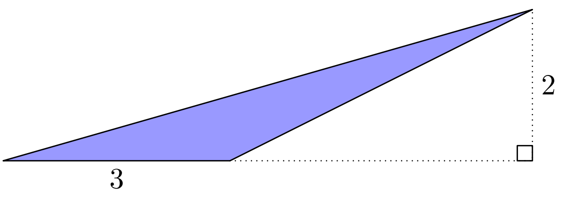


Av *Regel 7.8* vet vi at arealet av rektangelet er $g \cdot h$. Trekanten som består at de stiplede linjene og diagonalen er identisk med vår opprinnelige trekant. Dette betyr at trekanten med g som grunnlinje og h som høyde har et areal som er halvparten så stort som arealet av rektangelet. Arealet A til trekanten blir derfor:

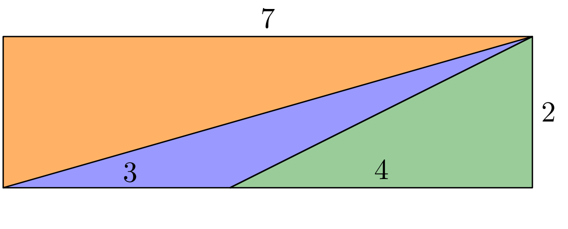
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Når vi vet arealet av rette trekanter, kan vi også finne formelen for arealet av alle andre trekanter. Vi skal her komme fram til formlene ved å bruke tall istedenfor symboler.

Trekanten under har grunnlinje med lengde 3 og høyde 2.



Også "rundt" denne trekanten tegner vi et rektangel:



Vi gir nå arealene følgende navn:

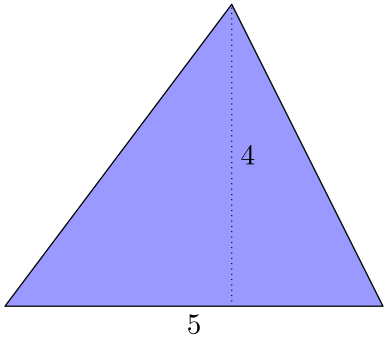
$$\begin{aligned}
\text{Areal av rektangelet} &= R \\
\text{Areal av oransje trekant} &= O \\
\text{Areal av grønn trekant} &= G \\
\text{Areal av blå trekant} &= B
\end{aligned}$$

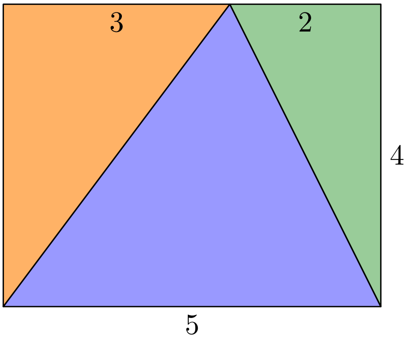
Og da har vi at:

$$\begin{aligned}
R &= 7 \cdot 2 = 14 \\
O &= \frac{7 \cdot 2}{2} = 7 \\
G &= \frac{4 \cdot 2}{2} = 4
\end{aligned}$$

Det blå arealet er det samme som arealet av rektangelet minus arealet av det oransje og grønne området:

$$\begin{aligned}
B &= R - O - G \\
&= 14 - 7 - 4 \\
&= 3
\end{aligned}$$

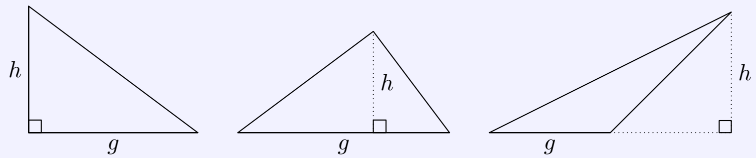




7.10 Arealet av en trekant

Arealet A av en trekant med grunnlinje g og høyde h er:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$



Eksempel 1

a) Skriv om arealformelen for en trekant til en formel for høyden h.

b) En trekant med grunnlinje 5 har arealet 40. Hvor lang er grunnlinjen til trekanten?

Svar:

a)

$$2 \cdot A = \cancel{2}\frac{g \cdot h}{\cancel{2}}$$

$$\frac{2A}{g \cdot h} = \frac{\cancel{g}}{\cancel{g}}$$

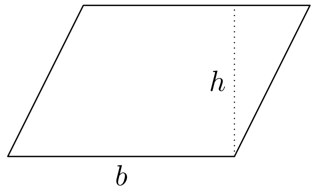
$$\frac{2A}{g} = h$$

b) Vi setter høyden og arealet inn i formelen vi fant i a):

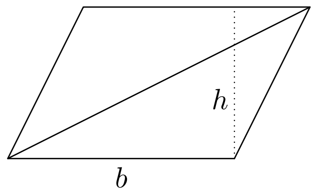
$$h = \frac{2 \cdot 40}{5}$$
$$= 2 \cdot 8$$
$$= 16$$

Arealet av et parallellogramet

Et parallellogram er en firkant der de motstående sidene er parallelle og like lange.



Vi kan alltid lage oss to like trekanter ved å tegne inn én av diagonalene.



Trekantene på bildet over har grunnlinje b og høyde h. Da vet vi at:

$$\text{Arealet til én av trekantene} = \frac{b \cdot h}{2}$$

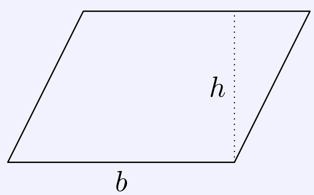
Og da må begge trekantene til sammen ha arealet:

$$\frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = b \cdot h$$

7.11 Arealet av et parallellogram

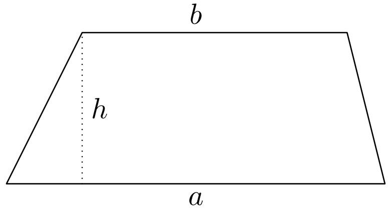
Arealet A av et parallellogram med bredde b og høyde h er:

$$A = b \cdot h$$

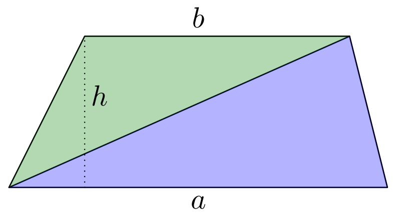


Trapeset

I et trapes er minst to sider parallelle, men alle sidene kan gjerne ha forskjellig lengde:



Men også for et trapes får vi to trekanter hvis vi tegner én av diagonalene:



På figuren over har vi at:

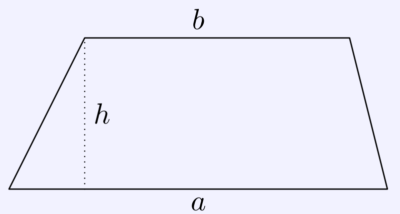
$$\text{Arealet av blå trekant} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\text{Arealet av grønn trekant} = \frac{b \cdot h}{2}$$

7.12 Arealet av et trapes

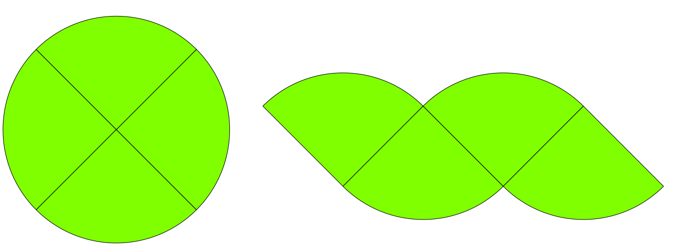
Arealet A av et trapes med øvre bredde a og nedre bredde b og høyde h er:

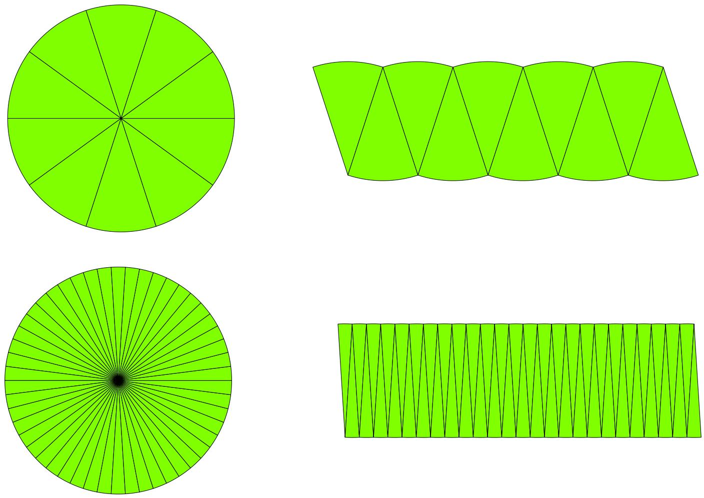
$$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$



7.6 Arealet av en sirkel

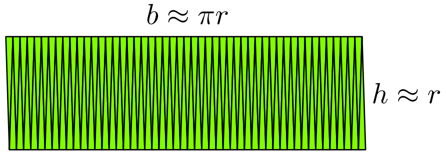
I figuren nedenfor har vi delt opp en sirkel i 4, 10 og 50 (like store) biter, og lagt disse bitene etter hverandre.





I hvert tilfelle må de små buelengdene til sammen utgjøre hele buelengden til sirkelen. Hvis sirkelen har radius r betyr dette at buelengdene til sammen må bli $2\pi r$. Og når vi har like mange biter med buen vendt opp som biter med buen vendt ned, må lengden være πr både oppe og nede.

Men jo flere biter vi deler sirkelen inn i, jo mer begynner de sammenlagte bitene å ligne et rektangel (i figuren under har vi 100 biter). Da blir det mer og mer riktig å si at høyden *nesten* er lik r. Og fordi lengden til de øverste buene er πr, må bredden til rektangelet være *nesten* det samme.



Arealet A til dette rektangelet blir da (ca.):

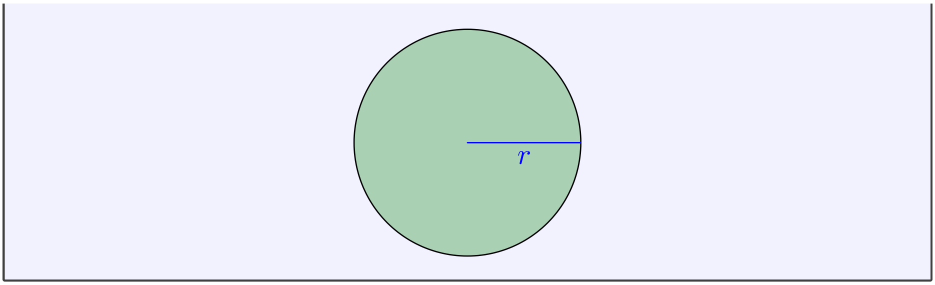
$$A \approx b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Jo flere små biter vi deler sirkelen vår inn i, jo bedre blir tilnærmingen, og sånn kan vi si at dette er et uttrykk for arealet av sirkelen.

7.13 Arealet av en sirkel

Arealet A av en sirkel med radius r er:

$$A = \pi r^2$$



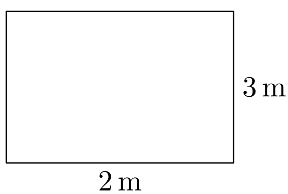
7.7 Areal med enheter

Når vi snakker om arealer i virkeligheten må vi alltid ta med enheten til arealet (det gir ingen mening å si at arealet til en fotballbane er ca. 80 000). Hvis du ser tilbake på arealformlene, vil du se at alle innebærer at vi ganger sammen to lengder. Og akkurat som for vanlige tall kan vi også skrive to like enheter ganget sammen som en potens:

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{m}^2$$

$$\mathrm{dm} \cdot \mathrm{dm} = \mathrm{dm}^2$$

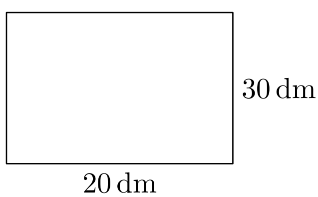
Husk at vi alltid kan velge selv hvilken enhet vi ønsker å måle noe i. La oss for eksempel tenke oss at vi har et rom som er 2 m bredt og 3 m langt (vi bruker her ordet langt istedenfor høyde, fordi vi tenker oss at vi ser gulvet ovenfra):



Arealet av dette rommet er da:

$$3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}^2$$

Men vi kunne selvsagt oppgitt lengden til rommet i desimeter istedenfor:



Og da blir arealet:

$$30\,\text{dm} \cdot 20\,\text{dm} = 600\,\text{dm}^2$$

Vi vet at $10\,\text{dm} = 1\,\text{m}$. Når vi går fra en enhet (fra m til dm) som er 10 ganger *mindre*, blir altså tallverdien til arealet 100 ganger *større* (fra 6 til 600)! Vi kan altså følge samme metode som i *Regel 5.1*, bare at vi nå må flytte komma *to* plasser hver gang vi skifter rute (bruk gjerne "^{2}" som en påminner om dette).

7.14 Enheter for areal

Når vi skal endre enheter for areal kan vi bruke denne tabellen:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Komma må flyttes to ganger for hver rute vi flytter oss.

Eksempel

a) Gjør om $0{,}2\,\text{m}^2$ til et areal målt i dm^2.

b) Gjør om $45\,000\,\text{dm}^2$ til et areal målt i km^2.

Svar:

a) For å komme oss fra m^2 til dm^2 må vi flytte oss én rute til høyre i tabellen. Det betyr at vi må flytte komma $1 \cdot 2 = 2$ plasser til høyre:

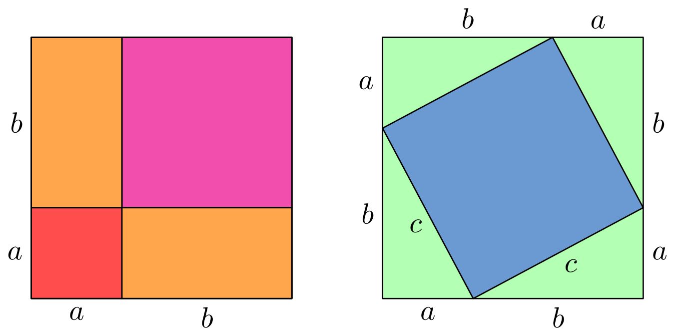
$$0{,}2\,\text{m}^2 = 0{,}02\,\text{cm}^2$$

b) For å komme oss fra dm^2 til km^2 må vi flytte oss fire ruter til venstre i tabellen. Det betyr at vi må flytte komma $4 \cdot 2 = 8$ plasser til venstre:

$$45\,000\,\text{dm}^2 = 0{,}00045\,\text{km}^2$$

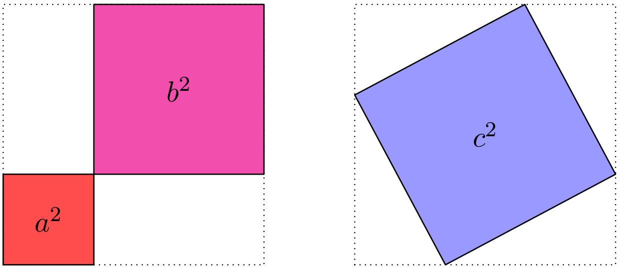
7.8 Pytagoras' setning

Ved hjelp av arealformlelen for et kvadrat og en trekant skal vi nå komme fram til én av de mest kjente ligningene i matematikk. På figuren under har vi tegnet to kvadrater som er like store, men som er delt inn i forskjellige former.



Vi observerer nå dette:

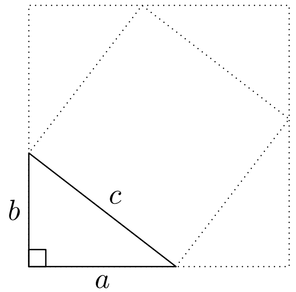
- Arealet av et rødt kvadrat er a^2, arealet av et lilla kvadrat er b^2 og arealet av det blå kvadratet er c^2.
- Arealet av en grønn trekant er halvparten av arealet til et oransje rektangel.
- Om vi tar bort de to oransje rektanglene og de fire grønne trekantene, sitter vi igjen med like mye areal i venstre figur som i høyre figur.

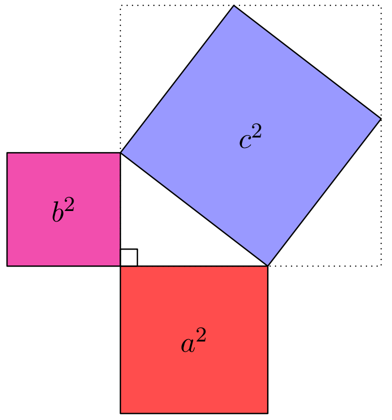


- Dette må bety at:
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Denne ligningen kalles *Pytagoras'* setning, og oftest bruker vi den når vi skal finne lengder i rettvinklete trekanter. Dette er fordi vi alltid kan lage figurer som de over, så lenge trekanten vår er rettvinklet:

Pytagoras' (ca. 580-500 f.kr.) var en gresk matematiker. Han var trolig langt ifra den første som oppdaget denne sammenhengen, og det finnes over 100 forskjellige bevis for den!

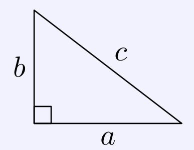




7.15 Pytagoras' setning

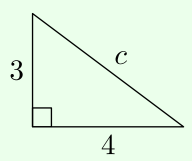
Arealet av den lengste siden i en rettvinklet trekant er alltid lik summen av arealene til de to korteste sidene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Eksempel 1

Finn lengden av siden c i trekanten under:



Svar:

Vi vet at:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

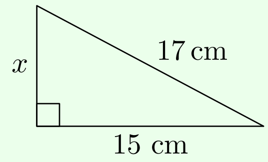
hvor a og b er lengden til de korteste sidene i trekanten. Derfor få vi at:

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Fordi $\sqrt{25} = 5$, må lengden til c være 5.

Eksempel 2

Finn lengden av siden x i trekanten under:



Svar:

Vi vet at:

$$c^2 = a^2 + x^2$$

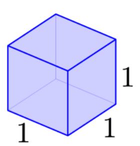
hvor c er lengden til den lengste siden og a lengden til den andre kortsiden. Derfor få vi at:

$$\begin{aligned} 17^2 &= 13^2 + x^2 \\ 289 - 225 &= x^2 \\ 64 &= x^2 \end{aligned}$$

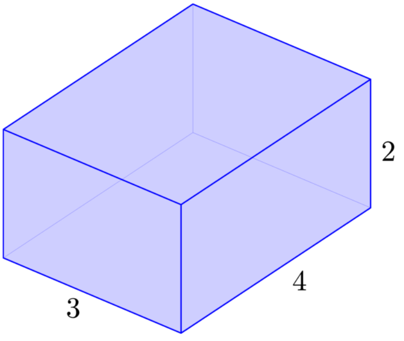
Fordi $\sqrt{64} = 8$, må lengden til x være 8 cm.

