Innhold

0.1 Følger

`Sum[ <Uttrykk>, <Variabel>, <Start>, <Slutt> ]` (CAS)

Finner summen av en rekke med en løpende variabel på et intervall.

Eksempel

Finn summen av den uendelige rekka ..

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + ...$$

Svar:

Dette er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{5}$ og eksplisitt formel gitt som:

$$a_n = \frac{1}{5^{(n-1)}}$$

hvor $n \in [1, 2, ...]$.

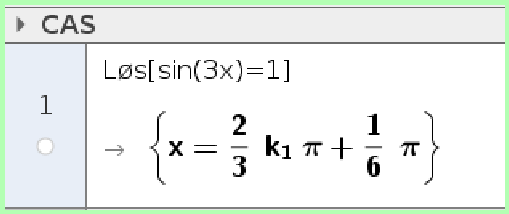
I CAS skriver vi da (∞-tegnet finner du ved å trykke på α-tegnet oppe i høyre hjørne):

0.2 Trigonometriske uttrykk

Løs[<Likning med x>] (CAS)

Løser en likning med x som ukjent.

Eksempel



I teoridelen til denne boka bruker vi $n \in \mathbb{N}$ som heltallsvariabel. GeoGebra bruker en indeksert k, her $k_1 \in \mathbb{N}$.

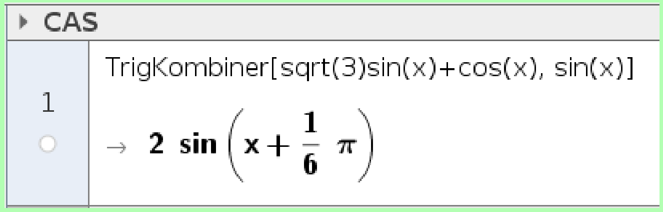
Merk: Du kan også løse ligningen $\sin(3x) = 1$ ved å skrive den inn i en CAS-celle og deretter trykke på Løs.

0.3 Trigonometriske funksjoner

TrigKombiner[<Funksjon>, sin(x)]

Skriver om en funksjon på formen $a\sin(kx)+b\cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r\sin(kx+c)$.

Eksempel



`RegSin[ <Liste> ]`

Finner den best tilpassede sinusfunksjonen for punkt i en liste.

Eksempel

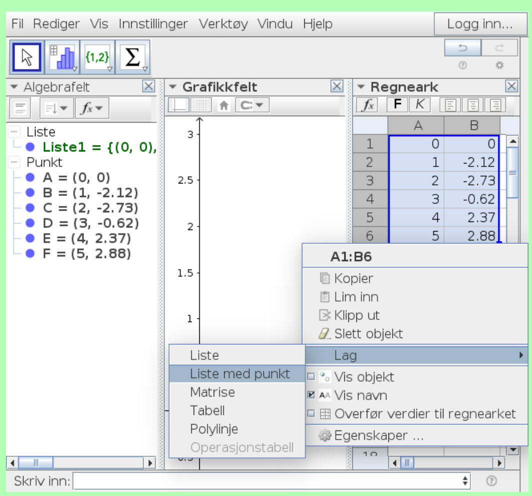
Gitt tabellen

x	$f(x)$
1	-2.12
2	-2.73
3	-0.62
4	2.37
5	2.88

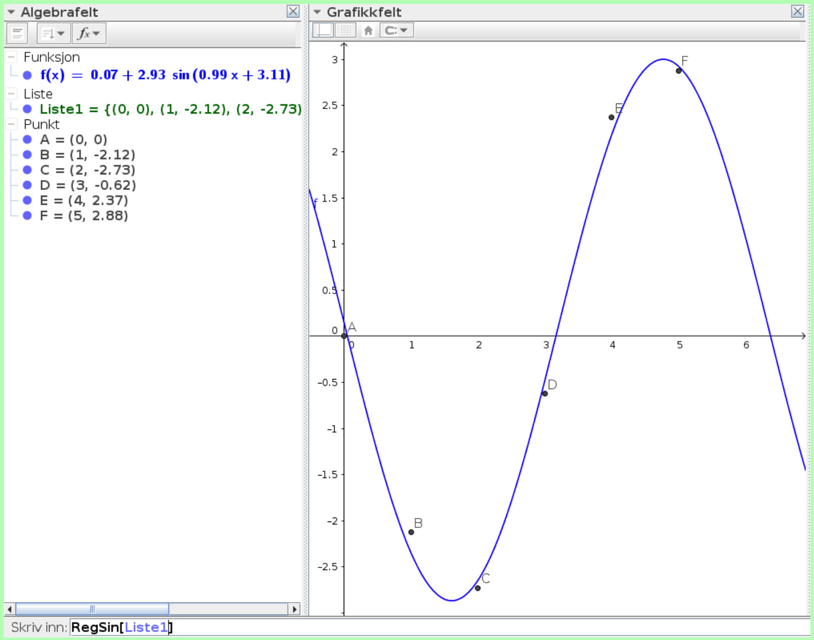
Bruk regresjon for å finne en tilnærming til $f(x)$.

