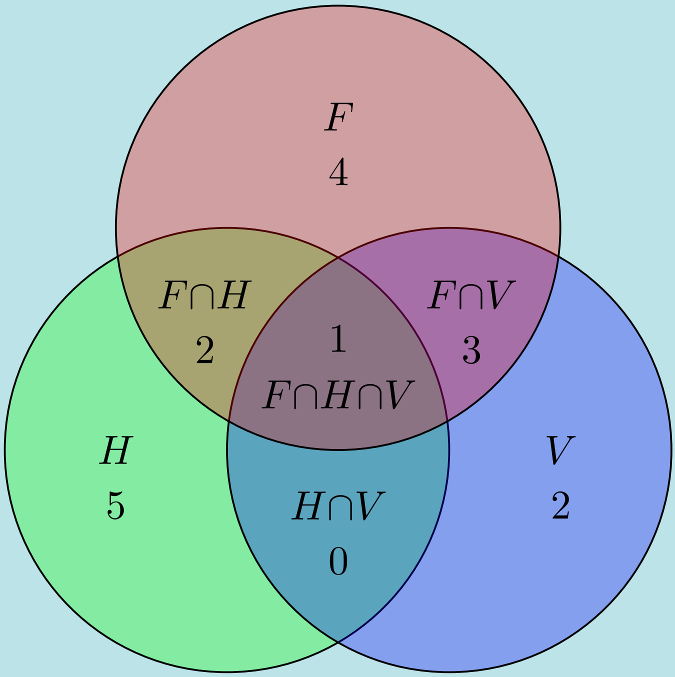
Anvendt matematikk for grunnskole og VGS



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikke å vite, men å lære,
ikke å eie, men å tilegne seg,
ikke å være til stede, men å komme dit,
som gir den største gleden."*

— Carl Friedrich Gauss

Dokumentet er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i LaTeX og figurane er lagd vha. Asymptote.

12.08.2021

Innhold

Kapittel 1

De fire regneartene

1.1 Addisjon

1.1.1 Oppstilling

Denne metoden baserer seg på plassverdisystemet, der man trinnvis regner ut summen av enerne, tierne, hundrerne, o.l.

Eksempel 1

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
+ & 6 & 1 & 2 \\
\hline
= & 8 & 4 & 6
\end{array}
$$

Eksempel 2

$$
\begin{array}{cccc}
 & {\scriptstyle 1} & & \\
 & 2 & 7 & 3 \\
+ & & 8 & 6 \\
\hline
= & 3 & 5 & 9
\end{array}
$$

Eksempel 3

$$
\begin{array}{cccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & & 8 & 5 \\
+ & & 7 & 9 \\
\hline
= & 1 & 6 & 4
\end{array}
$$

Eksempel 4

$$
\begin{array}{ccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 3 & 9 & 7, & 2 \\
+ & & 8 & 5, & 9 \\
\hline
= & 4 & 8 & 2, & 1
\end{array}
$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 3 & \color{blue}{4} \\
+ & 6 & 1 & \color{blue}{2} \\
\hline
 & & & \color{green}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 2 & \color{blue}{3} & 4 \\
+ & 6 & \color{blue}{1} & 2 \\
\hline
 & & \color{green}{4} & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & \color{blue}{2} & 3 & 4 \\
+ & \color{blue}{6} & 1 & 2 \\
\hline
= & \color{green}{8} & 4 & 6
\end{array}
$$

(a) (b) (c)

a) Vi legger sammen enerne: $4 + 2 = 6$

b) Vi legger sammen tierne: $3 + 1 = 4$

c) Vi legger sammen hundrerne: $2 + 6 = 8$

Eksempel 2 (forklaring)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline & & & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \overset{1}{2} & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline & & 5 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \overset{1}{2} & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline = & 3 & 5 & 9 \end{array}$$

(a) (b) (c)

a) Vi legger sammen enerne: $3 + 6 = 9$

b) Vi legger sammen tierne: $7 + 8 = 15$. Siden 10 tiere er det samme som 100, legger vi til 1 på hundreplassen, og skriver opp de resterende 5 tierne på tierplassen.

c) Vi legger sammen hundrerne: $1 + 2 = 3$.

Språkboksen

Det å skrive 1 på neste sifferplass kalles ”å skrive 1 i mente”.

1.1.2 Tabellmetoden

Denne metoden tar utgangspunkt i det éne leddet, og summerer frem til det andre leddet er nådd. Det som i starten kan være litt rart med denne metoden, er at du selv velger fritt hvilke tall du skal legge til, så lenge du når det andre leddet til slutt.

Eksempel 1

$273 + 86 = 359$

		273
6	6	279
30	36	309
50	86	359

Eksempel 2

$85 + 79 = 164$

		85
5	5	90
10	15	100
64	79	164

Eksempel 1 (forklaring)

		273

(a)

		273
6	6	279

(b)

		273
6	6	279
30	36	309

(c)

		273
6	6	279
30	36	309
50	86	359

(d)

(a) Vi starter med det leddet vi selv ønsker, ofte er det lurt å starte med det største leddet.

(b) Vi legger til 6. Da har vi så langt lagt til 6, og $273 + 6 = 279$.

(c) Vi legger til 30. Da har vi så langt lagt til 36, og $279 + 30 = 309$.

(d) Vi legger til 50. Da har vi så langt lagt til 86, altså har vi nådd det andre leddet, og $309 + 50 = 359$.

Oppstilling vs tabellmetoden

Ved første øyekast kan kanskje tabellmetoden bare se ut som en innviklet måte å regne addisjon på sammenlignet med oppstilling, men med øving vil mange oppdage at tabellmetoden bedrer evnen til hoderegning. Dessuten er metoden å foretrekke når vi regner med tid (se seksjon ??).

1.2 Subtraksjon

1.2.1 Oppstilling

Subtraksjon med oppstilling baserer seg på plassverdisystemet, der man trinnvis regner differansen mellom enerne, tierne, hundrerne, o.l. Metoden tar også utgangspunkt i et mengdeperspektiv, og tillater derfor ikke differanser med negativ verdi (se forklaringen til *Eksempel 2*).

Eksempel 1

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{r|c|c} & & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{8} & 3 \\ - & 6 & 7 \\ \hline = & 1 & 6 \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{r|c|c|c} & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{5} & \cancel{6} & 4 \\ - & 4 & 7 & 8 \\ \hline = & & 8 & 6 \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{r|c|c|c|c} & & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{2} & 0 & \cancel{6} & 1 \\ - & & 3 & 1 & 7 \\ \hline = & 1 & 7 & 4 & 4 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline & & 6 & 5 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

(c)

(a) Vi finner differansen mellom enerne: $9 - 4 = 5$

(b) Vi finner differansen mellom tierne: $8 - 2 = 6$.

(c) Vi finner differansen mellom hundrerne: $7 - 3 = 4$.

Eksempel 2 (forklaring)

$$\begin{array}{rcc} & & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{8} & 3 \\ - & 6 & 7 \\ \hline & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{8} & 3 \\ - & 6 & 7 \\ \hline = & 1 & 6 \end{array}$$

(a) (b)

a) Vi merker oss at 7 er større enn 3, derfor tar vi 1 tier fra de 8 på tierplassen. Dette markerer vi ved å sette en strek over 8. Så finner vi differansen mellom enerne: $13 - 7 = 6$

b) Siden vi tok 1 fra de 8 tierne, er der nå bare 7 tiere. Vi finner differansen mellom tierne: $7 - 6 = 1$.

1.2.2 Tabellmetoden

Tabellmetoden for subtraksjon tar utgangspunkt i at subtraksjon er en omvendt operasjon av addisjon. For eksempel, svaret på spørsmålet "Hva er $789 - 324$?" er det samme som svaret på spørsmålet "Hvor mye må jeg legge til på 324 for å få 789?". Med tabellmetoden følger du ingen spesiell regel underveis, men velger selv tallene du mener passer best for å nå målet.

Eksempel 1

$789 - 324 = 465$

	324
6	330
70	400
389	789
465	

Eksempel 2

$83 - 67 = 16$

	67
3	70
13	83
16	

Eksempel 3

$564 - 478 = 86$

	478
2	480
20	500
64	564
86	

Eksempel 4

$206{,}1 - 31{,}7 = 174{,}4$

	31,7
0,3	32
70	102
104,1	206,1
174,4	

Eksempel 1 (forklaring)

	324

(a)

	324
6	330

(b)

	324
6	330
70	400

(c)

	324
6	330
70	400
389	789

(d)

	324
6	330
70	400
389	789
465	

(e)

(a) Vi starter med 324.

(b) Vi legger til 6, og får $324 + 6 = 330$

(c) Vi legger til 70, og får $70 + 330 = 400$

(d) Vi legger til 389, og får $389 + 400 = 789$. Da er vi framme på 789.

(e) Vi summerer tallene vi har lagt til: $6 + 70 + 389 = 465$

1.3 Ganging

1.3.1 Ganging med 10, 100, 1 000 osv.

1.1 Å gange heltall med 10, 100 osv.

- Når man ganger et heltall med 10, får man svaret ved å legge til sifferet 0 bak heltallet.
- Når man ganger et heltall med 100, får man svaret ved å legge til sifrene 00 bak heltallet.
- Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$79 \cdot 10 = 790$$

$$802 \cdot 10 = 8020$$

Eksempel 2

$$6 \cdot 100 = 600$$

$$79 \cdot 100 = 7\,900$$

$$802 \cdot 100 = 80\,200$$

Eksempel 3

$$6 \cdot 1\,000 = 6\,000$$

$$79 \cdot 10\,000 = 790\,000$$

$$802 \cdot 100\,000 = 80\,200\,000$$

1.2 Å gange desimaltall med 10, 100 osv.

- Svaret når man gangar et desimaltall med 10 får man ved å flytte komma en plass til høgre.
- Svaret når man gangar et heltall med 100, får man ved å flytte komma to plasser til høgre.
- Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$7{,}9 \cdot 10 = 79{,} = 79$$

$$38{,}02 \cdot 10 = 380{,}2$$

$$0{,}57 \cdot 10 = 05{,}7 = 5{,}7$$

$$0{,}194 \cdot 10 = 01{,}94 = 1{,}94$$

Eksempel 2

$$7{,}9 \cdot 100 = 790{,} = 790$$

$$38{,}02 \cdot 100 = 3802{,} = 3\,802$$

$$0{,}57 \cdot 100 = 057{,} = 57$$

$$0{,}194 \cdot 100 = 019{,}4 = 19{,}4$$

Eksempel 3

$$7{,}9 \cdot 1\,000 = 7900{,} = 7\,900$$

$$38{,}02 \cdot 10\,000 = 38020{,} = 38\,020$$

$$0{,}57 \cdot 100\,000 = 05{,}7 = 57000{,} = 57\,000$$

Merk

Regel 1.1 er bare et spesialtilfelle av *Regel 1.2*. For eksempel, å bruke *Regel 1.1* på reknestykket $7 \cdot 10$ gir samme resultat som å bruke *Regel 1.2* på reknestykket $7{,}0 \cdot 10$.

Å gange tall med 10, 100 osv. (forklaring)

Titallsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (se MB, s. 13). Når man ganger et tall med 10, vil alle enere i tallet bli til tiere, alle tiere bli til hundrere osv. Hvert siffer forskyves altså én plass mot venstre. Tilsvarende forskyves hvert siffer to plasser mot venstre når man ganger med 100, tre plasser når man ganger med 1 000 osv.

1.3.2 Utvidet form

Ganging på utvidet form bruker vi for å rekne multiplikasjon mellom flersifrede tall. Metoden baserer seg på distributiv lov (se MB , s. 30).

Eksempel 1

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
2 & 4 & \cdot & 3 & = & 7 & 2 \\
 & & & & & & \\
2 & 0 & \cdot & 3 & = & 6 & 0 \\
 & 4 & \cdot & 3 & = & 1 & 2 \\ \cline{6-7}
 & & & & & 7 & 2
\end{array}$$

Eksempel 2

$$279 \cdot 34 = 9486$$

$$\begin{array}{rr} 200 \cdot 30 = & 6000 \\ 70 \cdot 30 = & 2100 \\ 9 \cdot 30 = & 270 \\ \hline & 8370 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 200 \cdot 4 = & 800 \\ 70 \cdot 4 = & 280 \\ 9 \cdot 4 = & 36 \\ \hline & 1116 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8370 \\ 1116 \\ \hline 9486 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

24 kan skrives som $20 + 4$, altså er

$$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3$$

Videre er

$$\begin{aligned} (20 + 4) \cdot 3 &= 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \\ &= 60 + 12 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Eksempel 2 (forklaring)

Vi har at

$$\begin{aligned} 279 &= 200 + 70 + 9 \\ 34 &= 30 + 4 \end{aligned}$$

Altså er

$$279 \cdot 34 = (200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4)$$

Videre er

$$\begin{aligned} (200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4) &= 200 \cdot 30 + 70 \cdot 30 + 9 \cdot 30 + 200 \cdot 4 + 70 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= 9486 \end{aligned}$$

1.3.3 Kompaktmetoden

Kompaktmetoden bygger på de samme prinsippene som ganging på utvidet form, men har en skrivemåte som gjør utregningen korterere.

Eksempel 1

$$279 \cdot 34 = 9486$$

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\ & 8 & 8 & 6 \\ {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & & \\ 6 & 1 & 7 & \\ \hline 9 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

Vi starter med å gange sifrene i 279 enkeltvis med 4:

- $9 \cdot 6 = 36$, da skriver vi 6 på enerplassen og 3 i mente.
- $7 \cdot 4 = 28$, da skriver vi 8 på tierplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 4 = 8$, da skriver vi 8 på hundrerplassen.

Så ganger vi sifrene i 279 enkeltvis med 30. Dette kan forenkles til å gange med 3, så lenge vi plasserer sifrene én plass forskjøvet til venstre i forhold til da vi ganget med 4:

- $9 \cdot 3 = 27$, da skriver vi 7 på tierplassen og 2 i mente.
- $7 \cdot 3 = 21$, da skriver vi 1 på hundrerplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 3 = 6$, da skriver vi 6 på tusenplassen.

1.4 Divisjon

1.4.1 Deling med 10, 100, 1 000 osv.

1.3 Deling med 10, 100, 1 000 osv.

- Når man deler et desimaltall med 10, får man svaret ved å flytte komma en plass til venstre.
- Når man deler et desimaltall med 10, får man svaret ved å flytte komma to plasser til venstre.
- Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 200 : 10 &= 200{,}0 : 10 \\ &= 20{,}00 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 : 10 &= 45{,}0 : 10 \\ &= 4{,}50 \\ &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 200 : 100 &= 200{,}0 : 100 \\ &= 2{,}000 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 : 100 &= 45{,}0 : 100 \\ &= 0{,}450 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$143{,}7 : 10 = 14{,}37$$

$$143{,}7 : 100 = 1{,}437$$

$$143{,}7 : 1\,000 = 0{,}1437$$

$$93{,}6 : 10 = 9{,}36$$

$$93{,}6 : 100 = 0{,}936$$

$$93{,}6 : 1\,000 = 0{,}0936$$

Deling med 10, 100, 1 000 osv. (forklaring)

Titallsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (se MB, s. 13). Når man deler et tall med 10, vil alle enere i tallet bli til tideler, alle tiere bli til enere osv. Hvert siffer forskyves altså én plass mot høyre. Tilsvarende forskyves hvert siffer to plasser mot høyre når man deler med 100, tre plasser når man deler med 1 000 osv.

1.4.2 Oppstilling

Divisjon med oppstilling baserer seg på divisjon tolket som inndeling av mengder (se MB ,s. 23)

Eksempel 1

7	6	:	4	=	1	9
4						
3	6					
3	6					
	0					

Eksempel 1

8	9	4	:	3	=	2	9	8
6								
2	9							
2	7							
	2	4						
	2	4						
		0						

1.4.3 Tabellmetoden

Tabellmetoden baserer seg på divisjon som omvendt operasjon av ganging. For eksempel er svaret på spørsmålet ”Hva er 76 : 4” det samme som svaret på spørsmålet ”Hvilket tall må jeg gange 4 med for å få 76?”. På samme vis som for tabellmetoden ved subtraksjon er det opp til en selv å velge passende tall for å nå målet.

Eksempel 1

$76 : 4 = 19$

$\cdot 4$		
10	40	40
9	36	76
19		

Eksempel 2

$894 : 3 = 298$

$\cdot 3$		
200	600	600
60	120	720
60	120	840
10	30	870
8	24	894
298		

Eksempel 3

$894 : 3 = 298$

$\cdot 3$		
300	900	900
-2	-6	894
298		

Merk: Samme reknestykke som i *Eksempel 2*, men en annen utrekning.

1.5 Standardform

Vi kan utnytte *Regel 1.2* og *Regel 1.3*, og det vi kan om potenser (se MB s ??), til å skrive tall på *standardform*.

La oss først se på tallet 6 700 . Av *Regel* **??** vet vi at

$$6\,700 = 6{,}7 \cdot 1\,000$$

Og siden $1000 = 10^3$, er

$$6\,700 = 6{,}7 \cdot 1\,000 = 6{,}7 \cdot 10^3$$

$6{,}7 \cdot 10^3$ er 6 700 skrevet på standardform fordi

- 6,7 er større enn 0 og mindre enn 10.
- 10^3 er en potens med grunntall 10 og eksponent 3, som er et heltall.
- 6,7 og 10^3 er ganget sammen.

La oss også se på tallet 0,093. Av *Regel* **??** har vi at

$$0{,}093 = 9{,}3 : 100$$

Men å dele med 100 er det samme som å gange med 10^{-2}, altså er

$$0{,}093 = 9{,}3 : 100 = 9{,}3 \cdot 10^{-2}$$

$9{,}3 \cdot 10^{-2}$ er 0,093 skrevet på standardform fordi

- 9,3 er større enn 0 og mindre enn 10.
- 10^{-2} er en potens med grunntall 10 og eksponent -2, som er et heltall.
- 9,3 og 10^{-2} er ganget sammen.

1.4 Standardform

Et tall skrevet som

$$a \cdot 10^n$$

hvor $0 < a < 10$ og n er et heltall, er et tall skrevet på standardform.

Eksempel 1

Skriv 9800 på standardform.

Svar:

$$9\,80 = 9{,}8 \cdot 10^2$$

Eksempel 2

Skriv 678,4 på standardform.

Svar:

$$0{,}00671 = 6{,}71 \cdot 10^{-3}$$

Tips

For å skrive om tall på standardform kan du gjøre følgende:

1. Flytt komma slik at du får et tall som ligger mellom 0 og 10.
2. Gang dette tallet med en tierpotens som har eksponent med tallverdi lik antallet plasser du flyttet komma. Flyttet du komma mot venstre/høgre, er eksponenten positiv/negativ.

Eksempel 3

Skriv 9 761 432 på standardform

Svar:

1. Vi flytter komma 6 plasser til venstre, og får 9,761432
2. Vi ganger dette tallet med 10^6, og får at

$$9\,761\,432 = 9{,}761432 \cdot 10^6$$

Eksempel 4

Skriv 0,00039 på standardform.

Svar:

1. Vi flytter komma 4 plasser til høgre, og får 3,9.

2. Vi ganger dette tallet med 10^{-4}, og får at

$$0{,}00039 = 3{,}9 \cdot 10^{-4}$$

1.6 Rekning med tid

Sekunder, minutter og timer er organisert i grupper på 60:

$$1 \text{ minutt} = 60 \text{ sekund}$$
$$1 \text{ time} = 60 \text{ minutt}$$

Dette betyr at *overganger* oppstår i utregninger når vi når 60.

Eksempel 1

$2\,\text{t}\ 25\,\text{min}\ + 10\,\text{t}\ 45\,\text{min} = 13\,\text{t}\ 10\,\text{min}$

Metode 1

		10 t 45 min
15 min	15 min	11 t 00 min
10 min	25 min	11 t 10 min
2 t	2 t 25 min	13 t 10 min

Metode 2

		10:45
00:15	00:15	11:00
00:10	00:25	11:10
02:00	02:25	13:10

Eksempel 2

$14\,\text{t}\ 18\,\text{min}\ - 9\,\text{t}\ 34\,\text{min} = 4\,\text{t}\ 44\,\text{min}$

Metode 1

	9 t 34 min
26 min	10 t 00 min
18 min	10 t 18 min
4 t	14 t 00 min
4 t 44 min	

Metode 2

	09:34
00:26	10:00
00:18	10:18
04:00	14:18
04:44	

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Regn ut.

a) $12 + 84$ b) $36 + 51$ c) $328 + 571$ d) $242 + 56$

1.1.2

Regn ut.

a) $19 + 84$ b) $86 + 57$ c) $529 + 471$ d) $202 + 808$

1.2.1

Regn ut.

a) $84 - 23$ b) $286 - 52$ c) $529 - 401$ d) $782 - 131$

1.2.2

Regn ut.

a) $78 - 19$ b) $824 - 499$ c) $731 - 208$ d) $1078 - 991$

1.3.1

Regn ut.

a) $12 \cdot 3$ b) $28 \cdot 4$ c) $76 \cdot 5$ d) $43 \cdot 6$

e) $109 \cdot 7$ f) $98 \cdot 8$ g) $213 \cdot 9$

1.3.2

Regn ut.

a) $29 \cdot 12$ b) $83 \cdot 31$ c) $91 \cdot 76$ d) $14 \cdot 83$

1.3.3

Regn ut.

a) $531 \cdot 56$ b) $83 \cdot 701$ c) $91 \cdot 673$ d) $731 \cdot 67$

1.3.4

a) Bruk kalkulator til å regne ut $27 \cdot 5$ og $2{,}7 \cdot 5$.

b) Bruk kalkulator til å regne ut $247 \cdot 192$ og $24{,}7 \cdot 19{,}2$.

c) Bruk kalkulator til å regne ut $928 \cdot 74$ og $9{,}28 \cdot 7{,}4$.

d) Bruk kalkulator til å regne ut $134 \cdot 4\,249$ og $1{,}34 \cdot 42{,}49$.

e) Sammenlign parene av svar fra oppgave a) - c) og lag en regel for hvordan du kan regne ut ganging med desimaltall.