7.9 Volum

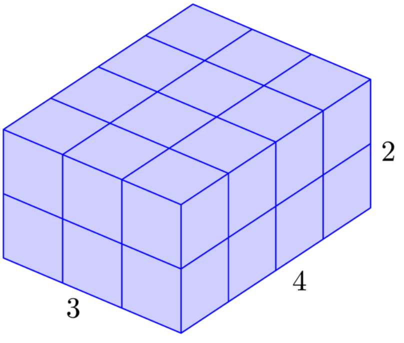
Når vi ønsker å si noe om hvor mye det er plass til inni en gjenstand, snakker vi om *volumet* av den. Som et mål på volum tenker vi oss *en kube* som har 1 som både bredde, lengde og høyde:



En slik kube kan vi kalle”enhetskuben”. Si vi har en firkantet boks med bredde 3, lengde 4 og høyde 2:



Vi kan må merke oss at vi har plass til akkurat 24 enhetskuber i denne boksen:



Og dette kunne vi ha regnet ut slik:

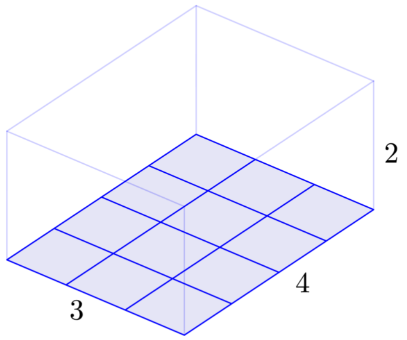
$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

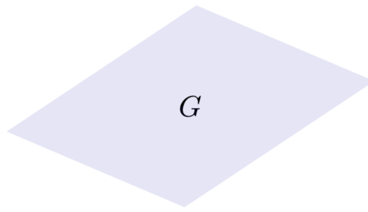
Altså:

$$\text{bredde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høyde}$$

Grunnflate

For å regne ut volumet av de mest elementære figurene vi har, kan det være lurt å bruke begrepet *grunnflate*. Slik som for en grunnlinje, er det vårt valg av grunnflate som bestemer hvordan vi skal regne ut høyden. For en slik boks som vi akkurat så på, er det naturlig å velge flaten som "ligger ned" til å være grunnflaten, og for å indikere dette brukes ofte G:





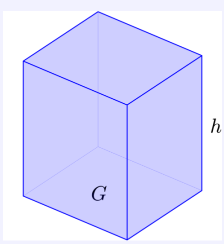
Grunnflaten har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høyden er 2. Volumet av hele boksen er grunnflaten ganger høyden:

$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= 12 \cdot h \\ &= 24 \end{aligned}$$

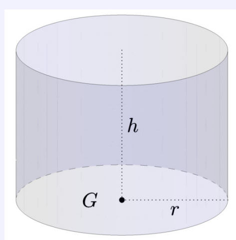
7.16 Volum

Volumet V av en firkantet boks eller en sylinder med grunnflate G og høyde h er:

$$V = G \cdot h$$



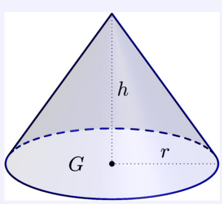
Boks



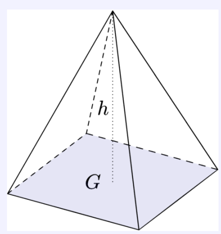
Sylinder

Volumet V av en kjegle eller en pyramide med grunnflate G og høyde h er:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



Kjegle



Pyramide

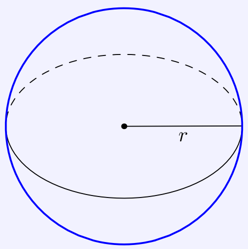
Volumet av ei kule

Som vanlig skiller ting seg ut når vi snakker om renit sirkelformede figurer, og ei *kule* er ikke noe unntak. For den spesielt interesserte kan et bevis for volumformelen leses her, men det er altså helt lov til å bykse rett på formelen:

7.17 Volumet av ei kule

Volumet V av ei kule med radius r er:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



Oppgaver for kapittel 7

7.1.1

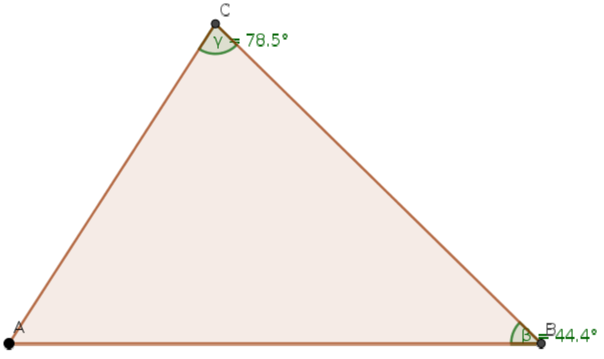
Finn den siste vinkelen i trekanten når de to andre vinklene er:

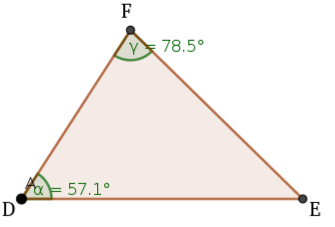
a) $60°$ og $37°$ **b)** $90°$ og $15°$ **b)** $45°$ og $45°$ **b)** $60°$ og $30°$

7.1.2

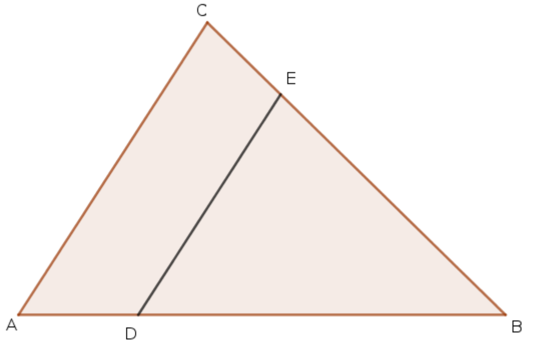
Forklar hvorfor:

a) $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike.



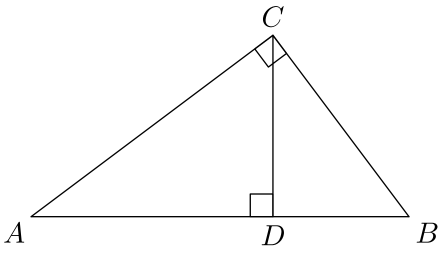


b) $\triangle ABC$ og $\triangle DBE$ er formlike. (AC og DE er parallelle).



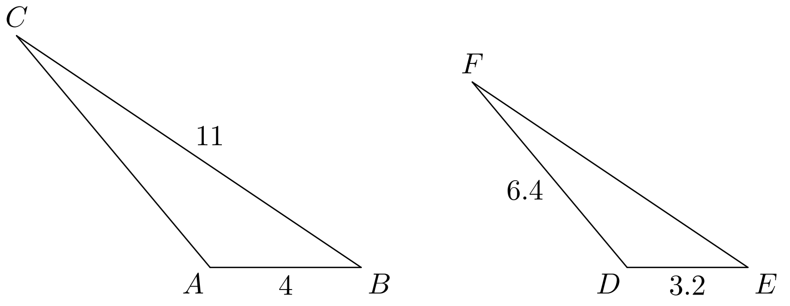
.

c) $\triangle ABC$ og $\triangle ADC$ er formlike.



7.3.1

Trekantene under er formlike og AB er samsvarende med DE.



Finn lengden til EF og AC.

7.3.2

Se tilbake til oppgave 7.1.2c.

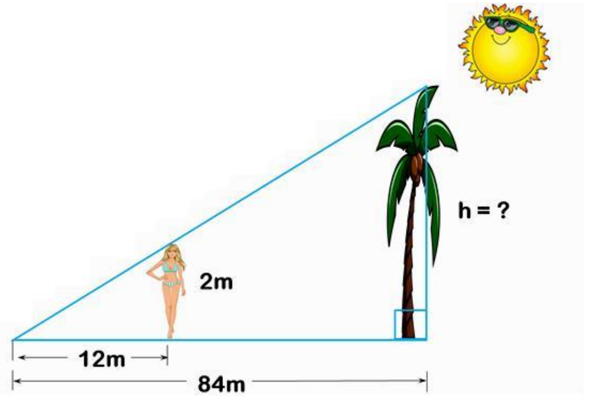
a) Hvilke sider i $\triangle ABC$ og $\triangle ADC$ er samsvarende sider? (Svaret *må* begrunnes!).

b) Vi har at $AC = 4$ og $AD = 3{,}2$. Finn lengden til AB.

c) Videre har vi at $BC = 3$. Finn lengden til CD.

7.3.3

På en solrik dag får du kjæresten din, som viser seg å være en 2 m høy bikinidame, til å stille seg i skyggen av en palme slik at solstrålen såvidt sneier det gyldne håret hennes.



kilde: `http://passyworldofmathematics.com/similar-triangles-applications/`

Hvor høy er palmen?

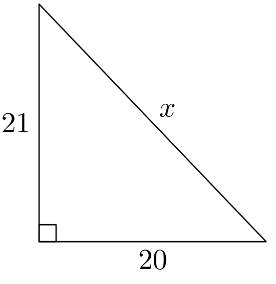
7.3.4

Trekantene $\angle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike. AB og DE er samsvarende sider og $\frac{AB}{DF} = 2$, i tillegg er $BC = 8$, $EF = 4{,}5$ og $DF = 4$. Er BC samsvarende med EF eller DF?

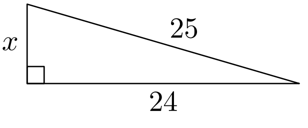
7.8.1

Finn lengden til x:

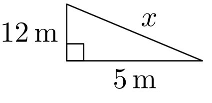
a)



b)



c)



7.8.2

(Oppgaven er hentet fra eksamen i 2015).

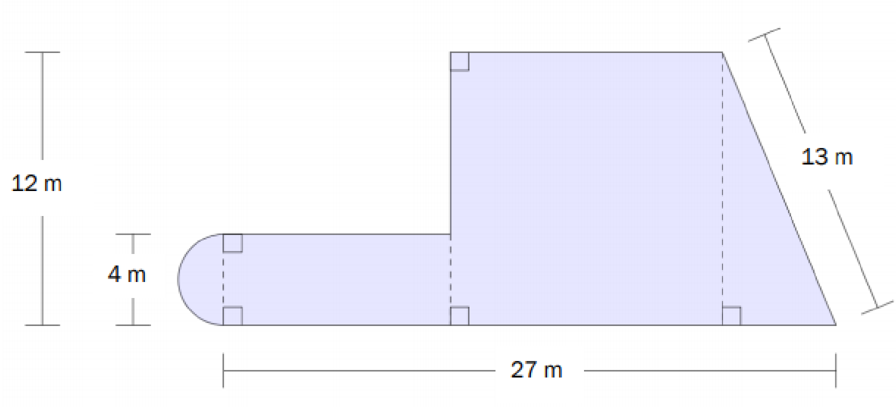
Et vindu har form som et rektangel. Vinduet er 6 dm bredt og 7 dm høyt. Gjør beregninger og avgjør om det er mulig å få en kvadratisk plate med sider 9 dm inn gjennom vinduet.

7.8.3

Hvordan kan du sjekke om en trekant er rettvinklet eller ikke?

7.8.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen i 2017).

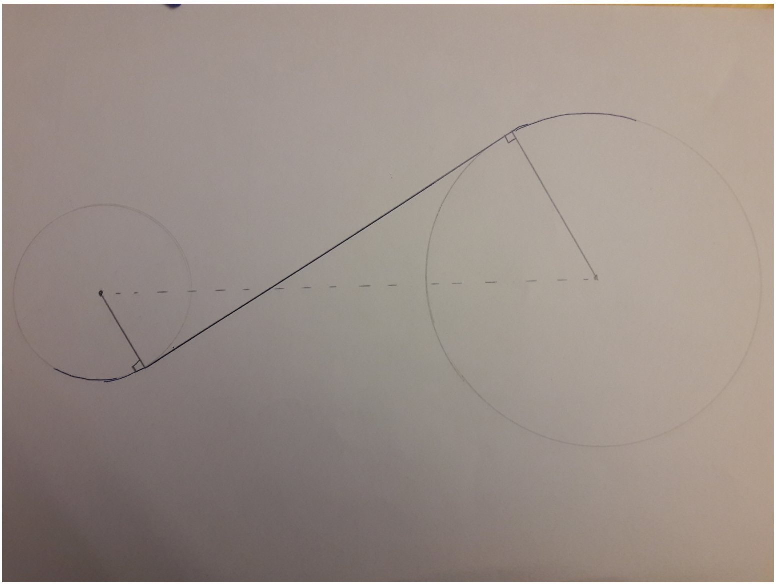


Området som er markert med blått ovanfor, er sett saman av ein halv sirkel, eit rektangel, eit kvadrat og ein rettvinkla trekant.

Set $\pi \approx 3$ og rekn ut tilnærma verdiar for omkretsen og for arealet av området.

7.8.5

(Denne oppgaven har jeg fått av en veiarbeider som faktisk satt med akkurat dette problemet på jobben.)



En vei (den mørke linjen) skal komme fra en liten sving (til venstre) og etterpå kjøre et rett strekke til den kommer inn i en ny og større sving (til høyre).

Den lille radiusen er 30 m, den store er 60 m og den stiplete avstanden er 170,5 m. Hvor langt er det rette veistrekket?

7.9.1

Finn volumet av:

a) En firkantet boks med bredde 5, lengde 2 og høyde 11.

b) En sylinder med radius 4 og høyde 7 (bruk at $\pi \approx 3$).

c) En kjegle med radius 2 og høyde 9.

d) En pyramide med bredde 10, lengde 3 og høyde 2.

7.9.2

(Hentet fra eksamen høsten 2017, del 1 (altså med hjelpemidler)

Til venstre ovanfor ser du ei pedalbøtte med lokk. Vi går ut frå at pedalbøtta er sett saman av ein sylinder og ei halv kule. Ved sida av ser du den sylinderforma behaldaren som er inne i pedalbøtta.

Gå ut frå at alle måla gitt på bileta ovanfor er innvendige mål.

a) Bestem volumet av den sylinderforma behaldaren.

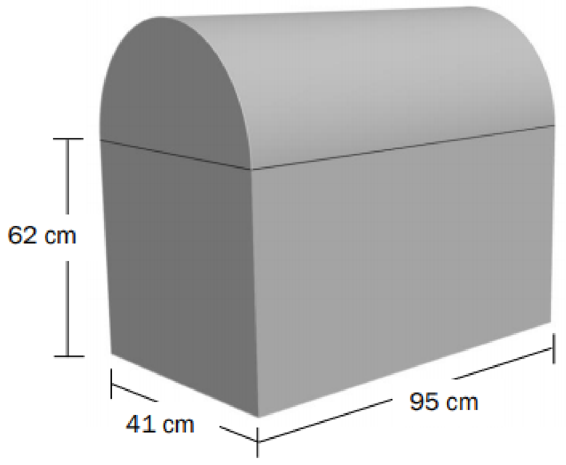
Tenk deg at du fyller 40 L vatn i denne behaldaren.

b) Kor høgt i behaldaren vil vatnet stå?

c) Bestem volumet av pedalbøtta med lokk.

7.9.3

(Hentet fra eksamen høsten 2016, del 2 (altså med hjelpemidler))



William har ei kiste som vist på skissa ovanfor. Kista er sett saman av eit rett firkanta prisme og ein halv sylinder. Prismet er 95 cm langt, 41 cm breitt og 62 cm høgt. Alle måla er utvendige.

William skal måle kista utvendig. 1 L måling er nok til 10 m^2.

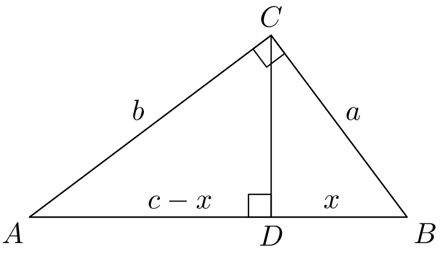
a) Kor mykje måling treng han?

Kista er laga av eit materiale som er 1,5 cm tjukt.

b) Bestem det innvendige volumet av kista.

Grubleoppgave

I denne oppgaven skal vi komme fram til en av de mest kjente læresetningene i geometri.



Vi tar utgangspunkt i en hvilken som helst trekant $\triangle ABC$ med $\angle ACB = 90°$. På siden AB markerer vi punktet D som er slik at CD står vinkelrett på AB. Da blir (se opg. 7.1.2c) $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ alle sammen formlike. For å unngå drøssevis av store bokstaver sier vi videre at:

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad DB = x, \quad AD = c - x$$

Målet vårt er nå å lage en formel som gjør at vi kan finne lengden til c hvis vi kjenner lengden til a og b.

a) Finn sidene i $\triangle ABC$ som samsvarer med sidene x og a i $\triangle DBC$. Skriv formelen som viser forholdet mellom disse sidene.

b) Finn sidene i $\triangle ABC$ som samsvarer med sidene b og $c - x$ i $\triangle ADC$. Skriv formelen som viser forholdet mellom disse sidene.

c) Skriv om formelen du fant i opg. a) til en formel for $c \cdot x$.

d) Skriv om formelen du fant i opg. b) til en formel for $c^2 - c \cdot x$.

e) Erstatt $c \cdot x$ fra opg. d) med formelen du fant i oppgave c). Skriv om formelen slik at alle c-er står på én side. Hvilken formel får du da?

