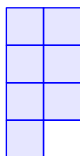
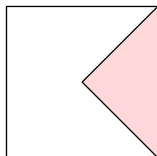


0.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35-47) har vi sett hvordan brøker er definert ut ifra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a)



(b)

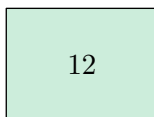


(c)

- (a) Helheten er 8 ruter. $\frac{7}{8}$ av rutene er blå.
- (b) Helheten er et kvadrat. $\frac{1}{4}$ av kvadratet er rødt.
- (c) Helheten er 5 kuler. $\frac{3}{5}$ av kulene er svarte.

Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.

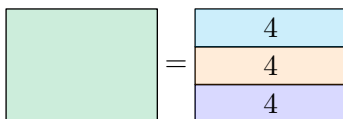


Når vi sier " $\frac{2}{3}$ av 12" mener vi at vi skal

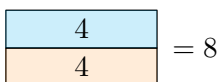
- a) dele 12 inn i 3 like grupper
- b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

- a) 12 delt inn i 3 grupper er lik $12 : 3 = 4$.



- b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen $2 \cdot 4 = 8$.



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne $\frac{2}{3}$ av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med $\frac{2}{3}$ (se MB, s. 45 og 50).

0.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

Eksempel 1

Finn $\frac{2}{5}$ av 15.

Svar:

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Eksempel 2

Finn $\frac{7}{9}$ av $\frac{5}{6}$.

Svar:

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

0.2 Prosent

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er lett å se (omtrent) hvor mye $\frac{3}{5}$ eller $\frac{7}{12}$ av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.



Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Brøker med denne nevneren er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

0.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

Språkboksen

% uttales *prosent*. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

Eksempel 2

$$12,7\% = \frac{12,7}{100}$$

Merk: Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).

Eksempel 3

Gjør om brøkene til prosenttall.

a) $\frac{34}{100}$

b) $\frac{203}{100}$

Svar:

a) $\frac{34}{100} = 34\%$

b) $\frac{203}{100} = 203\%$

Eksempel 4

Finn 50% av 800. Av [Regel 0.1](#) og [Regel 0.2](#) har vi at

Svar:

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

Eksempel 5

Finn 2% av 7,4.

Svar:

$$2\% \text{ av } 7,4 = \frac{2}{100} \cdot 7,4 = 0,148$$

Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi foretar utregninger. I *Eksempel 5* over kunne vi har reknet slik:

$$2\% \text{ av } 7,4 = 0,02 \cdot 7,4 = 0,148$$

Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som $\frac{15}{20}$ av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om $\frac{15}{20}$ til en brøk med 100 i nevner. Siden $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$, utvider vi brøken vår med $\frac{100}{20} = 5$:

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Det er verdt å merke seg at vi kunne fått 75 direkte ved utrekningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

0.3 Antall prosent a utgjør av b

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b}$$

Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

Svar:

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjør 85% av 400.

Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

Svar:

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23,8$$

119 utgjør 23,8% av 500.

Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utrekningen. *Eksempel 2* over kunne vi da reknet slik:

$$\frac{119}{500} = 0,238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500.
(Her rekner man i hodet at $0,238 \cdot 100 = 23,8$.)

0.3 Prosentvis endring og vekstfaktor

Minkende størrelse

I mange situasjoner har noe økt eller minket med en viss prosent. I en butikk kan man for eksempel komme over en skjorte som originalt kostet 500 kr, men selges med 40% *rabatt*. Dette betyr at vi skal trekke ifra 40% av originalprisen.



Her er to måter vi kan tenke på for å finne prisen:

- Vi starter med å finne det vi skal trekke ifra:

$$\begin{aligned}40\% \text{ av } 500 &= \frac{40}{100} \cdot 500 \\ &= 200\end{aligned}$$

Videre er

$$500 - 200 = 300$$

Altså må vi betale 300 kr for skjorten.

- Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale 60% av 500:

$$100\% - 40\% = 60\%$$

$$\begin{aligned}60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300\end{aligned}$$

Svaret blir selvsagt det samme, vi må betale 300 kr for skjorten.

Økende størrelse

Det er ikke alltid vi er så heldige at vi får rabatt på et produkt, ofte må vi faktisk betale et tillegg. **Merverdiavgiften** er et slikt tillegg. I Norge må vi betale 25% i merverdiavgift på mange varer. Det betyr at vi må betale et tillegg på 25%, altså 125% av originalprisen.

Merverdiavgift
forkortes til mva.

$$100\% + 25\% = 125\%$$

For eksempel koster øreklokkene på bildet 999,20 kr *eksludert* mva. Men *inkludert* mva. må vi betale

$$\begin{aligned} 125\% \text{ av } 999,20 &= \frac{125}{100} \cdot 999,20 \\ &= 1249 \end{aligned}$$

Altså 1249 kr.



Oppsummering

0.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse synker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% - a\%)$ av størrelsen.
- Når en størrelse øker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% + a\%)$ av størrelsen.

Eksempel 1

Hva er 210 senket med 70%?