1.3.5

Regn ut

a) $82{,}3 \cdot 5$ b) $9{,}51 \cdot 7$ c) $22{,}4 \cdot 1{,}7$

1.4.1

Regn ut.

a) $98 : 2$ b) $87 : 3$ c) $92 : 4$ d) $85 : 5$ e) $72 : 6$

1.4.2

Regn ut.

a) $378 : 2$ b) $224 : 4$ c) $495 : 5$

e) $133 : 7$ f) $208 : 8$ g) $873 : 9$

1.5.1

Skriv tallet på standardform.

a) $98\,000$ b) $167\,000\,000$ c) $4\,819$ d) 21

e) $9\,132{,}27$ f) $893{,}7$ g) $18\,002{,}1$ h) $302{,}4$

1.5.2

Skriv tallet på standardform.

a) $0{,}027$ b) $0{,}0001901$ c) $0{,}32$ d) $0{,}00000020032$

1.5.3

Gitt regnestykket

$$900\,000\,000 \cdot 0{,}00007$$

a) Forklar hvorfor reknestykket kan skrives som

$$9 \cdot 10^8 \cdot 7 \cdot 10^{-5}$$

b) Bruk potensregler (se MB, s ??) og finn svaret på reknestykket fra a).

Kapittel 2

Statistikk

2.1 Introduksjon

I en *undersøkelse* henter vi inn informasjon. Denne informasjonen kan gjerne være tall eller ord, og kalles *data*. En samling av innhentet data kalles et *datasett*.

For eksempel, tenk at du spør to mennesker om de liker kaviar. Den éne svarer "ja", den andre "nei". Da er "ja" og "nei" datene du har samlet inn, og ["ja", "nei"] er datasettet ditt.

Statistikk handler grovt sett om to ting; *å presentere* og *å tolke* innsamlet data. For begge disse formålene har vi noen verktøy som vi i kommende seksjoner skal studere ved hjelp av noen forskjellige undersøkelser på side 26.

Det er ikke noen fullstendige fasitsvar på hvordan man presenterer eller tolker data, men to retningslinjer bør du alltid ta med deg:

- La det alltid komme tydelig fram hva du har undersøkt og hvilke data som er skaffet.
- Tenk alltid over hvilke metoder du bruker for å tolke dataene.

Undersøkelse 1

10 personer testet hvor mange sekunder de kunne holde pusten. Resultatene ble disse:

47 124 61 38 97 84 101 79 56 40

Undersøkelse 2

15 personer ble spurt hvor mange epler de spiser i løpet av en uke. Svarene ble disse:

7 4 5 4 1 0 6 5 4 8 1 6 8 0 14

Undersøkelse 3

300 personer ble spurt hva deres favorittdyr er.

- 46 personer svarte tiger
- 23 personer svarte løve
- 17 personer svarte krokodille
- 91 personer svarte hund
- 72 personer svarte katt
- 51 personer svarte andre dyr

Undersøkelse 4

Mobiltelefoner med smartfunksjoner (app-baserte) kom på det norske markedet i 2009. Tabellen[1] under viser det totale salget mobiltelefoner i tidsperioden 2009-2014 og andelen med og uten smartfunkskjoner.

År	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
totalt	2 365	2 500	2 250	2 200	2 400	2 100
u. sm.f.	1 665	1 250	790	300	240	147
m. sm.f.	700	1 250	1 460	1 900	2 160	1 953

[1]Tallene er hentet fra medienorge.uib.no.

2.2 Presentasjonsmetoder

Skal vi presentere våre undersøkelser, bør vi vise datasett slik at det er lett for andre å se hva vi har funnet. Dette kan vi gjøre blant annet ved hjelp av *frekvenstabeller*, *søylediagram*, *sektordiagram* eller *linjediagram*.

2.2.1 Frekvenstabell

I en frekvenstabell setter man opp dataene i en tabell som viser hvor mange ganger hver unike data dukker opp. Dette antallet kalles *frekvensen*.

Undersøkelse 2

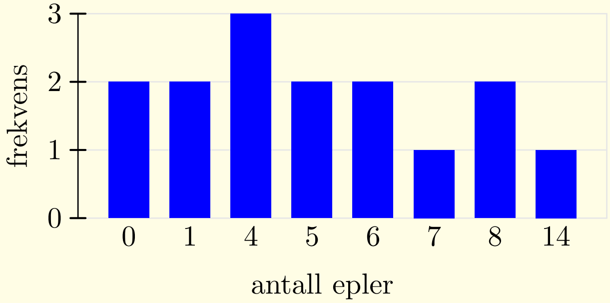
I vår undersøkelse har vi to 0, to 1, tre 4, to 5, to 6, én 7, to 8 og én 14. I en frekvenstabell skriver vi da

antall epler	frekvens
0	2
1	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	2
14	1

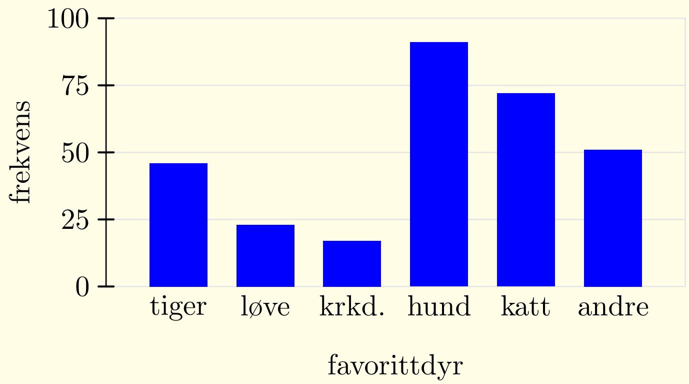
2.2.2 Søylediagram (stolpediagram)

Med et søylediagram presenterer vi dataene med søyler som viser frekvensen.

Undersøkelse 2



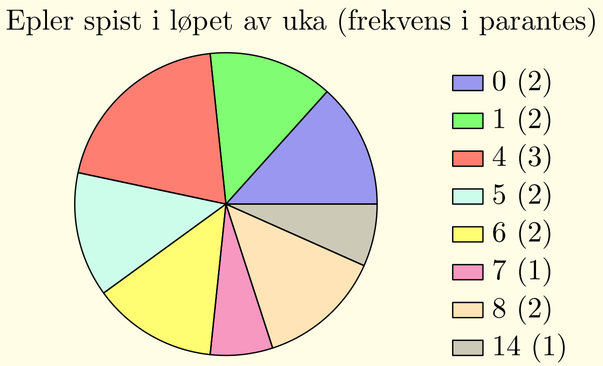
Undersøkelse 3



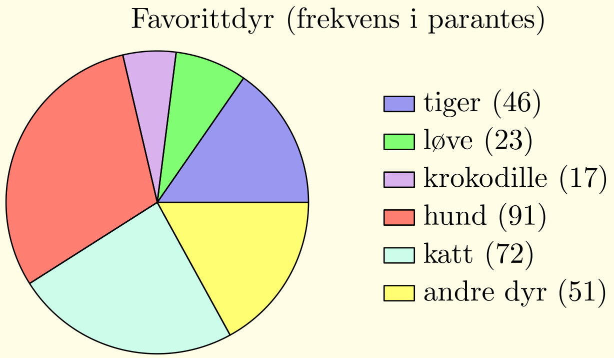
2.2.3 Sektordiagram (kakediagram)

I et sektordiagram vises frekvensene som sektorer av en sirkel:

Undersøkelse 1



Undersøkelse 2



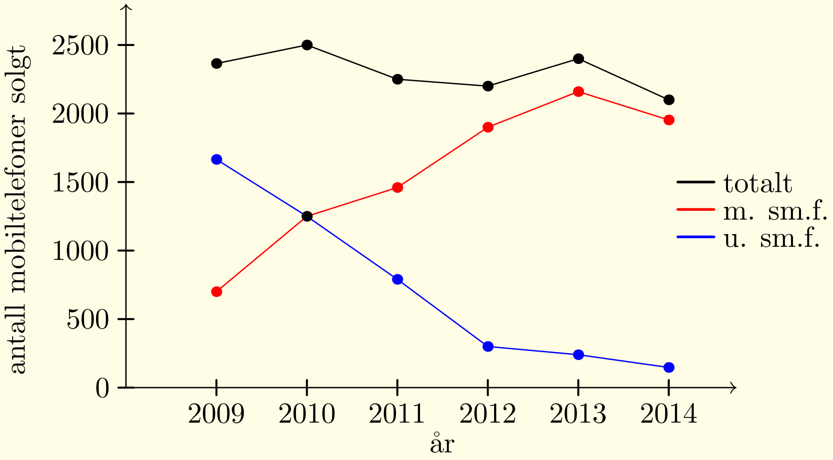
Å lage et sektordiagram for hand

Skal du selv tegne et sektordiagram, trenger du kunnskaper om vinkler og om brøkandeler. Se s. ??, MB, s. ?? og oppgave **??**.

2.2.4 Linjediagram

I et linjediagram legger vi inn dataene som punkt i et koordinatsystem, og trekker en linje mellom dem. Linjediagram brukes oftest når det er snakk om en form for utvikling.

Undersøkelse 4



2.3 Tolking av tendenser; sentralmål

I datasett vil det ofte være svar som er helt eller veldig like, og som gjentar seg. Dette betyr at vi kan si noe om hva som gjelder for mange. De matematiske begrepene som forteller noe om dette kalles *sentralmål*. De vanligste sentralmålene er *typetall*, *gjennomsnitt* og *median*.

2.3.1 Typetall

2.1 Typetall

Typetallet er verdien det er flest eksemplarer av i datasettet.

Undersøkelse 1

I datasettet er det tallet 4 som opptrer flest (tre) ganger. Dette kan vi se både fra selve datasett på s ?? eller frekvenstabellen på s ??, søylediagrammet på s ?? eller sektordiagrammet ??.

4 er altså typetallet.

2.3.2 Gjennomsnitt

Når et datasett består av svar i form av tall kan vi finne summen av svarene. Når vi spør oss hva gjennomsnittet er, spør vi om dette:

"Hvis alle svarene var like, men summen den samme, hvilken verdi måtte alle svarene da ha hatt?"

Dette er jo ingenting annet enn divisjon (se MB, s. 23):

2.2 Gjennomsnitt

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{summen av verdiene fra datasettet}}{\text{antall verdier}}$$

Undersøkelse 1

Vi summerer verdiene fra datasettet, og deler med antall verdier:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{47+124+61+38+97+84+101+79+56+40}{10} \\ &= \frac{727}{10} \\ &= 72{,}7\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt holdt de 10 deltakerne pusten i 72,7 sekunder.

Undersøkelse 2

Metode 1

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{7+4+5+4+1+0+6+5+4+8+1+6+8+0+14}{15} \\ &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4.87\end{aligned}$$

Metode 2

Vi utvider frekvenstabellen fra side ?? for å finne summen av verdiene fra datasettet (vi har også tatt med summen av frekvensene):

Antall epler	Frekvens	antall · frekvens
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	2	$1 \cdot 2 = 2$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$
7	1	$7 \cdot 1 = 14$
8	1	$8 \cdot 2 = 16$
14	1	$14 \cdot 1 = 14$
sum	15	73

Nå har vi at

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4{,}87\end{aligned}$$

Altså, i gjennomsnitt spiser de 15 respondentene 4,87 epler i uka.

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Gjennomsnitt for totalt salg av mobiler: 2302
- Gjennomsnitt for salg av mobiler uten smartfunksjon: 732
- Gjennomsnitt for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

2.3.3 Median

2.3 Median

Medianen er tallet som ender opp i midten av datasettet når det rangeres fra tallet med lavest til høyest verdi.

Hvis datasettet har partalls antall verdier, er medianen gjennomsnittet av de to verdiene i midten (etter rangering).

Undersøkelse 1

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

$$38 \quad 40 \quad 47 \quad 56 \quad 61 \quad 79 \quad 84 \quad 97 \quad 101 \quad 124$$

De to tallene i midten er 61 og 79. Gjennomsnittet av disse er

$$\frac{61+79}{2} = 70$$

Altså er medianen 70.

Undersøkelse 2

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 14$$

Tallet i midten er 5, altså er medianen 5.

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Median for totalt salg av mobiler: 2307
- Median for salg av mobiler uten smartfunksjon: 545
- Median for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

2.4 Tolking av forskjeller; spredningsmål

Ofte vil det også være store forskjeller (stor spredning) mellom dataene som er samlet inn. De matematiske begrepene som forteller noe om dette er *variasjonsbredde*, *kvartilbredde*, *varians* og *standardavvik*.

2.4.1 Variasjonsbredde

2.4 Variasjonsbredde

Differansen mellom svarene med henholdsvis høyest og lavest verdi.

Undersøkelse 1

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 124 og 38. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 124 - 38 = 86$$

Undersøkelse 2

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 14 og 0. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 14 - 0 = 14$$

Undersøkelse 4

- Variasjonsbredde for mobiltelefoner:

$$2\,500 - 2\,100 = 400$$

- Variasjonsbredde for mobiltelefoner uten smartfunksjoner:

$$1\,665 - 147 = 518$$

- Variasjonsbredde for mobiltelefoner med smartfunksjoner:

$$2\,160 - 700 = 1460$$

2.4.2 Kvartilbredde

2.5 Kvartilbredde og øvre og nedre kvartil

Kvartilbredden til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Ranger datasettet fra høyest til lavest.
2. Skill det rangerte datasettet på midten, slik at to nye sett oppstår. (Viss det er oddetalls antall verdier i datasettet, utelates medianen).
3. Finn de respektive medianene i de to nye settene.
4. Finn differansen mellom medianene fra punkt 3.

Om medianene fra punkt 3: Den med høyest verdi kalles *øvre kvartil* og den med lavest verdi kalles *nedre kvartil*.

Undersøkelse 2

1. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
2. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124
3. Medianen i det blå settet er 47 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 97 (øvre kvartil).

   38 40 47 56 61   79 84 97 101 124

4. Kvartilbredde $= 97 - 47 = 50$

Undersøkelse 1

1. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
2. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14
3. Medianen i det blå settet er 1 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 7 (øvre kvartil).

   0 0 1 1 4 4 4   5 6 6 7 8 8 14

4. Kvartilbredde $= 7 - 1 = 6$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt)

- For mobiltelefoner er kvartilbredden: 200
- For mobiltelefoner uten smartfunksjoner er kvartilbredden: 1010
- For mobiltelefoner med smartfunksjoner er kvartilbredden: 703

2.4.3 Avvik og varians

2.6 Varians

Differansen mellom en verdi og gjennomsnittet i et datasett kalles *avviket* til verdien.

Variansen til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Kvadrer avviket til hver verdi i datasettet, og summer disse.
2. Divider med antall verdier i datasettet.

Eksempel

Gitt datasettet

$$2 \quad 5 \quad 9 \quad 6 \quad 8$$

Da har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2+5+9+6+8}{5} = 6$$

Og videre er

$$\text{variansen} = \frac{(2-6)^2 + (5-6)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2}{5}$$

Undersøkelse 1

(Utregning utelatt)

Variansen er 754,01

Undersøkelse 2

Gjennomsnittet fant vi på side ??. Vi utvider frekvenstabellen vår fra side ??:

antall epler	frekvens	frekvens · kvadrert avvik
0	2	$2 \cdot \left(0 - \frac{73}{15}\right)^2$
1	2	$2 \cdot \left(1 - \frac{73}{15}\right)^2$
4	3	$3 \cdot \left(4 - \frac{73}{15}\right)^2$
5	2	$2 \cdot \left(5 - \frac{73}{15}\right)^2$
6	2	$2 \cdot \left(6 - \frac{73}{15}\right)^2$
7	1	$1 \cdot \left(7 - \frac{73}{15}\right)^2$
8	2	$2 \cdot \left(8 - \frac{73}{15}\right)^2$
14	1	$1 \cdot \left(9 - \frac{73}{15}\right)^2$
sum	15	$189{,}7\overline{3}$

Altså er variansen

$$\frac{189{,}7\overline{3}}{15} \approx 12{,}65$$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt)

- For mobiltelefoner er variansen 17 781,25
- For mobiltelefoner uten smartfunksjoner er variansen $318\,848.\overline{3}$
- For mobiltelefoner med smartfunksjoner er variansen $245\,847.91\overline{6}$

Hvorfor innebærer variansen kvadrering?

La oss se hva som skjer hvis vi gjentar utregningen fra *Eksempel 1* på side 37, men uten å kvadrere:

$$\frac{(2-6)+(5-6)+(9-6)+(6-6)+(8-6)}{5}$$
$$=\frac{2+5+9+6+8}{5}-6$$

Men brøken $\frac{2+5+9+6+8}{5}$ er jo per definisjon gjennomsnittet til datasettet, og dermed blir uttrykket over lik 0. Dette vil gjelde for alle datasett, så i denne sammenhengen gir ikke tallet 0 noen ytterligere informasjon om datasettet. Om vi derimot kvadrerer avvikene, unngår et uttrykk som alltid blir lik 0.

Oppgaver for kapittel 2

2.2.1

Gitt datasettet

$$2 \quad 12 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 10$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.2

Gitt datasettet

$$9 \quad 12 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 10 \quad 5 \quad 6$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.3

Gitt datasettet

$$11 \quad 7 \quad 16 \quad 0 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 16 \quad 5$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.4

Gitt datasettet

$$6 \quad 11 \quad 14 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 11 \quad 5 \quad 11 \quad 17$$

Finn

a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.2.5

Du ønsker å finne ut hva nordmenn flest har i formue[1], og bestemmer deg for å finne ut av dette ved å spørre fem tilfeldige personer du møter i gata. De fire første svarene (i kr) er disse:

3,2 millioner 2,9 millioner 1,8 millioner 4,2 millioner

Den siste personen du tilfeldigvis møter er mannen i Norge med høyest formue[2], Gustav Magnar Witzøe. Hans svar er dette:

20 915,3 millioner

a) Finn medianen i datasettet.

b) Finn gjennomsnittet i datasettet.

c) Er det medianen eller gjennomsnittet som trolig best representerer hva nordmenn flest har i formue?

2.2.6

Lag en frekvenstabell for datasettet under. (La tittelen til venstre kolonne være "frukt".)

banan eple eple eple pære banan eple pære
appelsin eple pære pære

2.2.7

Lag en frekvenstabell for datasettet fra oppgave 2.2.4. (La tittelen til venstre kolonne være "tall".)

2.2.8

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

2.2.9 (regneark)

a) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et søylediagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

---

[1] Enkelt sagt er formue summen av penger du har i banken, verdier av hus, bil etc., fratrekt gjeld o.l.

[2] Ifølge ligningstallene for 2019.

2.2.10 (regneark)

a) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 2.2.6.

b) Lag et sektordiagram for datasettet fra oppgave 2.2.7.

2.2.11 (programmering)

Lag et script som fra en liste med tall finner

a) gjennomsnittet.

b) typetallet.

c) medianen.

(Bruk gjerne datasettet fra oppgave 2.2.2 som et utgangspunkt.)

2.2.12

Av de fire undersøkelsene på side 26, hvorfor har vi

a) vist frekvenstabell bare for undersøkelse 2?

b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?

c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?

d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.2.13

Hvis datasettet har partalls antall svar kan man også finne medianen slik:

1. Finn de to tallene i midten.
2. Finn differansen mellom tallene, og del denne med 2.
3. Legg resultatet fra punkt 2 til det laveste av de to tallene i midten.

a) Prøv metoden på datasettet fra oppgave 2.2.3.

b) Hvorfor vil denne metoden alltid fungere? (FLYTT TIL FORMELDEL)

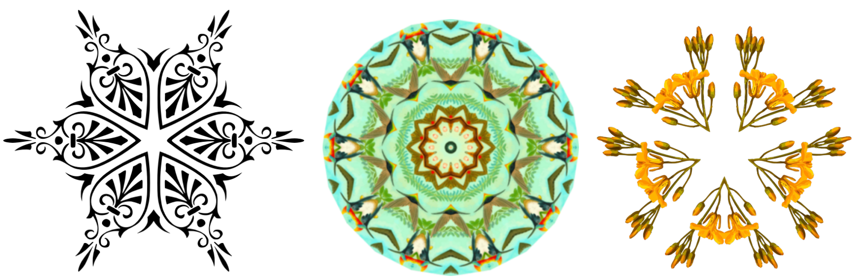
2.2.14

Av de fire undersøkelsene på side 26, hvorfor har vi ikke funnet sentral- og spredningsmål for undersøkelse 3?

Kapittel 3

Geometri

3.1 Symmetri



Bilder hentet fra freesvg.org.

Mange figurer kan deles inn i minst to deler hvor den éne delen bare er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av den andre. Dette kalles *symmetri*. De tre kommende regelboksene definerer de tre variantene for symmetri, men merk dette: Symmetri blir som regel intuitivt forstått ved å studere figurer, men er omstendelig å beskrive med ord. Her vil det derfor, for mange, være en fordel å hoppe rett til eksemplene.