Svar:

Vi velger `Vis` ▶ `Regneark` og skriver inn tabellen. Vi markerer så begge kolonner, høyreklikker innenfor markeringsfeltet og velger `Lag` ▶ `Liste med punkt`:



Om vi ønsker at alle punktene skal vises i grafikkfeltet, høyreklikker vi på grafikken og velger `Vis alle objekt`. Deretter skriver vi `RegSin[Liste1]` i kommandolinjen, og får funksjonen `f(x)` i algebrafeltet og grafen til `f` i grafikkfeltet. Denne funksjonen er en tilnærming til $f(x)$ gitt i oppgaven.



0.4 Vektorer

`Determinant[ <Matrise> ]`

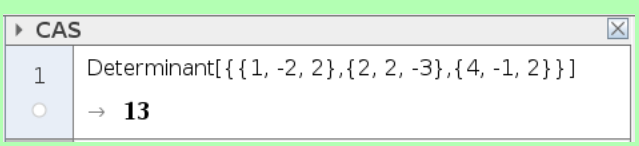
Finner determinanten til en matrise.

Eksempel

Regn ut:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Svar:



0.5 Rom

`Skalarprodukt[<Vektor>, <Vektor>]`

Finner skalarproduktet av to vektorer. (Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive u*v).

`Vektorprodukt[ <Vektor>, <Vektor> ]` (CAS)

Finner vektorproduktet av to vektorer. (Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive `u⊗v`. Hurtigtast for ⊗ er alt+shift+8).

`Pyramide[<Punkt>, <Punkt>, ...]`

Framstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. `Pyramide[A,B,C,D]` lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D, mens `Pyramide[A,B,C,D, E]` har grunnflate A, B, C, D og toppunkt E. Under kategorien *Pyramide* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

`Høyde[ <Objekt> ]`

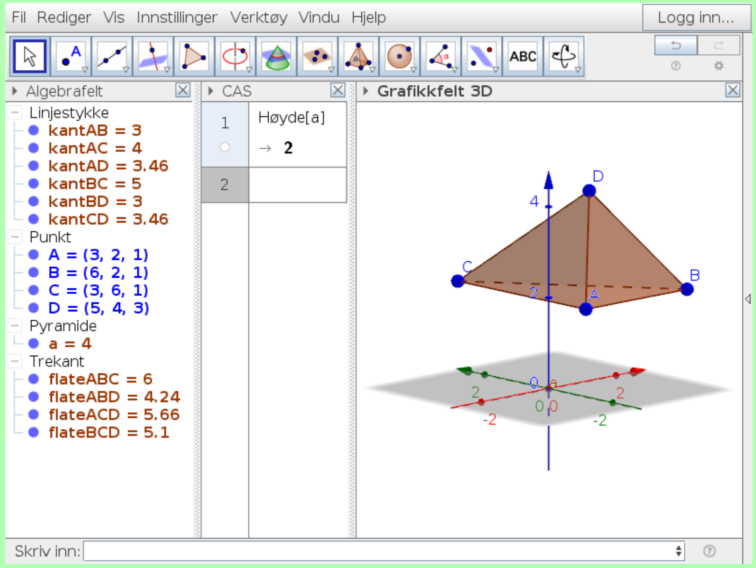
Gir avstanden fra toppunkt til grunnflate i et objekt. (Merk: Avstanden har retning, og derfor kan den noen ganger være negativ. Tallverdien er den geometriske høyden.)

