0.1 Å finne størrelser

Likningar, formlar og funksjonar (og utttrykk) er omgrep som dukkar i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handlar om det same; *dei uttrykker relasjonar mellom størrelsar*. Når alle størrelsane utanom den éine er kjent, kan vi finne denne enten direkte eller indirekte.

0.1.1 Å finne størrelser direkte

Mange av regelboksane i boka inneheld ein formel. Når ein størrelse står aleine på éi side av formelen, seier vi at det er ein formel for *den* størrelsen. For eksempel inneheld *Regel* **??** ein formel for 'målestokk'. Når dei andre størrelsane er gitt, er det snakk om å sette verdiane inn i formelen og regne ut for å finne den ukjente, 'målestokk'.

Men ofte har vi berre ei skildring av ein situasjon, og da må vi sjølv lage formlane. Da gjeld det å først identifisere kva størrelsar som er til stades, og så finne relasjonen mellom dei.

Eksempel 1

For ein taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for kvar kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp eit uttrykk for kor mykje taxituren kostar for kvar kilometer du blir kjørt.

b) Hva kostar ein taxitur på 17 km?

Svar:

a) Her er det to ukjente størrelsar; 'kostnaden for taxituren' og 'antal kilometer køyrt'. Relasjonen mellom dei er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antal kilometer køyrt}$$

b) Vi har no at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren kostar altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelsar, får ein kortare uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antal kilometer køyrt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan ein gjerne bruke skrivemåten for funksjonar:

$$k(x) = 50 + 15x$$

0.1.2 Å finne størrelsar indirekte

Når formlane er kjente

Eksempel 1

Vi har sett at strekninga s vi har køyrt, farta f vi har halde, og tida t vi har brukt kan settast i samanheng via formelen[1]:

$$s = f \cdot t$$

Dette er altså ein formel for s. Ønsker vi i staden ein formel for f, kan vi gjere om formelen ved å følge prinsippa for likningar[2]:

$$s = f \cdot t$$
$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$
$$\frac{s}{t} = f$$

[1]strekning = fart · tid

[2]Sjå MB, s. 121.

Eksempel 2

Ohms lov seier at strømmen I gjennom ein metallisk ledar (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

der U er spenninga og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til ein formel for R.

Strøm målast i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\mathrm{A}$ og spenninga $12\,\mathrm{V}$, kva er da resistansen?

Svar:

a) Vi gjer om formelen slik at R står aleine på éi side av likskapsteiknet:

$$\begin{aligned} I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\ I \cdot R &= U \\ \frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\ R &= \frac{U}{I} \end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 3

Gitt ein temperatur T_C målt i antall grader Celsius ($°C$). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit ($°F$) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til ein formel for T_C.

b) Vis ein temperatur er målt til $59°F$, kva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar:

a) Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finn at

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

Når formlene er ukjente

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å fare på ein klassetur som til saman kostar 11 000 kr. For å dekke utgiftane har de allereie skaffa 2 000 kr, resten skal skaffast gjennom loddsalg. For kvart lodd som selgast, tener de 25 kr.

a) Lag ei ligning for kor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løys likninga.

Svar:

a) Vi starter med å tenke oss reknestykket i ord:

pengar allereie skaffa+antal lodd·pengar per lodd = prisen på turen

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter[1] *antall lodd* med x, og setter verdiene til de andre størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

[1] Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar:

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli:

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får:

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

0.2 Funksjoners egenskaper

Denne seksjonen tar utgangspunkt i at leseren er kjent med funksjoner, se MB, kapittel 9.

0.2.1 Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt

0.1 Skjæringspunktene til grafer

Et punkt hvor to funksjoner har samme verdi kalles et *skjæringspunkt* til funksjonene.

Eksempel 1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

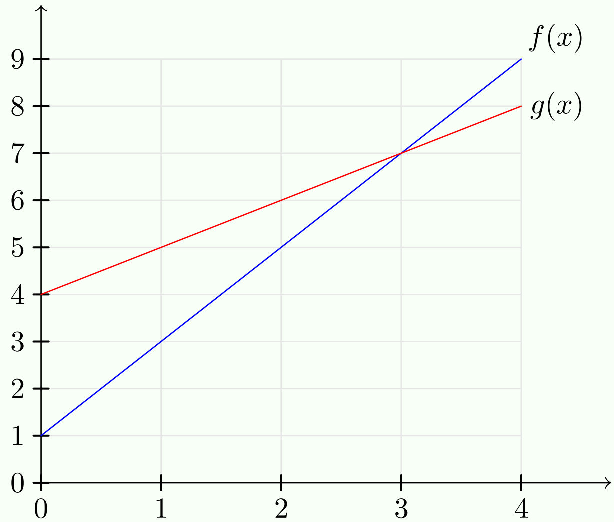
Finn skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$?