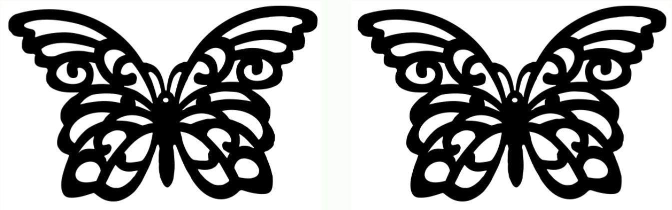
3.1 Translasjonssymmetri (parallellforskyvning)

En symmetri hvor minst to deler er forskjøvne utgaver av hverandre kalles en *translasjonssymmetri*.

Når en form forskyves, blir hvert punkt på formen flyttet langs det samme linjestykket.

Eksempel 1

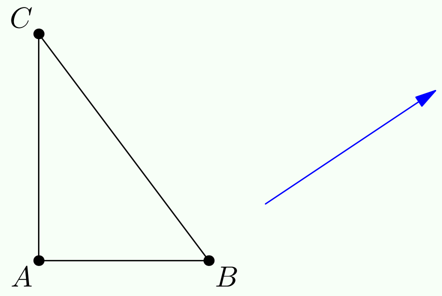
Figuren under viser en translasjonssymmetri som består av to sommerfugler.



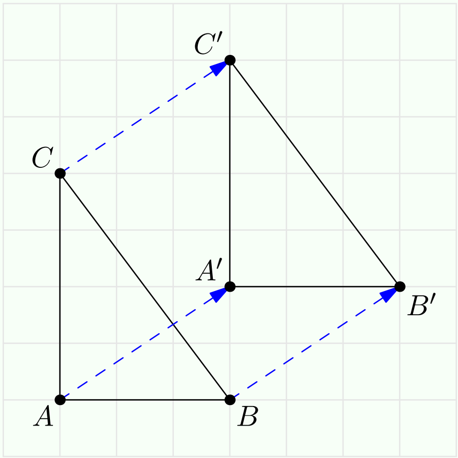
Bilde hentet fra freesvg.org.

Eksempel 2

Under vises $\triangle ABC$ og et blått linjestykke.



Under vises $\triangle ABC$ forskjøvet med det blå linjestykket.



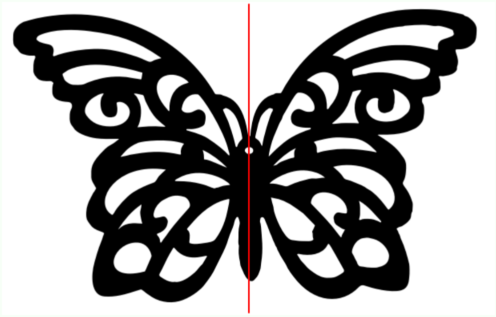
3.2 Speiling

En symmetri hvor minst to deler er vendte utgaver av hverandre kalles en *speilingssymmetri* og har minst én *symmetrilinje* (*symmetriakse*).

Når en et punkt speiles, blir det forskjøvet vinkelrett på symmetrilinja fram til det nye og det opprinnelige punktet har samme avstand til symmetrilinja.

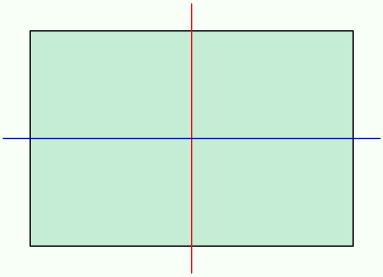
Eksempel 1

Sommerfuglen er en speilsymmetri, med den røde linja som symmetrilinje.



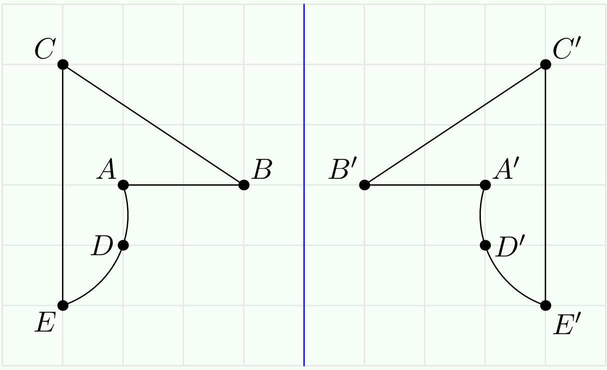
Eksempel 2

Den røde linja og den blå linja er begge symmetrilinjer til det grønne rektangelet.



Eksempel 3

Under vises en form laget av punktene A, B, C, D, E og F, og denne formen speilet om den blå linja.



3.3 Rotasjonssymmetri

En symmetri hvor minst to deler er en rotert utgave av hverandre kalles en *rotasjonssymmetri* og har alltid et tilhørende *rotasjonspunkt* og en *rotasjonsvinkel*.

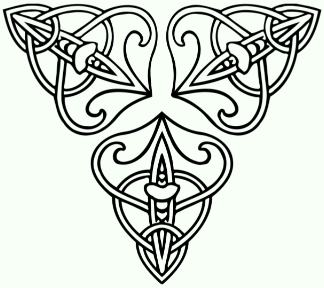
Når et punkt roteres vil det nye og det opprinnelige punktet

- ligge langs den samme sirkelbuen med sentrum i rotasjonspunktet.
- med rotasjonspunktet som toppunkt danne rotasjonsvinkelen.

Hvis rotasjonsvinkelen er et positivt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *mot* klokka. Hvis rotasjonsvinkelen er et negativt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *med* klokka.

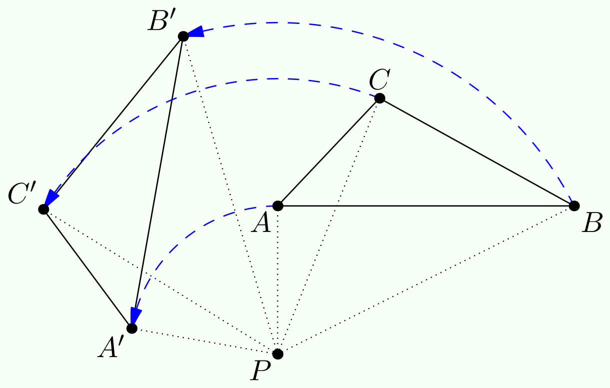
Eksempel 1

Mønsteret under er rotasjonssymmetrisk. Rotasjonssenteret er i midten av figuren og rotasjonsvinkelen er 120°



Eksempel 2

Figuren under viser $\triangle ABC$ rotert 80° om rotasjonspunktet P.



Da er

$$PA =' PA \quad , \quad PB = PB' \quad , \quad PC = PC'$$

og

$$\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC' = 80^\circ$$

Språkboksen

En form som er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av en annen form, kalles en *kongruensavbilding*.

3.2 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi *størrelser*. Videre har vi *størrelser med dimensjoner* og *dimensjonsløse størrelser*.

Et eksempel på en størrelse med dimensjon er "2 meter". Dimensjonen er da 'lengde', som vi gjerne måler i meter. Vi sier at meter er en *enhet* for dimensjonen lengde.

Et eksempel på en størrelse uten dimensjon er "to hester". Mens det bare finnes én lengde som er "2 meter", "to hester" se veldig forskjellig ut, avhengig av hvile to hester det er snakk om.

Regning med dimensjoner

Når vi regner med størrelser med dimensjoner må vi passe på at alle enhetene er like, hvis ikke gir ikke regnestykkene våre mening. I denne boka skal vi se på disse enhetene:

Enhet	**Forkortelse**	**Dimensjon**
meter	m	lengde
gram	g	masse
liter	L	volum

Noen ganger har vi veldig store eller veldig små størrelser, for eksempel er det ca 40 075 000 m rundt ekvator! For så store tall er det vanlig å bruke en *prefiks*, da kan vi si at det er ca 40 075 km rundt ekvator. Her står 'km' for 'kilometer' og 'kilo' betyr '1 000'. Så 1 000 meter er altså 1 kilometer. Her er prefiksene man oftest[1] møter på i hverdagen:

Prefiks	**Forkortelse**	**Betydning**
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

[1] Rett nok er 'deka' en veldig lite brukt prefiks, men vi har tatt den med fordi den kompletterer tallmønsteret.

Bruker vi denne tabellen i kombinasjon med enhetene kan vi for eksempel se at:

$$1000\,\mathrm{g} = 1\,\mathrm{kg}$$
$$0{,}1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{dm}$$
$$0{,}01\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{cL}$$

Enda ryddigere kan vi få det hvis vi lager en vannrett tabell, med meter, gram eller liter lagt til i midten[1]:

3.4 Omgjøring av prefikser

Når vi skal endre prefikser kan vi bruke denne tabellen:

kilo	hekto	deka	m/g/L	desi	centi	milli

Komma må flyttes like mange ganger som antall ruter vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil = $10\,000\,\mathrm{m}$). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

Eksempel 1

Skriv om $23{,}4\,\mathrm{mL}$ til antall L.

Svar:

Vi skriver tabellen vår med L i midten, og legger merke til at vi må *tre ruter til venstre* for å komme oss fra mL til L:

kilo	hekto	deka	L	desi	centi	milli

Det betyr at vi må flytte kommaet vårt tre plasser til venstre for å gjøre om mL til L:

$$23{,}4\,\mathrm{mL} = 0{,}0234\,\mathrm{L}$$

Eksempel 2

Skriv om $30\,\mathrm{hg}$ til antall cg.

Svar:

[1] Legg merke til at meter, gram og liter er *enheter med dimensjoner*, mens kilo, hekto osv. er *dimensjonsløse tall*. Det kan derfor virke litt rart å sette dem opp i samme tabell, men for dette formålet fungerer det helt fint.

Vi skriver tabellen vår med g i midten og legger merke til at vi må *fire ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

kilo	hekto	deka	g	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fire plasser til høyre for å gjøre om hg til cg:

$$30\,\text{mg} = 300\,000\,\text{cg}$$

Eksempel 3

Gjør om $12\,500\,\text{dm}$ til antall mil.

Svar:

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må *fem ruter til høyre* for å komme oss fra hg til cg:

mil	kilo	hekto	deka	m	desi	centi	milli

Dét betyr at vi må flytte kommaet vårt fem plasser til høyre for å gjøre om mil til cg:

$$30\,\text{dm} = 3\,000\,000\,\text{mil}$$

Omgjøring av prefikser (forklaring)

Omgjøring av prefikser handler om å gange/dele med 10, 100 osv. (se seksjon ??)

La oss som første eksempel skrive om $3{,}452\,\text{km}$ til antall meter. Vi har at

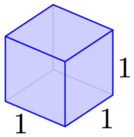
$$\begin{aligned}3{,}452\,\text{km} &= 3{,}452 \cdot 1000\,\text{m}\\ &= 3\,452\,\text{m}\end{aligned}$$

La oss som andre eksempel skrive om $47\,\text{mm}$ til antall meter. Vi har at

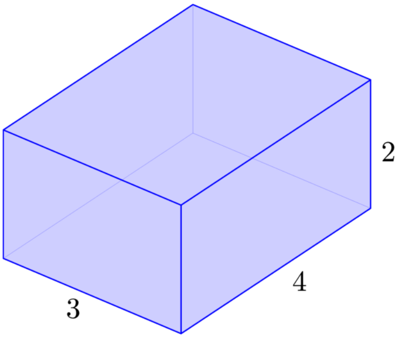
$$\begin{aligned}47\,\text{mm} &= 47 \cdot \frac{1}{1000}\,\text{m}\\ &= (47 : 1000)\,\text{m}\\ &= 0{,}047\,\text{m}\end{aligned}$$

3.3 Volum

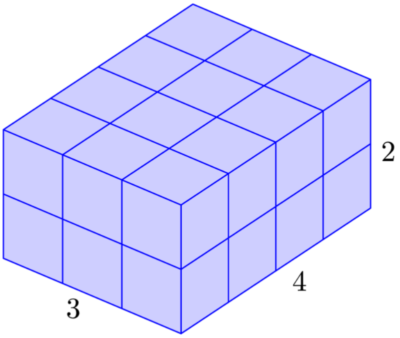
Når vi ønsker å si noe om hvor mye det er plass til inni en gjenstand, snakker vi om *volumet* av den. Som et mål på volum tenker vi oss *en kube* som har 1 som både bredde, lengde og høgde:



En slik kube kan vi kalle"enhetskuben". Si vi har en firkantet boks med bredde 3, lengde 4 og høgde 2:



Vi kan må merke oss at vi har plass til akkurat 24 enhetskuber i denne boksen:



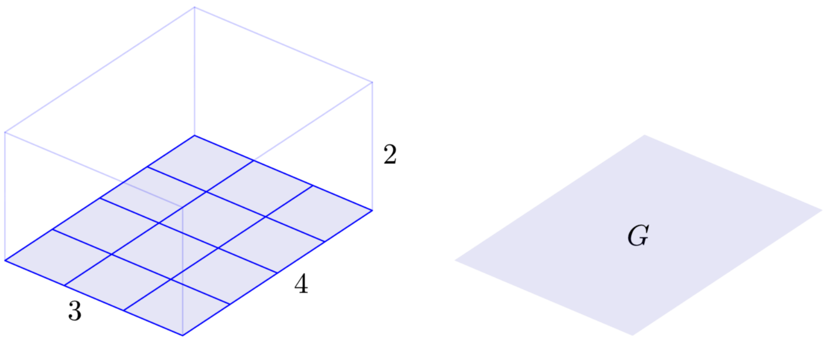
Og dette kunne vi ha regnet ut slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Altså:

$$\text{bredde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høgde}$$

Grunnflate
For å regne ut volumet av de mest elementære figurene vi har, kan det være lurt å bruke begrepet *grunnflate*. Slik som for en grunnlinje, er det vårt valg av grunnflate som bestemer hvordan vi skal regne ut høgden. For en slik boks som vi akkurat så på, er det naturlig å velge flaten som "ligger ned" til å være grunnflaten, og for å indikere dette brukes ofte G:



Grunnflaten har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høgden er 2. Volumet av hele boksen er grunnflatens areal ganger høgden:

$$\begin{aligned} V &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= G \cdot 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

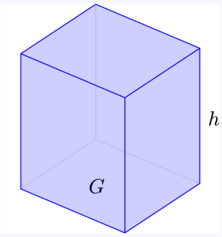
Grunnflaten eller grunnflatearealet?

I teksten over har vi først kalt selve grunnflaten for G, og deretter brukt G for *grunnflatearealet*. I denne boka er begrepet grunnflate så sterkt knyttet til grunnflatearealet at vi ikke kommer til å skille mellom disse to begrepene.

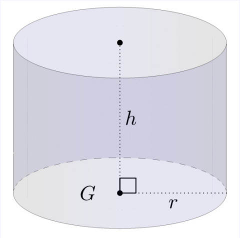
3.5 Volum

Volumet V til en firkantet prisme eller en sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



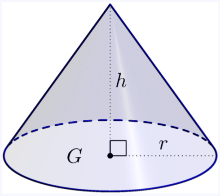
Firkantet prisme



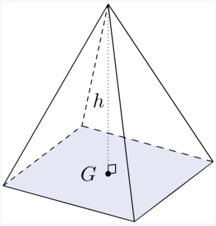
Sylinder

Volumet V til en kjegle eller en pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



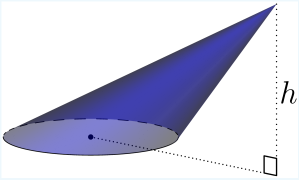
Kjegle



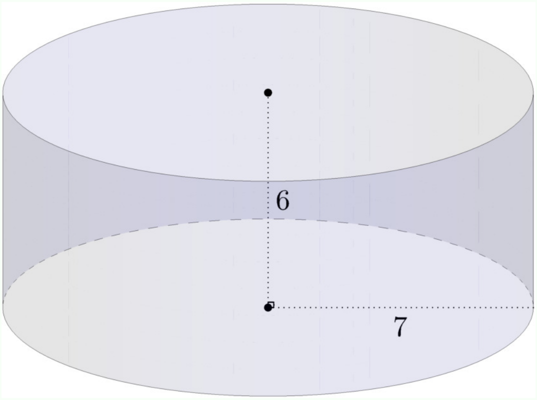
Firkantet pyramide

Obs!

Formlene fra *Regel 3.5* gjelder også for prismer, sylindre, kjegler og pyramider som heller (er skjeve). Hvis grunnflaten er plassert horisontalt, er høgden den vertikale avstanden mellom grunnflaten og toppen til figuren.



Eksempel 1



En sylinder har radius 7 og høgde 5. Finn volumet til sylinderen.

a) Finn grunnflaten til sylinderen.

b) Finn volumet til sylinderen.

Svar:

a) Vi har at (se regel ?? i MB):

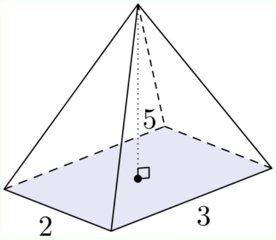
$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= \pi \cdot 7^2 \\ &= 49\pi\end{aligned}$$

b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylinderen} &= 49\pi \cdot 6 \\ &= 294\pi\end{aligned}$$

Eksempel 2

En firkantet pyramide har lengde 2, bredde 3 og høgde 5.



a) Finn grunnflaten til pyramiden.

b) Finn volumet til pyramiden.

Svar:

a) Vi har at (se regel ?? i MB)

$$\begin{aligned} \text{grunnflate} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

b) Dermed er

$$\begin{aligned} \text{volumet til pyramiden} &= 6 \cdot 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

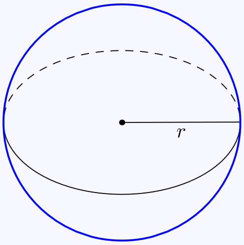
Volumet av ei kule

Som vanlig skiller ting seg ut når vi snakker om renit sirkelformede figurer, og ei *kule* er ikke noe unntak. For den spesielt interesserte kan et bevis for volumformelen leses her, men det er altså helt lov til å bykse rett på formelen:

3.6 Volumet av ei kule

Volumet V av ei kule med radius r er:

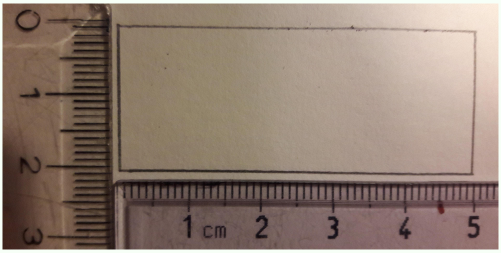
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



3.4 Omkrets, areal og volum med enheter

Når vi måler lengder med linjal eller lignende, må vi passe på å ta med enhetene i svaret vårt.

Eksempel 1



$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 5\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 5\,\text{cm} + 2\,\text{cm}\\ &= 14\,\text{cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 2\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}\\ &= 2 \cdot 5\,\text{cm}^2\\ &= 10\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Vi skriver cm^2 fordi vi har ganget sammen 2 lengder som vi har målt i cm.

Eksempel 2

En sylinder har radius 4 m og høgde 2 m. Finn volumet til sylinderen.

Svar:

Så lenge vi er sikre på at størrelsene vår har samme enhet (i dette tilfellet meter), kan vi først rekne uten størrelser:

$$\begin{aligned}\text{grunnflate til sylinderen} &= \pi \cdot 4^2\\ &= 16\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{volumet til sylinderen} &= 16\pi \cdot 2\\ &= 32\pi\end{aligned}$$

Vi har her ganget sammen tre lengder (to faktorer lik 4 m og én faktor lik 2 m) med meter som enhet, altså er volumet til sylinderen $32\pi\ \mathrm{m}^3$

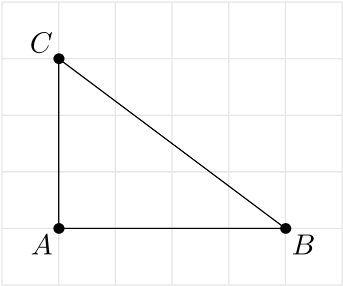
Merk

Når vi skal finne volumet til gjenstander, måler vi lengder som høgde, bredde, radius osv., men i det daglige oppgir vi gjerne volum i liter. Da er det verdt å ha med seg at

$$1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3$$

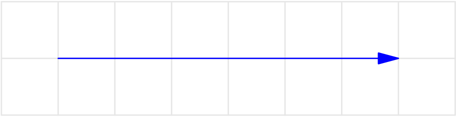
Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

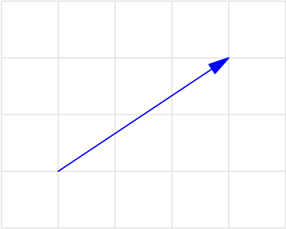


Forskyv trekanten med linjestykkene vist under

a)



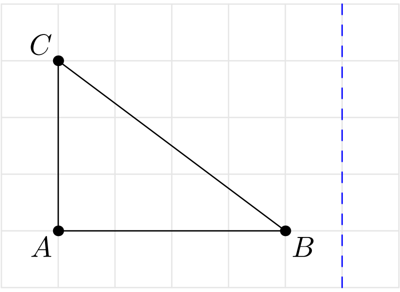
b)



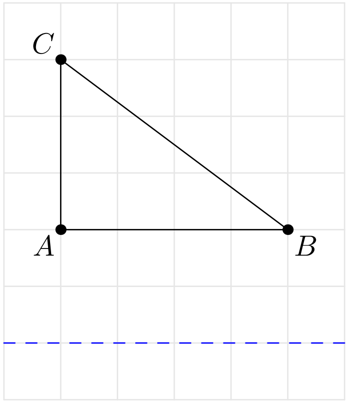
3.1.2

Speil trekanten om symmetrilinja.