Eksempel

Finn volumet og høyden til tetraetedet med grunnflate gitt ved punktene $A = (3, 2, 1)$, $B = (6, 2, 1)$, $C = (3, 6, 1)$ og toppunkt $D = (5, 4, 3)$.

Svar:

Vi skriver inn punktene og bruker deretter kommandoen `Pyramide[A, B, C, D]` for å lage tetraedet a. Algebrafeltet gir oss da at volumet til a er 4. I CAS-celle 1 finner vi høyden, som er 2.



Prisme[<Punkt>, <Punkt>, ...]

Framstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. Prisme[A,B,C,D] lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF, Prisme[A,B,C,D, E] har grunnflate $ABCD$ og tak EFG. F, G og eventelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallellogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

Kurve[<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>]

Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x, y og z-koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel. (Merk: Med mindre et bestemt intervall av kurven er ønsket, er det bedre å skrive parameteriseringen direkte inn i inntastingsfeltet som A+t*u, hvor A er et punkt på linja og u er en retningsvektor.

Linje[<Punkt>, <Punkt>]

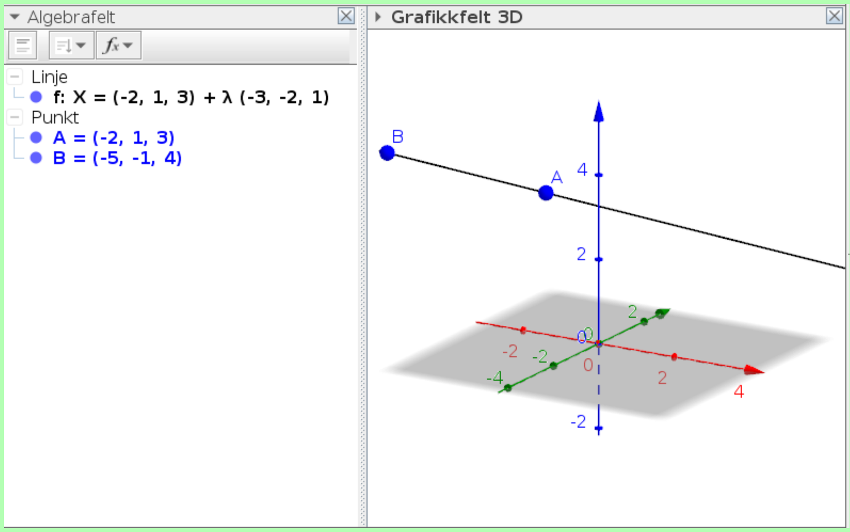
Gir uttrykket til en linje mellom to punkt. Hvis punktene har tre koordinater besår uttrykket av et punkt på linja og en fri variabel λ mulitplisert med en retningsvektor.

Eksempel

Finn parameteriseringen til linja som går mellom punktet $(-2, 1, 3)$ og $(-5, -1, 4)$.

Svar:

Vi skriver punktene i inntastingsfeltet og får punktene A og B. Etterpå skriver vi `Linje[A, B]` og får da linjen f.



Av dette finner vi at parameteriseringen til linja er gitt som:

$$f : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

`Kule[ <Punkt>, <Radius>]`

Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.

Eksempel

En linje l med parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

skjærer en kule med med sentrum i $(-1, 2, 6)$ og radius lik 3.

a) Tegn kula og linja.

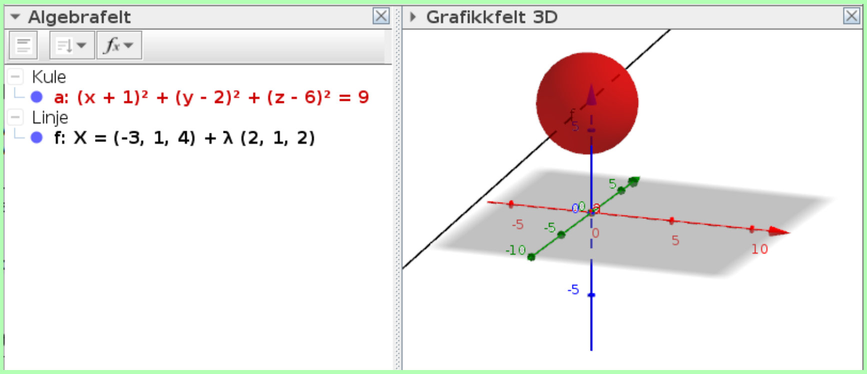
b) Finn skjæringspunktet mellom kula og linja.