Svar:

Vi kan finne skjæringspunktet både ved en *grafisk* og en *algebraisk* metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i det samme koordinatsystemet:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 3$, og da har begge funksjonene verdien 7. Altså er skjæringspunktet $(3, 7)$.

Algebraisk metode

At $f(x)$ og $g(x)$ har samme verdi gir likningen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x + 1 &= x + 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Videre har vi at

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$g(3) = 3 + 4 = 7$$

Altså er $(3, 7)$ skjæringspunktet til grafene.

Merk: Det hadde selvsagt holdt å bare finne én av $f(3)$ og $g(3)$.

Eksempel 2

En klasse planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene same pris?

Svar:

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

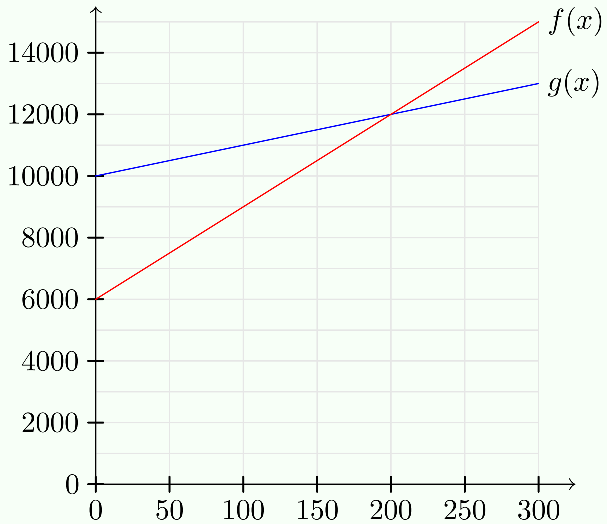
$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Videre løser vi nå oppgaven både med en grafisk og en algebraisk metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i samme koordinatsystem:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 200$. Dette betyr at busselskapene tilbyr samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

Algebraisk metode

Busselskapene har samme pris når

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\
4\,000 &= 20x \\
x &= 200
\end{aligned}
$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

0.2.2 Null-, bunn- og toppunkt

0.2 Null-, bunn- og toppunkt

- **Nullpunkt**
  En x-verdi som gir funksjonsverdi 0.
- **Bunnpunkt**
  Punkt hvor funksjonen har sin laveste verdi.
- **Toppunkt**
  Punkt hvor funksjonen har sin høyeste verdi.

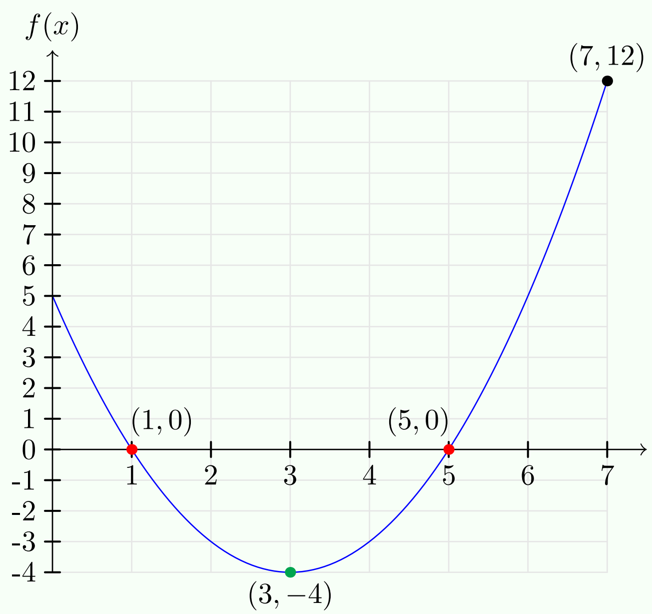
Eksempel 1

Funksjonen

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \qquad , \qquad x \in [0, 7]$$

har

- Nullpunkt $x = 1$ og $x = 5$.
- Bunnpunkt $(3, -4)$.
- Toppunkt $(7, 12)$.



Hvorfor er nullpunkt en verdi?

Det kan kanskje virke litt rart at vi kaller x-verdier for nullpunkt, punkt har jo både en x-verdi og en y-verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at $y = 0$, og da er det tilstrekkelig å vite x-verdien for å avgjøre hvilket punkt det er snakk om.