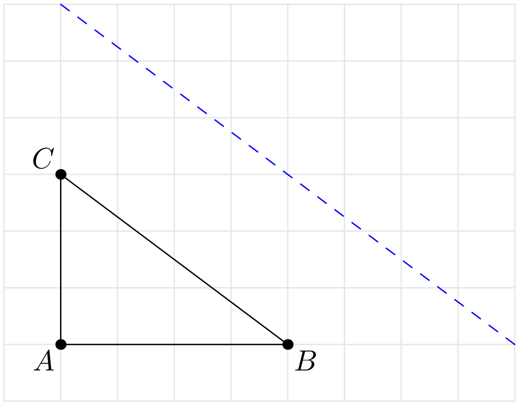
a)



b)



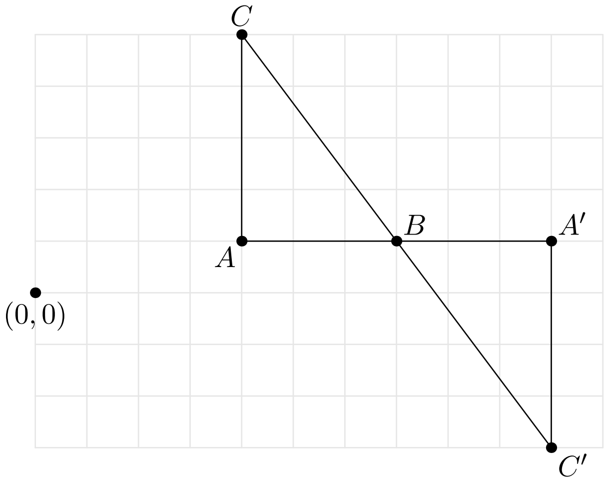
c)



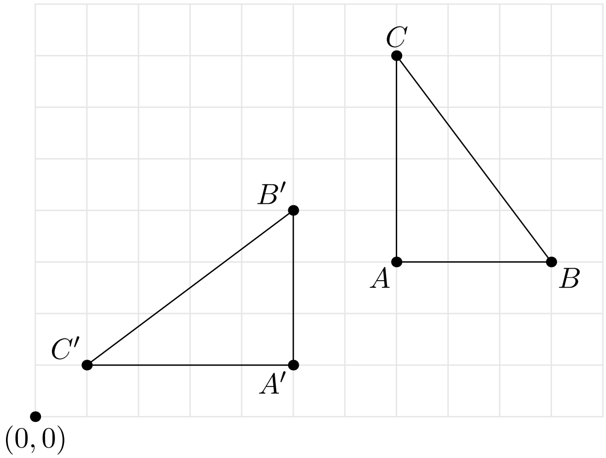
3.1.3

Finn rotasjonsvinkelen og rotasjonspunktet.

a)



b)



3.2.1

Gjør om til antall meter.

a) 484 km   b) 91 km   c) 2 402 km

3.2.2

Gjør om til antall gram.

a) 484 kg   b) 91 hg   c) 2 402 hg

3.2.3

Gjør om til antall liter

a) 480 dl   b) 9100 cl   c) 24 000 cl

3.2.4
Gjør om

a) 12,4 m til antall km.

b) 42 dm til antall m.

c) 58,15 cm til antall mm.

d) 0,0074 km til antall m.

e) 0,15 m til antall cm.

f) 9,7 g til antall hg.

g) 0,15 mg til antall g.

h) 1,419 hg til antall mg.

i) 31 mg til antall hg.

j) 64 039 mg til antall kg.

k) 89 dL til antall L.

l) 691,4 L til antall cL.

m) 15 L til antall mL.

n) 918 cL til antall L.

o) 0,55 dL til antall mL.

3.3.1
En prisme har lengde 9, bredde 10 og høgde 8.

a) Finn grunnflaten til prismen.

b) Finn volumet til prismen.

3.3.2
En kjegle har radius 10 og høgde 4.

a) Finn grunnflaten til kjeglen.

b) Finn volumet til kjeglen.

3.3.3
En prisme har lengde 9 cm, bredde 10 cm og høgde 8 cm.

Finn volumet til prismen.

3.3.4
En kjegle har radius 10 dm og høgde 4 dm.

a) Finn volumet til kjeglen.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

3.3.5
En firkantet pyramide har lengde 4 cm, bredde 9 cm og høgde 10 cm.

a) Finn volumet til kjeglen.

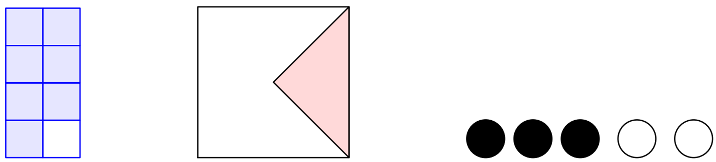
b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

Kapittel 4

Brøkregning

4.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35 - 47) har vi sett hvordan brøker er definert ut ifra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a) (b) (c)

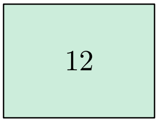
(a) Helheten er 8 ruter. $\frac{7}{8}$ av rutene er blå.

(b) Helheten er et kvadrat. $\frac{1}{4}$ av kvadratet er rødt.

(c) Helheten er 5 kuler. $\frac{3}{5}$ av kulene er svarte.

Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.



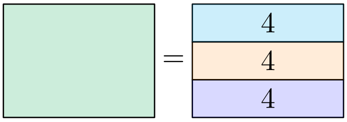
Når vi sier "$\frac{2}{3}$ av 12" mener vi at vi skal

a) dele 12 inn i 3 like grupper

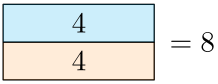
b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

a) 12 delt inn i 3 grupper er lik $12 : 3 = 4$.



b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen $2 \cdot 4 = 8$.



Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne $\frac{2}{3}$ av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med $\frac{2}{3}$ (se MB, s. 45 og 50).

4.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

Eksempel 1

Finn $\frac{2}{5}$ av 15.

Svar:

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Eksempel 2

Finn $\frac{7}{9}$ av $\frac{5}{6}$.

Svar:

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

4.2 Prosent

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er lett å se (omtrent) hvor mye $\frac{3}{5}$ eller $\frac{7}{12}$ av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.

Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Brøker med denne nevneren er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

4.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

Språkboksen

% uttales *prosent*. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

Eksempel 2

$$12{,}7\% = \frac{12{,}7}{100}$$

Merk: Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).

Eksempel 3

Finn verdien til

a) 12% b) 19,6% c) 149%

Svar:

(Se delemed10100osvv ??)

a) $12\% = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

b) $19{,}6\% = \dfrac{19{,}6}{100} = 0{,}196$

c) $149\% = \dfrac{149}{100} = 1{,}49$

Eksempel 3

Gjør om brøkene til prosenttall.

a) $\dfrac{34}{100}$

b) $\dfrac{203}{100}$

Svar:

a) $\dfrac{34}{100} = 34\%$

b) $\dfrac{203}{100} = 203\%$

Eksempel 4

Finn 50% av 800. Av *Regel 4.1* og *Regel 4.2* har vi at

Svar:

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

Eksempel 5

Finn 2% av 7,4.

Svar:

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = \frac{2}{100} \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi foretar utregninger. I *Eksempel 5* over kunne vi har regnet slik:

$$2\% \text{ av } 7{,}4 = 0{,}02 \cdot 7{,}4 = 0{,}148$$

Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som $\frac{15}{20}$ av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om $\frac{15}{20}$ til en brøk med 100 i nevner. Siden $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$, utvider vi brøken vår med $\frac{100}{20} = 5$:

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Det er verdt å merke seg at vi kunne fått 75 direkte ved utregningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

4.3 Antall prosent a utgjør av b

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b}$$

Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

Svar:

$$340 \cdot \frac{100}{400} = 85$$

340 utgjør 85% av 400.

Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

Svar:

$$119 \cdot \frac{100}{500} = 23{,}8$$

119 utgjør 23,8% av 500.

Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utregningen. *Eksempel 2* over kunne vi da regnet slik:

$$\frac{119}{500} = 0{,}238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500.
(Her regner man i hodet at $0{,}238 \cdot 100 = 23{,}8$.)

4.2.1 Prosentvis endring

Minkende størrelse

I mange situasjoner har noe økt eller minket med en viss prosent. I en butikk kan man for eksempel komme over en skjorte som originalt kostet 500 kr, men selges med 40% *rabatt*. Dette betyr at vi skal trekke ifra 40% av originalprisen.

Her er to måter vi kan tenke på for å finne prisen:

- Vi starter med å finne det vi skal trekke ifra:

$$\begin{aligned} 40\% \text{ av } 500 &= \frac{40}{100} \cdot 500 \\ &= 200 \end{aligned}$$

  Videre er

$$500 - 200 = 300$$

  Altså må vi betale 300 kr for skjorten.

- Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale 60% av 500:

  $100\% - 40\% = 60\%$

$$\begin{aligned} 60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300 \end{aligned}$$

  Svaret blir selvsagt det samme, vi må betale 300 kr for skjorten.

Økende størrelse

Det er ikke alltid vi er så heldige at vi får rabatt på et produkt, ofte må vi faktisk betale et tillegg. Mervardiavgiften er et slikt tillegg. I Norge må vi betale 25% i merverdiavgift på mange varer. Det betyr at vi må betale et tillegg på 25%, altså 125% av originalprisen.

Merverdiavgift forkortes til mva.

$100\% + 25\% = 125\%$

For eksempel koster øreklokkene på bildet 999,20 kr *ekskludert* mva. Men *inkludert* mva. må vi betale

$$
\begin{aligned}
125\% \text{ av } 999{,}20 &= \frac{125}{100} \cdot 999{,}20 \\
&= 1249
\end{aligned}
$$

Altså 1249 kr.

Oppsummering

4.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse synker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% - a\%)$ av størrelsen.
- Når en størrelse øker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% + a\%)$ av størrelsen.

Eksempel 1

Hva er 210 senket med 70%?

Svar:

$100\% - 70\% = 30\%$, altså er

$$
\begin{aligned}
210 \text{ senket med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\
&= \frac{30}{100} \cdot 210 \\
&= 63
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

Svar:

$100\% + 124{,}5\% = 224{,}5\%$, altså er

$$
\begin{aligned}
208{,}9 \text{ økt med } 124{,}5 &= 224{,}5\% \text{ av } 208{,}9 \\
&= \frac{224{,}5}{100} \cdot 208{,}9
\end{aligned}
$$

4.2.2 Vekstfaktor

På side 72 ble prisen til en skjorte redusert med 40%, og da endte vi opp med å betale 60% av originalprisen. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 0,6. På side 73 måtte vi legge til 25% mva., og da endte vi med å betale 125% av originalprisen. Da er vekstfaktoren 1,25.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

4.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med $a\%$, er vekstfaktoren verdien til $100\% \pm a\%$.

Ved økning skal $+$ brukes, ved redusering skal $-$ brukes.

Eksempel 1

En størrelse skal økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

Svar:

$100\% + 15\% = 115\%$, altså er vekstfaktoren 1,15.

Eksempel 2

En størrelse skal reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

Svar:

$100\% - 19{,}7\% = 80{,}3\%$, altså er vekstfaktoren 0,803

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 73, hvor 210 skulle senkes med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0{,}3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 senket med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

4.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

$$\text{endret originalverdi} = \text{vekstfaktor} \cdot \text{originalverdi}$$

Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Finn den nye prisen.

Svar:

a) Siden det er 20% rabbatt, må vi betale

$$100\% - 20\% = 80\%$$

av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.

b) Vi har at

$$0{,}8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr.

Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

a) Hva er vekstfaktoren?

b) Hva koster sjokoladen inkludert mva?

Svar:

a) Med 15% i tillegg må man betale

$$100\% + 15\% = 115\%$$

av prisen eksludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.

b)

$$1{,}15 \cdot 9.90 = 12{,}25$$

Sjokoladen koster 12,25 kr inkludert mva.

Vi kan også omksrive likningen fra *Regel 4.6* for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

4.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent *av* en helhet. Denne helheten man har som utgangspunkt er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tente 10 000 kr i 2019 og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet "Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020 i prosent?". Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med 'kr' i utregningene):

- Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$. Videre er (se *Regel 4.3*)

  $$\begin{aligned} \text{Antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20 \end{aligned}$$

  Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- Vi har at

  $$\frac{12\,000}{10\,000} = 1{,}2$$

  Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se *Regel 4.7*). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se *Regel 4.5*). Det betyr at lønnen økte med 20%.

4.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man i steden regne ut 'originalverdi − endret original'

Kommentar

Regel 4.8 kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått seksjon ??, kan du uten å bruke denne formelen finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgende eksempler viser vi derfor både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Løsningsmetode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det $20 - 12 = 8$ som sluttet. Vi har at

$$\text{Antall prosent 4 utgjør av } 20 = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Løsningsmetode 2; formel

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{20 - 12}{20} \cdot 100 \\ &= \frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= 40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

4.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100\left(\frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}} - 1\right)$$

Obs! Hvis 'endret originalverdi' er mindre enn 'original verdi', må man "snu" regnestykket inni parantesen til $1 - \dfrac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$.

Merk

Regel 4.8 og *Regel 4.9* gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge hvilken man liker best. Som allerede nevnt angående *Regel 4.8*, er også *Regel 4.9* en litt kronglete formel, og man trenger den ikke hvis man har forstått seksjonn ?? og ??. Her vil vi også i påfølgende eksempler vise to løsningsmetoder.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar:

Vi starter med å merke oss at det det medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Løsningsmetode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, da har vi at (se *Regel 4.7*)

$$\text{vekstfaktor} = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

En vekstfaktor lik 0,6 tilsvarer en endring på 40% (se *Regel 4.5*). I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Løsningsmetode 2; formel

Vi legger merke til at originalverdien er større enn den endrede verdien, da har vi at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100\left(1 - \frac{12}{20}\right)\\ &= 100\,(1 - 0{,}6)\\ &= 100 \cdot 0.4\\ &= 40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

4.2.3 Prosentpoeng

Ofte snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier. For å forenkle setningene har vi begrepet *prosentpoeng*.

Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, og deretter med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

$80\% - 30\% = 50\%$

Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?

Si at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50% får vi $300 \cdot 1{,}5 = 450$, og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi har to forskjellige originalverdier som utgangspunkt:

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%.”

Forklaring: ”Rabatten” er en størrelse vi regner ut i fra orignalprisen til solbrillene. Når vi sier ”prosentpoeng” viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med $1\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}3 = 300\,\text{kr}$ i rabatt. Når vi legger til 50 *prosentpoeng*, legger vi til 50% av originalprisen, altså $1\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}5 = 500\,\text{kr}$. Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

"Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%."

Forklaring: "Rabatten" er en størrelse vi regner ut i fra orignalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300\,\text{kr økt med } 50\% = 300\,\text{kr} \cdot 1{,}5 = 450\,\text{kr}$$

og

$$\text{Antall prosent 450 utgjør av } 1\,000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er streng tatt ikke nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten
$$30\% + 50\% = 80\%$$
- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten
$$30\% \cdot 1.5 = 45\%$$

4.10 Prosentpoeng

$a\%$ økt/minket med b prosentpoeng $= a\% \pm b\%$.

$a\%$ økt/minket med $b\% = a\% \cdot (1 \pm b\%)$

Merk

Andre linje i *Regel 4.10* er egentlig identisk med *Regel 4.6*.

Eksempel

En dag var 5% av elevene på en skole borte. Dagen etter var

7,5% av elevene borte.

a) Hvor mye økte fraværet i prosentpoeng?

b) Hvor mye økte fraværet i prosent?

Svar:

a) 7,5% − 5% = 2,5%, derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.

b) Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Dette er det samme som å finne hvor mye 2,5 utgjør av 5. (Se tilbake til ligning (**??**)). 1% av 5 er 0,05, derfor får vi:

$$\begin{aligned}\text{Antall prosent 2,5 utgjør av 5} &= \frac{2{,}5}{0{,}05}\\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

4.2.4 Gjentatt prosentvis endring

Hva om vi foretar en prosentvis endring gjentatte ganger? La oss som et eksempel starte med 2000 og utføre 10% økning 3 påfølgende ganger (se regel ??):

$$\begin{aligned}\text{verdi etter 1. endring} &= \overbrace{2000}^{\text{originalverdi}} \cdot 1{,}10 = 2\,200\\ \text{verdi etter 2. endring} &= \overbrace{2\,000 \cdot 1{,}10}^{2\,200} \cdot 1{,}10 = 2\,420\\ \text{verdi etter 3. endring} &= \overbrace{2\,420 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10}^{2\,420} \cdot 1{,}10 = 2\,662\end{aligned}$$

Mellomregningen vi gjorde over kan kanskje virke unødvendig, men utnytter vi skrivemåten for potenser kommer et flott mønster til syne:

$$\begin{aligned}\text{verdi etter 1. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^1 = 2\,200\\ \text{verdi etter 2. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^2 = 2\,420\\ \text{verdi etter 3. endring} &= 2\,000 \cdot 1{,}10^3 = 2\,662\end{aligned}$$

4.11 Gjentatt vekst eller nedgang

$$\text{ny verdi} = \text{originalverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{antall endringer}}$$

Eksempel 1

Finn den nye verdien når 20% økning utføres 6 påfølgende ganger med 10 000 som origialverdi.

Svar:

Vekstfaktoren er 1,2, og da er

$$\begin{aligned} \text{ny verdi} &= 10\,000 \cdot 1{,}2^6 \\ &= 29\,859{,}84 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% hvert år de neste fire årene. Hva er bilen da verd om fire år?

Svar:

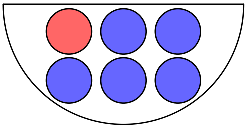
Siden den årlige nedgangen er 12%, blir vekstfaktoren 0,88. Starverdien er 300 000 og tiden er 4:

$$300\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 179\,908$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca 179 908 kr om fire år.

4.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den éne størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler i en bolle, sier vi at



$$\text{forholdet mellom antall røde kuler og blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som 1 : 5. Verdien til dette regnestykket er

$$1 : 5 = 0{,}2$$

I denne sammenhengen kalles 0,2 *forholdstallet*.

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

4.12 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Verdien til brøken over kalles forholdstallet $a : b$.

Eksempel 1

I en klasse er det 10 handballspillere og 5 fotballspillere.

a) Hva er forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere?

b) Hva er forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere?

Svar:

a)

$$\frac{10}{5} = 2$$

Forholdet mellom antall fotballspillere og handballspillere er 2.

b)

$$\frac{5}{10} = 0{,}5$$

Forholdet mellom antall handballspillere og fotballspillere er 0,5.

Eksempel 2

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er $\frac{1}{8}$. Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

Svar:

Vi vet at:

$$\frac{\text{antall vinnerlodd}}{\text{antall taperlodd}} = \frac{1}{8}$$

Siden "antall vinnerlodd" er ukjent, kaller vi størrelsen for x, og får da at

$$\frac{x}{160} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{x}{\cancel{160}} \cdot \cancel{160} = \frac{1}{8} \cdot 160$$

$$x = 20$$

Vi må altså lage 20 vinnerlodd.

4.3.1 Målestokk

I MB (s.145 - 149) har vi sett på formlike trekantar. Prinsippet om at forholdet mellom samsvarande sider er det samme kan utvides til å gjelde de fleste andre former, som f. eks. firkanter, sirkler, prismer, kuler osv. Dette er et fantastisk prinsipp som gjør at små tegninger eller figurer (modeller) kan gi oss informasjon om størrelsene til virkelige gjenstander.

4.13 Målestokk

En målestokk er forholdet mellom en lengde på en modell av en gjenstand og den samsvarende lengden på den virkelige gjenstand.

$$\text{målestokk} = \frac{\text{en lengde i en modell}}{\text{den samsvarende lengde i virkeligheten}}$$

Eksempel 1

Kartet under har målestokk 1 : 25 000.

a) Luftlinjen (den blå) mellom Helland og Vike er 10,4 cm på kartet. Hvor langt er det mellom Helland og Vike i virkeligheten?

b) Tresfjordbrua er ca 1300 m i virkeligheten. Hvor lang er Tresfjordbrua på kartet?

Svar:

a) Avstanden mellom Helland og Vike på kartet samsvarer med avstanden mellom Helland og Vike. Vi setter

$$x = \text{avstanden mellom Helland og Vike i virkeligheten}$$

Da har vi at

$$\frac{10{,}4\,\text{cm}}{x} = \frac{1}{25\,000}$$
$$x = 10{,}4\,\text{cm} \cdot 25\,000$$
$$= 260\,000\,\text{cm}$$

Altså er det 2,6 km mellom Helland og Vike.

b) Vi setter¨

$$x = \text{lengden til Tresfjordbrua på kartet}$$

Da har vi at

$$\frac{x}{1\,300\,\text{m}} = \frac{1}{25\,000}$$
$$x = \frac{1\,300\,\text{m}}{25\,000}$$
$$= 0{,}052\,\text{m}$$

Altså er Tresfjordbrua 5,2 cm lang på kartet.