Svar:

Vi skal her se på to løsningsmetoder. Den første metoden er helt klart den raskeste, men den andre metoden er tatt med for å illustrere bruken av `Kurve`-kommandoen, i tillegg til å presentere en metode som vil sikre oss eksaktverdier.

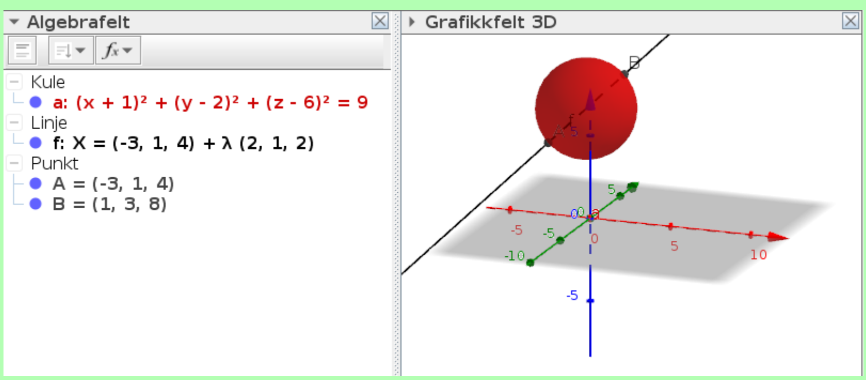
Løsningsmetode 1

a)



Vi starter med å tegne kula. I inntastingsfeltet skriver vi `Kule[(-1, 2, 6), 3]` og får kula a i algebrafelt og grafikkfelt 3D. For å tegne linja skriver vi `(-3, 1, 4)+t*(2,1,2)` i inntastingsfeltet, resultatet er kurven f.

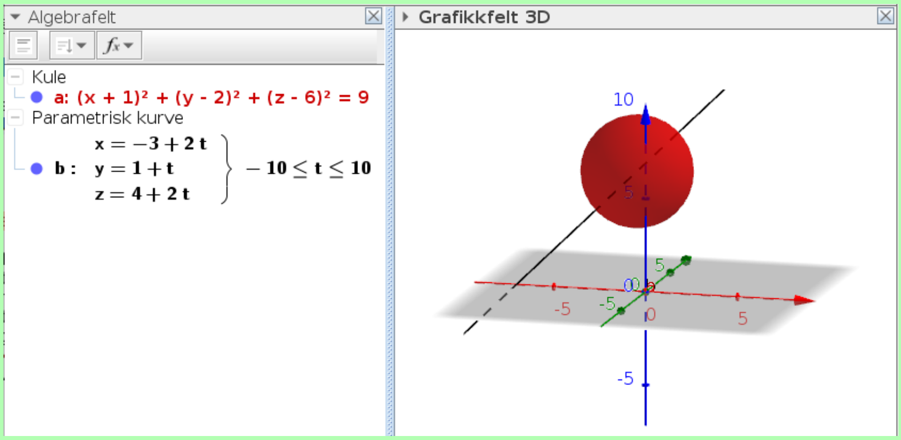
b)



I inntastingsfeltet skriver vi `Skjæring[a, f]` og får de to punktene A og B. (Merk: Hadde vi tegnet linja ved hjelp av `Kurve`-kommandoen, ville ikke dette funket. `Skjæring` er ikke kompatibel med `Kurve`, og i dette tilfellet heller ikke med CAS)

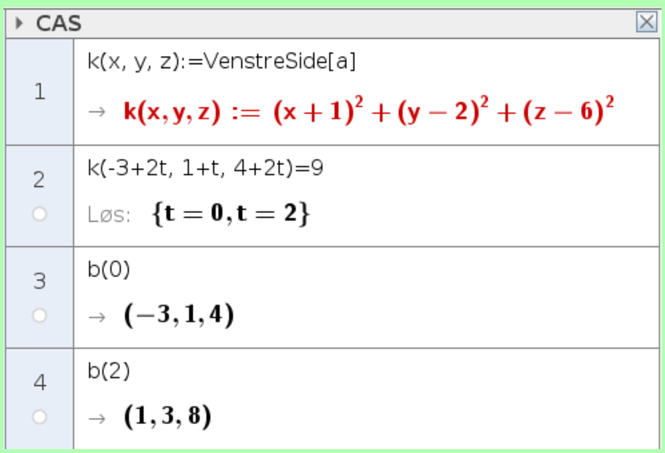
Løsningsmetode 2

a)



