Mål for opplæringen:

- finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene
- gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis
- summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer
- regne med uendelige geometriske rekker med konstante og variable kvotienter, bestemme konvergensområdet for disse rekkene og presentere resultatene

0.1 Følger

Følger er en oppramsing av tall, gjerne skilt med komma. I følgen

$$2, 4, 8, 16 \tag{0.1}$$

sier vi at vi har fire *ledd*. Ledd nr. 1 har verdien 2, ledd nr. 2 har verdien 4 osv. Hvert ledd i en rekke beskrives ofte ved hjelp av en indeksert bokstav. Velger vi oss bokstaven a for følgen over, kan vi skrive $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ osv.

Når vi lar a_i betegne leddene i en følge, bruker vi $i \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ er symbolet for tallene i følgen $1, 2, 3, 4$ osv, disse kaller vi gjerne *de naturlige tallene*. Ønsker vi å fortelle at et tall er i en følge vi ikke har noe symbol for, bruker vi klammeparanteser '$\{\}$'. For eksempel er $8 \in \{2, 4, 8, 16\}$.

Ofte vil vi oppdage at tallene i en følge kan settes i sammenheng med hverandre. Vi kan for eksempel merke oss fra (0.1) at hvis vi ganger et ledd i følgen med 2, så har vi funnet det neste leddet. Den *rekursive* formelen er da:

$$a_i = 2 \cdot a_{i-1}$$

I den rekursive formelen bruker vi altså den forrige verdien for å finne den neste.

Den nevnte følgen er en *endelig* følge fordi den har et konkret antall ledd. Hadde vi brukt den rekursive formelen kunne vi lagt på flere ledd og fått følgen:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, ... \tag{0.2}$$

'...' betyr at vi fortsetter i det uendelige med å legge til nye ledd, følgen kalles da en *uendelig* følge.

Hva om vi for denne følgen ønsker å finne ledd nr. 20, altså a_{20}? Det vil da lønne seg å finne en *eksplisitt* formel. For å gjøre dette skriver vi opp noen ledd og ser om vi finner et mønster:

$$a_1 = 2 = 2^1$$
$$a_2 = 4 = 2^2$$
$$a_3 = 8 = 2^3$$

Av ligningene over innser vi at vi for ledd nr. i kan skrive:

$$a_i = 2^i$$

Og slik kan vi fort finne ledd nr. 20:

$$\begin{aligned} a_{20} &= 2^{20} \\ &= 1048576 \end{aligned}$$

Fra den eksplisitte formelen kan vi altså finne verdien til et ledd, uansett hvilket nummer det har i følgen.

0.1.1 Aritmetiske følger

Følgen

$$2, 5, 8, 11, 14, 17$$

kalles en aritmetisk følge. Dette fordi to naboledd har en konstand differanse $d = 3$. Skriver vi opp de tre første leddene kan vi finne mønsteret til en eksplisitt formel:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2 + 3 \cdot 0 \\ a_2 &= 5 = 2 + 3 \cdot 1 \\ a_3 &= 8 = 2 + 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Av ligningene over observerer vi at:

$$a_i = 2 + 3 \cdot (i - 1)$$

Aritmetisk følge

Et ledd a_i i en aritmetisk følge er gitt ved den rekursive formelen

$$a_i = a_{i-1} + d \tag{0.3}$$

og den eksplisitte formelen

$$a_i = a_1 + d(i - 1) \tag{0.4}$$

hvor d er den konstante differansen $a_n - a_{i-1}$.

Eksempel

Finn den rekursive og den eksplisitte formelen til følgen

$$7, 13, 19, 25, ...$$

Svar:

Vi observerer at følgen har den konstante differansen $d = 6$ og første ledd $a_1 = 7$. Den rekursive formelen blir da:

$$a_i = a_{i-1} + 6$$

Mens den eksplisitte formelen blir:

$$a_i = 7 + 6(i - 1)$$

0.1.2 Geometriske følger

Følgen

$$2, 6, 18, 54, 162$$

kalles en geometrisk følge. Dette fordi forholdet mellom to naboledd er den samme *kvotienten* $k = 3$. Også her kan vi gjenkjenne et fast mønster:

$$a_1 = 2 = 2 \cdot 3^0$$
$$a_2 = 6 = 2 \cdot 3^1$$
$$a_3 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

Den eksplisitte formelen blir derfor:

$$a_n = 2 \cdot 3^{i-1}$$

Geometrisk følge

Et ledd a_i i en geometrisk følge med kvotient k er gitt ved den rekursive formelen

$$a_i = a_{i-1} \cdot k \tag{0.5}$$

og den eksplisitte formelen

$$a_i = a_1 \cdot k^{i-1} \tag{0.6}$$

Eksempel

En geometrisk følge har $a_1 = 2$ og $k = 4$. For hvilken i er $a_i = 128$?