Tips

Målestokk er omtrent alltid gitt som en brøk med teller lik 1. Dette gjør at man kan lage seg disse reglene:

$$\text{lengde i virkelighet} = \text{lengde på kart} \cdot \text{nevner til målestokk}$$

$$\text{lengde i virkelighet} = \frac{\text{lengde på kart}}{\text{nevner til målestokk}}$$

Oppgavene fra *Eksempel 1* kunne vi da løst slik:

a) Virkelig avstand mellom Helland og Vike $= 10{,}4\,\text{cm} \cdot 25\,000$
$= 260\,000\,\text{cm}$

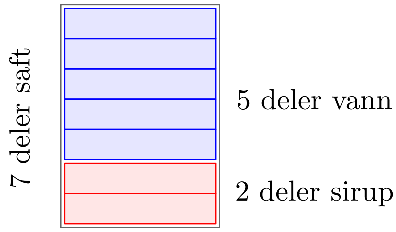
b) Lengde til Tresfjordbrua på kart $= \frac{1\,300\,\text{m}}{25\,000} = 0{,}0052\,\text{m}$

4.3.2 Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold. På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet ”2 +5”, som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet 2 : 5. Så heller vi 2 dL sirup i en kanne, må vi fylle på med 5 dL vann for å lage saften i riktig forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft :)

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er rikitig. For eksempel kan vi blande én bøtte med solbærsirup med fem bøtter vann, og fortsatt være sikker på at forholdet er riktig – selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer! Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. Symbolet ”2+5” på sirupflasken leser vi da som ”2 deler sirup på 5 deler vann”. Dette betyr at saften vår i alt inneholder $2 + 5 = 7$ deler:



Dette betyr én del utgjør $\frac{1}{7}$ av blandingen, sirupen utgjør $\frac{2}{7}$ av blandingen og vann utgjør $\frac{5}{7}$ av blandingen.

4.14 Deler i et forhold

En blanding med forholdet $a : b$ har til sammen $a + b$ deler.

- én del utgjør $\frac{1}{a+b}$ av blandingen.
- a utgjør $\frac{a}{a+b}$ av blandingen.
- b utgjør $\frac{b}{a+b}$ av blandingen.

Eksempel 1

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet $3 : 7$, og det er $5\,\text{L}$ av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til $3 : 11$.

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

Svar:

I spannet har vi $3 + 7 = 10$ deler. Siden det er $5\,\text{L}$ i alt, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{én del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5\,\text{L} \\ &= \frac{1 \cdot 5}{10}\,\text{L} \\ &= 0{,}5\,\text{L}\end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi:

$$4 \cdot 0{,}5\,\text{L} = 2\,\text{L}$$

Vi må helle oppi $2\,\text{L}$ rødmaling for å få forholdet $3 : 11$.

Eksempel 2

En kanne som rommer 21 dL er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet $2 : 5$.

a) Hvor mye vann er det kannen?

b) Hvor mye sirup er det i kannen?

Svar:

a) Til sammen består saften av $2 + 5 = 7$ deler. Fordi 5 av disse er vann, må vi ha at:

$$\begin{aligned}\text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21\,\text{dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7}\,\text{dL} \\ &= 15\,\text{dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som i oppgave a), men det er raskere å merke oss at hvis vi har 15 dL vann av i alt 21 dL, må vi ha $(21 - 15)\,\text{dL} = 6\,\text{dL}$ sirup.

Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann lik $3 : 5$.

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli $1 : 4$?

Svar:

Brøken vi ønsker, $\frac{1}{4}$, kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså $\frac{3}{5}$):

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

I vårt opprinnelige forhold har vi 3 deler sirup og 5 deler vann. Skal dette gjøres om til 3 deler sirup og 12 deler vann, må vi legge til 7 deler vann.

Oppgaver for kapittel 4

4.1.1

Finn

a) $\frac{2}{3}$ av 9. b) $\frac{5}{8}$ av 24. c) $\frac{7}{2}$ av 12. d) $\frac{10}{4}$ av 32.

4.1.2

a) Finn $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.

b) Finn $\frac{6}{7}$ av $\frac{8}{11}$.

c) Finn $\frac{9}{10}$ av $\frac{2}{13}$.

4.1.3

Du har startet et firma i lag med en venn, og dere har blitt enige om at du skal få $\frac{3}{5}$ av det firmaet tjener. Hvis firmaet tjener 600 000 kr, hvor mange kroner får du?

4.2.1

Skriv om brøkene til prosenttall

a) $\dfrac{78}{100}$ b) $\dfrac{91{,}2}{100}$ c) $\dfrac{0{,}7}{100}$ d) $\dfrac{193{,}54}{100}$

4.2.2

Finn verdien til

‘ a) 57% b) 98,1% c) 219% d) 0,3%

4.2.3

Skriv om brøkene til prosenttall

a) $\dfrac{7}{10}$ b) $\dfrac{11}{50}$ c) $\dfrac{9}{25}$ d) $\dfrac{29}{20}$

4.2.4

Finn

a) 20% av 500. b) 25% av 1000. c) 70% av 90.

c) 80% av 700. d) 15% av 200.

4.2.5

Hvor mange prosent utgjør

a) 4 av 10? b) 6 av 24? c) 21 av 49? d) 18 av 81?

4.2.6

Se tilbake til *Undersøkelse 2* på s. 26 og 29.

a) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "tiger"?

b) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "løve"?

c) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "krokodille"?

d) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "hund"?

4.2.7

a) Hva er 40 økt med 10%?

b) Hva er 250 økt med 30%?

c) Hva er 560 økt med 80%?

d) Hva er 320 økt med 100%?

e) Hva er 800 økt med 150%?

4.2.8

a) Hva er 40 senket med 10%?

b) Hva er 250 senket med 30%?

c) Hva er 560 senket med 80%?

4.2.9

Du kjøper en hest for 20 000 kr, og håper at verdien til hesten vil stige med 8% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

4.2.10

Du kjøper en ny gaming-PC til 20 000 kr, og regner med at verdien til PCen vil synke med 12 % i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

4.3.1

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.7a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.7b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.7c).

4.3.2

a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.8a).

b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.8b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 4.2.8c).

4.3.3

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og griser når vi har:

a) 5 hester og 2 griser. **b)** 12 griser og 4 hester.

4.3.4

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STHIL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:

Vi anbefaler følgende blandingsforhold:
Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:
1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin

Si at vi skal fylle på 2,5 L bensin på motorsagen vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

Merk: I de to neste oppgavene går vi ut ifra at både 1 dL vann og 1 dL saftsirup veier 100 g.

4.3.5

Coca-Cola inneholder 10 g karbohydrater. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Inneholder saften mer eller mindre karbohydrater per 100 g enn Coca-Cola?

4.3.6

På *Lærums solbærsirup* står det at 100 g ferdig utblandet saft inneholder 12,5 g sukker. Saften inneholder sirup og vann blandet i forholdet 1 : 5.

Hvor mye sukker inneholder 100 g solbærsirup? (Rent vann inneholder ikke sukker i det hele tatt).

Kapittel 5

Likninger, formler og funksjoner

5.1 Å finne størrelser

Likninger, formler og funksjoner (og utttrykk) er begreper som dukker i forskjellige sammenhenger, men i bunn og grunn handler de om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. Når alle størrelsen utenom den ene er kjent, kan vi finne den siste størrelsen enten direkte eller indirekte.

5.1.1 Å finne størrelser direkte

Når formelen er kjent

Når formler er gitt, er det snakk om å sette inn verdier og regne ut. Formler har vi brukt i mange kapitler allerede, omtrent alle regelboksene i boka inneholder en formel. Men så langt har vi brukt formler med dimensjonsløse størrelser. Når vi har størrelser med enheter er det helt avgjørende at vi passer på at enhetene som er involvert er de samme.

Eksempel 1

Hvis du kjører med konstant fart, er strekningen du har kjørt etter en viss tid gitt ved formelen

$$\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}$$

a) Hvor langt kjører en bil som holder farten 50 km/h i 3 timer?

b) Hvor langt kjører en bil som holder farten 90 km/h i 45 minutt?

Svar:

a) I formelen er nå farten 50 og tiden 3, og da er

$$\text{strekning} = 50 \cdot 3 = 150$$

Altså har bilen kjørt 150 km

b) Her har vi to forskjellige enheter for tid involvert; timer og minutt. Da må vi enten gjøre om farten til km/min eller tiden til timer. Vi velger å gjøre om minutt til timer:

$$\begin{aligned} 45\,\text{minutt} &= \frac{45}{60}\,\text{timer} \\ &= \frac{3}{4}\,\text{timer} \end{aligned}$$

I formelen er nå farten 90 og tiden $\frac{3}{4}$, og da er

$$\text{strekning} = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$$

Altså har bilen kjørt 67.5 km.

Eksempel 2

Kiloprisen til en vare er hva en vare koster per kg. For en hvilken som helst vare har vi at

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}}$$

a) 10 kg tomater koster 35 kr. Hva er kiloprisen til tomatene?

b) Safran går for å være verdens dyreste krydder, 5 g kan koste 600 kr. Hva er da kiloprisen på safran?

Svar:

a) I formelen er nå prisen 35 og vekten 10, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Altså er kiloprisen på tomater 3,5 kr/kg

b) Her har vi to forskjellige enheter for vekt involvert; kg og gram. Vi gjør om antall g til antall kg (se ??):

$$5\,\text{g} = 0{,}005\,\text{kg}$$

I formelen vår er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris} = \frac{600}{0{,}005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 kr/kg.

Når formlene er ukjente

Når vi bare får en beskrivelse av en situasjon, må vi selv lage formlene. Da gjelder det å identifisere hvilke størrelser som er ukjente, og finne relasjonen mellom dem.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
- I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.

a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.

b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar:

a) Her er det to ukjente størrelser; *kostnaden for taxituren* og *antall kilometer kjørt*. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser får man kortere uttrykk. La k stå for *kostnad for taxituren* og x stå for *antall kilometer kjørt*. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

5.1.2 Å finne størrelser indirekte

Når formlene er kjente

Eksempel 1

Vi har sett (*Eksempel 1*, s. **??**) at strekningen s vi har kjørt, farten f vi har holdt og tiden t vi har brukt kan settes i sammenheng via formelen[1]:

$$s = f \cdot t$$

Siden s står alene på én side av likhetstegnet, sier vi at dette er *en formel for s*. Ønsker vi en formel for f, kan vi gjøre om formelen ved å følge prinsippene for likninger (se MB, s. ??):

$$s = f \cdot t$$

$$\frac{s}{t} = \frac{f \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}$$

$$\frac{s}{t} = f$$

[1] strekning = fart · tid

Eksempel 2

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temeperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

a) Skriv om formelen til en formel for R.

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

b) Hvis strømmen er $2\,\mathrm{A}$ og spenningen $12\,\mathrm{V}$, hva er da resistansen?

Svar:

a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetsregnet:

$$\begin{aligned} I \cdot R &= \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} \\ I \cdot R &= U \\ \frac{\cancel{I} \cdot R}{\cancel{I}} &= \frac{U}{I} \\ R &= \frac{U}{I} \end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen vi fant i a) og får at:

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Resistansen er altså $6\,\Omega$.

Eksempel 3

Si vi har målt en temperatur T_C i grader Celsius ($°C$). Temperaturen T_F målt i Fahrenheit ($°F$) er da gitt ved formelen:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

a) Skriv om formelen til en formel for T_C.

b) Hvis en temperatur er målt til $59°F$, hva er da temperaturen målt i $°C$?

Svar:

a)

$$\begin{aligned}
T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\
T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\
5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot F_C \\
5(T_F - 32) &= 9T_C \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{\cancel{9}T_C}{\cancel{9}} \\
\frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C
\end{aligned}$$

b) Vi bruker formelen fra a), og finner at:

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\
&= \frac{5(27)}{9} \\
&= 5 \cdot 3 \\
&= 15
\end{aligned}$$

Når formlene er ukjente

Eksempel 1

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

a) Lag en ligning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.

b) Løs ligningen.

Svar:

a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

$$\textit{penger allerede skaffet} + \textit{antall lodd} \cdot \textit{penger per lodd} = \textit{prisen på turen}$$

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er *antall lodd*. Vi erstatter derfor *antall lodd* med x, og setter inn verdien til de andre:

$$2\,000 + x \cdot 25 = 11\,000$$

b)

$$25x = 11\,000 - 2\,000$$
$$25x = 9\,000$$
$$\frac{\cancel{25}x}{\cancel{25}} = \frac{9\,000}{25}$$
$$x = 360$$

$x \cdot 25$ er skrevet om til $25x$.

Eksempel 2

"Broren min er dobbelt så gammel som meg. Til sammen er vi 9 år gamle. Hvor gammel er jeg?".

Svar:

"Broren min er dobbelt så gammel som meg." betyr at:

$$\textit{brors alder} = 2 \cdot \textit{min alder}$$

"Til sammen er vi 9 år gamle." betyr at:

$$\textit{brors alder} + \textit{min alder} = \textit{9 år}$$

Erstatter vi *brors alder* med "$2 \cdot$ *min alder*", får vi:

$$2 \cdot \textit{min alder} + \textit{min alder} = 9 \text{ år}$$

Det som er ukjent for oss er *min alder*:

$$\begin{aligned} 2x + x &= 9 \\ 3x &= 9 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

"Jeg" er altså 3 år gammel.

Eksempel 2

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

a) Kall "antall personer som blir med på å spleise" for P og "utgift per person i kroner" for U og lag en formel for U.

b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar:

a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli:

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

b) Vi erstatter P med 20, og får:

$$\begin{aligned} U &= \frac{50\,000}{20} \\ &= 2\,500 \end{aligned}$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

5.2 Funksjoners egenskaper

5.2.1 Funksjoner med samme verdi; skjæringspunkt

5.1 Skjæringspunktene til grafer

Et punkt hvor to funksjoner har samme verdi kalles et *skjæringspunkt* til funksjonene.

Eksempel 1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

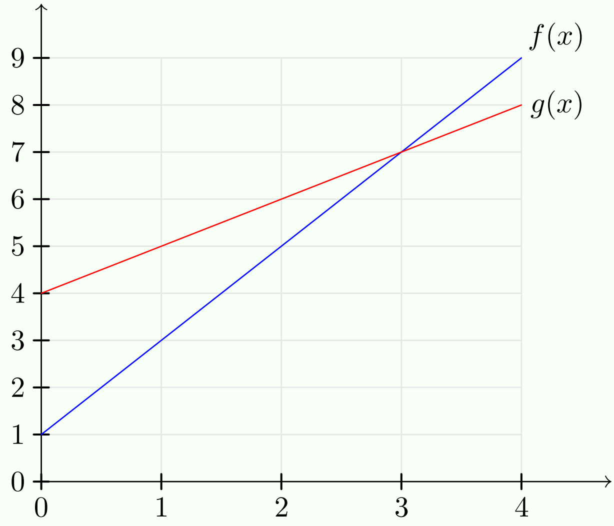
Finn skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$?

Svar:

Vi kan finne skjæringspunktet både ved en *grafisk* og en *algebraisk* metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene[1] til funksjonene inn i det samme koordinatsystemet:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 3$, og da har begge funksjonene verdien 7. Altså er skjæringspunktet $(3, 7)$.

Algebraisk metode

At $f(x)$ og $g(x)$ har samme verdi gir likningen

$$f(x) = g(x)$$
$$2x + 1 = x + 4$$
$$x = 3$$

Videre har vi at

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$g(3) = 3 + 4 = 7$$

Altså er $(3, 7)$ skjæringspunktet til grafene.

Merk: Det hadde selvsagt holdt å bare finne én av $f(3)$ og $g(3)$.

---

[1] For hvordan tegne en graf, se MB, s. ?? og ??. Hvor langt x-aksen bør strekke seg vet man ikke på forhånd, men kan avgjøres ved å sette inn enkle x-verdier i funksjonene.

Eksempel 2

En klasse planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**

  Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.

- **Busselskap 2**

  Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene same pris?

Svar:

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

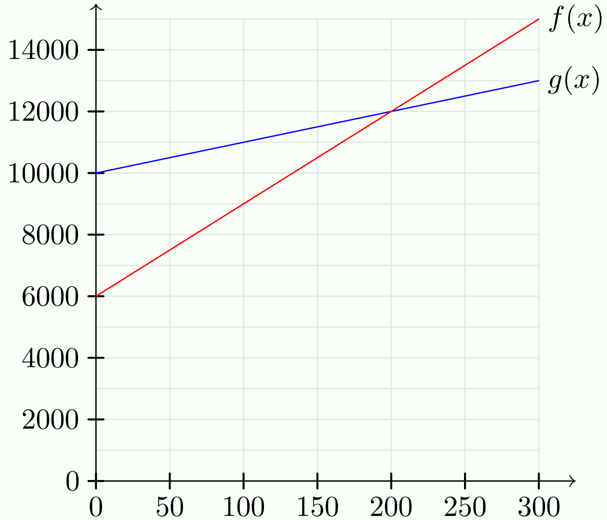
$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Videre løser vi nå oppgaven både med en grafisk og en algebraisk metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i samme koordinatsystem:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 200$. Dette betyr at busselskapene tilbyr samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

Algebraisk metode

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 6\,000 \\ 4\,000 &= 20x \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis klassen skal kjøre 200 km.

5.2.2 Null-, bunn- og toppunkt

5.2 Null-, bunn- og toppunkt

- **Nullpunkt**

  En x-verdi som gir funksjonsverdi 0.

- **Bunnpunkt**

  Punkt hvor funksjonen har sin laveste verdi.

- **Toppunkt**

  Punkt hvor funksjonen har sin høyeste verdi.

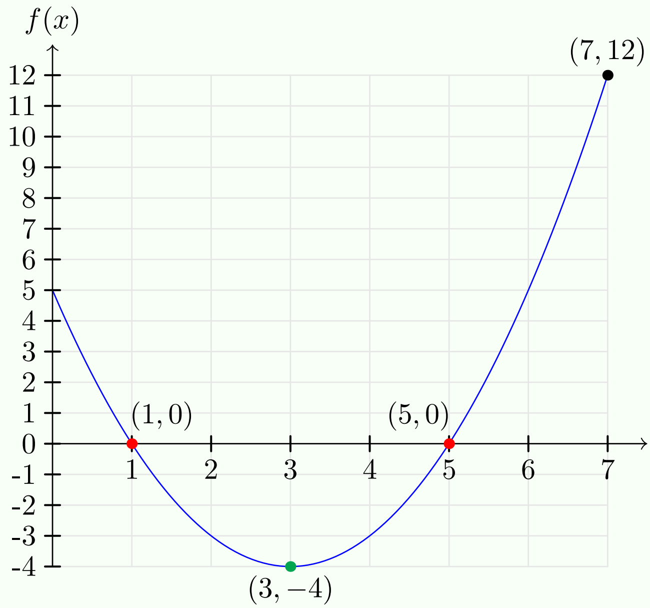
Eksempel 1

Funksjonen

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \qquad , \qquad x \in [0, 10]$$

har

- Nullpunkt $x = 1$ og $x = 5$.
- Bunnpunkt $(3, -4)$.
- Toppunkt $(7, 12)$.



Hvorfor er nullpunkt en verdi?

Det kan kanskje virke litt rart at vi kaller x-verdier for nullpunkt, punkt har jo både en x-verdi og en y-verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at $y = 0$, og da er det tilstrekkelig å få vite x-verdien for å avgjøre hvilket punkt det er snakk om.

5.3 Likningssett

Vi har så langt sett på likninger med ett ukjent tall, men ofte er det to eller flere tall som er ukjente. Som regel er det slik at

- er det to ukjente, trengs to likninger for å finne løsninger som er konstanter.
- er det tre ukjente, trengs tre likninger for å finne løsninger som er konstanter.

Og slik fortsetter det. Likningene som gir oss den nødvendige informasjonen om de ukjente, kalles et *likningssett*. I denne boka skal vi konsentrere oss om likninger med to ukjente.

5.3.1 Innsettingsmetoden

5.3 Innsettingsmetoden

Et likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. bruke den éne likningen til å finne et uttrykk for x.
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likningen, og løse denne med hensyn på y.
3. sette løsningen for y inn i uttrykket for x.

Merk: I punktene over kan (selvsagt) x og y bytte roller.

Eksempel 1

Løs likningssettet, og sett prøve på svaret.

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar:

Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 5 + y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (II):

$$\begin{aligned} 5 + y + y &= 9 \\ 2y &= 9 - 5 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 5 + y \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Vi setter prøve på svaret:

$$x - y = 7 - 2 = 5$$

$$x + y = 7 + 2 = 9$$

Eksempel 1

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \tag{I}$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \tag{II}$$

Svar:

Ved innsettingsmetoden kan man ofte spare seg for en del utregning ved å velge likningen og den ukjente som gir det fineste uttrykket innledningsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for x:

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $x = 1$ og $y = 3$.

Eksempel 2

Løs likningssettet

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= -2 \\
9y - 5x &= 6x + y
\end{aligned}
\qquad \text{(II)}
$$

Svar:

Vi velger her å bruke (I) til å finne et uttrykk for y:

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= -2 \\
3x + 2 &= 4y \\
\frac{3x+2}{4} &= y
\end{aligned}
$$

Vi setter dette uttrykket for y inn i (II):

$$
\begin{aligned}
9y - 5x &= 6x + y \\
9 \cdot \frac{3x+2}{4} - 5x &= 6x + \frac{3x+2}{4} \\
9(3x+2) - 20x &= 24x + 3x + 2 \\
27x + 18 - 20x &= 24x + 3x + 2 \\
-20x &= -16 \\
x &= \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Vi setter løsningen for x inn i uttrykket for y:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3x+2}{4} \\
&= \frac{3 \cdot \frac{4}{5} + 2}{4} \\
&= \frac{\frac{22}{5}}{4} \\
&= \frac{11}{10}
\end{aligned}
$$

Altså er $x = \frac{4}{5}$ og $y = \frac{11}{10}$.