0.3 Likningssett

Vi har så langt sett på likninger med ett ukjent tall, men det kan også være to eller flere tall som er ukjente. Som regel er det slik at

- er det to ukjente, trengs minst to likninger for å finne løsninger som er konstanter.
- er det tre ukjente, trengs minst tre likninger for å finne løsninger som er konstanter.

Og slik fortsetter det. Likningene som gir oss den nødvendige informasjonen om de ukjente, kalles et *likningssett*. I denne boka skal vi konsentrere oss om lineære likninger med to ukjente, som betyr at likningssettet består av uttrykk for lineære funksjoner.

0.3.1 Innsettingsmetoden

0.3 Innsettingsmetoden

Et lineært likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. bruke den éne likningen til å finne et uttrykk for x.
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likningen, og løse denne med hensyn på y.
3. sette løsningen for y inn i uttrykket for x.

Merk: I punktene over kan selvsagt x og y bytte roller.

Eksempel 1

Løs likningssettet, og sett prøve på svaret.

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar:

Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 5 + y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (II):

$$\begin{aligned} 5 + y + y &= 9 \\ 2y &= 9 - 5 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 5 + y \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Vi setter prøve på svaret:

$$x - y = 7 - 2 = 5$$

$$x + y = 7 + 2 = 9$$

Eksempel 2

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \tag{I}$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \tag{II}$$

Svar:

Ved innsettingsmetoden kan man ofte spare seg for en del utregning ved å velge likningen og den ukjente som gir det fineste uttrykket innledningsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for x:

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $x = 1$ og $y = 3$.

Eksempel 3

Løs likningssettet

$$3x - 4y = -2$$

$$9y - 5x = 6x + y \qquad \text{(II)}$$

Svar:

Vi velger her å bruke (I) til å finne et uttrykk for y:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -2 \\ 3x + 2 &= 4y \\ \frac{3x+2}{4} &= y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for y inn i (II):

$$\begin{aligned} 9y - 5x &= 6x + y \\ 9 \cdot \frac{3x+2}{4} - 5x &= 6x + \frac{3x+2}{4} \\ 9(3x+2) - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ 27x + 18 - 20x &= 24x + 3x + 2 \\ -20x &= -16 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for x inn i uttrykket for y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+2}{4} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{4}{5} + 2}{4} \\ &= \frac{\frac{22}{5}}{4} \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

Altså er $x = \frac{4}{5}$ og $y = \frac{11}{10}$.

Eksempel 4

”Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?".

Svar:
"Broren min er dobbelt så gammel som meg." betyr at

$$\text{brors alder} = 2 \cdot \text{min alder}$$

"Til sammen er vi 9 år gamle." betyr at

$$\text{brors alder} + \text{min alder} = 9$$

Erstatter vi 'brors alder' med "$2 \cdot$ min alder", får vi

$$2 \cdot \text{min alder} + \text{min alder} = 9$$

Altså er

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{min alder} &= 9 \\ \frac{\cancel{3} \cdot \text{min alder}}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\ \text{min alder} &= 3 \end{aligned}$$

"Jeg" er altså 3 år gammel.

0.3.2 Grafisk metode

0.4 Grafisk løsning av likningssett

Et lineært likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. omskrive de to likningene til uttrykk for to linjer.
2. finne skjæringspunktet til linjene.

Eksempel 1

Løs likningsettet

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar:

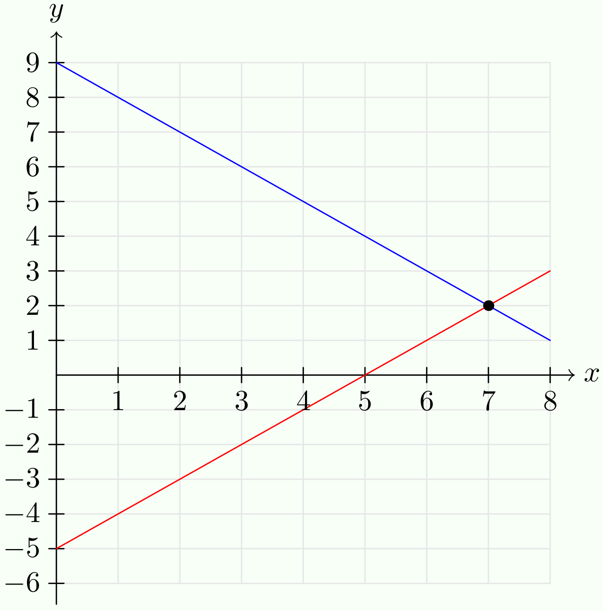
Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Av (II) har vi at

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y &= 9 - x \end{aligned}$$

Vi tegner disse to linjene inn i et koordinatsystem:



Altså er $x = 7$ og $y = 2$.