Svar:

Vi får ligningen:

$$2 \cdot 4^{i-1} = 128$$

$$\begin{aligned}
4^{i-1} &= 64 \\
\ln 4^{i-1} &= \ln 64 \\
(i-1)\ln 4 &= \ln 64 \\
(i-1)\ln 4 &= \ln 4^3 \\
(i-1)\ln 4 &= 3\ln 4 \\
i-1 &= 3 \\
i &= 4
\end{aligned}$$

Altså er $a_4 = 128$.

0.2 Rekker

Den store forskjellen på en rekke og en følge, er at i en rekke er leddene skilt med plusstegn[1]. For eksempel er

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

en rekke. Vi bruker begrepet ledd på samme måte som for en følge: I rekken over har ledd nr. 3 verdien 18, og i alt er det fem ledd. For en rekke er det naturlig at vi ikke bare ønsker å vite verdien til hvert enkelt ledd, men også hva summen av alle leddene blir. Så lenge en rekke ikke er uendelig, kan man alltids regne ut summen ved å legge sammen ledd for ledd, men det vi søker er uttrykk som gir oss summen etter mye mindre arbeid (og til og med for tilfeller av uendelige rekker).

0.2.1 Aritmetiske rekker

Hvis leddene i en rekke kan beskrives som en aritmetisk følge, kalles rekken ei *aritmetisk rekke*. Summen av denne er gitt ved følgende formel:

Summen av en aritmetisk rekke

Summen S_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt som:

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \tag{0.7}$$

[1] Rekka $-1-2-3$ ser ut til å være skilt med minustegn, men er egentlig bare en forkorting av $(-1)+(-2)+(-3)$

Eksempel

Gitt den uendelige rekken

$$3 + 7 + 11 + \ldots$$

a) Finn summen av de ti første leddene.
b) For hvilken n er summen av rekken lik 903?

Svar:

a) Det i-te leddet a_i i rekken er gitt ved formelen

$$a_i = 3 + 4(i - 1)$$

Dette er derfor en aritmetisk rekke, og summen av de n første leddene er da gitt av ligning (0.7). Ledd nr. 10 blir (når en side av ligningen er blank betyr dette at uttrykket på siden er uforandret):

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + 4(10 - 1) \\ &= 39 \end{aligned}$$

De ti første leddene er dermed gitt som:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{3 + 39}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

b) I formelen for S_n setter vi inn det eksplisitte uttrykket for a_n og får:

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n-1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903 \end{aligned}$$

Denne lignigen har løsningene $n \in \{21, -\frac{43}{2}\}$. Vi søker et positivt heltall, derfor er $n = 21$ eneste mulige løsning.

0.2.2 Geometriske rekker

Hvis leddene i en rekke kan beskrives som en geometrisk følge, kalles rekken ei *geometrisk rekke*. Også da har vi en formel for summen av rekken:

Summen av en geometrisk rekke

Summen S_n av de n første leddene i en geometrisk rekke med kvotient k er gitt som:

$$S_n = a_1 \frac{1-k^n}{1-k} \quad , \quad k \neq 1 \tag{0.8}$$

Spesialtilfellet $k = 1$

Hvis $k = 1$, har vi at:

$$S_n = na_1 \tag{0.9}$$

Eksempel

Gitt den uendelige rekken

$$3 + 6 + 12 + 24 + ...$$

a) Finn summen av de 15 første leddene.
b) For hvor mange ledd er summen av rekken lik 93?

Svar:

a) Vi observerer at dette er en geometrisk rekke med $a_1 = 3$ og $k = 2$. Summen av de 15 første leddene blir da:

$$\begin{aligned} S_{15} &= 3 \cdot \frac{2^{15}-1}{1-2} \\ &= 3 \cdot \frac{1-32768}{-1} \\ &= 98301 \end{aligned}$$

b) Vi lar n være antall ledd og får:

$$\begin{aligned} 93 &= 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \\ \frac{93}{3} &= 2^n - 1 \\ 31 + 1 &= 2^n \end{aligned}$$

$$\frac{\ln 32}{\ln 2} =$$
$$\frac{\ln 2^5}{\ln 2} =$$
$$\frac{5\ln 2}{\ln 2} = n$$
$$5 = n$$

0.2.3 Summen av uendelige geometrisk rekker

Når en geometrisk rekke har uendelig mange ledd merker vi oss dette:

Hvis $|k| < 1$, kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-k^n}{1-k} \\ &= a_1 \frac{1}{1-k}\end{aligned}$$

Summen av uendelig mange ledd går altså mot en endelig (konkret) verdi! Når dette er et faktum sier vi at rekken *konvergerer* og at rekken er konvergent. Hvis vi derimot har at $|k| \geq 1$, går summen mot $\pm\infty$. Vi sier da at rekken *divergerer* og at rekken er divergent.

