0.1 Funksjoner

Se for deg at du og klassen skal på klassetur. For hver person som er med må det betales 200 kr for overnattig, i tillegg så koster leie av buss med sjåfør til sammen 5000 kr. For å finne ut hvor mye penger klassen må samle inn, lager dere følgende regnestykke:

$$\begin{aligned}\text{penger som må samles inn} &= \text{pris for overnatting per elev} \cdot \text{antall elever} + \text{bussutgifter} \\ &= 200 \cdot \text{antall elever} + 5000\end{aligned}$$

I mange sammenhenger kan det være litt tungvingt å bruke lange uttrykk som *penger som må samles inn* og *antall elever*. Det kan derfor være lurt av oss å bruke enkeltbokstaver istedenfor. La oss nå si at P betyr penger som må samles inn, mens x betyr antall elever. Regnestykket vårt blir da:

$$P = 200x + 5000$$

Siden vi uansett må betale 5000 kr i bussutgifter, er det slik at det eneste som forandrer på prisen vår P, er antall elever x som skal være med. Vi sier da at P er en funksjon av x. For å tydeliggjøre at vi må vite x for å finne P, skriver vi ofte $P(x)$. $P(x)$ uttaler vi som *P av x*.

$$P(x) = 200x + 5000$$

0.2 Verdien av en funksjon

Når vi har en funksjon som $P(x)$ kan vi finne verdien til denne hvis vi vet hva x er. Så hva blir prisen dersom antall elever er 20? I uttrykket for $P(x)$, setter vi da inn at $x = 20$:

$$P(20) = 200 \cdot 20 + 5000 = 9000$$

Hvis x istedenfor er 30 så erstatter vi alle x-er i uttrykket for $P(x)$ med 30:

$$P(30) = 200 \cdot 30 + 5000 = 11000$$

0.1 Verdien av en funksjon når x er kjent

Dersom vi kjenner verdien til x kan vi finne den tilhørende verdien til funksjonen $f(x)$ ved å sette verdien til x inn i uttrykket for $f(x)$.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 3x + 4$. Finn verdien til f når $x = 8$.
Svar: $f(8) = 3 \cdot 8 + 4 = 24 + 4 = 28$

Eksempel 2

Gitt funksjonen $h(x) = x^2 + 3x + 2$. Finn $h(-2)$.
Svar: $h(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0$

0.3 Verdien av x når $f(x)$ er kjent

Noen ganger vet vi verdien til en funksjon. Da lurer vi ofte på hva verdien til x er. La oss si vi vet at prisen for klasseturen vi har sett på endte opp med å bli 9000 kr. Hvor mange elever var da med?
Siden vi vet at $P(x) = 9000$ kan vi nå skrive:

$$9000 = 200x + 5000$$

Dette er en førstegradsligning med x som ukjent.

$$\begin{aligned} 9000 &= 200x + 5000 \\ 9000 - 5000 &= 200x \\ \frac{4000}{200} &= \frac{\cancel{200}x}{\cancel{200}} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Altså er 20 elever med på turen.

0.2 Verdien av x når $f(x)$ er kjent

Dersom vi kjenner verdien til funksjonen $f(x)$, får vi en ligning for x.

Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = 3x + 4$. Hva er x når $f(x) = 7$?
Svar:

$$\begin{aligned} 7 &= 3x + 4 \\ 7 - 4 &= 3x \\ \frac{3}{3} &= \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Eksempel 2

Gitt funksjonen $h(x) = x^2 + 3$. Finn x når $h(x) = 19$.
Svar:

$$\begin{aligned} 19 &= x^2 + 3 \\ 19 - 3 &= x^2 \\ 16 &= x^2 \\ \sqrt{16} &= \sqrt{x^2} \\ \pm 4 &= x \end{aligned}$$

