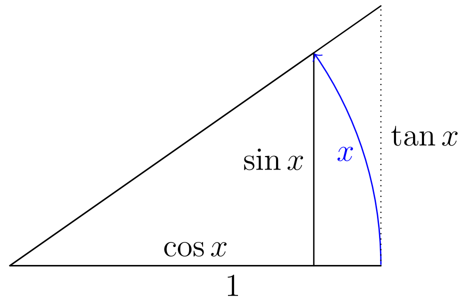
Oppgave



a) Bruk formlikhet til å vise at $\tan x$ er høyden i figuren over.

b) Forklar hvorfor vi må ha at:

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

c) Buen x utgjør $\frac{x}{2\pi}$ av omkretsen til enhetssirkelen. Vis at arealet av sektoren til x blir $\frac{1}{2}x$.

d) Forklar hvorfor vi må ha at:

$$x < \tan x$$

e) Bruk ulikhetene fra b og d til å vise at:

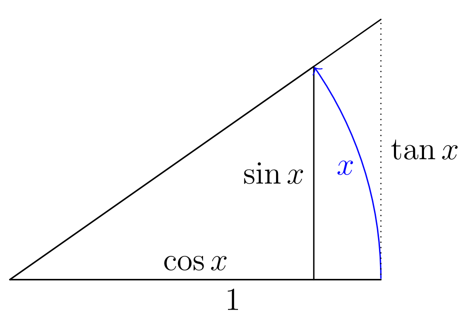
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

f) Vis at:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\Big($Hint: Multipliser ligningen med $\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$ og bruk deretter det du fant i e.$\Big)$

Vi skal nå vise at $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Bektrakt figuren under:



Buen til x må alltid være større enn $\sin x$, altså må vi ha at:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \tag{0.1}$$

Videre observerer vi at trekanten med $\tan x$ som høyde og 1 som grunnlinje må ha et større areal enn sektoren til x. Siden x utgjør $\frac{x}{2\pi}$ av omkretsen til enhetssirkelen, må den utgjøre den samme brøkdelen av arealet. Siden arealet til enhetssirkelen er π blir arealet til sektoren $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x &< \frac{1}{2}\tan x \\
x &< \frac{\sin x}{\cos x} \\
\cos x &< \frac{\sin x}{x} \qquad (0.2)
\end{aligned}$$

Fra (0.1) og (0.2) har vi at:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Når x går mot 0, går $\cos x$ mot 1. I denne grensen blir altså $\frac{\sin x}{x}$ klemt i mellom et tall uendelig nærme (men mindre enn) 1 på den ene siden og 1 på den andre. Derfor må vi ha at:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

At $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vil vi nå bruke videre for å vise at $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\right) \\
&= 1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

0.0.1

test

test

test

test

test