Svar:

$100\% - 70\% = 30\%$, altså er

$$\begin{aligned} 210 \text{ senket med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\ &= \frac{30}{100} \cdot 210 \\ &= 63 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

Svar:

$100\% + 124,5\% = 224,5\%$, altså er

208,9 økt med 124,5 = 224,5% av 208,9

$$= \frac{224,5}{100} \cdot 208,9$$

Vekstfaktor

På side 7 ble prisen til en skjorte redusert med 40%, og da endte vi opp med å betale 60% av originalprisen. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 0,6. På side 8 måtte vi legge til 25% mva., og da endte vi med å betale 125% av originalprisen. Da er vekstfaktoren 1,25.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

0.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med $a\%$, er vekstfaktoren verdien til¹ $100\% \pm a\%$.

¹ \pm betyr at man skal velge enten + eller −.

Eksempel 1

En størrelse skal økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

Svar:

$100\% + 15\% = 115\%$, altså er vekstfaktoren 1,15.

Eksempel 2

En størrelse skal reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

Svar:

$100\% - 19,7\% = 80,3\%$, altså er vekstfaktoren 80,3%

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 8, hvor 210 skulle senkes med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0,3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 senket med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

0.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endret originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

Svar:

a) Siden det er 20% rabatt, må vi betale

$$100\% - 20\% = 80\%$$

av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0,8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr.

Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Hva koster sjokoladen inkludert mva?

Svar:

a) Med 15% i tillegg må man betale

$$100\% + 15\% = 115\%$$

av prisen ekskludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)

$$1,15 \cdot 9,80 = 12,25$$

Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omskrive likningen fra [Regel 0.6](#) for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

0.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent av en helhet. Denne helheten man har som utgangspunkt er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tente 10 000 kr i 2019 og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet "Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020 i prosent?". Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med 'kr' i utrekningene):

- Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$. Videre er (se [Regel 0.3](#))

$$\begin{aligned}\text{Antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20\end{aligned}$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1,2$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se [Regel 0.7](#)). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se [Regel 0.5](#)). Det betyr at lønnen økte med 20%.

0.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man i steden rekne ut 'originalverdi – endret original'

Kommentar

[Regel 0.8](#) kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått seksjon ??, kan du uten å bruke denne formelen finne prosentvise endringer trin-nvis. I påfølgende eksempler viser vi derfor både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Løsningsmetode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det $20 - 12 = 8$ som sluttet. Vi har at

$$\text{Antall prosent 4 utgjør av } 20 = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Løsningsmetode 2; formel

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{20 - 12}{20} \cdot 100 \\ &= \frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= 40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

0.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100 \left(\frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}} - 1 \right)$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man "snu" reknestykket inni parantesen til $1 - \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$.

Merk

[Regel 0.8](#) og [Regel 0.9](#) gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge

hvilken man liker best. Som allerede nevnt angående [Regel 0.8](#), er også [Regel 0.9](#) en litt kronglete formel, og man trenger den ikke hvis man har forstått seksjon ?? og ??. Her vil vi også i påfølgende eksempler vise to løsningsmetoder.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Løsningsmetode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, da har vi at (se [Regel 0.7](#))

$$\text{vekstfaktor} = \frac{12}{20} = 0,6$$

En vekstfaktor lik 0,6 tilsvarer en endring på 40% (se [Regel 0.5](#)). I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Løsningsmetode 2; formel

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100 \left(1 - \frac{12}{20} \right) \\ &= 100 (1 - 0,6) \\ &= 100 \cdot 0.4 \\ &= 40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

0.4 Prosentpoeng

Ofte snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier. For å forenkle setningene har vi begrepet *prosentpoeng*. La oss forsøke å forklare ordet med et eksempel.



Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, men det solgt med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

$$80\% - 30\% = 50\%$$

Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?

Si at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50% får vi $300 \cdot 1,5 = 450$, og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi snakker om to forskjellige originalverdier:

$$80\% \cdot 1000 = 800 \quad 20\% \cdot 1000 = 200$$

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%.”

Forklaring: ”Rabatten” er en størrelse vi rekner ut i fra originalprisen til solbrillene. Når vi sier ”prosentpoeng” viser vi til at det fortsatt er originalprisen vi skal rekne prosentene *ut i fra*. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med $1\,000 \text{ kr} \cdot 0,3 = 300 \text{ kr}$ i rabatt. Når vi legger til 50 *prosentpoeng*, legger vi til 50% av originalprisen, altså $1\,000 \text{ kr} \cdot 0,5 = 500 \text{ kr}$. Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%.”

Forklaring: "Rabatten" er en størrelse vi rekner ut i fra originalprisen til solbrillene, men her rekner vi prosenten *ut ifra* rabatten. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300 \text{ kr} \text{ økt med } 50\% = 300 \text{ kr} \cdot 1,5 = 450 \text{ kr}$$

og

$$\text{Antall prosent } 450 \text{ utgjør av } 1\,000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

Merk

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten ved å bruke en originalverdi lik 1 000. Dette er streng tatt ikke nødvendig