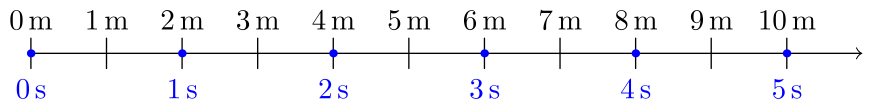
Kapittel 8

Funksjoner

8.1 Grunnprinsippet

8.1.1 Å lage en funksjon

I Video 1 ser du en strekmann, la oss kalle ham Pi, som beveger seg bortover etterhvert som sekundene går. For å skissere ferden til Pi kan vi tegne en figur som dette:



Figur 8.1

Etter 0 sekunder har Pi kommet til 0-metersmerket, etter 1 sekund har han kommet til 2-metersmerket, etter 2 sekunder har han kommet til 4-metersmerket osv. Denne informasjonen kan vi sette opp i en tabell som denne:

Sekunder	**Metersmerke**
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tabell 8.1

Det vi nå kan legge merke til, er at det er en sammenheng mellom hvor mange sekunder det har gått og hvilket metersmerke Pi har kommet til:

Sekunder	**Metersmerke**
0	$2 \cdot 0 = 0$
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 3 = 6$
4	$2 \cdot 4 = 8$
5	$2 \cdot 5 = 10$

Tabell 8.2

Når vi har en sammenheng mellom to størrelser kan vi lage en *funksjon*. Tabellen over viser oss at for å finne hvilket metersmerke Pi har nådd, kan vi gange antall sekunder det har gått med tallet 2. Dette betyr at *metersmerket Pi har nådd* er en funksjon av *sekunder det har gått*, denne funksjonen kan vi skrive slik:

$$\textit{metersmerket Pi har nådd} = 2 \cdot \textit{sekunder det har gått}$$

Men som vanlig er det litt trasig å måtte skrive disse lange ordene hele tiden, derfor er det kjekt å forkorte dem til bare én bokstav. For eksempel kan vi forkorte *metersmerket Pi har nådd* til bare P og *sekunder det har gått* til bare s. Da kan vi skrive funksjonen slik:

$$P = 2s$$

Husk at $2s$ er det samme som $2 \cdot s$

Og til slutt, for å gjøre det helt tydelig at vi må vite hva s er for å finne P, er det vanlig å skrive funksjonen slik:

$$P(s) = 2s$$

Merk: Parantesen med s inni har her ingenting med ganging å gjøre.

Vi har nå funnet *funksjonsuttrykket* til $P(s)$. I praksis betyr dette at når vi vet verdien til s, kan vi erstatte s med denne verdien i funksjonen vår. For eksempel er:

$$\begin{aligned}
P(0) &= 2 \cdot 0 = 0 && \text{"0 sekunder, 0-metersmerket"} \\
P(1) &= 2 \cdot 1 = 2 && \text{"1 sekunder, 2-metersmerket"} \\
P(2) &= 2 \cdot 2 = 4 && \text{"2 sekunder, 4-metersmerket"} \\
P(3) &= 2 \cdot 2 = 6 && \text{"3 sekunder, 6-metersmerket"} \\
P(4) &= 2 \cdot 2 = 8 && \text{"4 sekunder, 8-metersmerket"} \\
P(5) &= 2 \cdot 5 = 10 && \text{"5 sekunder, 10-metersmerket"}
\end{aligned}$$

Dette er akkurat det samme som vi har i *Tabell 8.1*, men som vi nå kan skrive med de nye navnene våre:

s	$P(s)$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tabell 8.3

Eksempel

Den raskeste skilpadden som er observert svømte i ca 10 m/s.

a) Regn ut hvor langt denne skilpadden kan svømme etter 1 sekund, 2 sekunder og 3 sekunder.

b) Lag en funksjon $l(s)$ som viser hvor mange meter denne skilpadden har svømt etter s sekunder.

c) Bruk funksjonen til å finne ut hvor langt skilpadden har svømt etter 20 sekunder.

Svar:

a)

$$\text{Meter svømt etter 1 sekund: } 10 \cdot 1 = 10$$
$$\text{Meter svømt etter 2 sekund: } 10 \cdot 2 = 20$$
$$\text{Meter svømt etter 3 sekund: } 10 \cdot 3 = 30$$

b) Vi observerer i oppgave a) at når vi skal finne lengden ganger vi alltid tallet 10 med antall sekunder. Kaller vi lengden for $l(s)$ og sekunder for s, blir altså funksjonen vår:

$$l(s) = 10s$$

c) $l(20) = 10 \cdot 20 = 200$. Skilpadden har altså svømt 200 m etter 20 sekunder.

8.1.2 Grafen til en funksjon

Vi har akkurat sett på funksjonen

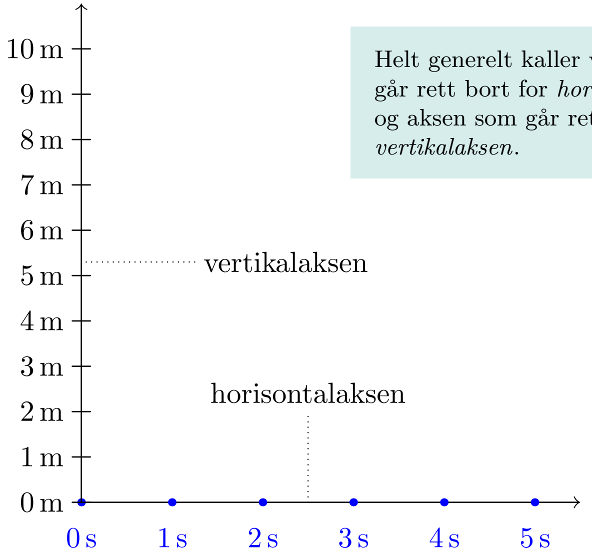
$$P(s) = 2s$$

som beskriver hvilket metersmerke strekmannen Pi fra Video 1 har nådd etter s sekunder. I *Tabell 8.3* har vi også verdiene til $P(s)$ for de fem første sekundene, og *Figur 8.1* viser en måte å skissere denne tabellen på. I denne figuren har vi skrevet inn antall sekunder og metersmerkene langs én og samme linje (ei linje med tall på kaller vi en *akse*).

Men som nevnt er selve poenget med funksjoner at det er en sammenheng mellom to størrelser, og denne sammenhengen er det ikke så lett å få øye på hvis vi tegner størrelsene våre langs én og samme akse.

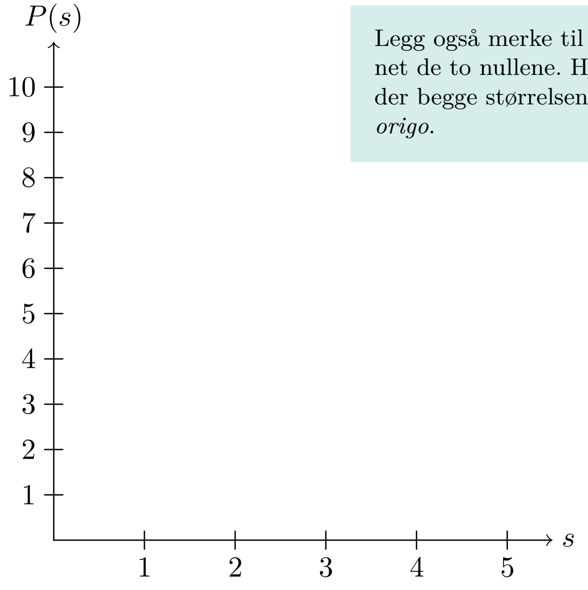
Størrelsene er i dette tilfellet *sekunder* og *metersmerke*.

Derfor kan det være lurt å lage to akser, slik som dette (se Video 2):



Helt generelt kaller vi aksen som går rett bort for *horisontalaksen* og aksen som går rett opp for *vertikalaksen*.

Og for å slippe å skrive s eller m bak alle tallene er det vanlig å sette navn på aksene isteden:



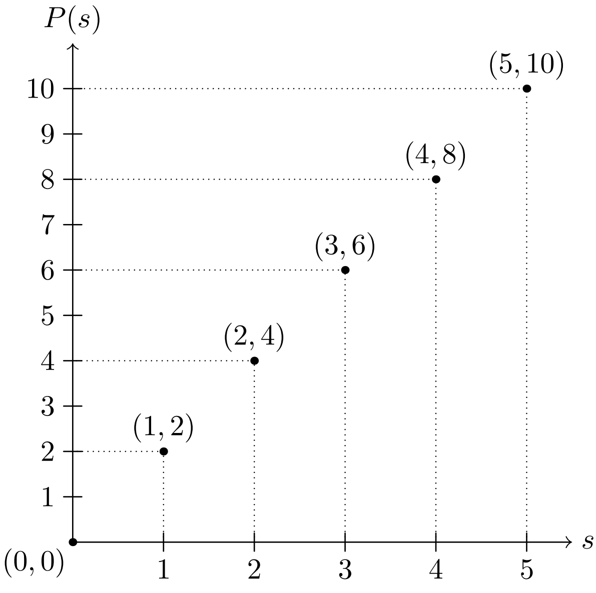
Legg også merke til at vi har fjernet de to nullene. Hjørnet/krysset der begge størrelsene er 0 kalles *origo*.

Nå som vi har to akser, tegner vi tallene fra *Tabell 8.3* inn på følgende måte:

- Fordi $s = 0$ og $m(0) = 0$ går vi 0 bort og 0 opp.
- Fordi $s = 1$ og $m(0) = 0$ går vi 1 bort og 2 opp.

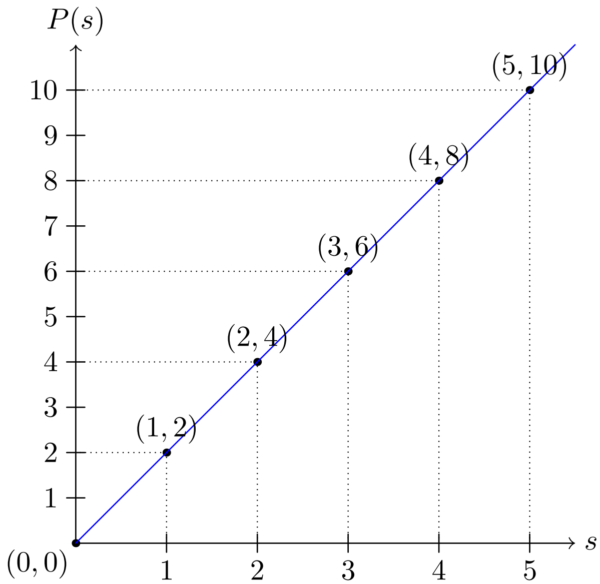
- Fordi $s = 2$ og $m(0) = 0$ går vi 2 bort og 4 opp.
- Fordi $s = 3$ og $m(0) = 0$ går vi 3 bort og 6 opp.
- Fordi $s = 4$ og $m(0) = 0$ går vi 4 bort og 8 opp.
- Fordi $s = 5$ og $m(0) = 0$ går vi 5 bort og 10 opp.

Disee parene med tall tegner vi inn som *punkt* i figuren vår:



s	$P(s)$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

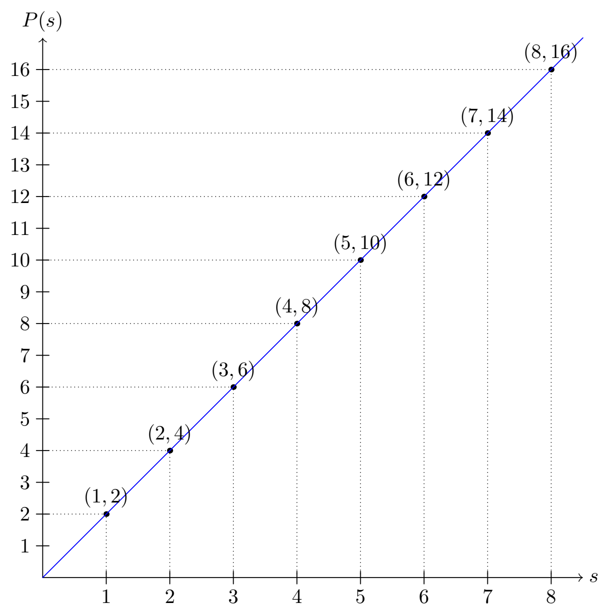
Og nå kan vi oppdage at det er et bestemt mønster mellom punktene vi har tegnet inn, nemlig at det går en rett linje mellom dem alle:



Og siden vi vet at $P(s) = 2s$ kan vi finne ut hvor langt strekmannen har gått for så mange sekunder vi bare måtte ønske oss, for eksempel kan vi finne hvor langt han har gått etter 6, 7 og 8 sekunder:

$$P(6) = 2 \cdot 6 = 12$$
$$P(7) = 2 \cdot 6 = 14$$
$$P(8) = 2 \cdot 6 = 16$$

Legger vi til disse punktene blir figuren vår seende slik ut:

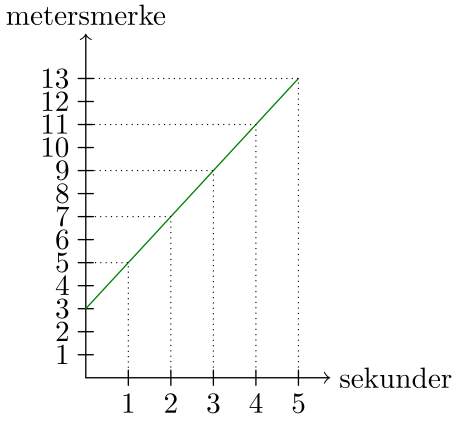


Vi observerer nå at alle punktene vi finner ved å bruke funksjonen $P(s)$ vil ligge på den blå linja, og vi kaller den blå linja *grafen* til $P(s)$. (Det er også verdt å merke seg at selv om vi bare hadde visste om to punkt som lå på den blå linja, kunne vi ha tegnet grafen så langt vi ville likevel. Dette er fordi vi treffer alle de andre punktene uansett hvilke to punkt vi velger å tegne linja igjennom).

8.2 Lineære funksjoner

8.2.1 Definisjon

Tenk nå at en strekmann med navn Rho starter på 3-metersmerket fra Video 1, men fortsatt går i det samme tempoet som Pi. Dette er vist i Video 3. Tabellen og grafen til denne ferden blir seende slik ut:



Sekunder	**Metersmerke**
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

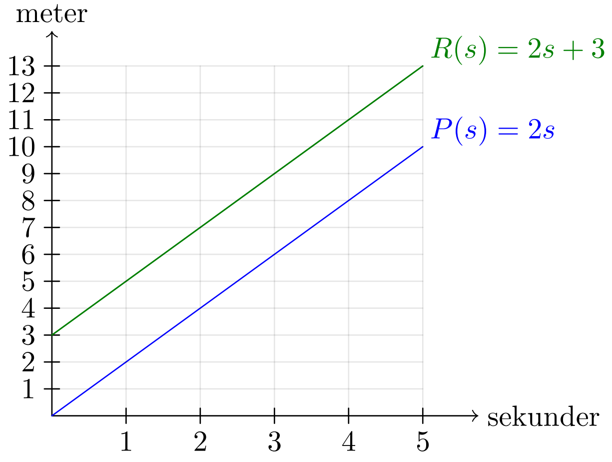
Men også for Rho er det en sammenheng mellom hvor mange sekunder han har brukt, og hvilket metersmerke han har nådd:

Sekunder	**Metersmerke**
0	$2 \cdot 0 + 3 = 3$
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$
4	$2 \cdot 4 + 3 = 11$
5	$2 \cdot 5 + 3 = 13$

Hvis vi nå kaller *metersmerket Rho har nådd* for R og *sekunder Rho har gått* for s, kan vi lage denne funksjonen:

$$R(s) = 2s + 3$$

La oss nå sammenligne funksjonen til Pi og Rho:



Siden vi har to funksjoner har vi tegnet navnene på selve grafene istedenfor vertikalaksen. Dette vil vi også gjøre en del heretter selv om vi bare har én funksjon.

Det første vi kan merke oss er at grafen til begge funksjonene er en rett linje. Funksjoner med slike grafer kaller vi *lineære* funksjoner. Det andre vi kan merke oss er at grafene til $P(s)$ og $R(s)$ er parallelle, dette kommer av at Pi og Rho har den samme farten: *For hvert sekund som går, flytter begge seg 2 meter. Dette vet vi fordi begge funksjonsuttrykkene har et 2-tall foran s.*

Den eneste forskjellen er at $R(s)$ hele tiden ligger 3 hakk høyere enn $P(s)$, dette kommer av at $R(s)$ har et enslig 3-tall i sitt funksjonsuttrykk, mens uttrykket for $P(s)$ bare består av $2s$. *Dette forteller oss at Rho starter på 3-metersmerket, mens Pi starter på 0-metersmerket.*

Når vi ser på funksjonene $R(s)$ og $P(s)$, finner vi tallene 2 og 3 og bokstaven s. Fordi s (sekundene det har gått) forandrer seg kaller vi s for *variabelen* til funksjonene. For lineære funksjoner kaller vi tallet foran variabelen for *stigningstallet* og tallet som står "alene" for *konstantleddet*.

Stigningstallet kalles noen ganger *vekstfarten*.

Obs!

Vi har sett hvordan det er helt opp til oss selv å velge hva vi kaller funksjonene og variablene våre. Når man skal lage generelle huskeregler for funksjoner er det i matematikk vanlig å kalle variabelen for x og funksjonen for $f(x)$. Mange elever tenker "ligning!" straks de ser bokstaven x, men dette er ikke tilfellet her. (Rett nok skal vi etterhvert se at funksjoner og ligninger er nært beslektet).

8.1 Lineære funksjoner

Funksjoner på formen

$$f(x) = ax + b$$

kalles linære funksjoner. x er variabelen, a er stigningstallet, og b er konstantleddet.

Eksempel

$f(x) = 3x - 4$ har stigningstall 3 og konstantledd-4

$g(x) = -2x + 1$ har stigningstall -2 og konstantledd 1

$m(r) = r + 7$ har stigningstall 1 og konstantledd 7

$p(s) = -s + 200$ har stigningstall -1 og konstantledd 200

$Q(t) = 8t$ har stigningstall 8 og konstantledd 0

8.2.2 Å tegne grafen til funksjonen

Lineære funksjoner har sitt navn nettopp fordi alle funksjoner av denne typen har en graf som er en rett linje. Dette gjør at grafen til lineære funksjoner er overkommelig å tegne, for vi trenger bare to punkt for å lage en rett linje!

Eksempel 1

Tegn grafen til funksjonen $f(x) = 5x - 3$ for x-verdier mellom -2 og 3.

Svar:

Det vi trenger er to punkt som vi vet at ligger på grafen til $f(x)$. Disse kan vi finne ved å sette inn to valgfrie(!) x-verdier i funksjonsuttrykket. Fordi 0 er et veldig enkelt tall å regne med kan det være greit å starte med å velge at $x = 0$, da får vi at:

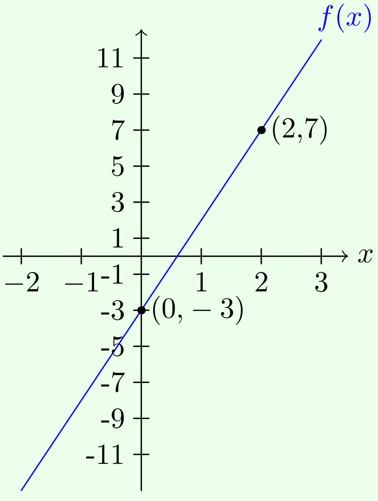
$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \cdot 0 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Da vet vi at punktet $(0, -3)$ ligger på grafen til $f(x)$.