5.3.2 Grafisk metode

5.4 Grafisk løsning av likningssett

Et likningssett bestående av to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. omskrive de to likningene til uttrykk for to linjer.
2. finne skjæringspunktet mellom linjene.

Eksempel 1

Løs likningsettet

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar:

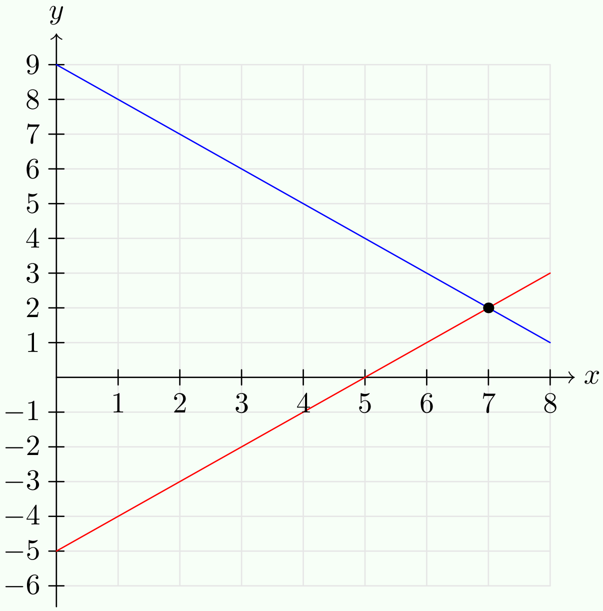
Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Av (II) har vi at

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y &= 9 - x \end{aligned}$$

Vi tegner disse to linjene inn i et koordinatsystem:



Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Oppgaver for kapittel 5

5.2.1

Vanlig gåfart regnes for å være ca. 1,5 m/s. Hvor langt har man da gått

a) etter 25 min?

b) etter 3 timer?

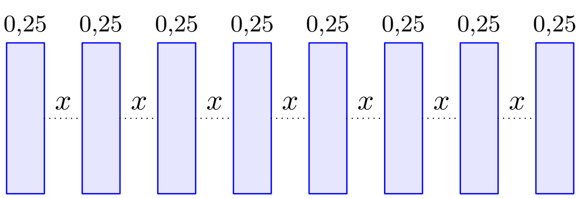
5.2.2

Ola og Kari tilbyr et kurs i svømming. For kurset tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for kurset?

5.2.3

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under:



Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene. Hvor lang er denne avstanden?

5.2.4

a) Skriv dette som en likning: "Volumet til en firkantet prisme med bredde 4, lengde 7 og høgde x er 252."

b) Løs likningen fra oppgave a).

5.2.5

a) Skriv dette som en likning: "35% av x er lik 845".

b) Løs likningen fra oppgave a).

5.2.6

Det gis 360 kr rabatt på en vare, og dette tilsvarer 20% av prisen.

a) La x være prisen på varen. Sett opp en likning som beskriver informasjonen gitt over.

b) Finn prisen på varen.

5.2.7

Prisen på en vare er først senket med 20%, og så er den nye prisen senket med 50%. Etter dette koster varen 400 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

5.2.8

Makspuls er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden trening.no kan man lese dette:

> ”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for m og ”alder” for a og lag en formel for m ut i fra sitatet over.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik:

”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for m ut ifra sitatet over.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

> 1. Hopp opp og ned i ca. 30 sekunder (så fort og så høyt du greier).
>
> 2. Tell hjerteslag i 15 sekunder umiddelbart etter hoppingen.

e) Kall ”antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder” for A og lag en formel for m.

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f).

5.3.1

På nettsiden viivilla.no får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

> ”2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter).”

a) Kall ”trinnhøyden” for h og ”trinndybden” for d og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).

b) Sjekk trappene på skolen, er formelen oppfylt eller ikke?

c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?

d) Skriv om formelen til en formel for h.

5.3.2

Effekten P (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor R er motstanden og I er strømmen i kretsen.

a) Hvis $R = 5\,\Omega$ og $I = 10\,A$, hva er da effekten?

b) Skriv om formelen til en formel for I^2.

5.3.3

Skriv om arealformelen for et trapes (se MB, s ??) til en formel for høgden.

5.3.4

På klikk.no finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

For jenter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Trekk fra 13 cm

3. Del med 2.

For gutter:

1. Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
2. Legg til 13 cm
3. Del med 2.

Kall barnets (fremtidige) høyde for B, mors høyde for M og fars høde for F.

a) Lag en formel for B når barnet er ei jente.

b) Lag en formel for B når barnet er en gutt.

c) Gjør om formelen fra a) til en formel for F.

d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Formelen fra oppgave a) sier at jenta vil bli 171 cm høy. Hvor høy er faren til jenta?

5.4.1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 3x - 7$$

$$g(x) = x + 5$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

5.4.2

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = 4x + 9$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

5.4.3

Si at du kan velge mellom disse to månedsabonnementene for mobil:

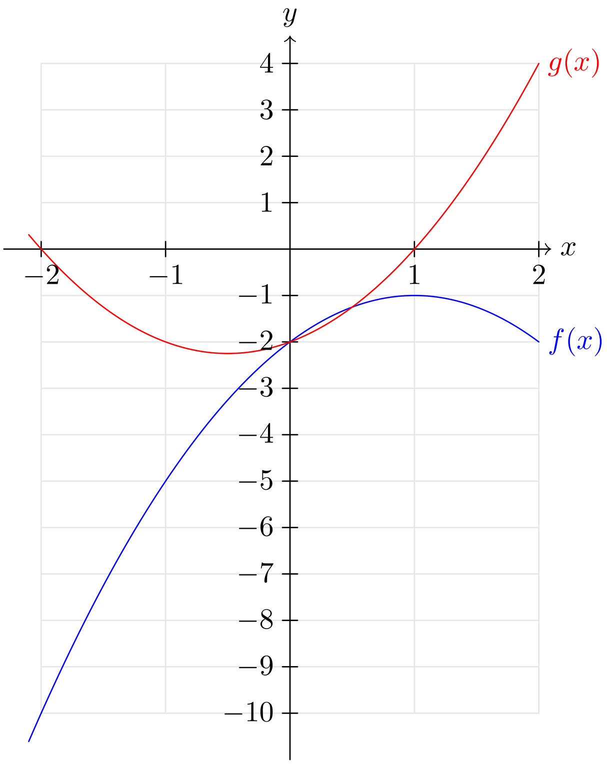
- **Abonnement A**
  300 kr i fast pris og 50 kr per GB data brukt.

- **Abonnement B**
  Fast pris på 500 kr og 10 kr per GB data brukt.

a) For hvilket databruk har vil abonnementene koste det samme?

b) Hvis du bruker ca. 7 GB data i måneden, hvilket abonnement bør du da velge?

5.4.4



a) Finn koordinatene til toppunktet til $f(x)$.

b) Finn koordinatene til minst ett av skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$.

c) Finn nullpunktene til $g(x)$.

5.5.1

Løs likningssettet

$$3b - 2a = 15$$

$$5a - b = 8$$

5.5.2

Løs likningssettet

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 4x - 3 \\ x + 8y &= y - 2x \end{aligned}$$

Kapittel 6

Økonomi

6.1 Indeksregning

Innenfor økonomi er *indekser* forholdstall som forteller oss hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kroneisen 0,75 kr (!) da den ble lansert i 1953, mens den i 2017 kostet ca 27 kr . Forholdet mellom prisen i 2017 og i 1953 er altså:

$$\frac{\text{pris 2018}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0{,}75} = 36$$

Dette forteller oss at prisen for kroneis har blitt ganget med 36. Dette betyr også at den nye prisen utgjør 3600% av den gamle. I denne sammenhengen kunne vi kalt både 36 for en *indeks*, siden begge tallene forteller noe om hvordan prisen for kroneis har endret seg fra 1953 til 2017.

6.1.1 Konsumprisindeks og basisår

Konsumprisindeksen (KPI) er en indeks som beskriver prisnivået på varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i løpet av et år. Disse varene er:

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Andre varer og tjenester

For å sammenligne noe må man alltid starte med noe å sammenligne med, og konsumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene i året 2015. 2015 kalles derfor *basisåret*, og i dette året er indeksen bestemt til å være 100.

6.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er basisåret 2015.

Tabellen under er hentet fra SSB sine nettsider og viser KPI (konsumprisindeks) for de 10 siste årene:

År	KPI
2020	112,2
2019	110,8
2018	112,2
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Table 6.1: Kunsumprisindeksen for årene 2010-2017

Ut ifra tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Fordi KPI for 2017 er 105,5 har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Fordi KPI i 2011 er 93,3 var prisene 7,7% lavere i 2011 enn i 2015.

6.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

Eksempel

I 2017 var prisindeksen for en vare 109. Hvor mye har har prisen endret seg siden basisåret?

Svar:

$$109 - 100 = 9$$

Prisen har altså endret seg 9% siden basisåret.

6.1.2 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2018. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; *Prisen på kroneisen har gått opp blant annet fordi kroneverdien har gått ned – du fikk altså kjøpt mindre varer for hver 1-krone i 2017 enn i 1953.*

Verdien av 1 krone ved et år, kroneverdien, beregner vi ut ifra konsumprisindeksen til basis:

6.3 Kroneverdi

$$\text{kroneverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

Merk: Kroneverdien for basisåret (2015) er 1.

Eksempel 1

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012.

Svar:

$$\begin{aligned}\text{kroneverdi i 2012} &= \frac{100}{93{,}9} \\ &\approx 1{,}06\end{aligned}$$

Dette betyr at å betale 1 kr i 2012 ville vært det samme som å betale 1,06 kr i basisåret.

6.4 Realverdi

Realverdien til en pengesum er hvor mye en pengesum ville vært verd i basisåret.

$$\text{realverdi} = \text{opprinnelig verdi} \cdot \text{kroneverdi}$$

Eksempel

I 1928 var KPI 3,2 og i 2020 var KPI 112,2. Hva hadde størst realverdi, 10 000 kr i 1928 eller 350 000 kr i 2020?

Svar:

Vi har at

$$\text{kroneverdi i 1928} = \frac{100}{3{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av } 10\,000\,\text{kr fra 1928 i basisår} &= 10\,000\,\text{kr} \cdot \frac{100}{3{,}2} \\ &= 312\,500\,\text{kr}\end{aligned}$$

Videre er

$$\text{kroneverdi i 2012} = \frac{100}{112{,}2}$$

Altså er

$$\begin{aligned}\text{verdien av } 350\,000\,\text{kr fra 1928 i basisår} &= 350\,000 \cdot \frac{100}{112{,}2} \\ &\approx 311\,943\,\text{kr}\end{aligned}$$

Altså var 10 000 kr verd mer i 1928 enn hva 350 000 kr var verd i 2020.

6.1.3 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk at du hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2020 og i 2019. *Tabell* 6.1 forteller oss da at du hadde du best råd i 2019, fordi da var prisnivået (KPI) lavere enn i 2020.

At prisnivået har blitt høyere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. Dette betyr igjen at hvis lønnen din var den samme i 2019 og 2020, er *realverdien* til lønnen din høyere i 2019 enn i 2020. Den opprinnelige lønnen og realverdien til lønnen er såpass mye brukt i statistikk at de har fått egne navn

6.5 Reallønn og nominell lønn

Nominell lønn er lønn mottat et gitt år.

Reallønn er realverdien til den nominelle lønnen.

Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens han i 2012 tjente 420 000 kr. I 2016 var KPI = 103,6, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

Svar:

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd, sjekker vi hvilket år han hadde høyest reallønn[1] (se *Regel 6.4*):

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103{,}6}\,\text{kr} \\ &\approx 434\,363\,\text{kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93{,}9} \\ &\approx 447\,284\,\text{kr}\end{aligned}$$

Reallønnen til Per var altså høyest i 2012, derfor hadde han bedre råd da enn i 2016.

[1]KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*

6.1.4 Regning med indekser

Vi har sett hvordan både verdien av en pris eller en reallønn forandrer seg når KPI øker eller minker. Hvis en verdi har forandret seg, men forholdet mellom verdien og indeksen forblir det samme, sier vi at *verdien har fulgt indeksen*.

6.6 Verdi som følger indeks

Hvis en verdi følger indeksen, forblir forholdet mellom verdi og indeksen det samme:

$$\frac{\text{verdi 1}}{\text{indeks 1}} = \frac{\text{verdi 2}}{\text{indeks 2}}$$

Eksempel 1

I 2013 fikk Sofie 600 000 kr i lønn. I 2013 var KPI 95,9, mens den i 2017 var 105,5. Hva måtte Sofie få i lønn i 2017 for at lønnen skulle fulgt indeksen? (Obs! Dette er det samme som å si at reallønnen skal forbli den samme).

Svar:

Skal lønnen følge indeksen, må forholdet mellom lønnen og KPI være lik for de to årene:

$$\frac{\text{lønn i 2017}}{\text{KPI i 2017}} = \frac{\text{lønn i 2013}}{\text{KPI i 2013}}$$

Siden lønnen i 2017 er ukjent, kaller vi denne for x i den videre utregningen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{105{,}5} &= \frac{600\,000}{95{,}9} \\ &= \frac{600\,000}{95{,}9} \cdot 105{,}5 \\ &\approx 660\,000 \end{aligned}$$

Lønnen til Sofie bør altså være 660 000 kr for at lønnen skal følge konsumprisindeksen.

Eksempel 2

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen. I 2005 var KPI 82,3. Hva var den i 2014?

Svar:

Skal prisen følge indeksen må forholdet mellom pris og indeks være det samme:

$$\frac{\text{pris i 2014}}{\text{KPI i 2014}} = \frac{\text{pris i 2005}}{\text{KPI i 2005}}$$

Siden KPI i 2014 er ukjent, kaller vi denne for x. Vi utnytter også at vi for en ligning med én brøk på hver side kan "snu brøkene på hodet":

$$\begin{aligned} \frac{x}{\text{pris i 2014}} &= \frac{\text{KPI i 2005}}{\text{pris i 2005}} \\ \frac{x}{1784} &= \frac{82{,}3}{1500} \\ x &= \frac{82{,}3}{1500} \cdot 1784 \\ &\approx 97{,}9 \end{aligned}$$

KPI i 2014 var altså 97,9.

6.2 Lån og sparing

6.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*. La oss se på et eksempel å å holde styr på alle disse begrepene:

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da er lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- **Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen**.

  For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli $\frac{100\,000}{5}\,\text{kr} = 20\,000\,\text{kr}$.

- **Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.**

  Startgjelden er 100 000, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden $100\,000\,\text{kr} - 20\,000\,\text{kr} = 80\,000\,\text{kr}$. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden $80\,000\,\text{kr} - 20\,000\,\text{kr} = 60\,000\,\text{kr}$. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Renter skal beregnes av gjelden.**

  Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale (se ??) $100\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}1 = 10\,000\,\text{kr}$ i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale $80\,000\,\text{kr} \cdot 0{,}1 = 8\,000\,\text{kr}$ i renter. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Terminbeløpet er summen av avdrag og renter**.

  Av første og tredje punkt får vi at

	1. år	2. år
Terminbeløp	$20\,000\,\text{kr} + 10\,000\,\text{kr}$ $=$ $30\,000\,\text{kr}$	$20\,000\,\text{kr} + 80\,000\,\text{kr}$ $=$ $28\,000\,\text{kr}$

  Og slik fortsetter det de neste tre årene.

Serielån og annuitetslån

To veldig vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like store. Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hvar gang.

Merk: Du har alltid rett til å betale resterende gjeld når du selv ønsker det. Da avsluttes lånet og du betaler hverken flere avdrag eller renter.

Kredittkort

Kredittkort er et betalingskort som virker slik at hvis du f.eks bruker kortet for å betale for 10 000 kr i en butikk, så blir ikke 10 000 kr trekt fra kontoen din – isteden låner du pengene fra banken. Etter en tid som er avtalt med banken vil banken kreve renter av gjelden din. Hvordan du betaler denne gjelden er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høye renter, så det lureste er å betale før rentekravet engang har startet!

6.7 Lån

lånesum	Beløpet vi låner av banken.
gjeld	Det vi til enhver tid skylder banken.
rente	Prosentandel av gjeld som skal betales.
avdrag	Det vi betaler ned på gjelden.
	Summen av avdragene tilsvarer lånesummen.
	ny gjeld = gammel gjeld − avdrag
renter	gjeld · rente
terminbeløp	avdrag + renter
Serielån	Lån hvor avdragene er like store.
annuitetslån	Lån hvor terminbeløpene er like store.
kredittkort	Betalingskort som oppretter et lån fra banken.

Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?

d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

Svar:

a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget:

$$\frac{300\,000\,\text{kr}}{5} = 60\,000\,\text{kr}$$

b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er:

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

c) Ut ifra oppgave b) vet vi at gjelden er 180 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da:

$$180\,000 \cdot 0{,}03 = 5\,400$$

Altså 5 400 kr.

d) Terminbeløpet tilsvarer avdrag pluss renter. Ut ifra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir:

$$60\,000\,\text{kr} + 5\,400\,\text{kr} = 65\,400\,\text{kr}$$

Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

Svar:

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0{,}064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Siden $terminbeløp = avdrag + renter$, må $avdrag = terminbeløp - avdrag$:

$$= 24\,000 - 6400 = 17\,600$$

Altså må du betale 17 600 i avdrag det første året.

6.2.2 Sparing

Innskuddsrente

Vi har sett hvordan vi må betale renter når vi låner penger av en bank, men hvis vi i steden setter penger (gjør et innskudd) i en bank *får* vi renter:

6.8 Innskuddsrente

Innskuddsrente er en prosentvis økning av pengene du har i banken, gjentatt over faste tidsintervaller (månedlig, årlig o.l.)

Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% i årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

Svar:

For å beregne innskuddsrenter kan vi anvende *Regel* **??**. Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Originalverdien er 20 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$20\,000 \cdot 1{,}02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

Forventet avkastning

En annen måte å spare penger på, er å investere i et aksjefond. Da vil man snakke om *forventet avkastning*:

6.9 Forventet avkastning

Forventet avkastning angir en *forventet* prosentvis økning av en investering, gjentatt over faste tidsintervaller.

Eksempel 1

Du investerer 15 000 i et aksjefond som har 5% årlig forventet avkastning. Hvor mye penger er investeringen verd etter 8 år ved en slik avkastning?

Svar:

Også for forventet avkastning kan vi bruke *Regel* **??**. Vekstfaktoren er 1,05, originalverdien er 15 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$15\,000 \cdot 1{,}05^8 \approx 22\,162$$

Etter 8 år er det forventet at investeringen er verdt 22 162.

Spare med innskuddsrente eller aksjefond?

Som regel er forventet avkastning på et aksjefond høyere enn innskudsrenten du får i en bank, men ulempen er at forventet avkastning ikke gir noen garantier. Forventet avkastning oppgir bare økningen eksperter antar vil skje. Er du heldig kan økningen bli høyere, er du uheldig kan den bli lavere, og til og med ende opp med å være en *reduksjon* av investeringen din. I verste fall, rett nok i ekstremt sjeldne tilfeller, kan hele investeringen din ende opp med å bli verd 0 kr.

Innskuddsrenten kan også forandre seg noe med tiden, men den kan aldri føre til en reduksjon av investeringen din.

6.3 Skatt

Om du har en inntekt må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

Obs! *I eksamensoppgaver vil du oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi valgt å presentere skattereglene for 2018. Det viktigste er likevel ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene bruttolønn, fradrag, skattegrunnlag, tyrgdeavgift og nettolønn*

6.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler *fagforeningskontigent* eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontigent er det du betaler for å være med i en fagforening.

6.10 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

$$\begin{array}{rr} & \text{Bruttolønn} \\ - & \text{Fradrag} \\ \hline = & \text{Skattegrunnlag} \\ \hline \end{array}$$

Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag 97 600 kr i minstefradrag, i tilleg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

Svar:

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	Bruttolønn
−	56 000	Personfradrag
−	97 600	Minstefradrag
−	1 000	Fagforeningskontigent
=	345 400	Skattegrunnlag

6.3.2 Trygdeavgift

Alle lønnsmottakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke Folketrygden. Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

6.11 Trygdeavgift

Alder	Trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
Under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn. Jonas er 18 år og Line er 71 år.

a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?

b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

Svar:

a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% i tygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 1 230 kr i trygdeavgift. Fordi Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% i tygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0{,}051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

6.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

6.12 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 − 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 − 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 − 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt betales av bruttolønnen.

Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Fordi hele lønnen liger over 237 900 kr, må du betale 1,4% av $(237\,900 - 169\,000)$ kr $= 68\,900$ kr. Skatt for trinn 1 blir altså $68\,900\,\text{kr} \cdot 0{,}014 \approx 965$ kr.
Trinn 2	Siden 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale 3,3% av $(550\,000 - 237\,900)$ kr $= 312\,100$ kr. Skatt for trinn 2 blir altså $312\,100\,\text{kr} \cdot 0{,}033 \approx 10\,299$ kr.
Totalt	Totalt må du betale 965 kr + 10 299 kr = 11 264 kr i trinnskatt.

