Mål for opplæringen:

- finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene
- gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis
- summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer
- regne med uendelige geometriske rekker med konstante og variable kvotienter, bestemme konvergensområdet for disse rekkene og presentere resultatene

0.1 Følger

Følger er en oppramsing av tall, gjerne skilt med komma. I følgen

$$2, 4, 8, 16 \tag{0.1}$$

sier vi at vi har fire *ledd*. Ledd nr. 1 har verdien 2, ledd nr. 2 har verdien 4 osv. Et slikt utsagn forkortes ofte ved hjelp av en indeksert bokstav. Velger vi oss bokstaven a kan vi skrive $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ osv.

Når vi bruker a_n for å beskrive leddene i en følge bruker vi bare $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ er symbolet for tallene i følgen $1, 2, 3, 4$ og så videre, disse kaller vi gjerne *de naturlige tallene*. Ønsker vi å fortelle at et tall er i en følge vi ikke har noe symbol for, bruker vi klammeparanteser '$\{\}$'. for eksempel er $8 \in \{2, 4, 8, 16\}$.

Ofte vil vi oppdage at tallene i en følge kan settes i sammenheng med hverandre. Vi kan for eksempel merke oss fra (0.1) at hvis vi ganger et ledd i følgen med 2, ja, så har vi funnet det neste leddet. Det *rekursive* uttrykket blir da:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$$

I det rekursive uttrykket bruker vi altså den forrige verdien for å finne den neste.

Den nevnte følgen er en *endelig* følge fordi den har et konkret antall ledd. Hadde vi brukt den rekursive formelen kunne vi lagt på flere ledd og fått følgen:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, ... \tag{0.2}$$

hvor "..." betyr at vi fortsetter i det uendelige med å legge til nye ledd, følgen kalles da en *uendelig* følge.

Hva om vi for denne følgen ønsker å finne ledd nr. 20, altså a_{20}? Det vil da lønne seg å finne et *eksplisitt* uttrykk. For å gjøre dette skriver vi opp noen ledd og ser om vi finner et mønster:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2^1 \\ a_2 &= 4 = 2^2 \\ a_3 &= 8 = 2^3 \end{aligned}$$

Av ligningene over innser vi at vi for ledd nr. n må ha at:

$$a_n = 2^n$$

Dermed får vi for ledd nr. 20:

$$\begin{aligned} a_{20} &= 2^{20} \\ &= 1048576 \end{aligned}$$

0.1.1 Aritmetiske følger

Følgen

$$2, 5, 8, 11, 14, 17$$

Er det vi kaller en aritmetisk følge. Dette er fordi to naboledd har en konstand differanse $d = 3$. Skriver vi opp de tre første leddene kan vi finne mønsteret til en eksplisitt formel:

$$a_1 = 2 = 2 + 3 \cdot 0$$
$$a_2 = 5 = 2 + 3 \cdot 1$$
$$a_3 = 8 = 2 + 3 \cdot 2$$

Av ligningene over observerer vi at:

$$a_n = 2 + 3 \cdot (n - 1)$$

Aritmetisk følge

Et ledd a_n i en aritmetisk følge er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + d \tag{0.3}$$

og den eksplisitte formelen:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \tag{0.4}$$

hvor d er den konstante differansen $a_n - a_{n-1}$ og hvor $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel

Finn den rekursive og den eksplisitte formelen til følgen

$$7, 13, 19, 25, ...$$

Svar:

Vi observerer at følgen har den konstante differansen $d = 6$ og første ledd $a_1 = 7$. Den rekursive formelen blir da

$$a_n = a_{n-1} + 6$$

Mens den eksplisitte formelen blir

$$a_n = 7 + 6(n - 1)$$

for $n \in \mathbb{N}$.

0.1.2 Geometriske følger

Følgen

$$2, 6, 18, 54, 162$$

kaller vi en geometrisk følge. Dette fordi forholdet mellom to naboledd er den samme kvotienten $k = 3$. Også her kan vi gjenkjenne et fast mønster:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2 \cdot 3^0 \\ a_2 &= 6 = 2 \cdot 3^1 \\ a_3 &= 18 = 2 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

Den eksplisitte formelen blir derfor:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Geometrisk følge

Et ledd a_n i en geometrisk følge med kvotient k er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} \cdot k \tag{0.5}$$

og den eksplisitte formelen:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} \tag{0.6}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel

En geometrisk følge har $a_1 = 2$ og $k = 4$. For hvilken n er $a_n = 128$?