Videre kan det være lurt å velge en x-verdi som ligger et lite stykke unna den første x-verdien vi har valgt (dette er fordi vi må være mer nøyaktig med streken vi tegner jo nærmere punktene våre ligger), så la oss bruke $x-$verdien 2:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \cdot 2 - 3 \\ &= 10 - 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Og derfor vet vi at $(2, 7)$ også er et punkt på grafen til $f(x)$. Med to punkt er vi klare til å tegne den rette linja:



x	$f(x)$
0	-3
2	7

Eksempel 2

Når en bil kjører i 80 km/h er lengden l (i kilometer) bilen har kjørt etter t timer gitt ved funksjonen

$$l(t) = 80t$$

Tegn grafen til $l(t)$ for $t = 0$ til $t = 10$.

Svar:

For å tegne grafen til $l(t)$ trenger vi å finne to punkt på grafen. Siden vi har fått vite hvordan vi kan regne ut $l(t)$ er det helt opp til oss selv hvilken t-verdi vi skal bruke (!), så lenge vi velger t mellom 0 - 10.

0 er jo et enktelt tall å bruke, så vi starter med å finne at:

$$l(0) = 80 \cdot 0 = 0$$

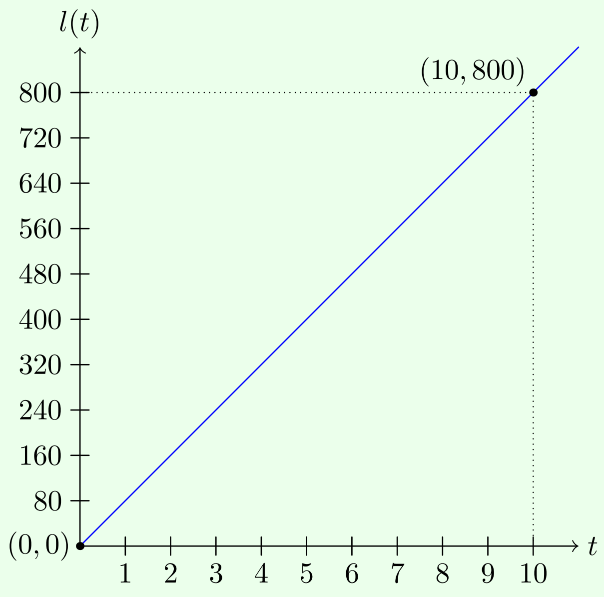
Dette gir oss punktet $(0, 0)$.

Og siden 10 også er et enkelt tall å bruke finner vi at:

$$l(10) = 80 \cdot 10 = 800$$

Dette gir oss punktet $(10, 800)$.

Da har vi to punkt og er klare til å tegne grafen:



8.2.3 Å finne stigningstall og konstantledd grafisk

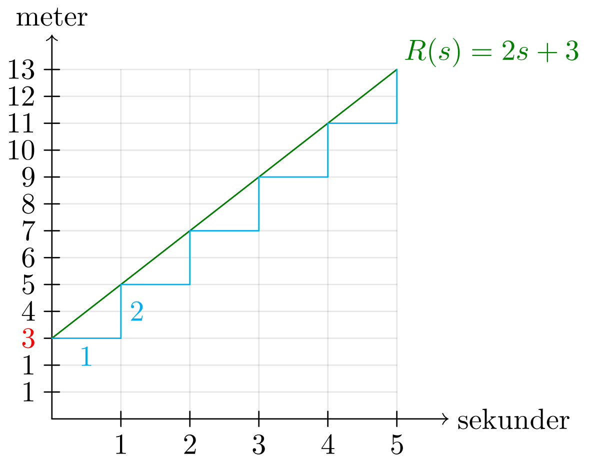
Vi fortsetter å se på funksjonen til Rho, som vi vet er gitt ved dette uttrykket:

$$R(s) = 2x + 3$$

Vi har akkurat sett at uttrykket forteller oss at 2 er stigningstallet til funksjonen, mens 3 er konstantleddet. Dette kunne vi også funnet ved å studere grafen til $R(s)$ på følgende måte (se tilbake til s. 111 hvis du er usikker på hva som menes med horisontal/vertikalaksen):

- Når vi går 1 bort langs horisontalaksen, går grafen 2 opp langs vertikalaksen, derfor er stigningstallet 2.

- Grafen skjærer vertikalaksen i verdien 3, derfor er konstantleddet 3.

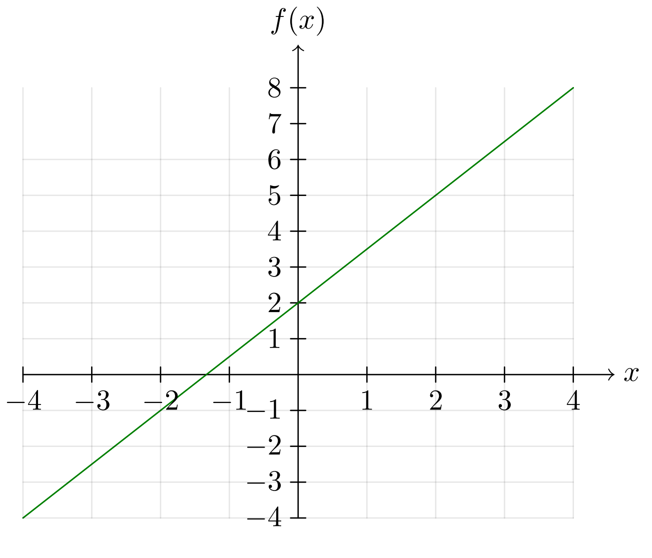


Metoden vi akkurat brukte kan vi bruke for alle lineære funksjoner.

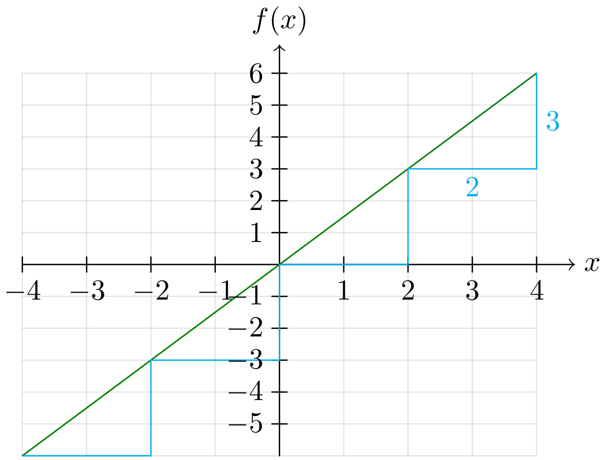
- For å finne stigningstallet sjekker vi hvor langt (opp/ned) vi beveger oss langs vertikalaksen når vi går 1 bort (til høyre) langs horisontalaksen.

- For å finne konstantleddet ser vi hvilken verdi grafen skjærer på vertikalaksen.

Men vi er ikke alltid så heldige at vi direkte kan lese av hvor mye vi beveger oss langs vertikalaksen når vi går 1 bort langs horisontalaksen, som f.eks. i denne figuren:



Løsningen blir da å legge merke til at hvis vi går to skritt langs horisontalaksen, så blir det greiere å lese av hvor langt vi har bevegd oss langs vertikalaksen:



Av figuren ser vi at når man går 2 bort, beveger grafen seg 3 opp. Det må bety at:

$$\text{Når man går 1 bort, går grafen } \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ opp.}$$

Stigningstallet er derfor 1,5. Samtidig ser vi at grafen skjærer vertikalaksen i verdien 2, og derfor er konstantleddet 2. Altså er funksjonsuttrykket dette:

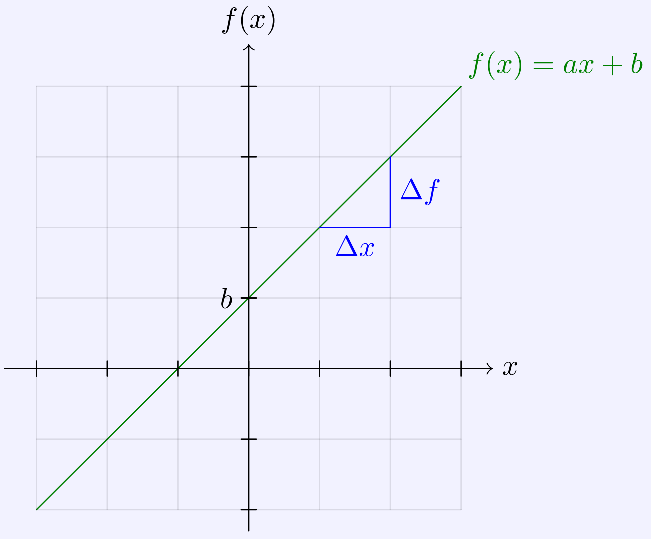
$$f(x) = \underbrace{1{,}5}_{\text{stigningstall}}\, x + \overbrace{2}^{\text{konstantledd}}$$

8.2 Å finne stigningstall og konstantledd grafisk

Av grafen til en lineær funksjon $f(x)$ kan vi finne at:

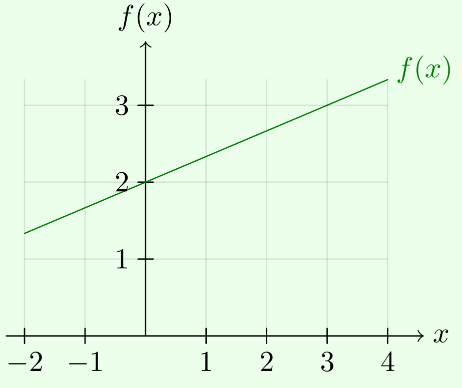
- stigningstallet a har samme verdi som brøken $\frac{\pm\Delta f}{\Delta x}$. Δx er er lengden vi går til høyre fra et punkt på grafen, Δf er lengden vi etterpå må gå opp eller ned for å komme tilbake til grafen. Går vi opp setter vi $+$ foran Δf, går vi ned setter vi $-$ foran.

- konstantleddet b er verdien hvor grafen skjærer vertikalaksen.



Eksempel 1

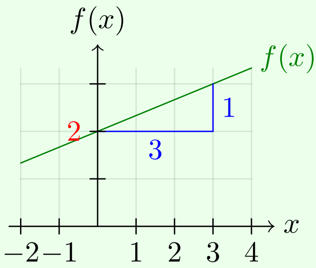
Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$:



Svar:

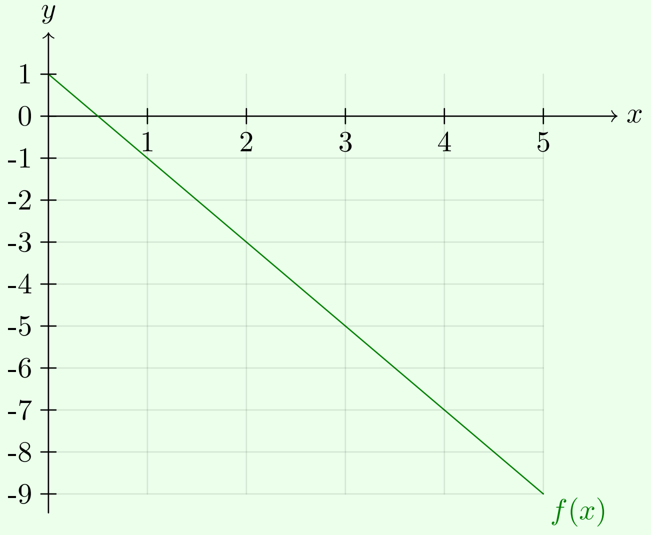
Vi observerer at når vi går 3 bort langs horisontalaksen, går grafen 1 opp langs vertikalaksen, stigningstallet er derfor $\frac{1}{3}$. Vi ser også at grafen skjærer vertikalaksen når verdien er 2, og derfor er konstantleddet 2. Dette betyr at:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



Eksempel 2

Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$:



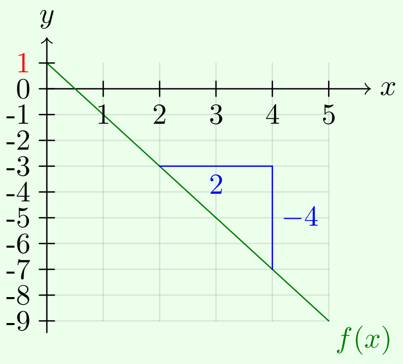
Svar:

Vi observerer at når vi går 2 til høyre, må vi gå 4 *ned* langs vertikalaksen, stigningstallet er derfor:

$$\frac{-4}{2} = -2$$

Vi ser også at grafen skjærer vertikalaksen når verdien er 1, og derfor er konstantleddet 1. Dette betyr at:

$$f(x) = -2x + 1$$



8.2.4 Skjæring mellom to funksjoner

I mange sammenhenger kan det være nyttig å sammenligne to funksjoner, og ofte er vi interessert i å vite når den éne er større enn den andre. Dette gjør vi ved å finne *skjæringspunktene* til funksjonene, og for lineære funksjoner er det alltid bare snakk om ett punkt.

La oss tenke at klassen skal på en reise som krever leie av buss. Hos *Jenssen Turbuss* får klassen dette tilbudet:

2000 kr for sjåfør og 30 kr per mil som kjøres

Mens *Tide Buss* tilbyr dette:

1500 kr for sjåfør og 40 kr per mil som kjøres

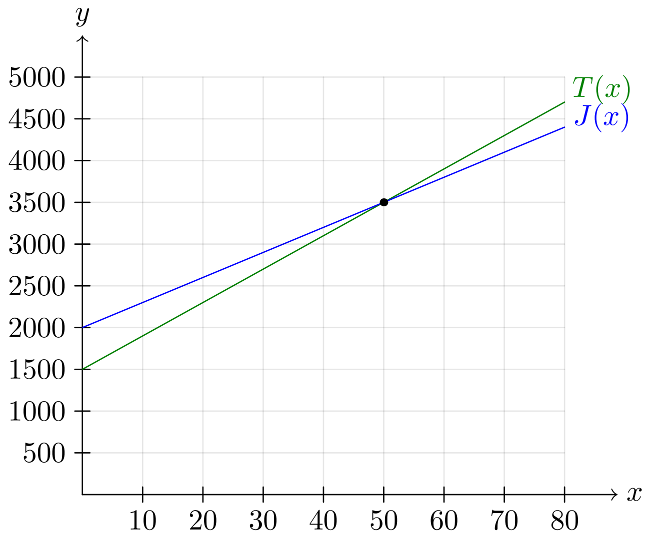
Antall kroner vi til sammen må betale etter å ha kjørt x mil kaller vi nå for $J(x)$ for *Jenssen Turbuss* og $T(x)$ for *Tide Buss*. Dette gir oss disse to funksjonene:

$$J(x) = 30x + 2000 \tag{8.1}$$

$$T(x) = 40x + 1500 \tag{8.2}$$

Å finne skjæringspunkt grafisk

Tegner vi grafene for disse funksjonene for x mellom 0 mil og 10 mil får vi denne figuren:



I tillegg til grafene har vi også tegnet inn skjæringspunktet, som er punktet hvor de to grafene møter hverandre. Vi kan nå lese av at skjæringspunktet er $(50, 3500)$, dette betyr at:

- Skal vi kjøre akkurat 50 mil blir prisen den samme for begge selskapene.
- Skal vi kjøre *mindre* enn 50 mil er det billigst å velge *Tide Buss*. Dette fordi grafen til $T(x)$ ligger under grafen til $J(x)$ etter skjæringspunktet.
- Skal vi kjøre *mer* enn 50 mil er det billigst å velge *Jenssen Buss*. Dette fordi grafen til $J(x)$ ligger under grafen til $T(x)$ før skjæringspunktet.

Å finne skjæringspunkt ved regning

Å tegne grafer for hand kan være tidkrevende saker, hvis det bare er skjæringspunktet vi er interessert i kan det derfor være raskere å finne dette ved regning isteden. Det gjør vi ved å merke oss at i skjæringspunktet må verdien til de to funksjonene våre den samme, altså vet vi at:

$$J(x) = T(x) \text{ i skjæringspunktet}$$

Erstatter vi $J(x)$ og $T(x)$ med sine funksjonsuttrykk, får vi en ligning vi kan løse (se tilbake til (8.1) og (8.2) for disse uttrykkene):

$$\begin{aligned}
J(x) &= T(x) \\
300x + 2000 &= 400x + 1500 \\
2000 - 1500 &= 400x - 300x \\
500 &= 100x \\
\frac{5\cancel{00}}{1\cancel{00}} &= \frac{\cancel{100}x}{\cancel{100}} \\
50 &= x
\end{aligned}$$

Vi har derfor funnet at busselskapene koster det samme hvis vi kjører 50 mil. For å finne *hvor* mye de koster finner vi verdien til én av funksjonene for $x = 50$, vi bruker her $J(x)$:

$$\begin{aligned}
J(50) &= 300 \cdot 50 + 2000 \\
&= 1500 + 2000 \\
&= 3500
\end{aligned}$$

Ved regning har vi nå funnet det samme som vi fant grafisk, skjæringspunktet er $(50, 3500)$.

8.3 Skæringspunkt

For to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ er skjæringspunktet det punktet hvor verdien til begge funksjonene er den samme. Skjæringspunktet kan finnes grafisk eller ved regning. Ved regning løser man ligningen:

$$f(x) = g(x)$$

8.3 Andregradsfunksjoner

Eksempler på det som kalles *andregradsfunksjoner* er dette:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -3x^2 + 4x + 3 \\
g(x) &= -x^2 \\
r(t) &= t^2 + 4 \\
h(k) &= 5k^2 - \frac{3}{2}k
\end{aligned}$$

Forenklet sagt kan vi si at når en variabel (x, t eller k) på det meste er opphøyd i andre, har vi en andregradsfunksjon.

Grafen til en andregradsfunksjoner er mye vanskeligere å tegne for hand enn for en lineær funksjon, noe vi skal se et eksempel på nå.