6.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontigent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:

6.13 Nettolønn

	Bruttolønn
−	Fagforeningskontigent
−	23% skatt
−	Trygdeavgift
−	Trinnskatt
=	Nettolønn

Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i *LO* (Norges største fagforening) og har 409 900 som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til hennes?

Svar:

	550 000	Bruttolønn
−	1 500	Fradrag for fagforening
−	93 127	23% av skattegrunnlaget
−	45 100	8,2% av bruttolønn
−	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
=	399 009	Nettolønn

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra *delseksjon 6.3.3.*)

Embla har altså 399 009 kr i nettolønn.

6.4 Budsjett og regnskap

6.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter, en slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

Eksempel

Lisa prøver å tenke på sine månedlige inntekter og utfiter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på en gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar:

Inntekter	Budsjett
Lønn	4 000
Stipend	4 360
Sum	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
Sum	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

6.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *antatte* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* innteker og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut *regnskap − budsjett*, mens man for utgifter regner ut *budsjett − regnskap*. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (6.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utfitene hennes:

- Hun ble så opphengt i å lese om funksjoner at hun ikke fikk jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble derfor 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

Svar:

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	4 000	3 500	−500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
Sum	8 360	9 860	2 000
Utgifter			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	−2 400
Sum	5 700	7 800	1 900
Resultat	2 660	2 060	−600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut ifra budsjettet.

Oppgaver for kapittel 6

Konsumprisinder[1]

År	KPI		
2020	112,2	2008	88
2019	110,8	2007	84.8
2018	112,2	2006	84.2
2017	105,5	2005	82.3
2016	103,6	2004	81
2015	100	2003	80.7
2014	97,9	2002	78.7
2013	95,9	2001	77.7
2012	93,9	2000	75.5
2011	93,3	1999	73.2
2010	92.1	1998	71.5
2009	89.9	1997	69.9

[1] Hentet fra ssb.no.

6.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

a) 1998 **b)** 2014 **c)** 2017

6.1.2

I 2016 var KPI 103,6. Hvor mye høyere var prisnivået i 2016 enn i 2015?

6.1.3

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9. I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

6.1.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

I 2010 var konsumprisindeksen 92,1. I 2014 var konsumprisindeksen 97,9. Helene hadde like stor kjøpekraft i 2014 som i 2010. I 2014 hadde hun en nominell lønn på 540 000 kroner. Hva var den nominelle lønna hennes i 2010?

6.1.5

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, Del 1).

I 2006 var indeksen for en vare 125. Varen kostet da 1 000 kroner. I 2016 var indeksen for den same varen 150. Hvor mye kostet varen i 2016 dersom prisen har fulgt indeksen?

6.2.1

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

a) Hva blir det årlige avdraget?

b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjette terminbeløp?

c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløp?

d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

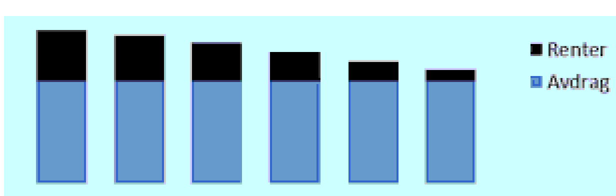
6.2.2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

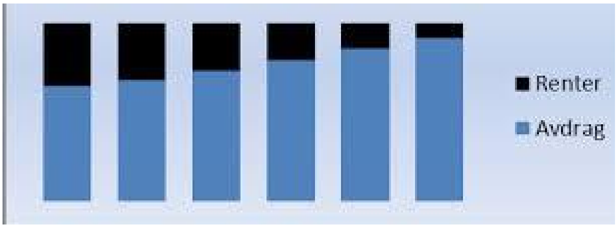
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

6.2.3

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

6.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

6.2.5

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn måneder som 30 dager).

a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?

b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?

c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

6.2.6

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2016, Del 2).

Christoffer har kjøpt ny båt til ein verdi av 850 000 kroner. Tenk deg at båten vil falle i verdi med 20 % det første året og så med 3,5 % per år de neste fem åra.

Hva vil verdien av båten vere etter 6 år?

6.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.

b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

6.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Hvem av de to betaler mest trygdeavgift (i antall kroner)?

6.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i oppgave 6.3.1 og 6.3.2).

6.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i oppgave 6.3.1-6.3.3).

6.4.1

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

Grubleoppgave

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2017, Del 2).

Basisåret for konsumprisindeksen er nå 2015. Tidligere var basisåret 1998.

Da 1998 ble brukt som basisår, var konsumprisindeksen 139,8 i 2015 og 144,8 i 2016.

a) Vis at konsumprisindeksen i 1998 nå er 71,5.

b) Hva er nå konsumprisinndeksen i 2016?

Kapittel 7

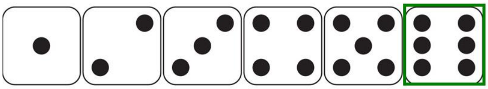
Sannsynlighet

7.1 Grunnprinnsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør oss hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall* . Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse:

$$\text{sannsynlighet for en hendelse} = \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi det *å få en sekser* for en hendelse. Og fordi en terning har seks forskjellige sider, sier vi at det er seks mulige utfall. Av disse sidene er det bare én som er en sekser, derfor har vi ett gunstig utfall.



Sannsynligheten for å få en sekser er altså $\frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned}\text{sannsynlighet for å få en sekser} &= \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}} \\ &= \frac{\text{sider med sekser på}}{\text{totalt antall sider}} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi ofte enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. Istedenfor å skrive *få en sekser*, kan vi bruke bokstaven S, og for å indikere at vi spør om sannsynligheten for en hendelse bruker vi bokstaven P. Når vi skriver $P(S)$ betyr dette *sannsynligheten for å få en sekser*:

$$P(S) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* få en sekser? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen *å ikke få en sekser* skriver vi altså som $\bar{S}$. *Å ikke få en sekser* er det samme som *å få enten en ener, en toer, en treer, en firer eller en femmer*, derfor har denne hendelsen fem gunstige utfall. Det betyr at:

$$P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$$

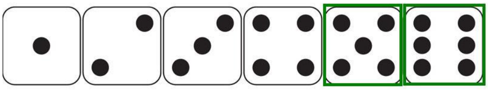
7.2 Hendelser med og uten felles utfall

7.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss nå i tillegg kalle hendelsen å *få en femmer* for F. Hendelsen *å få en femmer eller en sekser* skriver vi da som $F \cup S$. Det er to av seks sider på en terning som er fem *eller* seks, sannsynligheten for *å få en femmer eller en sekser* er derfor $\frac{2}{6}$:

Symbolet $\cup$ kalles *union.*

$$P(F \cup S) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret hadde vi fått ved å legge sammen sannsynlighetene $P(F)$ og $P(S)$:

$$P(F \cup S) = P(F) + P(S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(F \cup S)$ ved å legge sammen $P(F)$ og $P(S)$ kan vi gjøre fordi F og S ikke har noen *felles utfall.* F og S har ingen felles utfall på grunn av dette: Hvis man får en femmer, kan man umulig ha fått en sekser samtidig. Og får man en sekser, kan man umulig ha fått en femmer samtidig.

7.1 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser A og B som ikke har noen felles utfall, er sannsynligheten for A *eller* B lik sannsynligheten for A pluss sannsynligheten for B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød (R) *eller* en blå (B) kule?

Svar:

- Det er i alt fire mulige utfall.
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hen-

delsene R, B eller G som har felles utfall.

- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er: $P(R) = \frac{1}{4}$
- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er: $P(B) = \frac{2}{4}$.

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule blir derfor:

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

7.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk nå at vi kaster en terning og at vi godtar hendelsen *å få en sekser* (S) *eller* hendelsen *å ikke få en sekser* ($\bar{S}$). Vi har tidligere sett at $P(S) = \frac{1}{6}$ og at $P(\bar{S}) = \frac{5}{6}$. Av ?? vet vi at sannsynligheten for *å få en sekser eller å ikke få en sekser* er:

$$\begin{aligned} P(S \cup \bar{S}) &= P(S) + P(\bar{S}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dette er egentlig ikke så overraskende, for kaster vi en terning er det to ting som kan skje: Enten får vi en sekser, eller så får vi det ikke. Summen $P(S) + P(\bar{S})$ er derfor summen av sannsynlighetene for alle hendelser som kan skje. Hvis vi "godtar" alle hendelser, så er alle utfall gunstige. Antall gunstige utfall blir derfor det samme som antall mulige utfall, og forholdet mellom dem blir da 1:

Alle hendelser som kan skje? Hva med *få en ener*, *få en toer* osv.? Jo, de ligger alle innbakt i $\bar{S}$.

7.2 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle hendelser er alltid lik 1.

Slik som i tilfellet av *å få en sekser/å ikke få en sekser*, vil det alltid være slik at en hendelse A og den motsatte hendelsen $\bar{A}$ til sammen utgjør alle hendelser. Av ?? har vi da at:

$$\begin{aligned} P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

7.3 Motsatte hendelser

Sannsynligheten for at en hendelse A *ikke* vil skje er gitt som:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. Èn elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

a) Hva er sannsynligheten for at en gutt (G) blir trukket?

b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

Svar:

a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er: $P(G) = \frac{13}{25}$

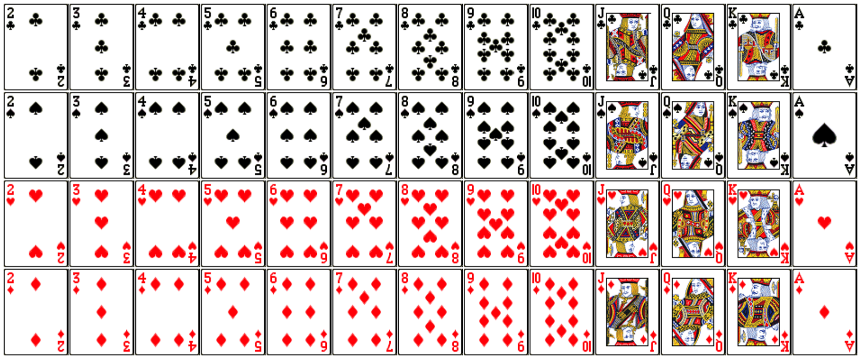
b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er:

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Merk: At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

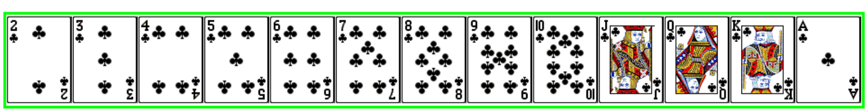
7.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av arten knekt, dame, kong eller ess kalles honnørkort.

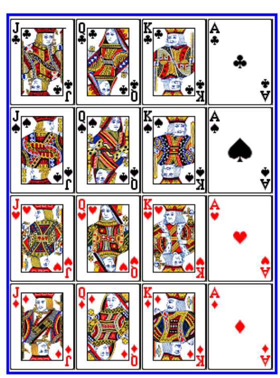


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for at kortet som trekkes er kløver *eller* honnør *eller* begge deler. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort og finner at antallet er 13.

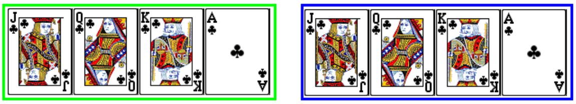
Et kort som kløver kong er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler: både kløverkort *og* honnørkor.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort og finner at antallet er 16.

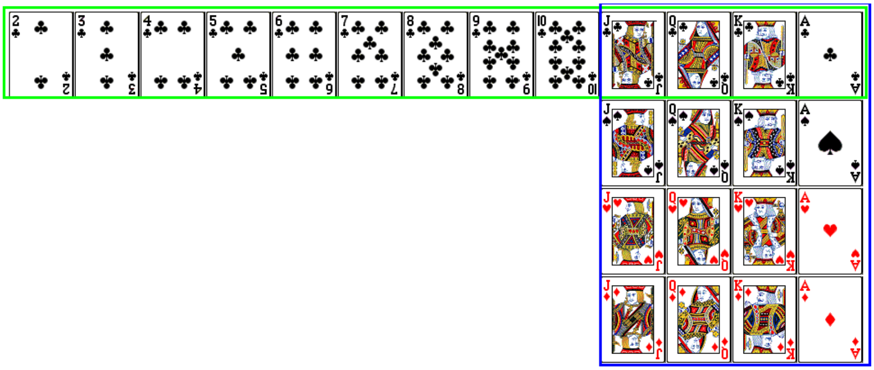


Så vi har altså telt opp $13 + 16 = 29$ gunstige utfall. Men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, kong og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Men det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver, honnør *eller* begge deler – ja, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La nå K være hendelsen *trekke et kløverkort* og H være hendelsen *trekke et honnørkort*. Siden det er 25 kort som er kløver, honnør *eller* begge deler av i alt 52, får vi:

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at:

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver *og* honnørkort, dette skriver vi som:

Symbolet $\cap$ kalles *snitt*.

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at K og H har fire *felles utfall*. Sannsynligheten for $K \cap H$ blir:

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet $P(K), P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne $P(K \cap H)$ på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

7.4 Hendelser med felles utfall

For to hendelser A og B er sannsynligheten for A *eller* B, lik sannsynligheten for A pluss sannsynligheten for B, fratrukket sannynligheten for *både* A og B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball (F), og 10 personer spiller handball (H). Av disse er det 4 som spiller både fotball og handball. Tenk deg at du trekker ut én person fra klassen. Hva er sjansen for at denne personen spiller fotball *eller* handball?

Svar:

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er: $P(F) = \frac{7}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller handball er: $P(H) = \frac{10}{20}$
- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og handball er: $P(F \cap H) = \frac{4}{20}$

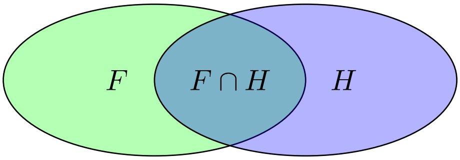
Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* handball er derfor:

$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

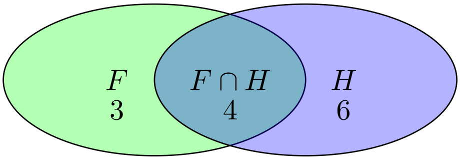
Sjansen er altså $\frac{13}{20}$.

7.2.4 Venndiagram

Noen ganger blir vi bedt om å sette opp informasjonen vi får i et *venndiagram*. Målet med et venndiagram er å lage en figur som beskriver antallet av de enkelte utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet over til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen handball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen (strekt sirkel) representerer de som spiller fotball (F) og den blå de som spiller handball (H). Fordi noen spiller *begge* sportene ($F \cap H$), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Nå vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller handball og fire av disse gjør *begge* deler. Dette kan vi skrive inn i diagrammet vårt på følgende måte:



Diagrammet forteller slik at tre personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* handball. Men så er det fire stykker som spiller *både* fotball og handball, til sammen er det derfor syv som spiller fotball og ti som spiller handball.

Eksempel 1

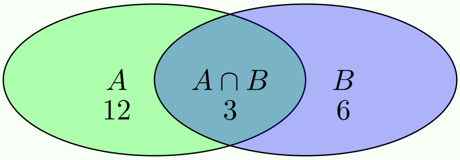
I en matematikklasse på Akademiet VGS Ålesund er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

a) Sett opp et venndiagram som beskriver informasjonen som er gitt.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss eller båt til skolen?

Svar:

a) Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *bare* tar buss og $9 - 3$ som *bare* tar båt. Vi lar A bety *tar buss* og B bety *tar båt*, venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



b) Sannsynligheten for at en person tar buss eller båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tar buss eller båt. Siden det er 31 elever i alt å velge mellom, får vi at:

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 10 elever spiller fotball
- 8 elever spiller handball
- 6 elever spiller volleyball
- 2 elever spiller både fotball og handball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke handball
- ingen elever spiller både handball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

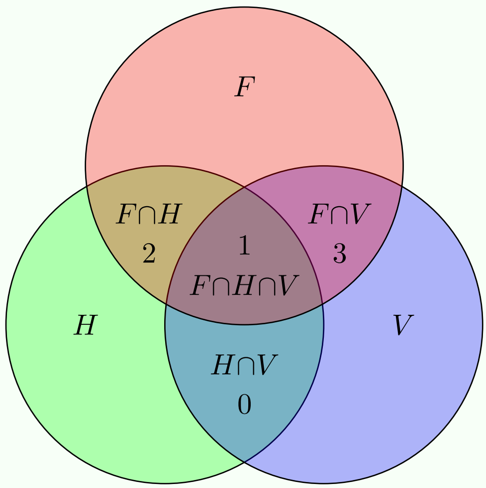
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen. La F bety *spiller fobtall*, H bety *spiller handball* og V bety *spiller volleyball*.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, handball eller volleyball?

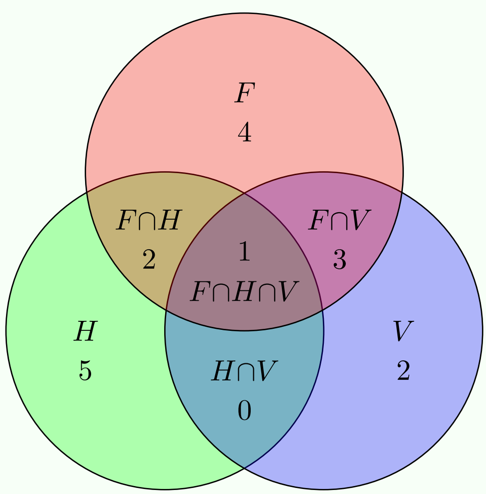
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller handball?

Svar:

Når vi skal lage et venndiagram er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at $10 - 2 - 1 - 3 = 4$ elever spiller *bare* fotball, $8 - 2 - 1 = 5$ spiller *bare* handball og $6 - 3 - 1 - 0 = 2$ spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $5+2+4+3+1+2+0 = 17$ uniker elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke én av disse 17 i en klasse med 29 elever er $\frac{17}{29}$.

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 10 som spiller fotball, er det $2+1=3$ som også spiller handball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller handball er derfor $\frac{3}{7}$.

7.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar M bety *får melk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	$\bar{M}$	sum
E			
$\bar{E}$			
sum			

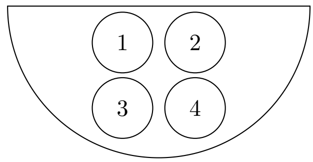
Deretter fyller vi inn tabellen ut ifra informasjonene vi har:

- får *både* melk og epple: $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk: $E \cap M = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

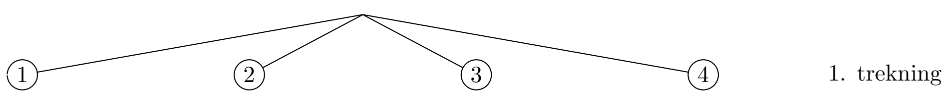
	M	$\bar{M}$	sum
E	180	70	250
$\bar{E}$	40	10	50
sum	220	80	300

7.3 Gjentatte trekk

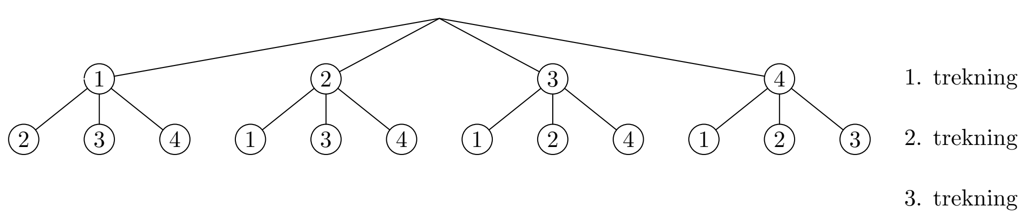
7.3.1 Kombinasjoner



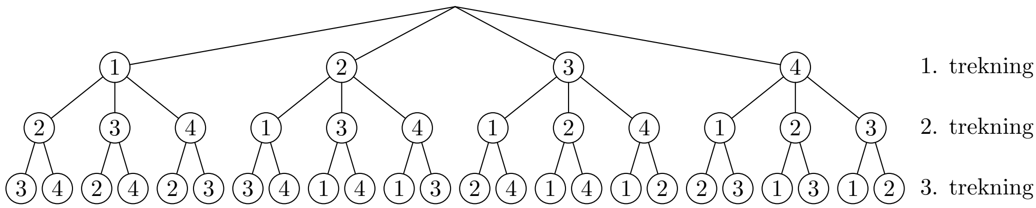
La oss tenke oss at vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp én og én kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Etterpå leser vi opp *kombinasjonen* vi har fått. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi kombinasjonen 2 4 3.
Legger vi kulene tilbake og foretar trekningen på nytt, får vi kanskje kombinasjonen 1 3 4, eller kanskje 4 1 2, eller en helt annen kombinasjon. Så hvor mange forskjellige kombinasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss. Før første trekning ligger det fire kuler i bollen, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp legger vi ut av bollen og trekker så andre gang. For hver av de fire veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå tre nye veier å følge – altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Dette fordi vi har fire veier å gå i første trekning, for hver av disse tre veier å gå i andre trekning og for hver av disse to veier å gå i tredje trekning. Vi sier da at vi har 24 mulige kombinasjoner.

7.5 Kombinasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige kombinasjoner ved å gange sammen de mulige utfallene i hver trekning.

Eksempel

I en klasse med 15 personer trekker vi tilfeldig ut tre elever som skal danne et klasseråd. Hvor mange forskjellige klasseråd kan dannes?