Svar:

Vi får ligningen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^{n-1} &= 128 \\ 4^{n-1} &= 64 \\ (n-1)\ln 4 &= \ln 64 \\ (n-1)\ln 4 &= \ln 4^3 \\ (n-1)\ln 4 &= 3\ln 4 \\ n-1 &= 3 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

0.2 Rekker

Den store forskjellen på en rekke og en følge, er at i en rekke er leddene skilt med plusstegn[1]. For eksempel er

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

en rekke. Vi bruker begrepet ledd på samme måte som for en følge: I rekka over er ledd nr. 3 lik 18, og rekka har i alt fem ledd. For en rekke er det naturlig at vi ikke bare ønsker å vite verdien til hvert enkelt ledd, men også hva summen av alle leddene blir. Så lenge en rekke ikke er uendelig, kan man alltids regne ut summen ved å legge sammen ledd for ledd, men det vi søker er uttrykk som gir oss summen etter mye mindre arbeid, og til og med for tilfellet av uendelige rekker.

0.2.1 Aritmetiske rekker

Hvis hvert ledd i rekka vår kan finnes ut ifra den eksplisitte formelen til en aritmetisk følge, kaller vi den en *aritmetisk rekke*. Summen av denne er gitt ved følgende formel:

Summen av en aritmetisk rekke

Summen S_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt som:

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \tag{0.7}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$3 + 7 + 11 + ...$$

a) Finn summen av de ti første leddene.
b) For hvilken n er summen av rekka lik 903?

Svar:

a) Det n-te leddet i rekka a_n er gitt ved formelen

$$a_n = 3 + 4(n - 1)$$

[1] Rekka $-1 - 2 - 3$ ser ut til å være skilt med minustegn, men er egentlig bare en forkorting av $(-1) + (-2) + (-3)$

Dette er derfor en aritmetisk rekke, og summen av de n første leddene er da gitt av ligning (0.7). Ledd nr. 10 blir (når en side av ligningen er blank betyr dette at uttrykket på siden er uforandret):

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + 4(10 - 1) \\ &= 39 \end{aligned}$$

De ti første leddene er dermed gitt som:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{3 + 39}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

b) I formelen for S_n setter vi inn det eksplisitte uttrykket for a_n og får:

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n-1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903 \end{aligned}$$

Denne lignigen har løsningene $n = 21 \vee n = -\frac{43}{2}$. Vi søker et positivt heltall, og dermed er $n = 21$ eneste mulige løsning.

0.2.2 Geometriske rekker

Hvis hvert ledd i en rekke kan finnes ut ifra den eksplisitte formelen til en geometrisk følge, kaller vi den en geometrisk rekke. Også for en geometrisk rekke har vi en formel for summen:

Summen av en geometrisk rekke

Summen S_n av de n første leddene i en geometrisk rekke med kvotient k er gitt som:

$$S_n = a_1 \frac{1 - k^n}{1 - k} \quad , \quad k \neq 1 \tag{0.8}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$.

Spesialtilfellet $k = 1$:

Hvis $k = 1$ har vi at:

$$S_n = na_1 \tag{0.9}$$

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$$

a) Finn summen av de 15 første leddene.
b) For hvor mange ledd er summen av rekka lik 93?