Summen av en uendelig gemoetrisk rekke

For en uendelig geometrisk rekke med kvotient $k < |1|$ er summen S_∞ av rekken gitt som:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} \tag{0.10}$$

Hvis $|k| \geq 1$, vil summen gå mot $\pm\infty$.

Eksempel

Gitt den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ...$$

a) For hvilke x er rekken konvergent? Vis at summen S_n til rekken i dette tilfellet blir

$$S_n = \frac{x}{x-1}$$

b) For hvilken x er summen av rekken lik $\frac{3}{2}$?
c) For hvilken x er summen av rekken lik -1?

Svar:

a) Vi observerer at rekken er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{x}$ og $a_1 = 1$. Rekken er konvergent når $|k| < 1$, vi krever derfor at:

$$|x| > 1$$

Summen S_∞ er da gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.

b) Hvis rekken har en endelig sum $S_n = \frac{3}{2}$, er den gitt ved:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= \frac{3}{2} \\ 2x &= 3(x-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Summen av rekken er altså $\frac{3}{2}$ når $x = 3$.

c) Skal summen bli -1, må x oppfylle følgende ligning:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= -1 \\ x &= -(x-1) \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Men $x = \frac{1}{2}$ oppfyller ikke kravet fra oppgave a). Rekka er derfor ikke konvergent (den er divergent) for dette valget av x, altså er det ingen verdier for x som oppfyller ligningen.

0.2.4 Summetegnet

Vi skal nå se på et symbol som forenkler skrivemåten av rekker betraktelig. Symbolet blir spesielt viktig i *kapittel* **??**, hvor vi skal studere *integrasjon*.

Tidligere har vi skrevet rekkene mer eller mindre beint fram. For eksempel har vi sett på rekken

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

med den eksplisitte formelen

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Ved hjelp av summetegnet $\sum$ kan rekken vår komprimeres betratelig. Ved å skrive $\sum\limits_{i=1}^{5}$ indikerer vi at i er en løpende variabel som starter på 1 og deretter øker med 1 opp til 5. Hvis vi lar den eksplisitte formelen til rekken være uttrykt ved i, kan vi skrive rekken som $\sum\limits_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$, underforstått at vi skal sette et plusstegn hver gang i øker med 1:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot 3^{i-1}$$

Den uendelig rekken 2+6+18+ ... kan vi derimot skrive som:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{i-1}$$

For summetegnet har vi også noen regneregler[1] som vi for ordens skyld skal ta med oss:

Regneregler for summetegnet

For to følger $\{a_i\}$ og $\{b_i\}$ og en konstant c har vi at:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{0.11}$$

[1] Summen trenger selvsagt ikke å begynne på indeks 1, man kan derfor erstatte $i = 1$ med $i = j$ for alle heltall j.

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{0.12}$$

0.3 Induksjon

I teoretisk matematikk stilles det strenge krav til bevis av formler, en metode som brukes spesielt for formler med heltall er *induksjon*. Prinsippet er dette[1]:

Si vi har en ligning som er sann for et heltall n. Hvis vi kan vise at ligningen også gjelder om vi adderer heltallet med 1, har vi vist at ligningen gjelder for alle heltall større eller lik n.

Det kan være litt vanskelig i starten å få helt grep på induksjonsprinsippet, så la oss gå rett til et eksempel:

Vi ønsker å vise at summen av de n første partallene er lik $n(n+1)$:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) \tag{0.13}$$

Vi starter med å vise dette stemmer for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot (1+1) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Så nå vet vi altså om et heltall, nemlig $n = 1$, som formelen stemmer for. Videre antar vi at ligningen er gyldig helt opp til ledd nr. k. Vi ønsker så å sjekke at den gjelder også for neste ledd, altså når $n = k + 1$. Summen blir da:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$$

Men fram til ledd nr. k er det tatt for gitt at (0.13) gjelder, derfor kan vi skrive[2]:

[1] Ordene formel og ligning vil bli brukt litt om hverandre. En formel er strengt tatt bare en ligning hvor vi kan finne den ukjente størrelsen direkte ved å sette inn kjente størresler.

[2] Det kan se litt merkelig ut å skrive $2 + 4 + 6 + ... + 2k$ og anta at formelen vår gjelder for denne summen, det virker jo da som at vi antar at den gjelder for $n = 1$, $n = 2$ osv. Men dette er bare en litt kunstig skrivemåte som blir brukt for summen fram til ledd nr. k. For etterpå sier vi at vi vet om et tall k som denne antakelsen er riktig for, nemlig $k = 1$, og da har vi jo bare ett ledd før ledd nr.