Svar:

Å trekke ut tre personer kan sees på som en trekning hvor vi tilfeldig tar ut én og én, fram til vi har tre personer. Antall forskjellige klasseråd som da kan oppstå er:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{14}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{13}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 2730$$

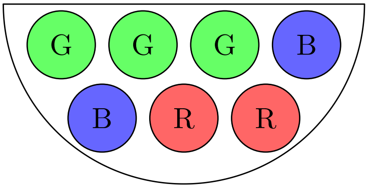
Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange mulige utfall har vi da?

Svar:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

7.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk



La oss tenke at vi har en med bolle sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Vi spør oss nå hva sannsynligheten er for at vi trekker opp to grønne kuler. Hvis vi lar G bety *trekke en grønn kule*, kan vi skrive denne sannsynligheten som $P(GG)$.
For å komme fram til et svar, starter vi med å spørre oss hvor mange *gunstige* kombinasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige kombinasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* kombinasjoner er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da:

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42}$$

La oss nå i hver trekning se på sannsynligheten for å få en grønn kule, med krav om at dette skal skje i begge trekninger. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, dermed får vi at:

$$P(G \text{ i første trekning}) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

Symbolet | betyr *gitt at ... har skjedd.* $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for *sannsynligheten for å trekke en grønn kule, gitt at en grønn kule er trukket.*

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Hvis vi nå ganger sammen sannsynligheten fra første trekning, med sannsynligheten fra andre trekning, ser vi at regnestykket blir det samme som i ligning (7.3.2):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

7.6 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrives som $P(A|B)$.

Sannsynligheten for at A trekkes først, deretter B, deretter C og så videre (...) er:

$$P(ABC...) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot ...$$

Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi lar B bety *blå kule trekkes* og R bety *rød kule trekkes*. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå kule, deretter en rød, og til slutt en blå?

Svar:

Sannsynligheten for først en blå, så en rød, så en blå kule, kan vi skrive som $P(BRB)$.

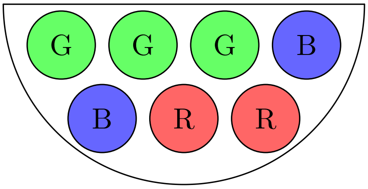
- Sannsynligheten for B i første trekning er: $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynligheten for R i andre trekning, *gitt* B i første er: $P(R|B) = \frac{2}{3}$.
- Sannsynligheten for B i tredje trekning, *gitt* B i første og R i andre er: $P(B|RB) = \frac{1}{2}$.

Vi får dermed:

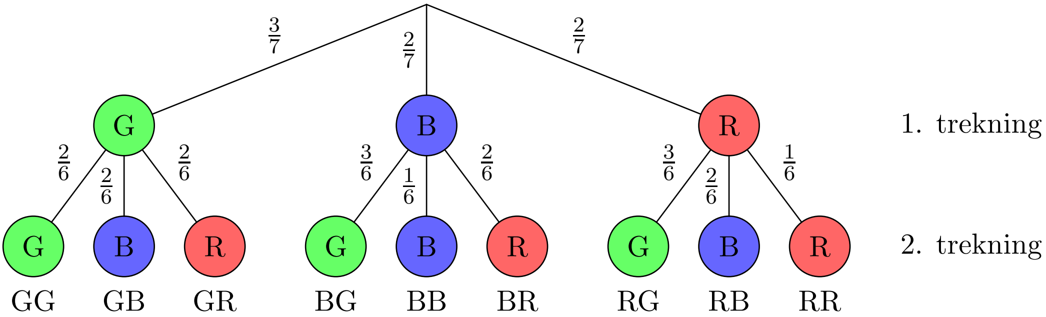
$$\begin{aligned} P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{24} \end{aligned}$$

7.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte ?? for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 7.3, men langs alle veier skriver vi nå på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene G, B og R.
Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til G. Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra G til G.
Og sånn fortseter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei:



For å få en rask oversikt over de forskjellige kombinasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet:
La oss nå bruke valgtret over for å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule. GB og BG er da de gunstige kombinasjonene.
Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til GB, finner vi at:

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne *P(BG)*:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at *GB eller BG* inntreffer blir (se *Regel 7.1*):

$$
\begin{aligned}
P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\
&= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\
&= \frac{12}{42}
\end{aligned}
$$

7.7 Kobinasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en kombinasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til kombinasjonen.

Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuer grønne, to er blå og fem er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La G, B og R henholdsvis bety å trekke en blå, grønn eller rød kule.

a) Tegn et valgtre som skisserer hvilke kombinasjoner av B, G og R du kan få.

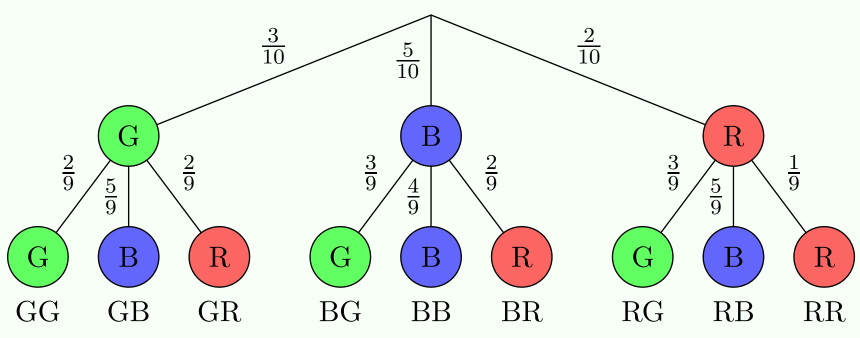
b) Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?

d) Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå eller én grønn kule?

Svar:

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at:

$$\begin{aligned} P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{90} \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

c) Både kombinasjonen GB og BG gir oss én blå og én grønn kule. Vi starter med å finne sannsynligheten for hver av dem:

$$\begin{aligned} P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{15}{90} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for GB *eller* BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$\begin{aligned} P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for kombinasjonene GG, GB, GR, BG, BB, BR, RG og RB, men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sjansen for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av *Regel 7.3* har vi at:

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 1 - P(R) \\ &= 1 - \frac{1}{45} \\ &= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\ &= \frac{44}{45} \end{aligned}$$

Sjasen for å få *minst* én blå eller én grønn kule er altså $\frac{44}{45}$.

Oppgaver for kapittel 7

7.2.1

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?

b) Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?

c) Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er er kløverkort? Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

7.2.2

Du trekker et kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?

b) Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?

c) Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?

d) Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

7.2.3

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2017, del 1. Besvar denne oppgaven ved hjelp av et venndiagram.)

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50 % leser papiraviser, og 2 % leser ikke aviser.

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten ovenfor i et venndiagram eller i en krysstabell.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev ved skolen leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven ikke leser papiraviser.

7.2.4

(Oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2015, del 1)

Forskere skal prøve ut en ny test for å avgjøre om en person er smittet av en bestemt sykdom.

Testen skal prøves ut på 360 personer. På forhånd vet forskerne at 60 av disse personene er smittet av sykdommen, mens resten ikke er smittet.

Det viser seg at 68 av personene tester positivt (det vil si at testen viser at de er smittet av sykdommen). Av disse 68 er det 10 personer som forskerne vet ikke er smittet.

a) Tegn av og fyll ut krysstabellen nedenfor.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			
Tester ikke positivt			
Sum			

b) Bestem sannsynligheten for at en person som er smittet, tester positivt.

c) Bestem sannsynligheten for at en person som tester positivt, ikke er smittet.

7.3.1

(Oppgaven er hentet fra eksamen våren 2015, del 1)

Tenk deg at du har ni flasker med smoothie i kjøleskapet, to «Surf», tre «Jump» og fire «Catch». Du tar tilfeldig to flasker.

a) Bestem sannsynligheten for at du ikke tar en «Jump»-smoothie.

b) Bestem sannsynligheten for at du tar én «Surf»- og én «Catch»-smoothie.

Kapittel 8

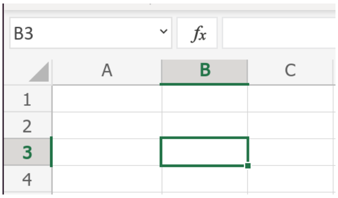
Digitale verktøy

8.1 Regneark

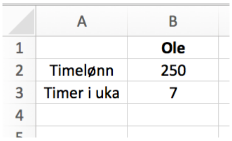
I denne boka tar vi utgangspunkt i Mircrosofts programvare Excel. Det finnes andre gode regneark på markedet, for eksempel Google Sheets og Libre Office Calc. Disse tre nevnte regnearkene ligner hverandre mye både i utforming og i funksjoner de har å tilby.

8.1.1 Introduksjon

Når du åpner et regne-ark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.). Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for å forstå Excel. I figuren under har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3 og kolonne B krysser hverandre.* (Legg også merke til at B3 er markert oppe til venstre i figuren).



I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:



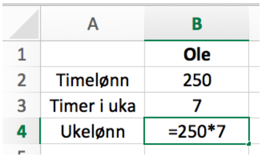
	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

8.1.2 Utregninger

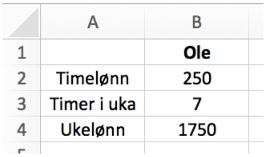
Vi ønsker nå å finne ukelønnen til Ole. Ukelønnen er gitt ved formelen

$$\text{ukelønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timer i uka}$$

For å foreta en utregning i regneark, starter man med å skrive `=` i cellen. I celle B4 finner vi ukelønnen til Ole ved å skrive `=250*7`.

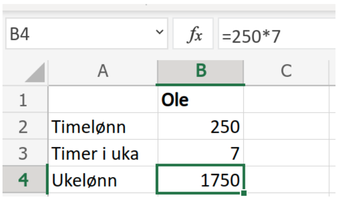


	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Når vi trykket enter-tasten, er det resultatet, 1750, som vises i cellen. Ønsker vi å se formelen vi har brukt, kan vi dobbeltklikke på cellen, eller se i *inntastingsfeltet* (oppe til høyre i figuren under.)



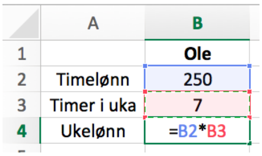
	A	B	C
1		**Ole**	
2	Timelønn	250	
3	Timer i uka	7	
4	Ukelønn	1750	

Merk: Inntastingsfeltet kan også brukes til å taste inn tall og tekst i cellen.

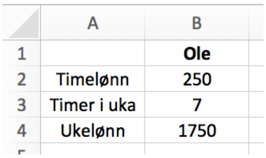
8.1.3 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive `=B2*B3`:



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=B2*B3



	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		**Ole**
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

Merk: Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist her.

8.1.4 Kopiering og låsing av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage at ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne videoen. Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi 7 i celle B4. Etterpå kopierer vi ved å trykke musepekeren helt nede i høyre hjørne av B4 og drar *bortover* til C2 og D2.

2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.

3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
2	Timelønn	300	200	500	**Sum**
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i videoen og figurene over kan vi ta med oss to generelle regler:

1. Hver gang man kopierer en formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)

2. Hver gang man kopierer en formel én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

Låsing av celler

Når man kopierer celler, er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igjen merker vi oss at regnemetoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi `$` foran `B` i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne videoen, og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		**Ole**	**Dole**	**Doffen**	
4	Timelønn	300	200	500	**Sum**
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=$B1*B6	=$B1*C6	=$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* må vi sette dollaren foran radnummeret, for eksempel `B$1`.

8.1.5 Andre nyttige funksjoner

Videoer

- Sum bort og sum ned
- Justere bredde på kolonne
- Sette inn rad
- Formelvisning
- Gjøre om til prosenttall
- Endre antall desimaler
- Sorter i stigende/synkende rekkefølge
- Lage søylediagram
- Lage sektordiagram
- Lage linjediagram

Kommandoer (skrives med `=` foran).

- `SUM(celle1:celle2)`

  Summerer alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `AVERAGE(celle1:celle2)`

  Finner gjennomsnittet for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

- `MEDIAN(celle1:celle2)`

Finner medianen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

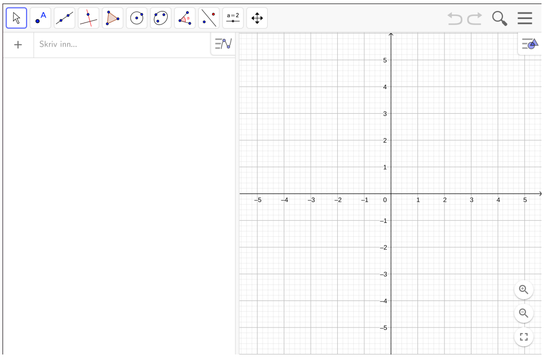
- `VAR.P(celle1:celle2)`

  Finner variansen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

8.2 GeoGebra

8.2.1 Introduksjon

Når du åpner GeoGebra får du et bilde som dette:



Feltet hvor det står ”Skriv inn” kalles *inntastingsfeltet*. Dette feltet og det blanke feltet under utgjør *algebrafeltet*. Koordinatsystemet til høyre kalles *grafikkfeltet*.

8.2.2 Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer

Punkt

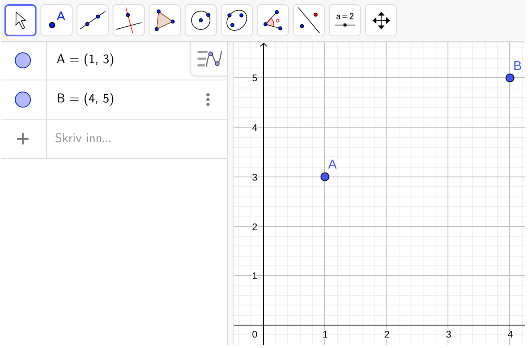
Si at vi ønsker å få punktene (1,3) og (4,5) til å vises i grafikkfeltet. I inntastingsfeltet skriver vi da

```
(1,3)
```

og

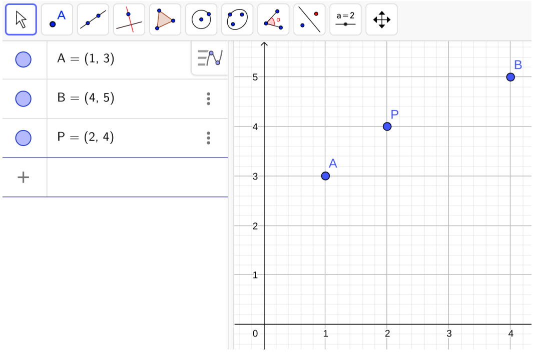
```
(4,5)
```

GeoGebra kaller da punktene A og B, og tegner dem inn i grafikfeltet:



Ønsker vi å selv et punkts navn kan vi f. eks skrive

`P=(2,4)`



Funksjoner

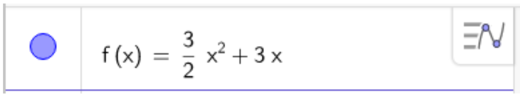
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

For å bruke $f(x)$ i GeoGebra, skriver vi:

`3/2*x^2+3x`

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet f. I algebrafeltet får vi derfor



I grafikkfeltet får vi grafen til f.

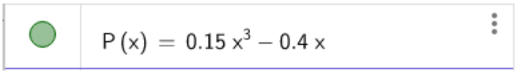
Hvis vi isteden har funksjonen

$$P(x) = 0{,}15x^3 - 0{,}4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra . Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet $P(x)$. Vi skriver da

`P(x) = 0.15x^3 - 0.4x`

og får



Obs!

Man kan aldri gi funksjoner navnet $y(x)$ i GeoGebra. y kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså $y = ax + b$, hvor a og b er to valgfrie tall.

Vannette og loddrette linjer

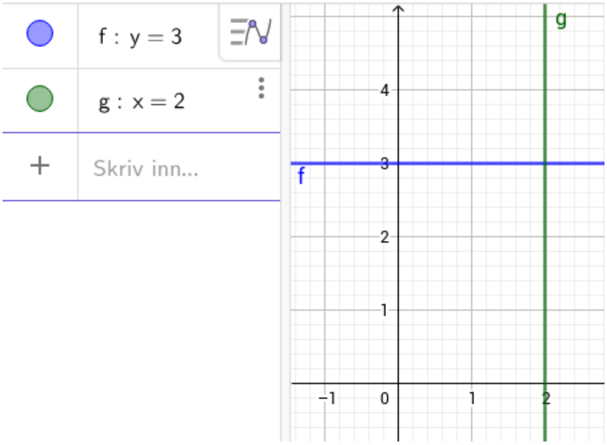
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på y-aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på x-aksen skriver vi:

```
y = 3
```

og

```
x = 2
```

Da får vi denne figuren:



8.2.3 Å finne verdien til funksjoner og linjer

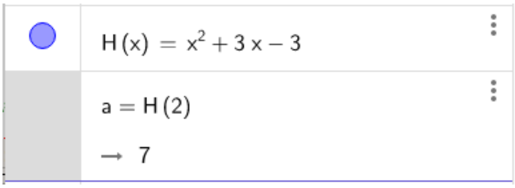
Funksjoner

Si vi har funksjonen
$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis vi ønsker å vite hva $H(2)$ er, skriver vi

```
H(2)
```

som resulterer i dette



Da vet vi at $H(2) = 7$.

Linjer

Det anbefales på det sterkeste at du bruker funksjonsuttrykk når du behandler linjer i GeoGebra, men i noen tilfeller kommer man ikke utenom linjer på former $y = ax + b$.

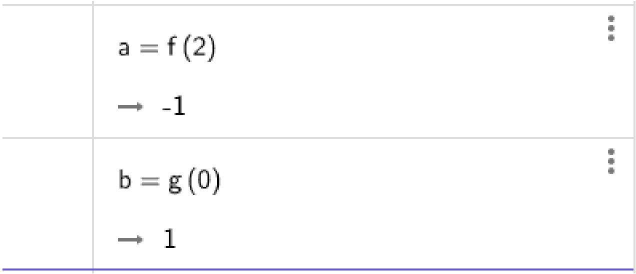
La oss se på de to linjene

$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse inn i GeoGebra, og får

Ønsker vi nå å finne hva verdien til $y = x - 3$ er når $x = 2$, må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for f. Svaret vi søker får vi da ved å skrive $f(2)$. Ønsker vi samtidig å vite hva $y = -2x + 1$ er når $x = 0$ må vi skrive $g(0)$:



8.2.4 Knapper og kommandoer

Videoer

- Finne nullpunktene til en graf
- Finne bunnpunkt (eller toppunkt) til en graf
- Finne skjæringspunktene til to funksjoner
- Justere akser
- Endre tykkelse, farge o.l på graf
- Tegne graf på gitt intervall
  I videoen tegner vi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 5$.
- Lage linje mellom to punkt.
  Legg merke til hva som gjøres mot slutten av videoen for å få det vante uttrykket $y = ax + b$.

Kommandoer

Merk: Mange av kommandoene har egne knapper, som blant annet vist i videoene over.

- abs(<x>)
  Gir lengden til x (et tall, et linjestykke o.l.). Alternativt kan man skrive |x|.
- Linje(<Punkt>, <Punkt>)
  Gir linjen mellom to punkt.
- Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
  Finner topp- og bunnpunkt for en funksjon innenfor et gitt intervall.
- Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
  Tegner en funksjon innenfor et gitt intervall.
- Mangekant(<Punkt>, ..., <Punkt>)
  Tegner mangekanten mellom gitte punkt.
- Nullpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
  Gir nullpunktene til en funksjon innenfor et gitt intervall

- `Skjæring( <Objekt>, <Objekt> )`
  Finner skjæringspunktene til to objekt (funksjoner, linjer o.l.)

G.1 Oppgaver

G.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

G.2

a) Tegn punktene $(-1{,}2)$ og $(2{,}8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

G.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Oppgaver for kapittel 8

(Oppgavene under gjøres i regneark)

8.1.1

Gjør oppgave 6.3.4 og 6.4.1.

8.1.2

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

8.1.3

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave **??**b, hvilket lån koster mest penger?

8.1.4

Sjekk at du i oppgave E**??** og E**??** har fått samme svar som nettsiden laanekalkulator.no. (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

(Oppgavene under gjøres i GeoGebra)

8.2.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

8.2.2

a) Tegn punktene $(-1{,}2)$ og $(2{,}8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

8.2.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Vedlegg

Definisjonsmengde

Definisjonsmengden til en funskjon $f(x)$ er x-verdiene $f(x)$ er gyldige for.

Verdimengde

Verdimengden til en funskjon $f(x)$ er alle verdiene $f(x)$ kan ha. Verdimengden er bestemt av funksjonsuttrykket og funksjonens definisjonsmengde.

Proporsjonale størrelser

Gitt en konstant a og to variabler x og y. Hvis

$$y = ax$$

er x og y proporsjonale størrelser.

Proporsjonale størrelser

Gitt en konstant a og to variabler x og y. Hvis

$$y = \frac{a}{x}$$

er x og y omvendt proporsjonale størrelser.

Polynomfuksjoner

En polynomfunksjon er en funksjon som består av en sum av potenser med positive eksponenter og en variabel som grunntal.

Polynomfunksjoner har undertitler som bestemmes av den største eksponenten i funksjonsuttrykket. For konstantene a, b, c og d, og en variabel x, har vi at

funksjonsuttyrykk	**funksjonsnavn**
$ax + b$	1. gradsfunksjon (lineær)
$ax^2 + bx + c$	2. gradsfuksjon (kvadratisk)
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3. gradsfunksjon (kubisk)