Svar:

a) Vi observerer at dette er en geometrisk rekke med $a_1 = 3$ og $k = 2$. Summen av de 15 første leddene blir da:

$$\begin{aligned} S_{15} &= 3 \cdot \frac{2^{15} - 1}{1 - 2} \\ &= 3 \cdot \frac{1 - 32768}{-1} \\ &= 98301 \end{aligned}$$

b) Vi lar n være antall ledd og får:

$$\begin{aligned} 93 &= 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ \frac{93}{3} &= 2^n - 1 \\ 31 + 1 &= 2^n \\ \frac{\ln 32}{\ln 2} &= \\ \frac{\ln 2^5}{\ln 2} &= \\ \frac{5 \ln 2}{\ln 2} &= n \\ 5 &= n \end{aligned}$$

0.2.3 Uendelige geometrisk rekker

Når en geometrisk rekke har uendelig mange ledd kan vi merke oss følgende:

Hvis $|k| < 1$, kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-k^n}{1-k} \\ &= a_1 \frac{1}{1-k}\end{aligned}$$

Summen av uendelig mange ledd går altså mot en endelig (konkret) verdi! Når dette er et faktum sier vi at rekka *konvergerer* og at rekka er konvergent. Hvis vi derimot har at $|k| \geq 1$, går summen mot $\pm\infty$. Vi sier da at rekka *divergerer* og at rekka er divergent.

Summen av en uendelig gemoetrisk rekke

For en uendelig geometrisk rekke med kvotient $k < |1|$, er summen av rekka S_∞ gitt som:

$$S_n = \frac{a_1}{1-k} \tag{0.10}$$

Hvis $|k| > 1$ vil summen gå mot $\pm\infty$.

Eksempel

Gitt den uendelige rekka

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ...$$

a) For hvilke x er rekka konvergent? Vis at summen S_n til rekka i dette tilfellet blir

$$S_n = \frac{x-1}{x}$$

b) For hvilken x er summen av rekka lik $\frac{3}{2}$?
c) For hvilken x er summen av rekka lik -1?

Svar:

a) Vi observerer at rekka er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{x}$ og $a_1 = 1$. Rekka er konvergent når $|k| < 1$, vi krever derfor at:

$$|x| > 1$$

Summen er da gitt som:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.

b) Hvis rekka har en endelig sum $S_n = \frac{3}{2}$, er den gitt ved:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{x-1}{x} \\ 3x &= 2(x-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Summen av rekka er altså $\frac{3}{2}$ når $x = 3$.

c) Skal summen bli -1 må x oppfylle følgende ligning

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{x-1}{x} \\ -x &= x-1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Men $\frac{1}{2} < 1$, og oppfyller derfor ikke kravet fra oppgave *a*. Rekka er ikke konvergent (den er divergent) for dette valget av x, og derfor er det ingen verdier for x som oppfyller ligningen $S_n = -1$.

0.2.4 Summetegnet

Vi skal nå se på en notasjon som strengt tatt ikke er pensum i faget, men som vil forenkle skrivemåten for rekker betraktelig. Denne notasjonen vil vi anvende i kapittel **??** når vi skal introdusere *integrasjon*.

Tidligere har vi skrevet rekkene mer eller mindre beint fram. For eksempel har vi sett på rekken

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

med den eksplisitte formelen

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Ved hjelp av summetegnet $\sum$ kan vi nå komprimere rekka vår betratelig. Vi lar i være en løpende variabel som starter på 1 og øker med 1 opp til 5. Vi lar den eksplisitte formelen være uttrykt ved i og skriver et plusstegn hver gang i øker med 1. Vi kan da skrive:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$$

Den uendelig rekka 2+6+18+ ... derimot kan vi istedenfor skrive som:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{i-1}$$

For summetegnet har vi også noen regneregler[1] som vi for ordens skyld skal ta med oss.

Regneregler for summetegnet

For to følger $\{a_i\}$ og $\{b_i\}$ og en konstant c har vi at:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{0.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{0.12}$$

0.3 Induksjon

Vi skal nå se på det kanskje mest matematiske temaet vi støter på i R2, nemlig *induksjon*. Induksjon brukes spesielt for heltall, og prinsippet er dette: Si at vi har funnet en ligning som er sann for et heltall n. Hvis vi kan vise at ligningen også gjelder hvis vi adderer heltallet med 1, så har vi vist at ligningen gjelder for alle heltall større eller lik n.

Det kan være litt vanskelig i starten å få helt grep på induksjonsprinsippet, så la oss gå rett til et eksempel:

Vi ønsker å vise at summen av alle partallene kan skrives som:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$$

[1] Summen trenger selvsagt ikke å begynne på indeks 1, man kan derfor erstatte $i = 1$ med $i = j$ for alle heltall j.