0.4 Tegning av grafen til en funksjon

Som vi har sett, vil verdien til en funksjon $f(x)$ avhenge av hva x er. For funksjonenen $f(x) = x^2 - 3x + 2$ kan vi lage oss en tabell som viser hvilke x-verdier vi har plukket ut og hvilke verdier av $f(x)$ disse resulterer i. La oss plukke ut $-3, -2, -3, 0, 1, 2, 3$ og 4 som x-verdier. Vi må da regne ut $f(x)$ for hver av dem:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 11 \\ f(-1) &= (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 5 \\ f(0) &= 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 1 \\ f(1) &= 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = -1 \\ f(2) &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = -1 \\ f(3) &= 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 9 - 9 + 2 = 1 \\ f(4) &= 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 16 - 12 + 2 = 5 \end{aligned}$$

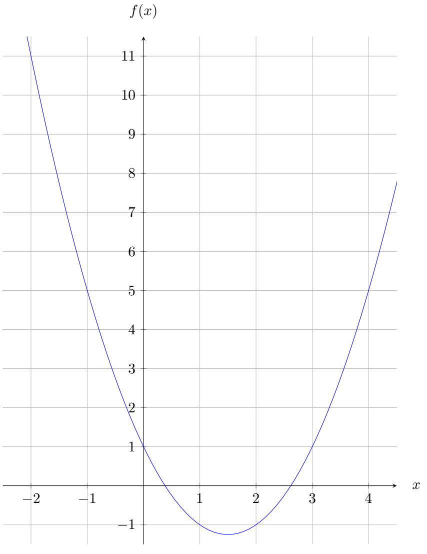
Husk parantes når x er et negativt tall.

I tabellen vi nå lager skriver vi x-verdiene vi har plukket ut i første rad og de tilhørende verdiene av $f(x)$ i andre rad:

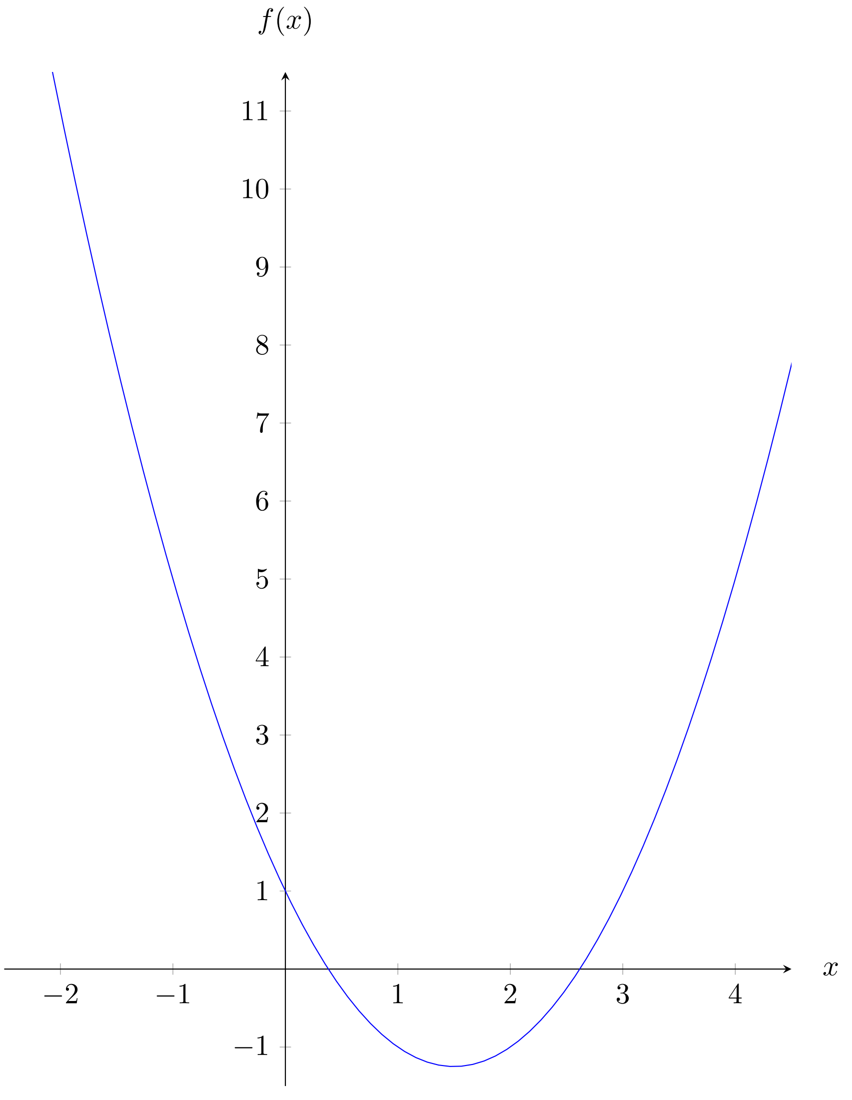
x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	11	5	1	-1	-1	1	5