La oss forsøke å tegne funksjonen

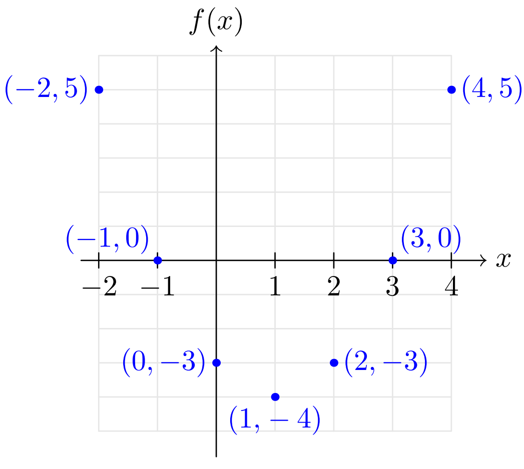
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

for x mellom -2 og 4. For andregradsfunksjoner trenger vi ganske mange punkt bare for å få et bilde av hvordan grafen ser ut, og vi velger her å bruke $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ og 4 som x-verdier. Da kan vi lage oss denne tabellen:

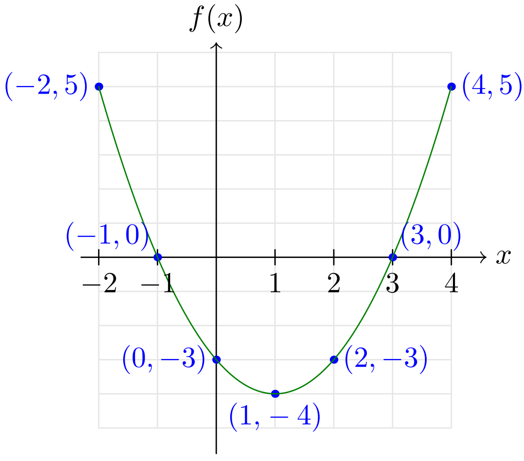
$$\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 6 - 3 = 5 \\
f(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \\
f(0) &= 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3 \\
f(1) &= 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \\
f(2) &= 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3 \\
f(3) &= 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0 \\
f(4) &= 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 16 - 12 - 3 = 5
\end{aligned}$$

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

Tegner vi så disse punktene inn i et koordinatsystem får vi denne figuren:

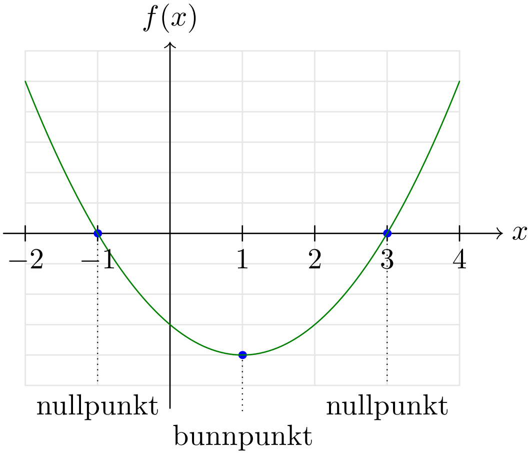


Vi ser raskt at det ikke er noen rett linje som kan gå gjennom alle disse punktene, grafen til en andrefunksjon er istedenfor en bue, slik som dette:



Fra figuren over er det også verdt å merke seg to ting:

- Når $x = -1$ eller $x = 3$ så er $f(x) = 0$. Vi ser derfor at $(-1, 0)$ og $(3, 0)$ er *nullpunktene* til $f(x)$.
- Når $x = 1$ er $f(x)$ på sitt laveste, derfor kaller vi $(1, -4)$ *bunnpunktet* til $f(x)$.



8.4 Proporsjonalitet

Troika er av mange holdt for å være verdens beste sjokolade og én Troika koster ca 15 kr. Kjøper vi én Troika må vi betale $15 \cdot 1 = 15$ kr, kjøper vi to Troikaer må vi betale $15 \cdot 2 = 30$ kr osv. For kjøp av opptil 4 Troikaer kan vi sette opp en tabell som dette:

y (totalpris)	15	30	45	60
x (antall)	1	2	3	4

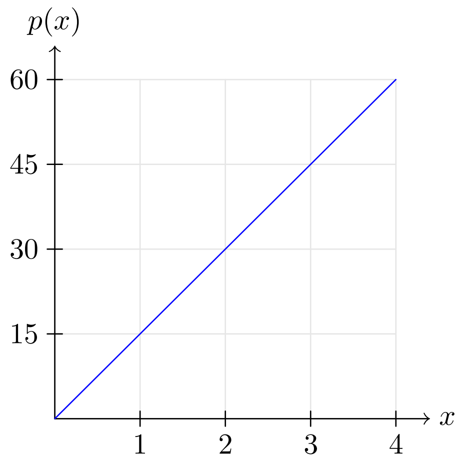
Her har vi altså kalt totalprisen for y og antallet for x. Det vi nå kan legge merke til er at $\frac{15}{1} = 15$, $\frac{30}{2} = 15$ osv, altså er $\frac{y}{x} = 15$:

$\boldsymbol{p}$ **(pris)**	15	30	45	60
$\boldsymbol{x}$ **(antall)**	1	2	3	4
$\boldsymbol{p/x}$	15	15	15	15

Hvis to størrelser delt på hverandre alltid blir det samme tallet, sier vi at vi har *proporsjonale størrelser*. I dette tilfellet er altså prisen og antallet proporsjonale størrelser fordi pris/antall alltid blir 15. Dette forteller oss, som vi har nevnt, at det koster 15 kr for én Troika. Dette betyr også at uttrykket for prisen p blir seende slik ut:

$$p(x) = 15x$$

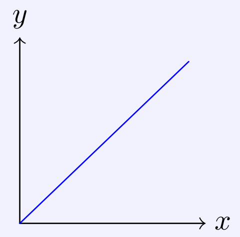
Grafen til denne funksjonen blir seende slik ut:



8.4 Proporsjonale størrelser

Hvis y/x alltid blir det samme tallet a, har vi at:

- x og y er proporsjonale størrelser.
- Uttrykket for y blir: $y = ax$
- Grafen til y blir en rett linje som skjærer origo.



Eksempel

Tabellen under viser hvor my man må betale hvis man

y (totalpris)	15	30	45	60
x (antall)	1	2	3	4

Oppgaver for kapittel 8

8.1.1

Coop Mega solgte nylig smågodt for 30 kr per kg.

a) Finn ut hvor mye man måtte betalt for 1, 2 og 3 kg med smågodt.

b) Lag en funksjon $B(v)$ som viser hvor mye du må betale når du kjøper en viss vekt (målt i kg) med smågodt.

c) Bruk funksjonen du fant i opg. b) til å finne hvor mye en person må betale hvis hen kjøper 10 kg smågodt.

8.1.2

Funksjonen $L(t)$ er lønnen (i kr) til en person som jobber i t timer. $L(t)$ for 0-3 timer er vist i tabellen under:

t	$L(t)$
0	0
1	300
2	600
3	900

a) Finn uttrykket til $L(t)$.

b) Finn lønnen hvis personen jobber i 8 timer.

8.1.3

Funksjonen $A(g)$ er aralet (i m^2) av en trekant med grunnlinje g (i meter). $A(g)$ for grunnlinjene 1-3 meter er vist i tabellen under:

g	$A(g)$
1	0.5
2	1
3	1.5

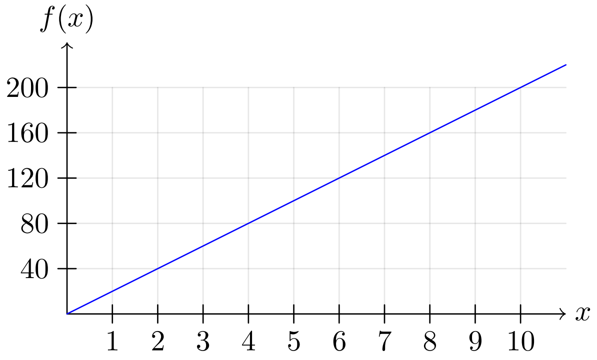
a) Finn uttrykket til $A(g)$.

b) Finn arealet hvis $g = 40$.

8.2.1

Tegn grafen til funksjonen fra 8.1.1b for vektene 0kg-10kg.

8.2.2



a) Bruk grafen over til å fylle inn tallene som mangler i tabellen under.

x	$f(x)$
2	
4	
6	

b) Finn uttrykket til $f(x)$.

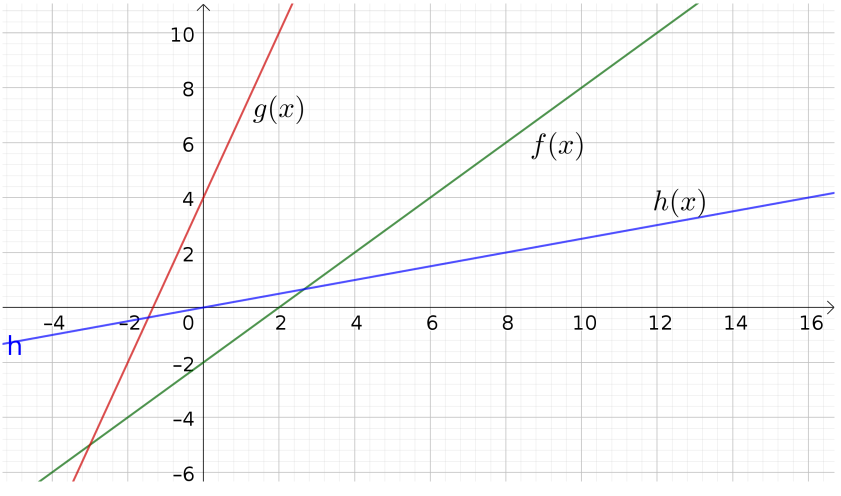
8.2.3

a) Tegn grafen til $f(x) = 2x - 1$ for x-verdier mellom -2 og 3.

b) Tegn grafen til linja $y = -4x$ for $-2 \leq x \leq 4$.

8.2.4

Finn funksjonsuttrykket til funksjonene på bildet under:



8.2.5

a) Tegn grafen til $f(x) = 3x$ og $g(x) = -x + 12$ for x melom 0 og 5.

b) Finn skjæringspunktet til funksjonene grafisk.

c) Finn skjæringspunktet til funksjonene ved regning.

8.2.6

a) Tegn grafen til $f(x) = 5x + 1$ og $g(x) = 2x + 4$ for x melom -2 og 2.

b) Finn skjæringspunktet til funksjonene grafisk.

c) Finn skjæringspunktet til funksjonene ved regning.

8.3.1

Gitt funksjonen

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

a) Fyll ut tabellen under:

x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	

b) Hva er nullpunktene til $f(x)$?

8.3.2

Gitt funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

a) Fyll ut tabellen under:

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

b) Skisser grafen til $f(x)$.

8.3.3

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2016.)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

a) Skriv av og fyll ut verditabellen nedenfor.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

b) Tegn grafen til f.

8.3.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017.)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4$$

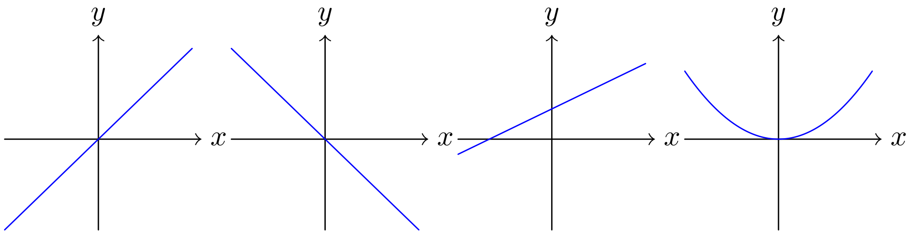
a) Skriv av og fyll ut verditabellen nedanfor.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Teikn grafen til f.

8.4.1

Avgjør ut ifra bildene under om x og y er proporsjonale størrelser eller ikke.



(a) (b) (c) (d)

8.4.2

Noen elever i matteklasse 1STB/MK ønsker å spleise på en Tesla. Tabellen under viser P kroner man må betale per person hvis x personer blir med:

$P(x)$	210 000	42 000	18 000
x	3	15	35

a) Er P og x proporsjonale eller omvendt proporsjonale størrelser?

b) Hva koster Teslaen?

c) Sett opp et uttrykk for P når x personer blir med å spleise.

8.4.3

Tabellen under viser B kroner man må betale for x liter bensin.

B	30	75	150
x	2	5	10

a) Er B og x proporsjonale eller omvendt proporsjonale størrelser?

b) Hva koster det for én liter bensin?

c) Sett opp et uttryk for B når man fyller x liter.

Kapittel 9

Økonomi

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:

- gjøre greie for og regne med prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og beregne inntekt, skatt og avgifter
- vurdere forbruk og bruk av kredittkort og sette opp budsjett og regnskap ved hjelp av regneark
- undersøke og vurdere ulike former for lån og sparing

9.1 Indeksregning

Innenfor økonomi er *indekser* forholdstall som forteller oss hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kroneisen 0,75 kr (!) da den ble lansert i 1953, mens den i 2017 kostet ca 27 kr . Forholdet mellom prisen i 2017 og i 1953 er altså:

$$\frac{\text{pris 2018}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0{,}75} = 36$$

Dette forteller oss at prisen for kroneis har blitt 36 ganger mer enn den var. Eller vi kan si at den nye prisen utgjør 3600% av den originale. I denne sammenhengen kunne vi kalt både 36 og 3600% for en *indeks*, siden begge tallene forteller noe om hvordan prisen for kroneis har endret seg fra 1953 til 2017. Velger man å bruke prosenttall som indeks er det vanlig å kutte prosentsymbolet, i vårt eksempel ville da indeksen blitt 3600.

9.1.1 Konsumprisindeks og basisår

Konsumprisindeksen (KPI) er en indeks som beskriver prisnivået på varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i løpet av et år. Disse varene er:

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Andre varer og tjenester

For å sammenligne noe må man alltid starte med noe å sammenligne med, og konsumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene i året 2015. 2015 kalles derfor *basisåret*, og i dette året er indeksen bestemt til å være 100.

9.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er basisåret 2015.

Tabellen under er hentet fra SSB sine nettsider og viser KPI (konsumprisindeks) for de 7 siste årene:

År	KPI
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Tabell 9.1: Kunsumprisindeksen for årene 2010-2017

Ut ifra tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Fordi KPI for 2017 er 105,5 har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Fordi KPI i 2011 er 93,3 var prisene 7,7% lavere i 2011 enn i 2015.

9.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

Eksempel

I 2017 var prisindeksen for en vare 109. Hvor mye har har prisen endret seg siden basisåret?

Svar:

$$109 - 100 = 9$$

Prisen har altså endret seg 9% siden basisåret.

9.1.2 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2018. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; Prisen på kroneisen har gått opp blant annet fordi kroneverdien har gått ned – du fikk altså kjøpt mindre varer for hver 1-krone i 2017 enn i 1953.

Verdien av 1 krone, altså kroneverdien ved et år, beregner vi ut ifra konsumprisindeksen. Vi tar da konsumprisindeksen til basisåret (100) og deler med KPI for året vi ønsker å finne kroneverdien til. For eksempel var KPI i 1953 lik 6,9, mens den i 2017 105,5. Kroneverdien for disse årene blir derfor:

Kroneverdien i basisåret (2015) er alltid lik 1.

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 2017} &= \frac{100}{105{,}5}\\ &\approx 0{,}94\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 1953} &= \frac{100}{6{,}9}\\ &\approx 14{,}49\end{aligned}$$

Dette forteller oss at 1 kr i 2017 er verd 0,94 ganger *mindre* enn 1 kr i 2015, mens 1 kr i 1953 er verd 14,49 ganger *mer*.

Om man ganger med et tall som er mindre enn 1, får man et svar som er mindre enn utgangspunktet.

9.3 Kroneverdi

$$\text{Kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

Eksempel

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012.

Svar:

$$\begin{aligned}\text{Kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93{,}9}\\ &\approx 1{,}06\end{aligned}$$

Å betale 1 kr i 2012 ville vært dete samme som å betale 1,06 kr i 2015 (basisåret).

9.1.3 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk nå at hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2011, 2015 og 2017. *Tabell* 9.1 forteller oss at du hadde du best råd i 2011 − fordi da var prisnivået lavest (siden KPI var mindre enn for de to andre årene). I praksis ville dette betydd at selv om lønnen din var den samme alle årene, ville du kunne kjøpt flere varer i 2011 siden de da var billigere. I denne sammenhengen sier vi at *reallønnen* din var høyere i 2011 enn i 2015 og 2017.

At prisnivået har blitt høyere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. For å regne ut selve verdien til reallønnen, ganger vi den nominelle lønnen med kroneverdien (se *Regel 9.1.1*):

Nominell lønn er lønnen du får fra arbeidsgiveren din, altså det vi som oftest bare kaller lønnen.

$$
\begin{aligned}
\text{Reallønn i 2017} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{105{,}5}\,\text{kr} \\
&\approx 473\,934\,\text{kr} \\
\text{Reallønn i 2015} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{100}\,\text{kr} \\
&\approx 500\,000\,\text{kr} \\
\text{Reallønn i 2011} &= 500\,000 \cdot \frac{100}{93{,}3} \\
&\approx 535\,905\,\text{kr}
\end{aligned}
$$

Legg merke til at reallønnen i basisåret 2015 alltid vil ha samme verdi som den nominelle lønnen!

9.4 Reallønn

$$\text{reallønn} = \text{nominell lønn} \cdot \text{kroneverdien}$$

Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens han i 2012 tjente 420 000 kr. I 2016 var KPI = 103,6, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

Svar:

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd, sjekker vi hvilket år han hadde høyest reallønn (KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*):

$$
\begin{aligned}
\text{Reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103{,}6} \text{ kr} \\
&\approx 434\,363 \text{ kr} \\
\text{Reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93{,}9} \\
&\approx 447\,284 \text{ kr}
\end{aligned}
$$

Vi ser at reallønnen til Per var høyest i 2012, derfor hadde han bedre råd dette året enn i 2016.

9.1.4 Regning med indekser

Vi har sett hvordan både verdien av en pris eller en reallønn forandrer seg når KPI øker eller minker. Hvis en verdi har forandret seg, men forholdet mellom verdien og indeksen forblir det samme, sier vi at *verdien har fulgt indeksen.*

9.5 Verdi som følger indeks

Hvis en verdi følger indeksen, forblir forholdet mellom verdi og indeksen det samme:

$$
\frac{\text{verdi 1}}{\text{indeks 1}} = \frac{\text{verdi 2}}{\text{indeks 2}}
$$

Eksempel 1

I 2013 fikk Sofie 600 000 kr i lønn. I 2013 var KPI 95,9, mens den i 2017 var 105,5. Hva måtte Sofie få i lønn i 2017 for at lønnen skulle fulgt indeksen? (Obs! Dette er det samme som å si at reallønnen skal forbli den samme).