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + ... + 2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$$
$$k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$
$$(k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)$$

Og nå kommer den briljante konklusjonen: Vi har vist at (0.13) er sann for $n = 1$. I tillegg har vi vist at hvis ligningen gjelder for et heltall $n = k$, gjelder den også for $n = k + 1$. På grunn av dette vet vi at (0.13) gjelder for $1 + 1 = 2$. Men når vi vet at den gjelder for 2, gelder den også for $2 + 1 = 3$ og så videre, altså for alle heltall!

Induksjon

Når vi ved induksjon ønsker å vise at ligningen

$$A(n) = B(n) \tag{0.14}$$

er sann for alle $n \in \mathbb{N}$, gjør vi følgende:

1. Sjekker at (0.14) er sann for $n = 1$.
2. Sjekker at (0.14) er sann for $n = k + 1$, antatt at den er sann for $n = k$.

Eksempel 1

Vis ved induksjon at summen av de n første oddetallene er gitt ved ligningen

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar:

Vi sjekker at påstanden stemmer for $n = 1$:

$$1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

Vi tar det for gitt at påstanden gjelder for $n = k$ og må videre

$k + 1$.

I påfølgende eksempler skal vi for enkelthets skyld la ledd nr. k være innbakt i symbolet "...".

sjekke at den stemmer også for $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + ...}_{k^2} + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

$$(k+1)^2 = (k+1)^2$$

Og dermed er påstanden vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Merk: Hvis du har problemer med å faktorisere venstresiden når du utfører induksjon, kan du som reserveløsning skrive ut høyresiden istedenfor, men helst bør du la være. Dett er er litt for elegansens skyld (selv ikke matematikk kan fraskrive seg en porsjon forfengelighet), men også fordi sjansen for regnefeil blir mindre.

Eksempel 2

Vis ved induksjon at:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Svar:

Vi starter med å sjekke for $n = 1$:

$$1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$$

$$1^3 = \frac{2^2}{4}$$

$$1 = 1$$

Ligningen er altså sann for $n = 1$. Vi antar videre at den også stemmer for $n = k$ og sjekker for $k + 1$:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + ...}_{\frac{k^2(k+1)^2}{4}} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} =$$
$$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4))}{4} =$$
$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Påstanden er dermed vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel 3

Vis ved induksjon at:

$$3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

Svar:

Vi sjekker at påstanden er sann for $n = 1$:

$$3 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)}$$
$$3 = 3^1$$

Videre antar vi at påsanden stemmer også for $n = k$, og sjekker for $n = k+1$:

$$\underbrace{3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots}_{3^{\frac{1}{2}k(k+1)}} \cdot 3^{k+1} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)}$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)} \cdot 3^{k+1} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)+k+1} =$$
$$3^{\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{2}{2}(k+1)} =$$
$$3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)} = 3^{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$$

Påstanden er dermed vist for alle $n \in \mathbb{N}$.

Forklaringer

Summen av en aritmetisk rekke

Ved å bruke den eksplisitte formelen fra (0.4), kan vi skrive summen av en aritmetisk rekke med n ledd som:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + d(n-1)) \tag{0.15}$$

Men leddene i rekken kan også uttrykkes slik:

$$a_i = a_n - (n-i)d$$

for $1 \leq i \leq n$. Og da kan vi skrive summen som (her står siste ledd først, deretter nest siste osv.):

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - d(n-1)) \tag{0.16}$$

Legger vi nå sammen (0.15) og (0.16), får vi $2S_n$ på venstre side. På høyre side blir alle d-er kansellert og vi ender opp med at:

$$2S_n = na_1 + na_n$$

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

Summen av en geometrisk rekke

Summen S_n av en geometrisk rekke med n ledd er:

$$S_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + ... + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1} \tag{0.17}$$

Ganger vi denne summen med k, får vi:

$$kS_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + ... + a_1k^{n-1} + a_1k^n \tag{0.18}$$

Uttrykket vi søker framkommer når vi trekker (0.18) ifra (0.17):

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a_1 - a_1k^n \\ S_n(1-k) &= a_1(1-k^n) \\ S_n &= a_1\frac{(1-k^n)}{1-k} \end{aligned}$$

Regneregler for summetegnet

Ved å skrive ut summen og omrokkere på rekkefølgen av addisjonene, innser vi at:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_n+b_n \\ &= a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

Ved å skrive ut summen og faktorisere ut c, innser vi også at:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}ca_i &= ca_1+ca_2+...ca_n \\ &= c(a_1+a_2+...+a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n}a_i\end{aligned}$$