Tallene fra tabellen kan vi markere som et punkt i et koordinatsystem. Vi lager oss da en tallinje som går oppover og en tallinje som går bortover. x-verdiene finner vi ved å lese av på den horisontale tallinjen, mens $f(x)$-verdiene leser vi av på den vertikale tallinjen.
For å tegne inn punktene fra tabellen inn i koordinatsystemet kan vi starte der hvor tallinjene krysser og gå følgende veier:

$x = -2$	$f(x) = 11$	2 til *venstre*, 11 *opp*
$x = -1$	$f(x) = 5$	1 til *venstre*, 5 *opp*
$x = 0$	$f(x) = 1$	0 bort, 1 *opp*
$x = 1$	$f(x) = -1$	1 til *høyre*, 1 *ned*
$x = 2$	$f(x) = -1$	2 til *høyre*, 1 *ned*
$x = 2$	$f(x) = 1$	2 til *høyre*, 1 *opp*
$x = 4$	$f(x) = 5$	2 til *høyre*, 5 *opp*

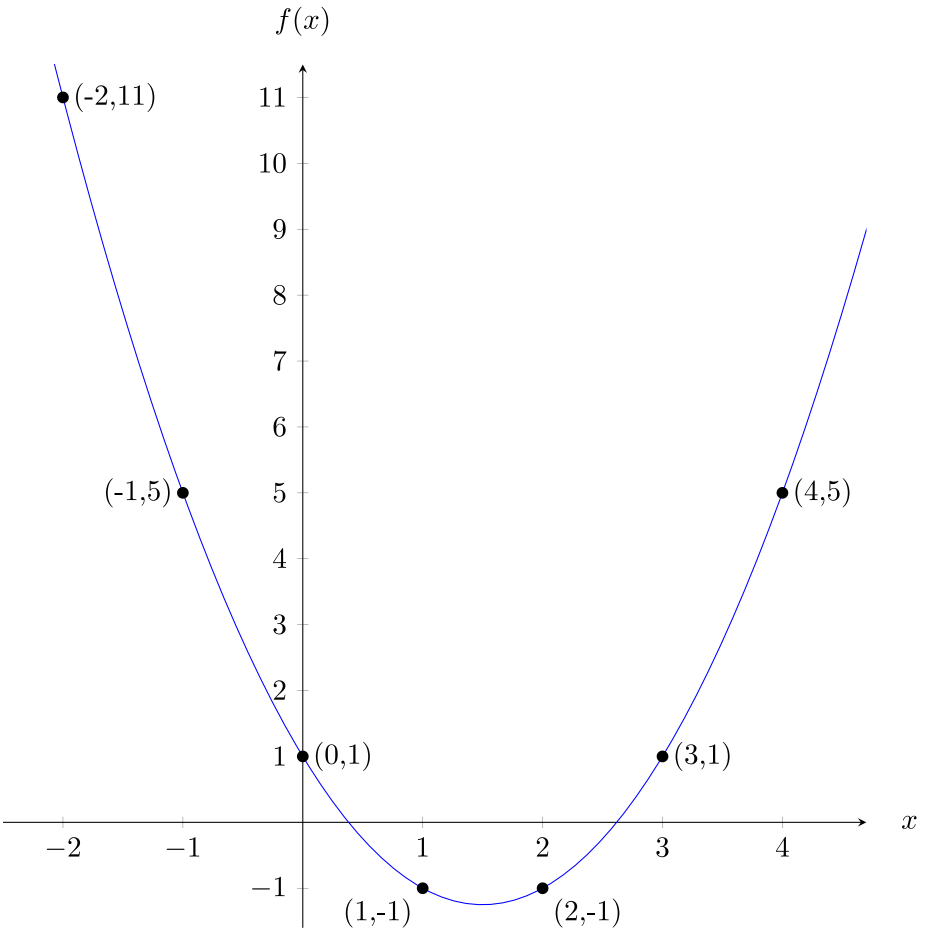