Svar:

Skal lønnen følge indeksen, må forholdet mellom lønnen og KPI være lik for de to årene:

$$
\frac{\text{lønn i 2017}}{\text{KPI i 2017}} = \frac{\text{lønn i 2013}}{\text{KPI i 2013}}
$$

Siden lønnen i 2017 er ukjent, kaller vi denne for x i den videre utregningen:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{105{,}5} &= \frac{600\,000}{95{,}9} \\
&= \frac{600\,000}{95{,}9} \cdot 105{,}5 \\
&\approx 660\,000
\end{aligned}
$$

Lønnen til Sofie bør altså være 660 000 kr for at lønnen skal følge konsumprisindeksen.

Eksempel 2

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen. I 2005 var KPI 82,3. Hva var den i 2014?

Svar:

Skal prisen følge indeksen må forholdet mellom pris og indeks være det samme:

$$
\frac{\text{pris i 2014}}{\text{KPI i 2014}} = \frac{\text{pris i 2005}}{\text{KPI i 2005}}
$$

Siden KPI i 2014 er ukjent, kaller vi denne for x. Vi utnytter også at vi for en ligning med én brøk på hver side kan "snu brøkene på hodet":

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\text{pris i 2014}} &= \frac{\text{KPI i 2005}}{\text{pris i 2005}} \\
\frac{x}{1784} &= \frac{82{,}3}{1500} \\
x &= \frac{82{,}3}{1500} \cdot 1784 \\
&\approx 97{,}9
\end{aligned}
$$

KPI i 2014 var altså 97,9.

9.2 Lån og prosentvis endring over tid

9.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*. La oss se på et eksempel for å prøve å holde styr på alle disse begrepene:

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da blir lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- *Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen.*

  For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli $\frac{100\,000}{5}$ kr $= 20\,000$ kr.

- *Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.*

  Startgjelden er 100 000, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden 100 000 kr − 20 000 kr = 80 000 kr. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden 80 000 kr − 20 000 kr = 60 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- *Renter skal beregnes av gjelden.*

  Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale (se *Regel 3.4*) 100 000 kr · 0,10 000 = 10 000 kr i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale 80 000 kr · 0,10 000 = 80 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- *Terminbeløpet er summen av avdrag og renter.*

  Av første og tredje punkt får vi at terminbeløpet for de to første årene blir:

	1. år	2. år
Terminbeløp	20 000 kr + 10 000 kr = 30 000 kr	20 000 kr + 80 000 kr = 28 000 kr

  Og slik fortsetter det de neste tre årene.

Serielån og annuitetslån

To veldig vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like store. Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hvar gang.

Merk: Du har alltid rett til å betale resterende gjeld når du selv ønsker det. Da avsluttes lånet og du betaler hverken flere avdrag eller renter.

Kredittkort

Kredittkort er et bankkort som virker slik at hvis du f.eks bruker kortet for å betale for 10 000 kr i en butikk, så blir ikke 10 000 kr trekt fra kontoen din − isteden låner du pengene fra banken. Etter en tid som er avtalt med banken vil banken kreve renter av gjelden din. Hvordan du betaler denne gjelden er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høye renter, så det lureste er å betale før rentekravet engang har startet!

9.6 Lån

Lånesum	Beløpet vi låner av banken.
Gjeld	Det vi til enhver tid skylder banken.
Rente	Prosent av gjeld som skal betales.
Avdrag	Det vi betaler ned på gjelden.
	Summen av avdragene tilsvarer lånesummen.
	Ny gjeld = Gammel gjeld − Avdrag
Renter	Gjeld · Rente
Terminbeløp	Avdrag + Renter
Serielån	Lån hvor avdragene er like store.
Annuitetslån	Lån hvor terminbeløpene er like store.
Kredittkort	Bankkort hvor man låner penger istedenfor å trekke dem ifra kontoen.

Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?

d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

Svar:

a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget:

$$\frac{300\,000\,\text{kr}}{5} = 60\,000\,\text{kr}$$

b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er:

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

c) Ut ifra oppgave b) vet vi at gjelden er 180 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da:

$$180\,000 \cdot 0{,}03 = 5\,400$$

Altså 5 400 kr.

d) Terminbeløpet tilsvarer avdrag pluss renter. Ut ifra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir:

$$60\,000\,\text{kr} + 5\,400\,\text{kr} = 65\,400\,\text{kr}$$

Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

Svar:

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0{,}064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Siden $terminbeløp = avdrag + renter$, må $avdrag = terminbeløp - avdrag$:

$$= 24\,000 - 6400 = 17\,600$$

Altså må du betale 17 600 i avdrag det første året.

9.2.2 Prosentvis endring over tid

Vi har sett hvordan vi må betale renter når vi låner penger, men hvis vi isteden sparer penger i en bank *får* vi renter. Renten kalles da *sparerente*. Hvis den årlige sparerenten f. eks. er 10%, betyr dette at vi hvert år skal få 10% av beløpet vi har spart i banken.

Si nå at vi setter 15 000 kr inn i en bank som gir nettopp 10% sparerente. Etter å ha spart i 1 år skal vi altså motta 10% av 15 000, og legge dette til de 15 000 vi allerede har. Dette blir det samme som å øke 15 000 med 10% (se *Regel 3.6*):

Per dags dato er 10% sparerente veldig urealistisk, tallet er valgt for å gjøre utregninger enkle.

$$\text{Antall kr etter 1 år} = 15\,000 \cdot 1{,}10 = 16\,500$$

Sparer vi også disse 16 500 kronene i et år, skal vi ha 10% av denne pengesummen. Det betyr at vi 2 år etter at vi startet å spare har:

$$\text{Antall kr etter 2 år} = 16\,500 \cdot 1{,}10 = 18\,150$$

Sparer vi også disse 18 150 kronene i et år, får vi at:

$$\text{Antall kr etter 3 år} = 18\,150 \cdot 1{,}10 = 19\,965$$

Utregningen for de to første årene går helt greit, men hva om vi ønsker å vite hvor mye penger vi har i banken om 20 år? Da blir det ganske kjipt å regne seg skritt for skritt fram til svaret. Men om vi skriver opp utregningen for de tre første årene kan vi oppdage en vakkert mønster. Det vi legger merke til er at alle regnestykkene består av forrige års pengesum ganger 1,10. Om vi nå skriver selve regnestykkene for pengesummene istedenfor svaret, får vi dette:

$$\text{Antall kr etter 1 år} = \overbrace{15\,000}^{\text{startbeløp}} \cdot 1{,}10 = 16\,500$$

$$\text{Antall kr etter 2 år} = \overbrace{15\,000 \cdot 1{,}10}^{\text{1 år}=16\,500} \cdot 1{,}10 = 18\,150$$

$$\text{Antall kr etter 3 år} = \overbrace{15\,000 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10}^{\text{2 år}=16\,500} \cdot 1{,}10 = 19\,965$$

Og bruker vi skrivemåten for potenser blir mønsteret enda tydeligere:

$$\text{Antall kr etter 1 år} = 15\,000 \cdot 1{,}10^1 = 16\,500$$

$$\text{Antall kr etter 2 år} = 15\,000 \cdot 1{,}10^2 = 18\,150$$

$$\text{Antall kr etter 3 år} = 15\,000 \cdot 1{,}10^3 = 19\,965$$

Mønsteret er altså at for å vite hvor mange penger vi har i banken tar vi startverdien og ganger med vekstfaktoren, opphøyd i antall år. F. eks. kan vi da finne at:

$$\text{Antall kr etter 20 år} = 15\,000 \cdot 1{,}10^{20} \approx 100\,912$$

Det samme mønsteret vil dukke opp i alle tilfeller hvor vi snakker om at noe endrer seg med et bestemt prosenttall over en viss tid:

9.7 Vekst eller nedgang over tid

$$\text{ny verdi} = \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{tid}}$$

Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% i årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

Svar:

Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Startverdien er 20 000 og tiden er 8:

$$20\,000 \cdot 1{,}02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

Eksempel 2

Du betaler 27 000 kr med et kredittkort som krever 1,4% rente for hver måned du betaler for seint.

a) Hvor mye har du i gjeld to år etter for sein betaling?

b) Hva er den årlige renten ved for sein betaling?

Svar:

a) Siden renten er 1,4%, er vekstfaktoren 1,014. Siden renten er månedlig må vi måle tiden i måneder, og to år er $2 \cdot 12 = 24$ måneder. Siden starverdien er 27 000, får vi:

$$27\,000 \cdot 1{,}014^8 \approx 37\,649$$

Etter to år har du altså ca 37 649 kr i gjeld.

b) Siden ett år er det samme som 12 måneder blir vekstfaktoren gitt ved:

$$1{,}014^{12} \approx 1.182$$

Eksempel 3

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% de neste fire årene. Hva er bilen i så fall verd om fire år?

Svar:

Siden den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88.
Starverdien er 300 000 og tiden er 4:

$$300\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca 179 908 kr om fire år.

9.3 Skatt

Om du har en inntekt må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

Obs! I eksamensoppgaver vil du oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi valgt å presentere skattereglene for 2018. Det viktigste er likevel ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene bruttolønn, fradrag, skattegrunnlag, tyrgdeavgift og nettolønn

9.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler *fagforeningskontigent* eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontigent er det du betaler for å være med i en fagforening.

9.8 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

	Bruttolønn
–	Fradrag
=	Skattegrunnlag

Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag 97 600 kr i minstefradrag, i tilleg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

Svar:

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	Bruttolønn
−	56 000	Personfradrag
−	97 600	Minstefradrag
−	1 000	Fagforeningskontigent
=	345 400	Skattegrunnlag

9.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsmottakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke Folketrygden. Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

9.9 Trygdeavgift

Alder	Trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
Under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?

b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

Svar:

a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% i tygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 1 230 kr i trygdeavgift. Fordi Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% i tygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

9.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

9.10 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 − 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 − 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 − 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt betales av bruttolønnen.

Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Fordi hele lønnen liger over 237 900 kr, må du betale 1,4% av $(237\,900 - 169\,000)$ kr $= 68\,900$ kr. Skatt for trinn 1 blir altså $68\,900\,\text{kr} \cdot 0{,}014 \approx 965\,\text{kr}$.
Trinn 2	Siden 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale 3,3% av $(550\,000 - 237\,900)$ kr $= 312\,100$ kr. Skatt for trinn 2 blir altså $312\,100\,\text{kr} \cdot 0{,}033 \approx 10\,299\,\text{kr}$.
Totalt	Totalt må du betale $965\,\text{kr} + 10\,299\,\text{kr} = 11\,264\,\text{kr}$ i trinnskatt.

9.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontigent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:

9.11 Nettolønn

	Bruttolønn
–	Fagforeningskontigent
–	23% skatt
–	Trygdeavgift
–	Trinnskatt
=	Nettolønn

Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforening) og har 409 900 som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til hennes?

Svar:

	550 000	Bruttolønn
–	1 500	Fradrag for fagforening
–	93 127	23% av skattegrunnlaget
–	45 100	8,2% av bruttolønn
–	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
=	399 009	Nettolønn

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra *delseksjon 9.3.3*.)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

9.4 Budsjett og regnskap

9.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter, en slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

Eksempel

Lisa prøver å tenke på sine månedlige inntekter og utfiter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på en gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar:

Inntekter	Budsjett
Lønn	4 000
Stipend	4 360
Sum	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
Sum	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

9.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *antatte* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* innteker og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut *regnskap* − *budsjett*, mens man for utgifter regner ut *budsjett* − *regnskap*. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (9.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utfitene hennes:

- Hun ble så opphengt i å lese om funksjoner at hun ikke fikk jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble derfor 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

Svar:

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	4 000	3 500	−500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
Sum	8 360	9 860	2 000
Utgifter			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	−2 400
Sum	5 700	7 800	1 900
Resultat	2 660	2 060	−600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut ifra budsjettet.

Oppgaver for kapittel 9

År	KPI	År	KPI
2017	105,5	2007	84.8
2016	103,6	2006	84.2
2015	100	2005	82.3
2014	97,9	2004	81
2013	95,9	2003	80.7
2012	93,9	2002	78.7
2011	93,3	2001	77.7
2010	92.1	2000	75.5
2010	92.1	1999	73.2
2009	89.9	1998	71.5
2008	88	1997	69.9

9.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

a) 1998 **b)** 2014 **c)** 2017

9.1.2 (H)

I 2016 var KPI 103,6. Hvor mye høyere var prisnivået i 2016 enn i 2015?

9.1.3

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

9.1.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

I 2010 var konsumprisindeksen 92,1. I 2014 var konsumprisindeksen 97,9. Helene hadde like stor kjøpekraft i 2014 som i 2010. I 2014 hadde hun en nominell lønn på 540 000 kroner. Hva var den nominelle lønna hennes i 2010?

9.1.5 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, Del 1).

I 2006 var indeksen for en vare 125. Varen kostet da 1 000 kroner. I 2016 var indeksen for den same varen 150. Hvor mye kostet varen i

2016 dersom prisen har fulgt indeksen?

9.2.1 (H)

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjette terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløp?

d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

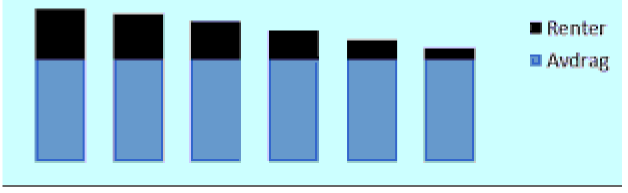
9.2.2 (H)

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

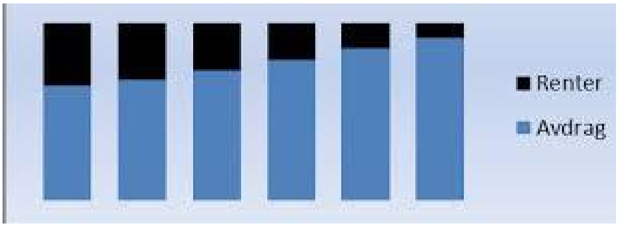
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

9.2.3 (H)

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

9.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

9.2.5 (H)

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn måneder som 30 dager).

a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?

b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?

c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

9.2.6

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2016, Del 2).

Christoffer har kjøpt ny båt til ein verdi av 850 000 kroner. Tenk deg at båten vil falle i verdi med 20 % det første året og så med 3,5 % per år de neste fem åra.

Hva vil verdien av båten vere etter 6 år?

9.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.

b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

9.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Hvem av de to betaler mest trygdeavgift (i antall kroner)?

9.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgave 9.3.1 og 9.3.2).

9.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i oppgave 9.3.1-9.3.3).

9.4.1 (H)

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

Grubleoppgave

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

Basisåret for konsumprisindeksen er nå 2015. Tidligere var basisåret 1998.

Da 1998 ble brukt som basisår, var konsumprisindeksen 139,8 i 2015 og 144,8 i 2016.

a) Vis at konsumprisindeksen i 1998 nå er 71,5.

b) Hva er nå konsumprisinndeksen i 2016?

Kapittel 10

Sannsynlighet

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

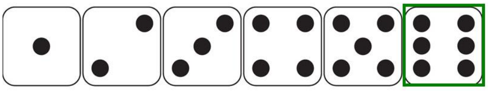
- lage døme og simuleringar av tilfeldige hendingar og gjere greie for omgrepet sannsyn
- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga i praktiske samanhengar

10.1 Grunnprinnsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør oss hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall* . Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse:

$$\text{sannsynlighet for en hendelse} = \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi det *å få en sekser* for en hendelse. Og fordi en terning har seks forskjellige sider, sier vi at det er seks mulige utfall. Av disse sidene er det bare én som er en sekser, derfor har vi ett gunstig utfall.



Sannsynligheten for å få en sekser er altså $\frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned}\text{sannsynlighet for å få en sekser} &= \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}}\\ &= \frac{\text{sider med sekser på}}{\text{totalt antall sider}}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi ofte enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive *få en sekser*, kan vi bruke bokstaven S, og for å indikere at vi spør om sannsynligheten for en hendelse bruker vi bokstaven P. Når vi skriver $P(S)$ betyr dette *sannsynligheten for å få en sekser*:

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* få en sekser? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen *å ikke få en sekser* skriver vi altså som $\bar{S}$. *Å ikke få en sekser* er det samme som *å få enten en ener, en toer, en treer, en firer eller en femmer*, derfor har denne hendelsen fem gunstige utfall. Det betyr at:

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

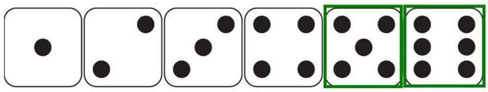
10.2 Hendelser med og uten felles utfall

10.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss nå i tillegg kalle hendelsen å *få en femmer* for F. Hendelsen *å få en femmer eller en sekser* skriver vi da som $F \cup S$. Det er to av seks sider på en terning som er fem *eller* seks, sannsynligheten for *å få en femmer eller en sekser* er derfor $\frac{2}{6}$:

Symbolet $\cup$ kalles *union.*

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret hadde vi fått ved å legge sammen sannsynlighetene $P(F)$ og $P(S)$:

$$P(F \cup S) = P(F) + P(S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(F \cup S)$ ved å legge sammen $P(F)$ og $P(S)$ kan vi gjøre fordi F og S ikke har noen *felles utfall.* F og S har ingen felles utfall på grunn av dette: Hvis man får en femmer, kan man umulig ha fått en sekser samtidig. Og får man en sekser, kan man umulig ha fått en femmer samtidig.

10.1 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser A og B som ikke har noen felles utfall, er sannsynligheten for A *eller* B lik sannsynligheten for A pluss sannsynligheten for B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød (R) *eller* en blå (B) kule?

Svar:

- Det er i alt fire mulige utfall.
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hendelsene R, B eller G som har felles utfall.
- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er: $P(R) = \frac{1}{4}$

- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er: $P(B) = \frac{2}{4}$.