For å tegne linja skriver vi her `Kurve[-3 + 2t, 1 + t, 4 + 2t, t, -10, 10]` i inntastingsfeltet. At $t \in [-10, 10]$ velger vi ut ifra inspeksjon i grafikkfelt 3D, det gjelder å velge et intervall som viser begge skjæringspunktene mellom kula og linja. Resultatet er kurven b.

b)



I CAS-celle 1 lager vi oss en ny funksjon $k(x, y, z)$ med et uttrykk tilsvarende venstresiden til kuleligningen. For at linja skal skjære kula, må parameteriseringen til linja oppfylle kuleligningen. I CAS-celle 2 setter vi derfor uttrykkene for x, y og z fra parameteriseringen inn i k, og krever at dette uttrykket skal bli lik 3^2. Vi trykker så på `Løs`-knappen og får to svar for t. I CAS-celle 3 og 4 finner vi punktene for dissse valgene av t.

Plan[<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>]

Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.

0.6 Integral

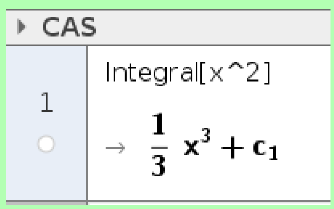
Deriverte[<Funksjon>]

Gir den deriverte av en funksjon. (Merk: For en definert funksjon $f(x)$, kan man like gjerne skrive f'(x))

Integral[<Funksjon>]

Gir uttrykket til det ubestemte integralet av en funksjon. (Merk: Hvis kommandoen skrives i inntastingsfeltet, blir konstantleddet utelatt).

Eksempel

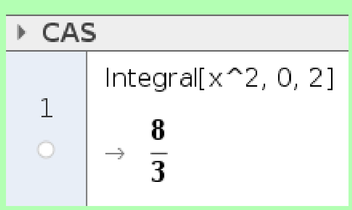


c_1 er en vilkårlig konstant.

Integral[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Gir det bestemte integralet av en funksjon på et intervall.

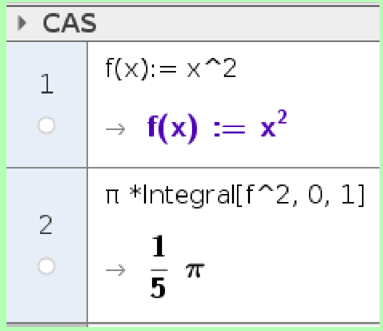
Eksempel 1



Eksempel 2

Finn volumet av omdreiningslegemet til $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$.

Svar:



I CAS-celle 1 definerer vi $f(x)$ (huske å skrive `:=`). Volumet er gitt som $\pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$, som vi finner i celle 2.

0.7 Differensialligninger

`LøsODE[<Likning>]` (CAS)

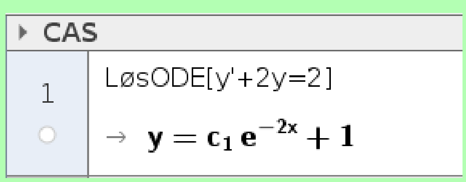
Finner generell løsning av en gitt differensialligning av første eller andre orden.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$y' + 2y = 2$$

Svar:



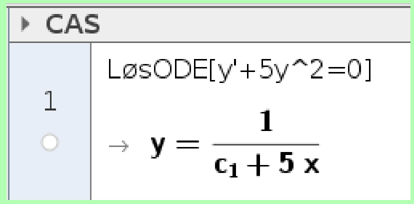
c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$y' + 5y^2 = 0$$

Svar:



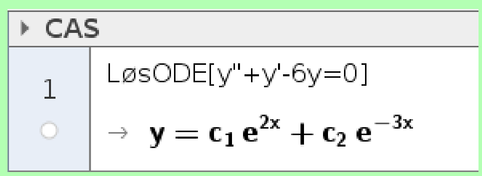
c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 3

Løs ligningen:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Svar:



c_1 og c_2 er en vilkårlige konstanter.