Vi starter med å vise dette for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot (1+1) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Så nå vet vi altså om et heltall, nemlig tallet $n = 1$, som formelen stemmer for. Videre antar vi nå at ligningen er gyldig helt opp til ledd nr. k. Vi ønsker så å sjekke at den gjelder også for neste ledd, altså når $n = k + 1$. Summen blir da:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$$

Men fram til ledd nr. k er det tatt for gitt at (0.3) gjelder, derfor kan vi skrive[1]:

$$\begin{aligned} \underbrace{2 + 4 + 6 + ... + 2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) &= (k+1)((k+1)+1) \\ k(k+1) + 2(k+1) &= (k+1)(k+2) \\ (k+1)(k+2) &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

I andre linje har vi trekt $k+1$ utenfor parantes for å få uttrykket vi ønsket. Og nå kommer den briljante konklusjonen: Vi har vist at (0.3) er sann for $n = 1$. I tillegg har vi vist at hvis ligningen gjelder for et heltall $n = k$, så gjelder den også for $k+1$. På grunn av dette vet vi at (0.3) gjelder for $1 + 1 = 2$. Men når vi vet at den gjelder for 2, gelder den også for $2+1 = 3$ og så videre, altså for alle heltall! Tiden er inne for en oppsummering.

Induksjon

Når vi ved induksjon ønsker å vise at ligningen

$$A(n) = B(n)$$

er sann for alle $n \in \mathbb{N}$, gjør vi følgende:

1. Sjekker at $A(n) = B(n)$ for $n = 1$.
2. Sjekker at $A(n) = B(n)$ for $n = k + 1$.

[1] Det kan se litt merkelig ut å skrive $2 + 4 + 6 + ... + 2k$ og anta at formelen vår gjelder for denne summen, det virker jo da som at vi antar at den gjelder for $n = 1$, $n = 2$ osv. Men dette er bare en litt kunstig skrivemåte som blir brukt for summen fram til ledd nr. k. For etterpå sier vi at vi vet om et tall k som denne antakelsen er riktig for, nemlig $k = 1$, og da har vi jo bare ett ledd før ledd nr. $k + 1$.

I påfølgende eksempler skal vi for enkelthets skyld la ledd nr. k være innbakt i symbolet "...".

Eksempel 1

Vis ved induksjon at summen av de n første oddetallene er gitt ved ligningen

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar:

Vi sjekker at påstanden stemmer for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Vi tar det for gitt at påstanden gjelder for $n = k$ og må videre sjekke at den stemmer også for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 3 + 5 + ...}_{k^2} + (2(k+1) - 1) &= (k+1)^2 \\ k^2 + 2k + 1 &= (k+1)^2 \\ (k+1)^2 &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Og dermed er påstanden vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Merk: Hvis du har problemer med å faktorisere venstresiden når du utfører induksjon, kan du som reserveløsning skrive om høyresiden til mindre kompakte uttrykk, men helst bør du la være. Dett er er litt for elegansens skyld (selv ikke matematikk kan fraskrive seg en porsjon forfengelighet!), men også fordi du da minker sjansene for regnefeil.

Eksempel 2

Vis ved induksjon at:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar:

Vi starter med å sjekke for $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \\
1^3 &= \frac{2^2}{4} \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Ligningen er altså riktig for $n = 1$.

Vi antar videre at den også stemmer for $n = k$ og sjekker for $k + 1$:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + ...}_{\frac{k^2(k+1)^2}{4}} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} \\
\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \\
\frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \\
\frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4))}{4} &= \\
\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Påstanden er nå vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Forklaringer

Summen av en aritmetisk rekke

Ved å bruke den eksplisitte formelen fra (0.4), kan vi skrive summen av en aritmetisk rekke som:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + d(n-1)) \tag{0.13}$$

Men når rekka har n ledd, kan vi også bruke denne formelen for $1 \leq i \leq n$:

$$a_i = a_n - (n-i)d$$

Og da kan vi skrive summen som (vi starter her med siste ledd):

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - d(n-1)) \tag{0.14}$$

Legger vi nå sammen (0.13) og (0.14) får vi $2S_n$ på venstre side. På høyre side blir alle d-er kansellert, og vi får:

$$2S_n = na_1 + na_n$$

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

Summen av en geometrisk rekke

Summen S_n av en geometrisk rekke med n ledd er:

$$S_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + ... + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1} \tag{0.15}$$

Ganger vi denne summen med k, får vi:

$$kS_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + ... + a_1k^{n-1} + a_1k^n \tag{0.16}$$

Dersom vi trekker (0.16) ifra (0.15), får vi:

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a_1 - a_1k^n \\ S_n(1-k) &= a_1(1-k^n) \\ S_n &= a_1\frac{(1-k^n)}{1-k} \end{aligned}$$

Regneregler for summetegnet

Ved å skrive ut summen og omrokkere på rekkefølgen av addisjonene, innser vi at:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\end{aligned}$$

Ved å skrive ut summen og faktorisere ut c innser vi videre at:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ...ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + ... + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

Oppgaver

Du finner fasit og løsningsforslag på de nederste sidene.

0.1.1

a) Skriv opp de fire første partallene. Lag en rekursiv og en eksplisitt formel for det n-te partallet.

b) Skriv opp de fire første oddetallene. Lag en eksplisitt formel for det n-te oddetallet.

0.1.2

Finn det eksplisitte uttrykket til den aritmetiske følgen når du vet at:

a) $a_1 = 3$ og $a_4 = 30$

b) $a_1 = 5$ og $a_{11} = -25$

c) $a_3 = 14$ og $a_5 = 26$

0.1.3

Finn det eksplisitte uttrykket til den geometriske følgen når du vet at:

a) $a_1 = \frac{1}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{6}$

b) $a_1 = 5$ og $a_4 = 40$

0.2.1

Finn S_{10} for rekkene:

a) 7+13+19+25+... **b)** 1+9+17+25+...

0.2.2

Gitt rekka

$$8 + 11 + 14 + ...$$

For hvilken n er summen av rekka lik 435?

0.2.3

Gitt rekka

$$3 + 12 + 48 + ... + 768$$

Finn summen av rekka. (Hint: Finn først hva n er når $a_n = 768$).

0.2.4

En geometrisk rekke har $a_1 = 2$ og $k = 3$.

a) Vis at summen S_n kan skrives som:

$$S_n = 3^n - 1$$

b) Regn ut summen for de 3 første leddene.

c) For hvilken n er $S_n = 728$?

0.2.5

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2 % månedlig rente. Du sparer ved å foreta et innskudd den 1. i hver måned, og du starter 01.01.2017.

a) Skriv rekka som viser hvor mye penger du har i banken 01.05.2017. Innskuddet 01.05 skal tas med.

b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken n måneder etter 01.01.2017, medregnet innskuddet samme måned.

0.2.6

Gitt den uendelige rekka

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + ...$$

a) Forklar hvorfor rekka er konvergent.

b) Finn summen av den uendelige rekka.

0.2.7

Tenk at uendelig mange personer skal sette sammen en stav. Første person legger på en meter, neste person legger på 0.1 m, neste legger på 0.01 m osv. Hvor lang blir staven?

0.2.8

Gitt den uendelige rekka

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + ...$$

a) For hvilke x er rekka konvergent?

b) For hvilken x er $S_n = \frac{2}{15}$?

c) For hvilken x er $S_n = \frac{1}{6}$?

0.3.1

Vis ved induksjon at:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$

c) $4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n = \dfrac{4}{3}(4^n - 1)$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

Fasit

Med mindre annet er nevnt er det tatt for gitt at $n \in \mathbb{N}$

0.1.1 a) $2n$ **b)** $2n - 1$

0.1.2 a) $d = 9$ **b)** $d = -3$ **c)** $a_1 = 2$

0.1.3 a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n}$ **b)** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

0.2.1 a) 350 **b)** 370

0.2.2 $n = 15$

0.2.3 $S_5 = 1023$

0.2.4 b) 26 **c)** $n = 6$

0.2.5 a) $1000 \cdot 1.02^4 + 1000 \cdot 1.02^3 + 1000 \cdot 1.02^2 + 1000 \cdot 1.02^1 + 1000$ **b)** $P(n) = 50000(1.02^n - 1)$

0.2.6 a) Fordi $-1 < k = \frac{1}{4} < 1$

0.2.7 Lengden blir $\frac{10}{9}$ m.

0.2.8 a) $1 < x < 3$ **b)** $x = \frac{1}{2}$. **c)** $x = 1$ løser ligningen, men rekka konvergerer ikke for denne verdien av x. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

0.3.1 Se løsningsforslag.

Løsningsforslag

0.1.2
a) Vi bruker den eksplisitte fomelen for en aritmetisk følge og får:

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_1 + d(n-1) \\
30 &= 3 + d(4-1) \\
27 &= 3d \\
9 &= d
\end{aligned}$$

b) Vi observerer at:

$$\begin{aligned}
a_5 - a_3 &= a_1 + d(5-1) - (a_1 + d(3-1)) \\
a_5 - a_3 &= 2d \\
26 - 14 &= 2d \\
6 &= d
\end{aligned}$$

Videre har vi at:

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1 + 2d \\
14 &= a_1 + 12 \\
2 &= a_1
\end{aligned}$$

0.1.3
a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n}
\end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot k^{4-1} &= a_4 \\
5 \cdot k^3 &= 40 \\
k^3 &= 8 \\
k &= 2
\end{aligned}$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

0.1.3
a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 6$. For å finne summen trenger vi verdien til a_{10}:

$$\begin{aligned}
a_{10} &= 7 + 6(10-1) \\
&= 61
\end{aligned}$$

Summen S_{10} blir da:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{7+61}{2} \\ &= 340 \end{aligned}$$

b) Se a.

0.2.2 Se eksempel s. 5

0.2.3 Se eksempel s. 4 for å finne n.

0.2.4
a) Summen S_n er gitt som:

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{1-3} \\ &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{-2} \\ &= 3^k - 1 \end{aligned}$$

b) Se eksempel s. 7.

c) Se eksempel s. 7.

0.2.5
a) Når du har spart i 4 måneder betyr det at første innskudd har forrentet seg 4 ganger, andre beløp tre ganger osv. Forrentingen tilsvarer en økning med 1.02. Medregnet det ferske innskuddet blir regnestykket:

$$1000 \cdot 1.02^4 + 1000 \cdot 1.02^3 + 1000 \cdot 1.02^2 + 1000 \cdot 1.02^1 + 1000$$

b) Av oppgave a innse vi at $P(n)$ er summe av en geometrisk rekke med $a_1 = 1000$ og $k = 1.02$:

$$\begin{aligned} P(n) &= 1000 \cdot \frac{1-1.02^n}{1-1.02} \\ &= -50000(1-1.02^n) \\ &= 50000(1.02^n - 1) \end{aligned}$$

0.2.6
a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$. Siden $|k| < 1$ er rekka konvergent.

b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum S_∞ gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

0.2.7
Dette blir en uendelig geometrisk rekke på formen:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...$$

Siden $k = \frac{1}{10}$ er $|k| < 1$ og derfor er rekka konvergent. Summen S_∞ er da gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Altså blir lengden $\frac{10}{9}$ meter.

0.2.8
a) Vi observerer at $k = x - 2$. Skal rekka konvergere må altså $|x-2| < 1$. Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at $1 < x < 3$.

b) Se eksempel s. 8.

c) Se eksempel s. 8.

0.3.1
a) Se eksempel s. 12 og s. 12.

b) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^n - 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1-1} &= 2^{k+1} - 1 \\ 2^k - 1 + 2^k &= \\ 2 \cdot 2^k - 1 &= \\ 2^{k+1} - 1 &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Se eksempel s. 12 og s. 12.

d) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1+1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^3 ... + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 2k + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 2(2k+3)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
\end{aligned}
$$

Og dermed har vi vist det vi skulle. (*Merk*: Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 skaffet oss leddet $2k+3$. Hvis man ikke kommer i mål med rein faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at $k(2k+1) + 6(k+1) = (2k+3)(k+2)$ ved å skrive ut uttrykkene på begge sider).