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule blir derfor:

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

10.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk nå at vi kaster en terning og at vi godtar hendelsen *å få en sekser* (S) *eller* hendelsen *å ikke få en sekser* ($\bar{S}$). Vi har tidligere sett at $P(S) = \frac{1}{6}$ og at $P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$. Av *Regel 10.1* vet vi at sannsynligheten for *å få en sekser eller å ikke få en sekser* er:

$$\begin{aligned} P(S \cup \bar{S}) &= P(S) + P(\bar{S}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dette er egentlig ikke så overraskende, for kaster vi en terning er det to ting som kan skje: Enten får vi en sekser, eller så får vi det ikke. Summen $P(S) + P(\bar{S})$ er derfor summen av sannsynlighetene for alle hendelser som kan skje. Hvis vi "godtar" alle hendelser, så er alle utfall gunstige. Antall gunstige utfall blir derfor det samme som antall mulige utfall, og forholdet mellom dem blir da 1:

> Alle hendelser som kan skje? Hva med *få en ener*, *få en toer* osv.? Jo, de ligger alle innbakt i $\bar{S}$.

10.2 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle hendelser er alltid lik 1.

Slik som i tilfellet av *å få en sekser*/*å ikke få en sekser*, vil det alltid være slik at en hendelse A og den motsatte hendelsen $\bar{A}$ til sammen utgjør alle hendelser. Av *Regel 10.2* har vi da at:

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

10.3 Motsatte hendelser

Sannsynligheten for at en hendelse A *ikke* vil skje er gitt som:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. Èn elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

a) Hva er sannsynligheten for at en gutt (G) blir trukket?

b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

Svar:

a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er: $P(G) = \frac{13}{25}$

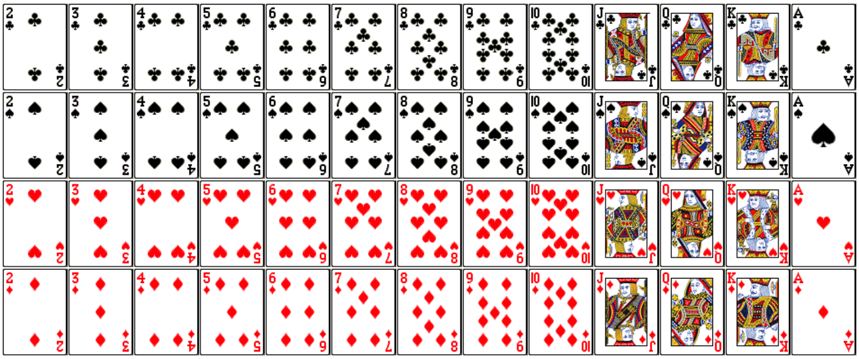
b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er:

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Merk: At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

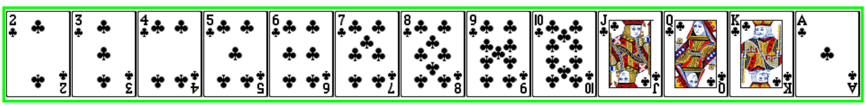
10.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av arten knekt, dame, kong eller ess kalles honnørkort.

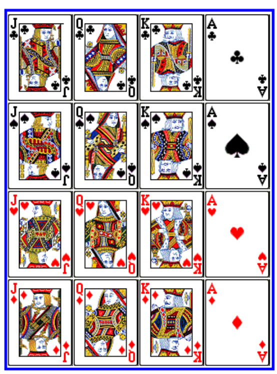


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for at kortet som trekkes er kløver *eller* honnør *eller* begge deler. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort og finner at antallet er 13.

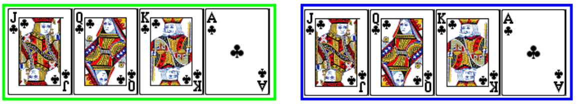
Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler: både kløverkort *og* honnørkor.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort og finner at antallet er 16.

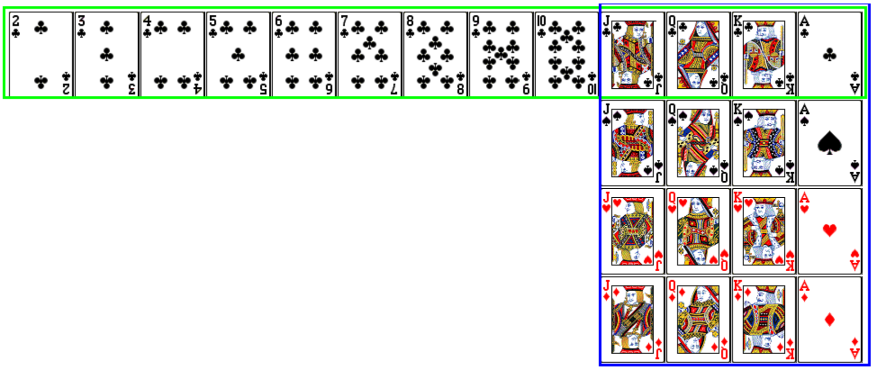


Så vi har altså telt opp $13 + 16 = 29$ gunstige utfall. Men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Men det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver, honnør *eller* begge deler – ja, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La nå K være hendelsen *trekke et kløverkort* og H være hendelsen *trekke et honnørkort*. Siden det er 25 kort som er kløver, honnør *eller* begge deler av i alt 52, får vi:

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at:

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver *og* honnørkort, dette skriver vi som:

Symbolet $\cap$ kalles *snitt*.

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at K og H har fire *felles utfall*. Sannsynligheten for $K \cap H$ blir:

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet $P(K), P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne

$P(K \cap H)$ på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

10.4 Hendelser med felles utfall

For to hendelser A og B er sannsynligheten for A *eller* B, lik sannsynligheten for A pluss sannsynligheten for B, fratrukket sannynligheten for *både* A og B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball (F), og 10 personer spiller handball (H). Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Tenk deg at du trekker ut én person fra klassen. Hva er sjansen for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

Svar:

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er: $P(F) = \frac{7}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller handball er: $P(H) = \frac{10}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er: $P(F \cap H) = \frac{4}{20}$

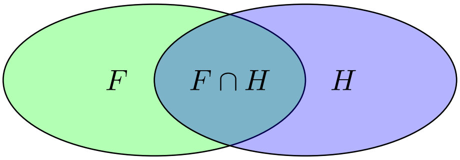
Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor:

$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

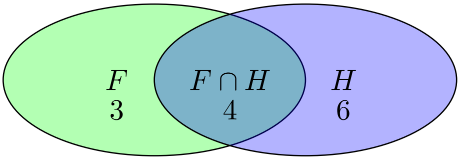
Sjansen er altså $\frac{13}{20}$.

10.2.4 Venndiagram

Noen ganger blir vi bedt om å sette opp informasjonen vi får i et *venndiagram*. Målet med et venndiagram er å lage en figur som beskriver antallet av de enkelte utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet over til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen (strekt sirkel) representerer de som spiller fotball (F) og den blå de som spiller handball (H). Fordi noen spiller *begge* sportene ($F \cap H$), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Nå vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og fire av disse gjør *begge* deler. Dette kan vi skrive inn i diagrammet vårt på følgende måte:



Diagrammet forteller slik at tre personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. Men så er det fire stykker som spiller *både* fotball og handball, til sammen er det derfor syv som spiller fotball og ti som spiller handball.

Eksempel 1

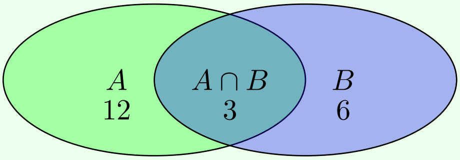
I en matematikklasse på Akademiet VGS Ålesund er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

a) Sett opp et venndiagram som beskriver informasjonen som er gitt.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss eller båt til skolen?

Svar:

a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *bare* tar buss og $9 - 3$ som *bare* tar båt. Vi lar A bety *tar buss* og B bety *tar båt*, venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



b) Sannsynligheten for at en person tar buss eller båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tar buss eller båt. Siden det er 31 elever i alt å velge mellom, får vi at:

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 10 elever spiller fotball
- 8 elever spiller handball
- 6 elever spiller volleyball
- 2 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- ingen elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

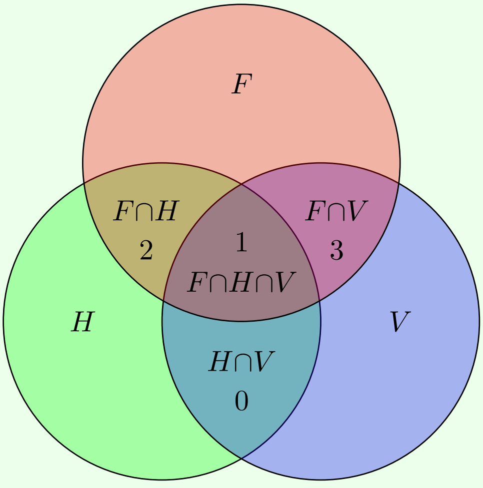
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen. La F bety *spiller fobtall*, H bety *spiller handball* og V bety *spiller volleyball.*

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

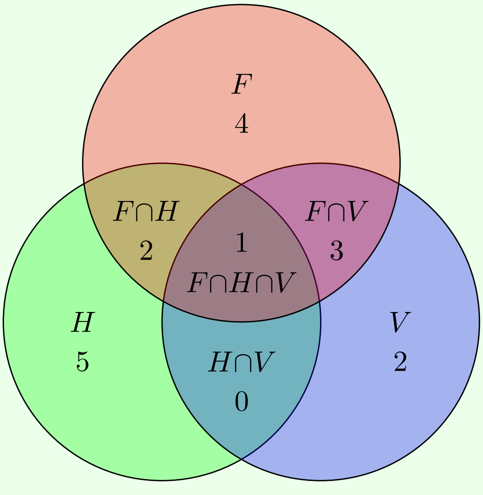
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

Svar:

Når vi skal lage et venndiagram er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at $10 - 2 - 1 - 3 = 4$ elever spiller *bare* fotball, $8 - 2 - 1 = 5$ spiller *bare* handball og $6 - 3 - 1 - 0 = 2$ spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $5 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2 + 0 = 17$ uniker elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke én av disse 17 i en klasse med 29 elever er $\frac{17}{29}$.

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 10 som spiller fotball, er det $2 + 1 = 3$ som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor $\frac{3}{7}$.

10.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar M bety *får melk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
E			
$\bar{E}$			
sum			

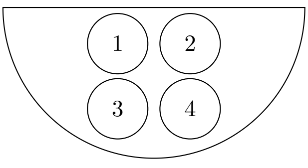
Deretter fyller vi inn tabellen ut ifra informasjonene vi har:

- får *både* melk og epple: $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk: $E \cap M = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
E	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

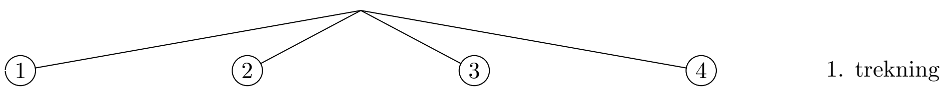
10.3 Gjentatte trekk

10.3.1 Kombinasjoner

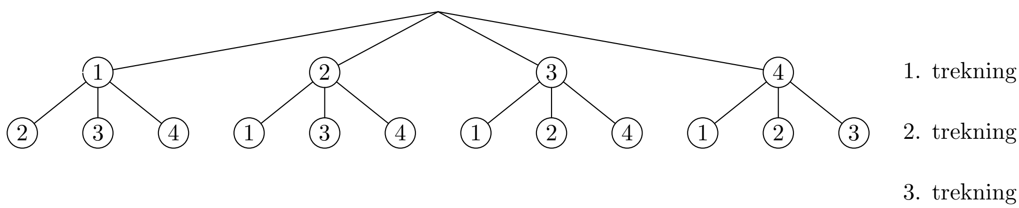


La oss tenke oss at vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp én og én kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Etterpå leser vi opp *kombinasjonen* vi har fått. Hvis vi for

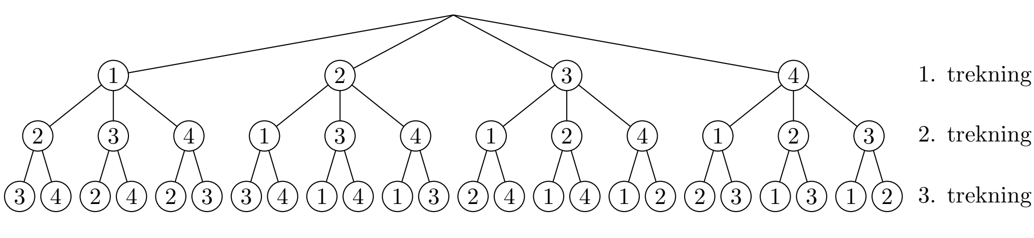
eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi kombinasjonen 2 4 3.
Legger vi kulene tilbake og foretar trekningen på nytt, får vi kanskje kombinasjonen 1 3 4, eller kanskje 4 1 2, eller en helt annen kombinasjon. Så hvor mange forskjellige kombinasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss. Før første trekning ligger det fire kuler i bollen, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp legger vi ut av bollen og trekker så andre gang. For hver av de fire veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå tre nye veier å følge −altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dette fordi vi har fire veier å gå i første trekning, for hver av disse tre veier å gå i andre trekning og for hver av disse to veier å gå i tredje trekning. Vi sier da at vi har 24 mulige kombinasjoner.

10.5 Kombinasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige kombinasjoner ved å gange sammen de mulige utfallene i hver trekning.

Eksempel

I en klasse med 15 personer trekker vi tilfeldig ut tre elever som skal danne et klasseråd. Hvor mange forskjellige klasseråd kan dannes?

Svar:

Å trekke ut tre personer kan sees på som en trekning hvor vi tilfeldig tar ut én og én, fram til vi har tre personer. Antall forskjellige klasseråd som da kan oppstå er:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{14}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{13}_{\substack{\text{mulige utfall}\\ \text{3. trekning}}} = 2730$$

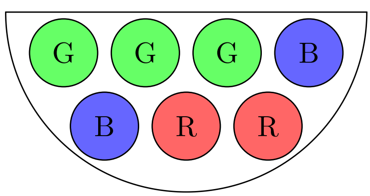
Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange mulige utfall har vi da?

Svar:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

10.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk



La oss tenke at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Vi spør oss nå hva sannsynligheten er for at vi trekker opp to grønne kuler. Hvis vi lar G bety *trekke en grønn kule*, kan vi skrive denne sannsynligheten som $P(GG)$.

For å komme fram til et svar, starter vi med å spørre oss hvor mange *gunstige* kombinasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige kombinasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* kombinasjoner er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da:

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} \tag{10.1}$$

La oss nå i hver trekning se på sannsynligheten for å få en grønn kule, med krav om at dette skal skje i begge trekninger. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, dermed får vi at:

$$P(G \text{ i første trekning}) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

Symbolet | betyr *gitt at ... har skjedd.* $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for *sannsynligheten for å trekke en grønn kule, gitt at en grønn kule er trukket.*

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Hvis vi nå ganger sammen sannsynligheten fra første trekning, med sannsynligheten fra andre trekning, ser vi at regnestykket blir det samme som i ligning (10.1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

10.6 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrives som $P(A|B)$.

Sannsynligheten for at A trekkes først, deretter B, deretter C og så videre (...) er:

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot ...$$

Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi lar B bety *blå kule* *trekkes* og R bety *rød kule trekkes*. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå kule, deretter en rød, og til slutt en blå?

Svar:

Sannsynligheten for først en blå, så en rød, så en blå kule, kan vi skrive som $P(BRB)$.

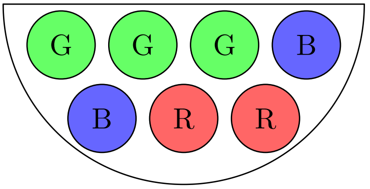
- Sannsynligheten for B i første trekning er: $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynligheten for R i andre trekning, *gitt* B i første er: $P(R|B) = \frac{2}{3}$.
- Sannsynligheten for B i tredje trekning, *gitt* B i første og R i andre er: $P(B|RB) = \frac{1}{2}$.

Vi får dermed:

$$
\begin{aligned}
P(BRB) = P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\
&= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{24}
\end{aligned}
$$

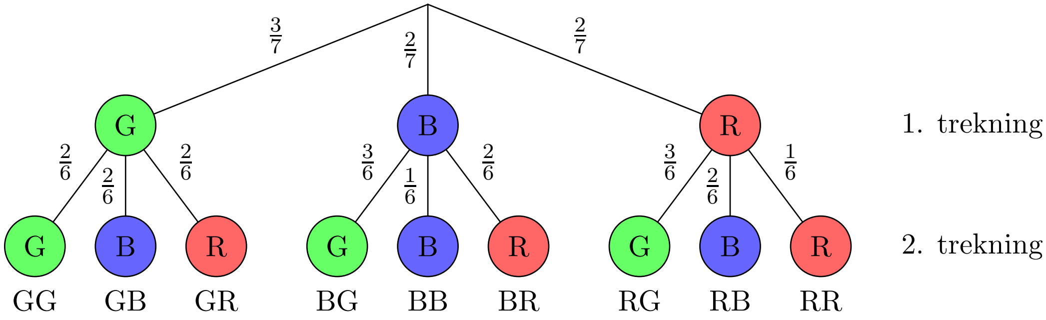
10.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte *Regel 10.6* for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 10.3, men langs alle veier skriver vi nå på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene G, B og R.
Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til G. Gitt at vi har trukket en

grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra G til G.
Og sånn fortseter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei:



For å få en rask oversikt over de forskjellige kombinasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet:
La oss nå bruke valgtret over for å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule. *GB* og *BG* er da de gunstige kombinasjonene. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til *GB*, finner vi at:

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne *P(BG)*:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at *GB eller BG* inntreffer blir (se *Regel 10.1*):

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\ &= \frac{12}{42} \end{aligned}$$

10.7 Kobinasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en kombinasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til kombinasjonen.

Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuer grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La G, B og R henholdsvis bety å trekke en blå, grønn eller rød kule.

a) Tegn et valgtre som skisserer hvilke kombinasjoner av B, G og R du kan få.

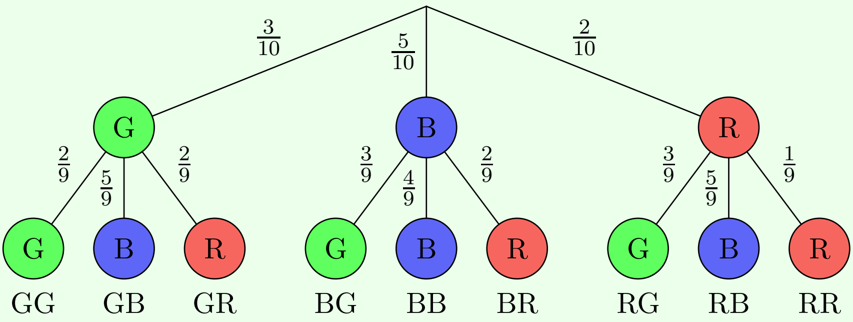
b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?

d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå eller én grønn kule?

Svar:

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at:

$$
\begin{aligned}
P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\
&= \frac{2}{90} \\
&= \frac{1}{45}
\end{aligned}
$$

c) Både kombinasjonen GB og BG gir oss én blå og én grønn kule. Vi starter med å finne sannsynligheten for hver av dem:

$$\begin{aligned}P(GB) &= \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\\ &= \frac{15}{90}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(BG) &= \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Sannsynligheten for GB *eller* BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$\begin{aligned}P(GB\cup BG) &= P(GB)+P(BG)\\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\\ &= \frac{2}{6}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for kombinasjonene GG, GB, GR, BG, BB, BR, RG og RB, men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sjansen for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av *Regel 10.3* har vi at:

$$\begin{aligned}P(\bar{R}) &= 1-P(R)\\ &= 1-\frac{1}{45}\\ &= \frac{45}{45}-\frac{1}{45}\\ &= \frac{44}{45}\end{aligned}$$

Sjasen for å få *minst* én blå eller én grønn kule er altså $\frac{44}{45}$.

Oppgaver for kapittel 10

10.2.1 (H)

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?

b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?

c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er er kløverkort? Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

10.2.2 (H)

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?

b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?

d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

10.2.3 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, del 1. Besvar denne oppgaven ved hjelp av et venndiagram.)

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50 % leser papiraviser, og 2 % leser ikke aviser.

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i et venndiagram eller i en krysstabell.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev ved skolen leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven ikke leser papiraviser.

10.2.4 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2015, del 1)

Forskere skal prøve ut en ny test for å avgjøre om en person er smittet av en bestemt sykdom.

Testen skal prøves ut på 360 personer. På forhånd vet forskerne at 60 av disse personene er smittet av sykdommen, mens resten ikke er smittet.

Det viser seg at 68 av personene tester positivt (det vil si at testen viser at de er smittet av sykdommen). Av disse 68 er det 10 personer som forskerne vet ikke er smittet.

a) Tegn av og fyll ut krysstabellen nedenfor.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			
Tester ikke positivt			
Sum			

b) Bestem sannsynligheten for at en person som er smittet, tester positivt.

c) Bestem sannsynligheten for at en person som tester positivt, ikke er smittet.

10.3.1 (H)

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2015, del 1)

Tenk deg at du har ni flasker med smoothie i kjøleskapet, to «Surf», tre «Jump» og fire «Catch». Du tar tilfeldig to flasker.

a) Bestem sannsynligheten for at du ikke tar en «Jump»-smoothie.

b) Bestem sannsynligheten for at du tar én «Surf»- og én «Catch»-smoothie.

Excel

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre greie for og regne med prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og beregne inntekt, skatt og avgifter
- vurdere forbruk og bruk av kredittkort og sette opp budsjett og regnskap ved hjelp av regneark
- undersøke og vurdere ulike former for lån og sparing

E.1 Introduksjon

Når du åpner et Excelark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.).Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for

å forstå Excel. I figuren har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3* og *kolonne B* krysser hverandre:

	A	B	C
1			
2			
3			
4			

I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

Ukelønnen til Ole er *timelønn* · *timer i uka*. Denne utregningen kan vi gjøre ved å skrive `=250*7` i celle B4:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

E.2 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive `=B2*B3`:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

Merk: Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist her.

E.3 Kopiering av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage at ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne videoen. Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi =7 i celle B4. Etterpå kopierer vi (det er helt avgjørende at man trykker musepekeren helt nede i høyre hjørne) cellen *bortover* til C2 og D2.

2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.

3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i videoen og figurene over kan vi ta med oss tre generelle regler:

1. For å kopiere tall må man skrive = foran.

2. Hver gang man kopierer en i formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)

3. Hver gang man kopierer en formel i én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

Låsing av celler

Når man kopierer celler er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemetoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi $ foran `B` i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne videoen, og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=$B1*B6	=$B1*C6	=$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* isteden må vi sette dollaren foran radnummeret, slik som vist her. Resultatet blir dette:

	A	B	C
1	Låst celle	10	
2			
3	Tall 1	15	150
4	Tall 2	25	250
5	Tall 3	35	350

	A	B	C
1	Låst celle	10	
2			
3	Tall 1	15	=B$1*B3
4	Tall 2	25	=B$1*B4
5	Tall 3	35	=B$1*B5

E.4 Småtriks

- Sum bort og sum ned
- Justere bredde på rad/kolonne
- Sette inn rad/kolonne
- Formelvisning
- Regne med prosenttall
- Endre antall desimaler

Oppgaver for Excel

Obs! I eksamensoppgaver vil du oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi valgt å presentere skattereglene for 2018. Det i

E.1

Gjør oppgave 9.3.4 og 9.4.1 i Excel.

E.2

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

E.3

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave E.2b, hvilket lån koster mest penger?

E.4

Sjekk at du i oppgave E.2 og E.3 har fått samme svar som nettsiden laanekalkulator.no. (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

E.5

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen høsten 2017.)

Per har deltidsjobb i en matvarebutikk. Han er ikke sikker på hvor mye han kommer til å tjene i løpet av 2017. Han kan velge mellom to alternative skattetrekk.

Alternativ 1 – Frikort

Han kan tjene inntil 55 000 kroner uten skattetrekk. Dersom han tjener mer enn 55 000 kroner, får han et skattetrekk på 50 % av den delen av lønna som er over 55 000 kroner.

Alternativ 2 – Prosentkort

Han får et skattetrekk på 10 % av alt han tjener.

Anta at Per kommer til å tjene 60 000 kr i 2017.

a) Bestem Pers nettolønn med hvert av alternativene ovenfor.

Per ønsker å lage en oversikt i et regneark for å finne ut hvor mye han vil få i nettolønn ved ulike inntekter etter de to alternativene ovenfor. I regnearket nedenfor har vi lagt inn ulike mulige inntekter for Per i 2017.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			Alternativ 1 - Frikort			Alternativ 2 - Prosentkort	
3			Fribeløp:	kr 55 000		Fribeløp:	kr 0
4			Trekkprosent:	50 %		Trekkprosent:	10 %
5							
6	Inntekt		Skattetrekk (kroner)	Nettolønn		Skattetrekk (kroner)	Nettolønn
7	kr 56 000						
8	kr 57 000						
9	kr 58 000						
10	kr 59 000						
11	kr 60 000						
12	kr 61 000						
13	kr 62 000						
14	kr 63 000						
15	kr 64 000						
16	kr 65 000						
17	kr 66 000						
18	kr 67 000						
19	kr 68 000						
20	kr 69 000						
21	kr 70 000						
22	kr 71 000						
23	kr 72 000						
24	kr 73 000						
25	kr 74 000						
26	kr 75 000						

b) Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formler i de blå cellene og beregne skattetrekk og nettolønn.

c) Hvor mye må Per tjene for at de to alternativene skal gi nøyaktig like stort skattetrekk?

E.6

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen våren 2016.)

Fra og med måneden etter at et barn blir født, og til og med måneden før barnet fyller 18, får foreldrene utbetalt barnetrygd. Satsen for barnetrygd har vært 970 kroner per barn per måned siden 1996.

Stian ble født i september 1996.

a) Hvor mye fikk foreldrene hans totalt utbetalt i barnetrygd?

Tabellen til høyre viser konsumprisindeksen hvert år fra 1996 til 2015.

Stian mener at satsen for barnetrygd burde vært regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

b) Vis at satsen for barnetrygd da skulle vært 1 423 kroner per barn per måned i 2015.

c) Lag et regneark som viser hvor mye Stians foreldre totalt ville fått utbetalt dersom satsen for barnetrygd hvert år hadde blitt regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

År	KPI
1996	95,3
1997	97,8
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4
2012	131,4
2013	134,2
2014	136,9
2015	139,8

E.7

(Oppgaven er hentet fra del 2, eksamen våren 2016.)

I regnearket nedenfor har vi lagt inn timelønn, skatteprosent og antall timer Sara, Vilde og Peder arbeidet i juli.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid			
6	Lønn for overtidsarbeid			
7	Bruttolønn			
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,3 %		

a) Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formler i de blå cellene og beregne bruttolønn, skattetrekk og nettolønn.

Sara har regnet ut at hun i gjennomsnitt betalte 20,3 % i skatt av bruttolønnen hun hadde i juli. Hun har derfor satt opp at hun har en gjennomsnittlig skatteprosent på 20,3.

b) Vis hvilke beregninger Sara har gjort. Legg inn formler i de røde cellene i siste rad i regnearket fra oppgave a), slik at du også får med gjennomsnittlig skatteprosent for Vilde og Peder.

GeoGebra

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og utan digitale verktøy
- redegjøre for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempel, også digitalt

G.1 Skrive inn en funksjon

Funksjon

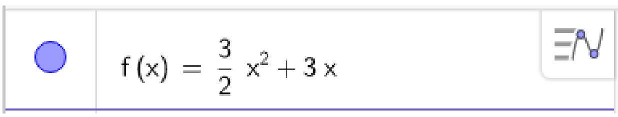
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 3$$

For å bruke $f(x)$ i GeoGebra, skriver vi:

```
3/2x^2+3x
```

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet f. I algebrafeltet får vi derfor:



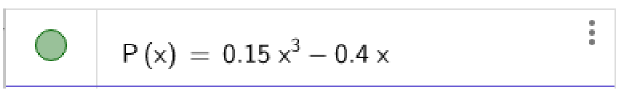
Hvis vi istedenfor har funksjonen

$$P(x) = 0{,}15x^3 - 0{,}4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra . Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet $P(x)$. Vi skriver da:

```
P(x)= 0.15x^3 - 0.4x
```

og får:



ADVARSEL: Man kan aldri gi funksjoner navnet $y(x)$ i GeoGebra. y kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså $y = ax + b$, hvor a og b er to valgfrie tall.

Linje

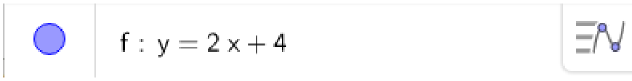
Si vi har dette uttrykket for ei linje:

$$y = 2x + 4$$

I GeoGebra lager vi denne linjen ved å skrive akkurat det samme:

```
2x+4
```

Og får dette:



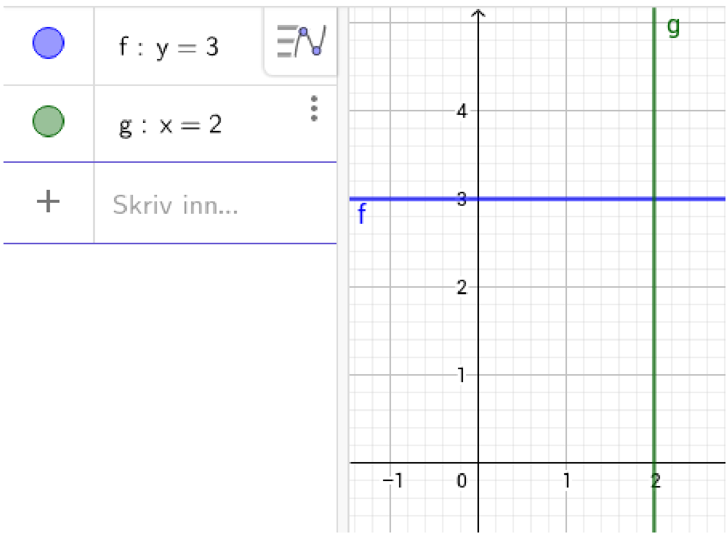
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på y-aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på x-aksen skriver vi:

```
y = 3
```

og

```
x =2
```

Da får vi denne figuren:



G.2 Finne verdien til en funksjon/linje

Funksjon

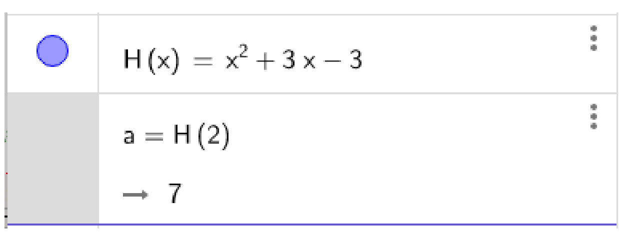
Si vi har funksjonen

$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis ønsker å vite hva $H(2)$ er, skriver vi

```
H(2)
```

som resulterer i dette:



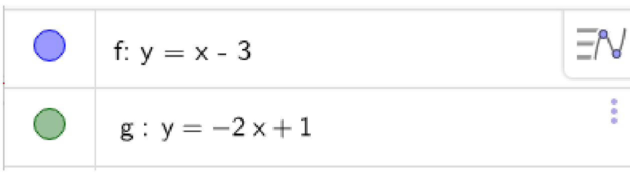
Da vet vi at $H(2) = 7$.

Linje

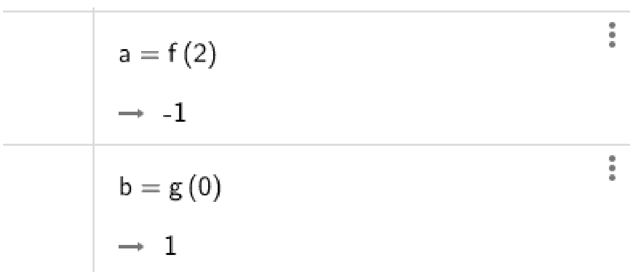
Skriver vi inn ei linje blir saken litt annerledes, noe vi her skal vise ved å bruke de to linjene gitt ved uttrykkene:

$$y = x - 3$$
$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse linjene inn i GeoGebra og får:



Ønsker vi nå å finne hva verdien til $y = x - 3$ er når $x = 2$, må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for f. Svaret vi søker får vi da ved å skrive $f(2)$. Ønsker vi samtidig å vite hva $y = -2x + 1$ er når $x = 0$ må vi skrive $g(0)$:



G.3 Finne skjæringspunkt

Se videoen skj.

G.4 Finne nullpunkt

Se videon nullpkt.

G.5 Finne topp- eller bunnpunkt

Se videoen ekstrmpkt.

G.6 Tegne linjen mellom to punkt

Se videoen linpkt.

G.7 Tegne graf på gitt intervall

I denne videoen her vi tegnet inn funksjonen:

$$f(x) = 0.0.0013x^3 - 0.59x^2 + 61x + 2000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

G.8 Oppgaver

G.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

G.2

a) Tegn punktene $(-1{,}2)$ og $(2{,}8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

G.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Fasit

Kapittel 1

1.1.1 a) 4 **b)** -48 **c)** 90 **d)** -8

1.2.1 a) 31 **b)** -7 **c)** 6 **d)** 3

Kapittel 2

2.1.1 a) 0,5 **b)** 2 **c)** 0,2 **d)** 0,75

2.2.1 $\frac{20}{3}$ **b)** $-\frac{18}{5}$

2.2.2 $\frac{18}{3}$ (Aller helst bør man regne ut at $18 : 3 = 6$.)

2.3.1 a) $\frac{4}{15}$ **b)** $-\frac{3}{30}$

2.4.1 a) $\frac{20}{27}$ **b)** $\frac{14}{32}$ $(= \frac{7}{16})$

2.4.2 $\frac{8}{15}$

2.6.1 a) $\frac{7}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$

2.6.2 a) $\frac{16}{24}$ **b)** $\frac{33}{27}$

2.7.1 a) $\frac{37}{30}$ **b)** $\frac{5}{12}$

2.8.1 a) $\frac{12}{25}$ **b)** $\frac{24}{9}$ $(= \frac{8}{3})$

2.8.3 a) $\frac{h}{2}$ **b)** $\frac{1}{2h}$ **c)** $\frac{\pi a}{2b}$

2.8.4 $\frac{a}{2}$

Kapittel 4

4.2.1 a) $x = 13$ **b)** $x = -5$

4.3.1 a) $x = 20$ **b)** $x = 4$

4.4.1 a) $x = 21$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 15$

4.5.1 a) $x = \frac{22}{3}$ **b)** $x = 6$ **c)** $x = -15$ **d)** $x = 2$

4.6.2 Ola 4000 kr, Kari 8000 kr

4.6.3 0,2 m

4.6.4 1300 kr

Kapittel 9

9.1.1 a) ca 1,40 kr **b)** ca. 1.02 kr **c)** ca 0.95 kr

9.1.2 3,6%

9.1.3 I 2017 (Reallønn 2017: ca. 464 455 kr, Reallønn 2012: ca 436 635 kr)

9.1.4 ca 580 008 kr

9.1.5 1200 kr

9.2.1 a) 20 000 kr **b)** 80 000 kr **c)** 1 6000 **d)** 21 600

9.2.2 5 783 kr

9.2.3 a) Bilde (a) er serielån fordi avdragene er like store. Bilde (b) er annuitetslån fordi terminbeløpene (renter + avdrag) er like store.

9.2.4 ca. 63 000 kr

9.2.5 a) 55 000 kr **b** 60 500 kr **c)** 33 000 kr

9.2.6 ca. 569 000 kr

9.3.1 a) 210 300 kr **b** 48 369 kr

9.3.2 Mira betaler 16 400 kr og Børge betaler 17 850 kr. Børge betaler mest.

9.3.3 Trinn 1: ca. 965 kr, Trinn 2: ca 3699 kr (totalt ca. 4664 kr)

9.3.4 279 117 kr

9.4.1

a)

Inntekter	Budsjett
Nettolønn	23 000
Sum	23 000

Utgifter	
Leia av hybel	6 000
Mat	4 500
Annet	1 500
Sum	12 000

Resultat	11 000

b)

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	23 000	23 000	0
FLAX-gevinst	0	1 000	1 000
Sum	23 000	24 00	1 000
Utgifter			
Leia av hybel	6 000	6 000	0
Mat	4 500	5 500	−1 000
Annet.	1 500	1 800	−300
FLAX-lodd	0	100	−100
Sum	12 000	13 400	−1 400
Resultat	11 000	11 600	−400

11 600 i overskudd. Overskuddet 400 *mindre* enn budsjettert.

Kapittel 10

Obs! Mange av brøkene i disse oppgavene kan forkortes, men fordi vi noen ganger skal bruke svar fra en deloppgave i andre utregninger, forkorter vi ikke.

10.2.1 a) $\frac{13}{52}$ **b)** $\frac{26}{52}$ **c)** $\frac{52}{52} - \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$, $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$
10.2.2 a) $\frac{4}{52}$ **b)** $\frac{13}{52}$ **c)** $\frac{16}{52}$ **d)** $\frac{36}{52}$