LøsODE[<Likning>, $(\mathtt{x}_0, \mathtt{y}(\mathtt{x}_0))$, $(\mathtt{x}_1, \mathtt{y}'(\mathtt{x}_1))$] (CAS)

Finner løsningen av en gitt differensialligning av første eller andre orden, for randverdier gitt som punkter.

Eksempel 1

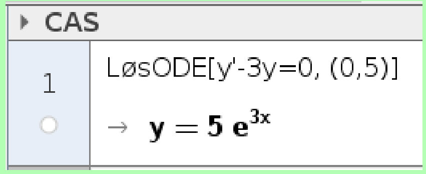
Finn løsningnen av ligningen

$$y' - 3y = 0$$

med randbetingelsen $y(0) = 5$.

Svar:

Randbetingelsen gir oss punktet $(x_0, y(x_0)) = (0, 5)$:



Eksempel 2

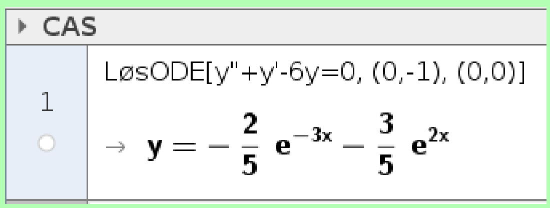
Finn løsningnen av ligningen

$$y'' + y - 6 = 0$$

med randbetingelsene $y(0) = -1$ og $y'(0) = 0$

Svar:

Randbetingelsen gir oss punktene $(x_0, y(x_0)) = (0, -1)$ og $(x_1, y'(x_1)) = (0, 0)$:



`Retningsdiagram[f(x,y)]` (Inntastingsfelt)

Lager et retningsdiagram for en differensialligning hvor $f(x,y) = y'$.

Eksempel

Gitt differensialligningen

$$y' + xy = x$$

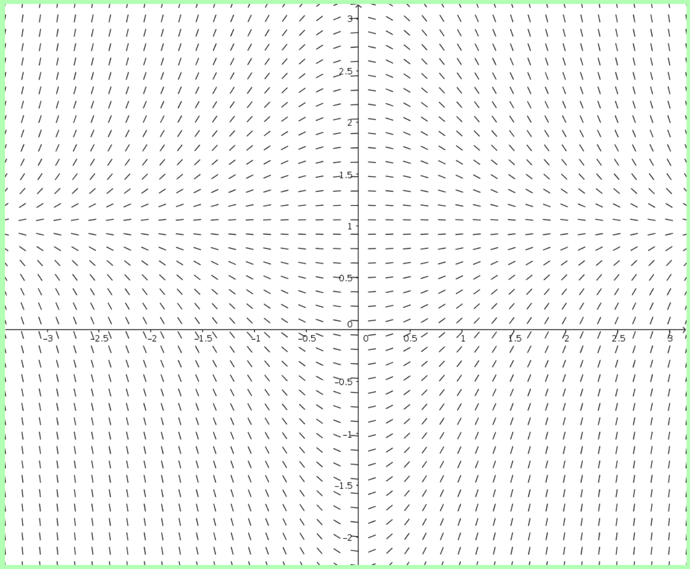
a) Tegn et retningsdiagram for løsningene av ligningen.
b) Tegn integralkurven for løsningen som krysser vertikalaksen når $y = 2$.

Svar:

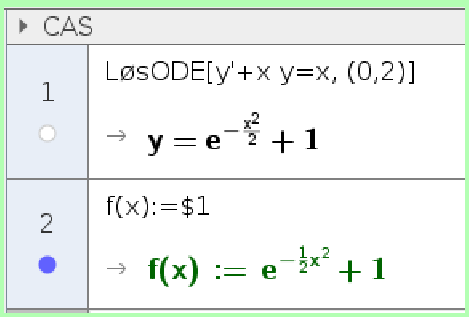
a) Vi starter med å finne y':

$$y' = x - xy$$

I inntastingsfeltet skvriver vi så `Retnigsdiagram[x-x y]` og får dette bildet i grafikkfeltet:



b) Vi starter med å løse ligningen for punktet $(0, 2)$, og gir deretter løsningen navnet $f(x)$:



Vi får da grafen: