0.1 Potensenes oppbygging

$$\text{grunntall} \longrightarrow 2^3 \longleftarrow \text{eksponent}$$

En potens består av et *grunntall* og en *eksponent*. For eksempel er 2^3 en potens med grunntall 2 og eksponent 3. Eksponenten til potensen sier hvor mange eksemplarer av grunntallet vi skal gange sammen. For potensen 2^3 sier vi "*to opphøyd i tre*" eller bare "*to i tredje*", som vi kan skrive slik:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Prinsippet er akkurat det samme, selv om grunntallet er en bokstav:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

For alle potensregler vi skal se på i dette kapitlet, spiller det ingen rolle om grunntallet eller eksponenten er sifre eller en bokstav.

Potenstall

a^n er et potenstall med grunntall a og eksponent n. Dette betyr at n stykker av a skal ganges sammen.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

0.2 Multiplikasjon av potenser

Når vi jobber med potenser er det ønskelig å skrive et uttrykk så enkelt som mulig. La oss se på tilfellet

$$2^2 \cdot 2^3$$

Vi har at:

$$2^2 = 2 \cdot 2$$
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive:

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^3 &= \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

Multiplikasjon av potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 4^3 \cdot 4^7 \cdot 4^4 &= 4^{3+7+4} \\ &= 3^{14} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

0.3 Potensbrøker

Hva nå med en potens delt på en annen med samme grunntall? La oss undersøke brøken

$$\frac{3^4}{3^2}$$

Vi starter med å skrive ut potensen over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned}
\frac{3^4}{3^2} &= \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{3^4}}{\underbrace{3 \cdot 3}_{3^2}} \\
&= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} \\
&= 3 \cdot 3 \\
&= 3^2
\end{aligned}$$

Men denne litt lange utregningen kunne vi skrevet på en mye kortere måte:

$$\begin{aligned}
\frac{3^4}{3^2} &= 3^{4-2} \\
&= 3^2
\end{aligned}$$

Potens delt på potens

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{2}$$

Eksempel 1

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

Eksempel 2

$$\frac{2^4 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 2^2} = 2^{4-2} \cdot 5^{3-2} = 2^2 \cdot 5$$

0.4 Spesialtilfellet a^0

Husk at når et tall deles på seg selv, blir svaret alltid 1. For eksempel er $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{45}{45} = 1$ og $\frac{1{,}2}{1{,}2} = 1$. En potens er også bare et tall. Deler vi derfor 6^4 med seg selv, er svaret 1:

$$\frac{6^4}{6^4} = 1$$

Hvis vi gjør samme regnestykket om igjen, men nå bruker ligning (2), finner vi at:

$$\begin{aligned}\frac{6^4}{6^4} &= 6^{4-4} \\ &= 6^0\end{aligned}$$

Siden $\frac{6^4}{6^4} = 1$ og $\frac{6^4}{6^4} = 6^0$, må dette bety at $6^0 = 1$.

Spesialtilfellet a^0

$$a^0 = 1$$

Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

Eksempel 2

$$(-4)^0 = 1$$

0.5 Negativ eksponent

La oss nå prøve å forenkle uttrykket

$$\frac{2^2}{2^4}$$

Denne brøken kan vi skrive som:

$$\begin{aligned}\frac{2^2}{2^4} &= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2^2}\end{aligned}$$

Hvis vi istedenfor bruker ligning (2), får vi:

$$\begin{aligned}\frac{2^2}{2^4} &= 2^{2-4} \\ &= 2^{-2}\end{aligned}$$

Siden $\frac{2^2}{2^4} = \dfrac{1}{2^2}$ og $\frac{2^2}{2^4} = 2^{-2}$, må altså:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

Potens med negativ eksponent

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \tag{3}$$

Eksempel 1

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

Eksempel 2

$$c^{-7} = \frac{1}{c^7}$$

0.6 Brøk som grunntall

Vi skal nå se på tilfellet der grunntallet til potensen er en brøk, for eksempel $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. Eksponenten 3 sier oss at tre stykker av $\frac{2}{3}$ skal ganges sammen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{2^3}{3^3} \end{aligned}$$

Brøk som grunntall

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \tag{4}$$

0.7 Faktorer som grunntall

Hva nå med to faktorer ganget sammen, opphøyd i en eksponent? La oss se på $(2 \cdot x)^3$. Nå er $2 \cdot x$ grunntallet (oftest skriver vi dette bare som $2x$), og vi får:

$$(2 \cdot x)^3 = (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x)$$

Husk: Faktorer er tall som ganges sammen.I regnestykkt $2 \cdot a \cdot 5$ kaller vi 2, a og 5 for faktorer.

Fordi det i regnestykket over bare inngår multiplikasjon, er parantesene overflødige og kan derfor fjernes. Samtidig kan vi multiplisere i den rekkefølgen vi selv ønsker, så lenge alle faktorene er med:

$$\begin{aligned} (2 \cdot x)^3 &= (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \\ &= 2^3 \cdot x^3 \end{aligned}$$

Faktorer som grunntall

$$(ab)^m = a^m b^m \tag{5}$$

Obs! Når vi har uttrykk som ab eller $a^m b^m$ står det egentlig et gangetegn mellom faktorene ($ab = a \cdot b$ og $a^m b^n = a^m \cdot b^m$), men det er vanlig å sløyfe dette når vi bruker bokstaver.

Eksempel 1

$$(ab)^4 = a^4 b^4$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(5x)^2 &= 5^2 x^2 \\ &= 25x^2\end{aligned}$$

0.8 Potens som grunntall

Det siste tilfellet vi skal se på er når grunntallet også er et potenstall. Dette er tilfellet for tallet $\left(7^3\right)^4$, som vi kan skrive som:

$$\left(7^3\right)^4 = 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3$$

Vi kan nå bruke ligning (1), og får da:

$$\begin{aligned}7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 &= 7^{3+3+3+3} \\ &= 7^{3\cdot 4} \\ &= 7^{12}\end{aligned}$$

Potens som grunntall

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{6}$$

0.9 Tall på standardform

La oss se på tallet

$$4500000$$

Dette er et stort tall med mange sifre, og som vi kan ønske å skrive på en mer kompakt måte.

Tallet 347 består av sifrene 3, 4 og 7.

Som en start omskriver vi tallet vårt ved å legge til ",0":

$$4500000 = 4500000{,}0$$

Vi skal nå utnytte en egenskap ved tallet 10. For om vi flytter komma én plass til venstre og deretter ganger tallet vårt med 10, forblir verdien den samme:

$$4500000{,}0 = 450000{,}0 \cdot 10$$

Og sånn kan vi holde på; vi kan flytte komma så mange ganger vi vil til venstre, så lenge vi multipliserer tilsvarende ganger med 10. Om vi nå skriver tallet på *standardform* stopper vi forflytningen når vi har ett siffer igjen foran komma. Da får vi:

$$\begin{aligned}
4500000{,}0 &= 450000{,}0 \cdot 10 = 450000{,}0 \cdot 10^1 \\
&= 45000{,}0 \cdot 10 \cdot 10 = 45000{,}0 \cdot 10^2 \\
&= 4500{,}0 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4500{,}0 \cdot 10^3 \\
&= 450{,}0 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 450{,}0 \cdot 10^4 \\
&= 45{,}0 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 45{,}0 \cdot 10^5 \\
&= 4{,}5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4{,}5 \cdot 10^6
\end{aligned}$$

Altså har vi at:

$$4500000 \text{ på standardform} = 4{,}6 \cdot 10^6$$

La oss også skrive 0,00056 på standardform. Om vi flytter komma én plass til høyre og deler på 10, forblir verdien den samme:

$$0{,}00056 = 0{,}0056 \cdot \frac{1}{10}$$

Husk: Å dele på 10 er det samme som å gange med $\frac{1}{10}$.

I dette tilfellet flytter vi komma og deler med 10 helt til vi har ett siffer foran komma som ikke er 0:

$$\begin{aligned}
0.00056 &= 0{,}0056 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}0056 \cdot 10^{-1} \\
&= 0{,}056 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}056 \cdot 10^{-2} \\
&= 0{,}56 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}56 \cdot 10^{-3} \\
&= 5{,}6 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 5{,}6 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

0,000056 skrevet på standardform er altså $5{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Tall på standardform

For å skrive tall på standardform flytter vi komma helt til vi har ett siffer, som ikke er 0, foran komma.

- Flytter vi komma til venstre, må vi gange med 10 opphøyd i antall flytt.
- Flytter vi komma til høyre, må vi gange med 10 opphøyd i minus antall flytt.

Eksempel 1

$$3560{,}3 = 3{,}5603 \cdot 10^3$$

Eksempel 2

$$0{,}0645 = 6{,}45 \cdot 10^{-2}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}
-7600 &= -7600{,}0 \\
&= -7{,}6 \cdot 10^3
\end{aligned}$$

0.9.1 Multiplikasjon av tall på standardform

Multiplikasjon av tall på standardform

$$a \cdot b \cdot 10^m \cdot 10^n = a \cdot b \cdot 10^{m+n}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} 2.3 \cdot 10^5 \cdot 3.4 \cdot 10^{-2} &= 7.82 \cdot 10^{5-2} \\ &= 7.82 \cdot 10^3 \end{aligned}$$