Tenk nå at vi lager en ny tabell, men at vi finner så mange punkter at de ligger helt tett i tett inntil hverandre. Punktene vil da danne en sammenhengende strek som ser slik ut:



Figuren over kaller vi grafen til funksjonen $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Vi kan nå observere at punktene vi fant når x var $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ og 4 ligger på linja til denne grafen:

11.0



Og sånn vil det være for alle valg av x så lenge vi finner punkt ved hjelp av denne funksjonen.

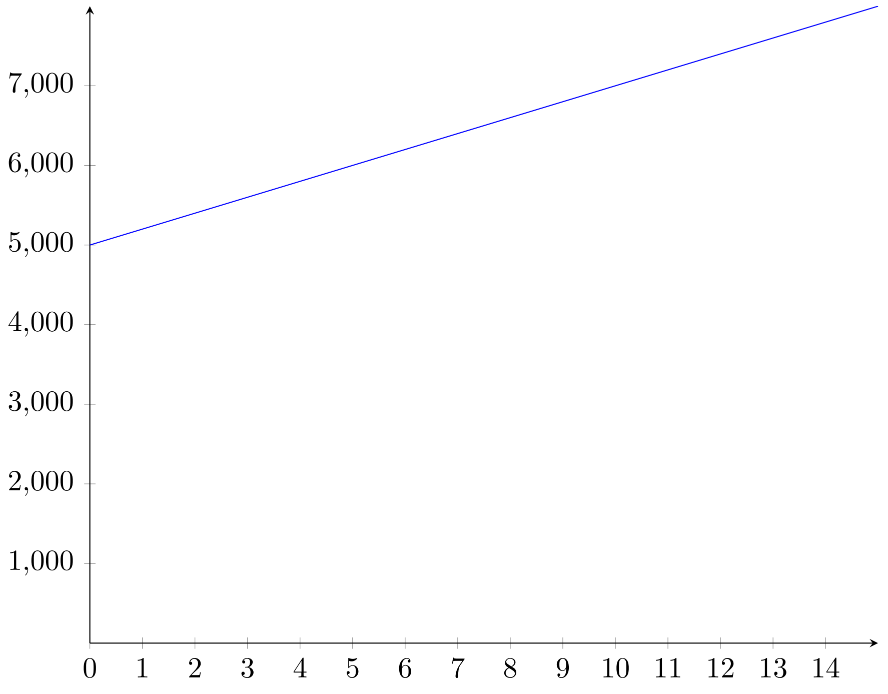
0.5 Lineære funksjoner

I *Regel* **??**seksjon]f1 så vi på en klasse som skulle på tur, og fant at prisen P per x antall elever kunne skrives som funksjonen:

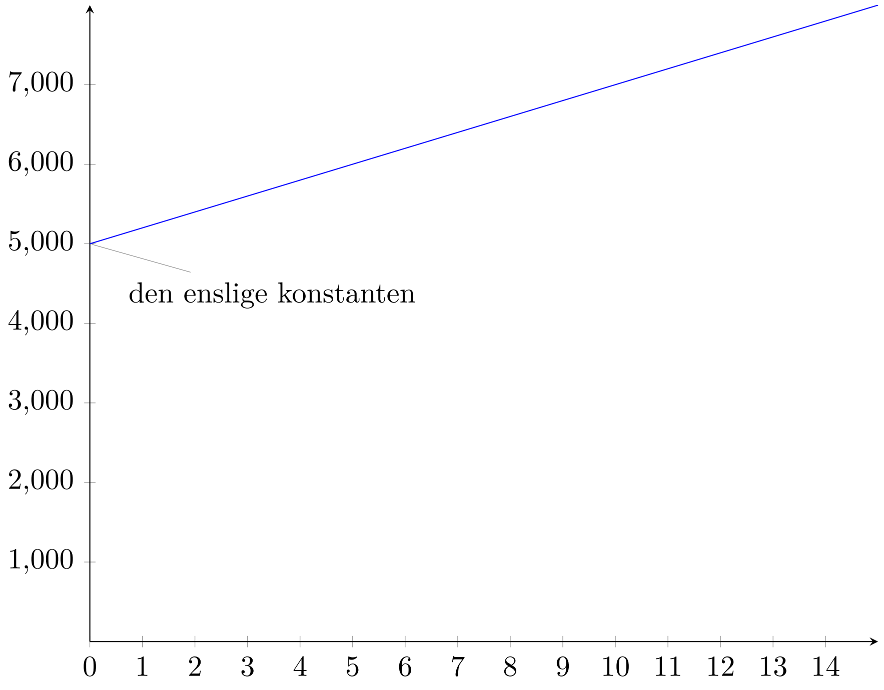
$$P(x) = 200x + 5000$$

Denne funksjonen består av to ledd: Det ene er x ganget med en konstant (200), mens det andre er bare en konstant (5000). Når en funksjon består av to slike ledd kaller vi den for en *lineær funksjon*. Dette er fordi alle funksjoner av denne typen vil ha en graf som blir ei rett linje dersom vi tegner den i et koordinatsystem.

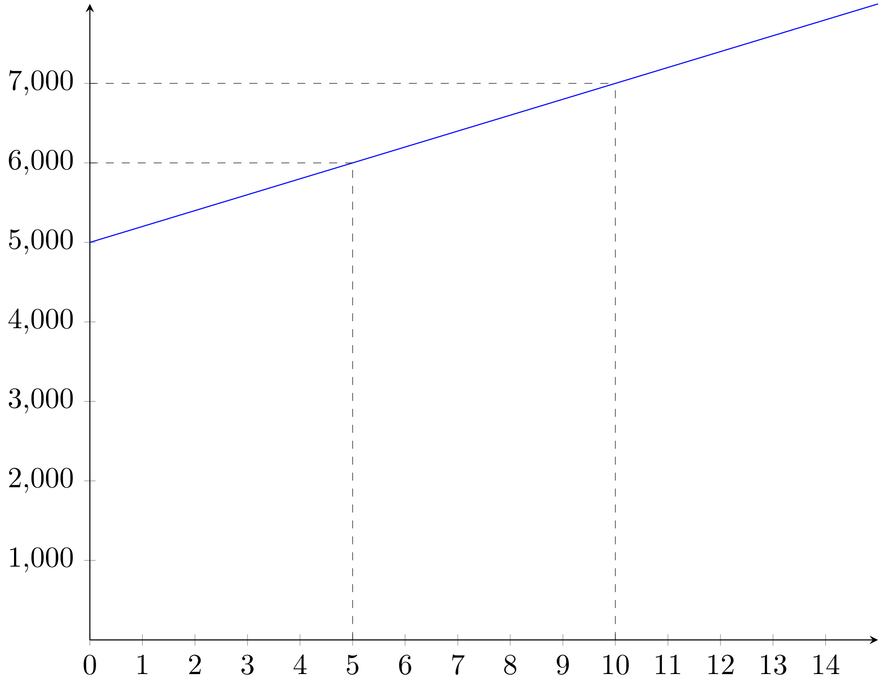
Si nå at vi ikke visste funksjonsuttrykket til $P(x)$, men bare fikk se grafen til den:



Hvis vi ønsker å finne funksjonsuttrykket kan vi startet med å finne konstanten som står aleine. Når x er 0, så blir det ene leddet i funksjonen også lik 0, og derfor er det bare det enslige konstantleddet som står igjen i dette punktet. Når $x = 0$ er funksjonsverdien lik 5000, dette betyr at konstanten som står aleine også er lik 5000.



Tallet som ganges med x forteller oss hvor mye prisen stiger for hver elev som blir med. For å finne ut av dette velger vi oss to x-verdier som gir punkt det er lett å lese av på figuren:



For $x = 5$ ser vi at prisen blir 6000. Når $x = 10$ blir den derimot 7000. Dette betyr at prisen har steget med $7000 - 6000 = 1000$ når antallet elever økte med $10 - 5 = 5$. Prisøkningen per elev blir derfor:

$$\frac{1000}{5} = 200$$

Tallet som skal ganges med x er altså 200.
Ut ifra det vi har funnet, kan vi nå skrive:

$$P(x) = 200x + 5000$$

Dette stemmer overens med uttrykket som vi egentlig visste fra før av. Generelt kaller vi konstanten som ganges med x for *stigningstallet*, mens konstanten som står aleine kaller vi for *konstantleddet*.

0.3 Lineære funksjoner

Når vi kan skrive en funksjon $f(x)$ som et tall a ganget med x, pluss et annet tall b, så kaller vi $f(x)$ for en lineær funksjon:

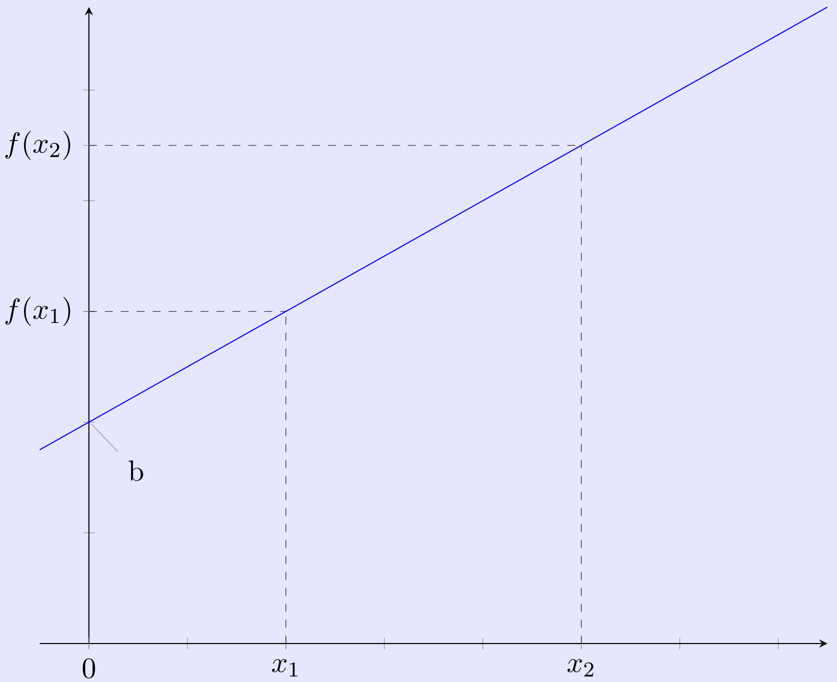
$$f(x) = ax + b$$

a kaller vi for stigningstallet, mens b kaller vi for konstantleddet. De to tallene er definert som:

$$b = f(0)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

hvor x_1 og x_2 er to tilfeldig valgte x-verdier og der $x_2 > x_1$.



Eksempel

Prisen P kroner for å kjøre x kilometer i en taxi er gitt ved funksjon:

$$P(x) = 10x + 100$$

a) Hva må du betale når du har kjørt 0 kilometer?
b) Hvor mye stiger prisen med for hver kilometer du kjører?
c) Hva må du betale dersom taxien kjører deg 20 kilometer?
Svar:

a) Når $x = 0$ står vi igjen med bare konstantleddet til P, som er 100. Prisen er derfor 100 kr
b) Hvor mye prisen stiger med per kilometer er stigningstallet til funksjonen. Prisen stiger derfor med 10 kr per kilometer.
c) $P(20) = 10 \cdot 20 + 100 = 300$. Altså må vi betale 300 kr for å kjøre 20 kilometer.