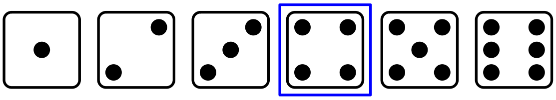
0.1 Grunnprinnsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør oss hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall*. Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse

0.1 Sannsynlighet for en hendelse

$$\text{sannsynlighet for en hendelse} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi 'å få en firer' en hendelse. Og da en terning har seks forskjellige sider, er det seks mulige utfall.



Hvis vi ønsker 'å få en firer', er det bare 1 av disse 6 utfallene som gir oss det vi ønsker, altså er

$$\text{sannsynlighet for å få en firer} = \frac{1}{6}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi gjerne enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive 'å få en firer', kan vi bruke bokstaven F, og for å indikere at vi snakker om sannsynligheten for en hendelse bruker vi bokstaven P.

P kommer av det engelske ordet for sannsynlighet, *probability*.

Når vi skriver $P(S)$ betyr dette 'sannsynligheten for å få en en firer':

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* å få en firer? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen 'å *ikke* få en firer' skriver vi altså som $\bar{F}$. Det 'å *ikke* få en firer' er det samme som 'å få *enten* en ener, en toer, en treer, en femmer *eller* en sekser', derfor har denne hendelsen 5 gunstige utfall. Det betyr at

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

0.2 Symboler for sannsynlighet

$P(A)$ er sannsynligheten for at hendelsen A inntreffer.

A og $\bar{A}$ er motsatte hendelser.

$P(\bar{A})$ er sannsynligheten for at A *ikke* inntreffer, og omvendt.

Obs!

Som regel er det en god vane å forkorte brøker når det lar seg gjøre, men i sannsynlighetsregning vil det ofte lønne seg å la være. Du vil derfor oppdage at mange brøker i kommende seksjoner kunne vært forkortet.

0.2 Hendelser med og uten felles utfall

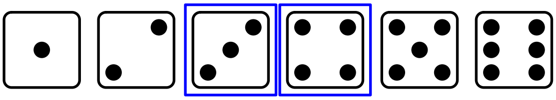
0.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss kalle hendelsen å 'å få en treer' (på en terning) for T. Hendelsen 'å få en treer *eller* en firer' skriver vi da som $T \cup F$.

Symbolet $\cup$ kalles *union*.

Det er 2 av 6 sider på en terning som er tre *eller* fire, sannsynligheten for 'å få en treer *eller* en firer' er derfor $\frac{2}{6}$:

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret hadde vi fått ved å legge sammen sannsynlighetene $P(F)$ og $P(S)$:

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(T \cup F)$ ved å summere $P(T)$ og $P(F)$ kan vi gjøre fordi T og F ikke har noen *felles utfall*. Dette er fordi ingen sider på trekanten viser *både* en treer og en firer.

0.3 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser A og B uten felles utfall, er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød *eller* en blå kule?

Svar:

Vi kaller hendelsene 'å få en rød kule' for R og hendelsen 'å få en blå kule' for B.

- Det er i alt 4 mulige utfall (kuler).
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hen-

delsene R og B som har felles utfall.

- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er
$$P(R) = \frac{1}{4}$$
- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er
$$P(B) = \frac{2}{4}$$

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule er dermed

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

0.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk at vi kaster en terning og at vi holder både 'å få en firer' og 'å ikke få en firer' for gunstige hendelser . Vi har tidligere sett at $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$, og at F og $\bar{F}$ ikke har felles utfall. Av *Regel 0.3* har vi da at

$$\begin{aligned} P(F \cup \bar{F}) &= P(F) + P(\bar{F}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Enten så skjer F, eller så skjer den ikke. Og skjer den ikke, så skjer $\bar{F}$. Hvis vi sier at *både* F og $\bar{F}$ er gunstige hendelser, sier vi altså at alle mulige utfall er gunstige, og da gir *Regel* **??** en sannsynlighet lik 1.

0.4 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle mulige hendelser er alltid lik 1.

En hendelse A og den motsatte hendelsen $\bar{A}$ vil til sammen alltid ut-gjøre alle hendelser. Av *Regel 0.4* har vi da at

$$
\begin{aligned}
P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\
P(A) &= 1 - P(\bar{A})
\end{aligned}
$$

0.5 Motsatte hendelser

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. Èn elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

a) Hva er sannsynligheten for at en gutt blir trukket?

b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

Svar:

Vi kaller hendelsen 'en gutt blir trukket' for G.

a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er

$$P(G) = \frac{13}{25}$$

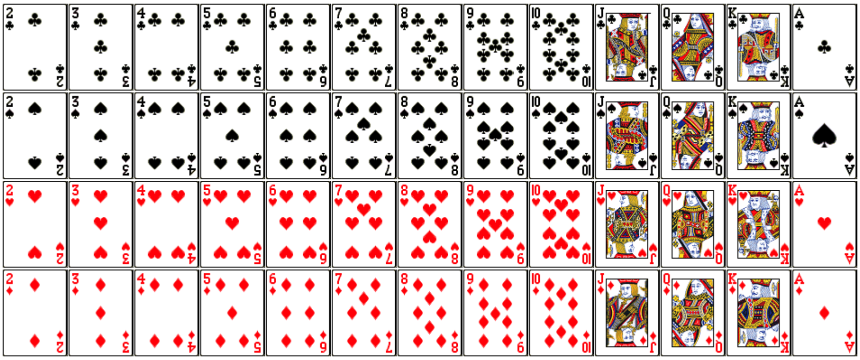
b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er

$$
\begin{aligned}
P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\
&= 1 - \frac{13}{25} \\
&= \frac{12}{25}
\end{aligned}
$$

Merk: At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

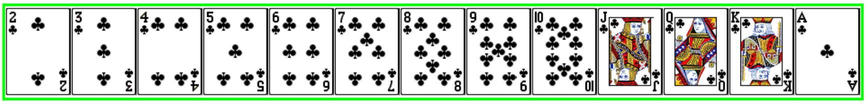
0.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av arten knekt, dame, kong eller ess kalles honnørkort.

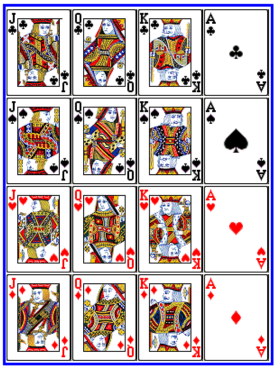


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for 'å trekke kløver *eller* honnør *eller* begge deler'. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort og finner at antallet er 13.

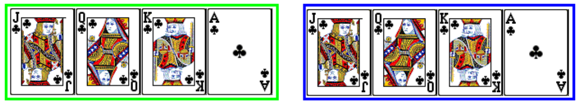
Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler; *både* kløverkort *og* honnørkor.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort og finner at antallet er 16.

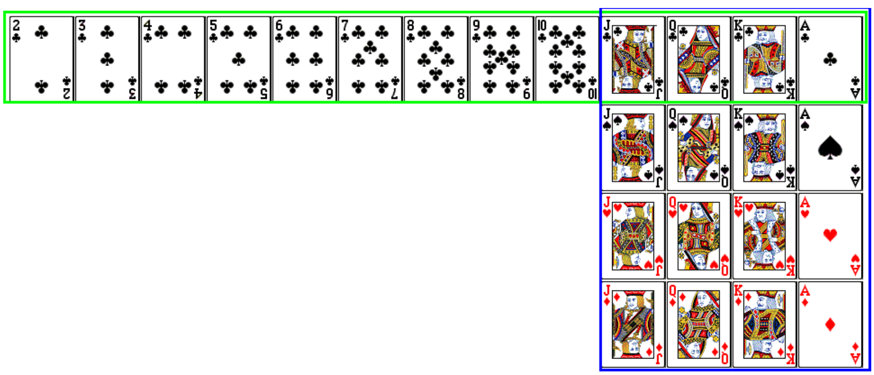


Så vi har altså telt opp $13 + 16 = 29$ gunstige utfall. Men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver, honnør *eller* begge deler – ja, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La K være hendelsen 'å trekke et kløverkort' og H være hendelsen 'å trekke et honnørkort'. Siden det er 25 kort som er kløver, honnør *eller* begge deler av i alt 52 kort, har vi at

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver *og* honnørkort, dette skriver vi som

Symbolet $\cap$ kalles *snitt.*

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at K og H har 4 *felles utfall*. Sannsynligheten for $K \cap H$ er

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet $P(K), P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne $P(K \cap H)$ på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

0.6 Hendelser med felles utfall

For to hendelser A og B er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball og 10 personer spiller handball. Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Tenk deg at du trekker ut én person fra klassen. Hva er sjansen for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

Svar:

Vi lar F være hendelsen 'spiller fotball' og H være hendelsen 'spiller handball'.

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er

$$P(F) = \frac{7}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller handball er

$$P(H) = \frac{10}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er

$$P(F \cap H) = \frac{4}{20}$$

Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor

$$
\begin{aligned}
P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\
&= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\
&= \frac{13}{20}
\end{aligned}
$$

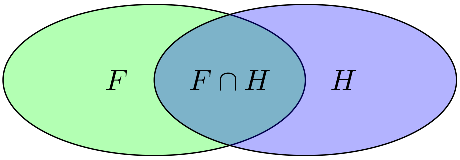
Sjansen er altså $\frac{13}{20}$.

Merk

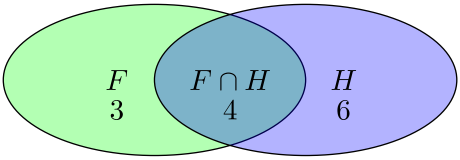
Hvis man anvender *Regel 0.6* på to hendelser uten felles utfall, ender man opp med *Regel 0.3*.

0.2.4 Venndiagram

Målet med et venndiagram er å lage en figur som illustrerer antallet av de enkelte utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet på side 8 til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen[1] representerer de som spiller fotball (F) og den blå de som spiller handball (H). Da noen spiller *begge* sportene ($F \cap H$), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Videre vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og 4 av disse gjør *begge* deler. Dette illustreres slik:



[1] En ellipse er en "strekt" sirkel.

Diagrammet forteller nå at 3 personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. I tillegg spiller 4 stykker *både* fotball og handball. (Til sammen er det derfor 7 som spiller fotball og 10 som spiller handball.)

Eksempel 1

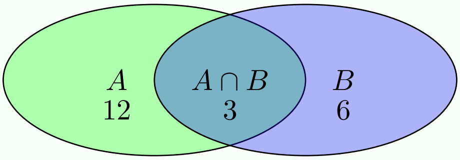
I en skoleklasse er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

a) Sett opp et venndiagram som illustrerer gitt informasjon.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss *eller* båt til skolen?

Svar:

a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *bare* tar buss og $9 - 3 = 6$ som *bare* tar båt. Vi lar A bety 'tar buss' og B bety 'tar båt', venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



b) Sannsynligheten for at en person tar buss *eller* båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tar buss *eller* båt. Da det er 31 elever i alt å velge mellom, er

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 10 elever spiller fotball
- 8 elever spiller handball
- 6 elever spiller volleyball

- 2 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- ingen elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

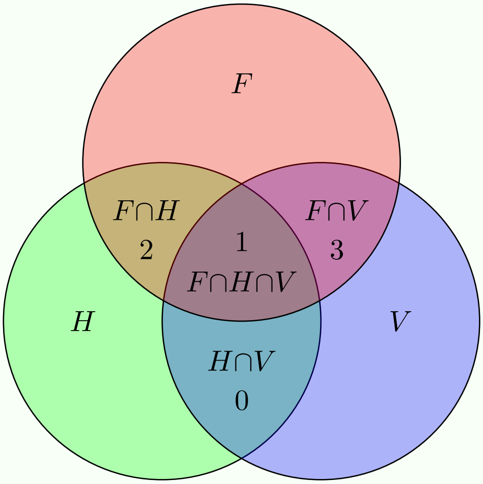
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen. La F bety *spiller fobtall*, H bety *spiller handball* og V bety *spiller volleyball*.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

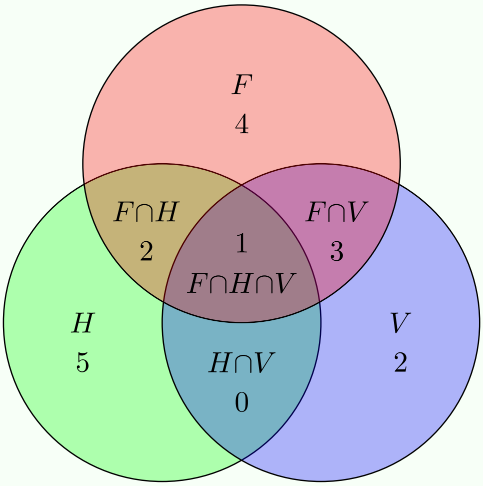
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

Svar:

Når vi skal lage et venndiagram er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at $10-2-1-3=4$ elever spiller *bare* fotball, $8-2-1=5$ spiller *bare* handball og $6-3-1-0=2$ spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $5+2+4+3+1+2+0 = 17$ uniker elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke én av disse 17 i en klasse med 29 elever er $\frac{17}{29}$.

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 10 som spiller fotball, er det $2 + 1 = 3$ som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor $\frac{3}{7}$.

0.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videere at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar M bety *får melk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
E			
$\bar{E}$			
sum			

Deretter fyller vi inn tabellen ut ifra informasjonene vi har:

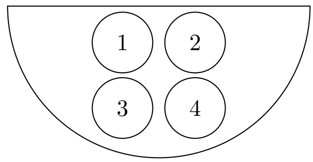
- får *både* melk og epple: $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$

- får eple, men ikke melk: $E \cap M = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	$\bar{M}$	sum
E	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

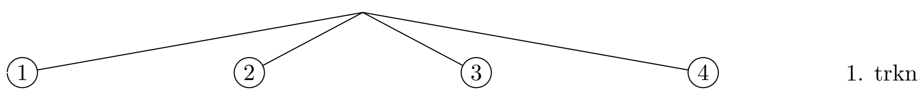
0.3 Gjentatte trekk

0.3.1 Permutasjoner

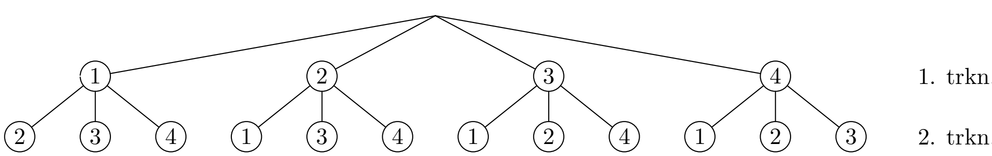


La oss tenke oss at vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp én og én kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi *permutasjonen* 2 4 3.

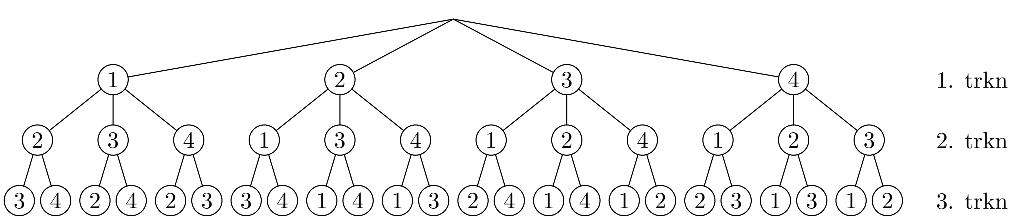
Hvor mange forskjellige permutasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss. Ved første trekning er det 4 kuler å plukke av, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp legger vi ut av bollen, og trekker så for andre gang. For hver av de 4 veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå 3 nye veier å følge. Altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier (permutasjoner) blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

0.7 Permutasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige permutasjoner ved å gange sammen de mulige utfallene i hver trekning.

Eksempel

Av de 29 bokstavene i alfabetet ønsker vi å lage et ord som består av 3 bokstaver. Vi godkjenner ord som ikke har noen betydning, men en bokstav kan bare brukes én gang i ordet.

Hvor mange ord kan vi lage?

Svar:

Først har vi 29 bokstaver å trekke fra, deretter 28 bokstaver, og til slutt 27 bokstaver. Dermed er antall permutasjoner gitt som

$$\underbrace{29}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{28}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{27}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 21\,924$$

Vi kan altså lage 21 924 forskjellige ord.

Eksempel 2

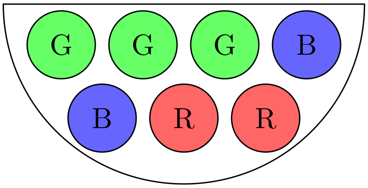
Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange permutasjoner har vi da?

Svar:

Hver gang vi kaster om krone eller mynt, har vi to mulige utfall. Antall permutasjoner er derfor gitt som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

0.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk



Tenke at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Vi spør oss nå hva sannsynligheten er for at vi trekker opp to grønne kuler. Hvis vi lar G bety 'å trekke en grønn kule', kan vi skrive denne sannsynligheten som $P(GG)$.

For å komme fram til et svar, starter vi med å finne ut hvor mange *gunstige* permutasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige perutasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* permutasjoner er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} \tag{1}$$

La oss nå i hver trekning se på sannsynligheten for å få en grønn kule, med krav om at dette skal skje i begge trekninger. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, altså er

$$P(G) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Symbolet $|$ betyr *gitt at ... har skjedd*. $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for 'sannsynligheten for å trekke en grønn kule, *gitt* at en grønn kule er trukket'.

Hvis vi ganger sammen sannsynligheten fra første trekning, med sannsynligheten fra andre trekning, ser vi at regnestykket blir det samme som i ligning (1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

0.8 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrives som $P(A|B)$.

Sannsynligheten for at A trekkes først, deretter B, deretter C og så videre (...) er:

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot ...$$

Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå kule, deretter en rød, og til slutt en blå?

Svar:

Vi lar B bety 'å trekke blå kule' og R bety 'å trekke rød kule'. Sannsynligheten for først en blå, så en rød, og så en blå kule, skriver vi da som $P(BRB)$.

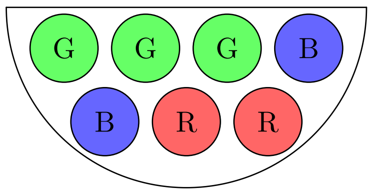
- Sannsynligheten for B i første trekning er $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynligheten for R i andre trekning, *gitt* B i første er
$$P(R|B) = \frac{2}{3}$$
- Sannsynligheten for B i tredje trekning, *gitt* B i første og R i andre er
$$P(B|RB) = \frac{1}{2}$$

Altså har vi at

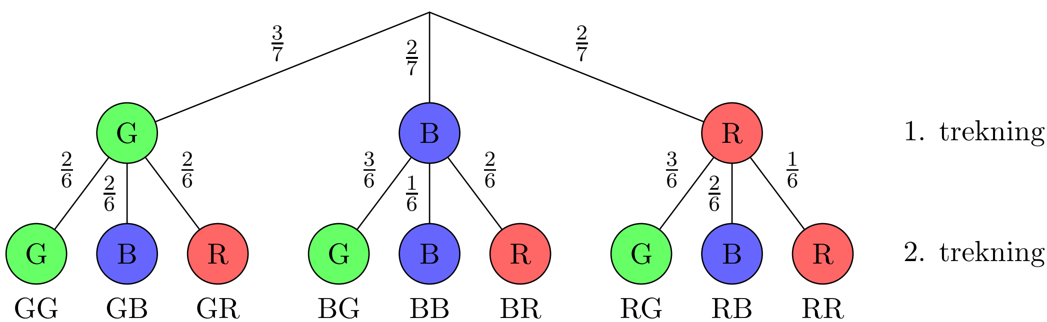
$$\begin{aligned}
P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\
&= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{24} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

0.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte ?? for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 0.3, men langs alle veier skriver vi nå på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene G, B og R.
Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til G. Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra G til G.
Og sånn fortseter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei:



For å få en rask oversikt over de forskjellige kombinasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet:
La oss nå bruke valgtret over for å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule. GB og BG er da de gunstige kombinasjonene.
Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til GB, finner vi at:

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne $P(BG)$:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at *GB eller BG* inntreffer blir (se *Regel* **??**):

$$
\begin{aligned}
P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\
&= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\
&= \frac{12}{42}
\end{aligned}
$$

0.9 Kobinasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en kombinasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til kombinasjonen.

Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuer grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La G, B og R henholdsvis bety å trekke en blå, grønn eller rød kule.

a) Tegn et valgtre som skisserer hvilke permutasjoner av B, G og R du kan få.

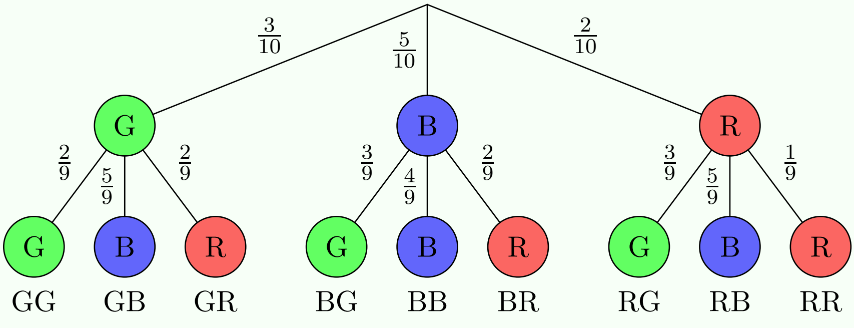
b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?

d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå eller én grønn kule?

Svar:

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at:

$$\begin{aligned} P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{90} \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

c) Både kombinasjonen GB og BG gir oss én blå og én grønn kule. Vi starter med å finne sannsynligheten for hver av dem:

$$\begin{aligned} P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{15}{90} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for GB *eller* BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for kombinasjonene GG, GB, GR, BG, BB, BR, RG og RB, men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sjansen for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av *Regel 0.5* har vi at:

$$\begin{aligned}
P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\
&= 1 - \frac{1}{45} \\
&= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\
&= \frac{44}{45}
\end{aligned}$$

Sjasen for å få *minst* én blå eller én grønn kule er altså $\frac{44}{45}$.