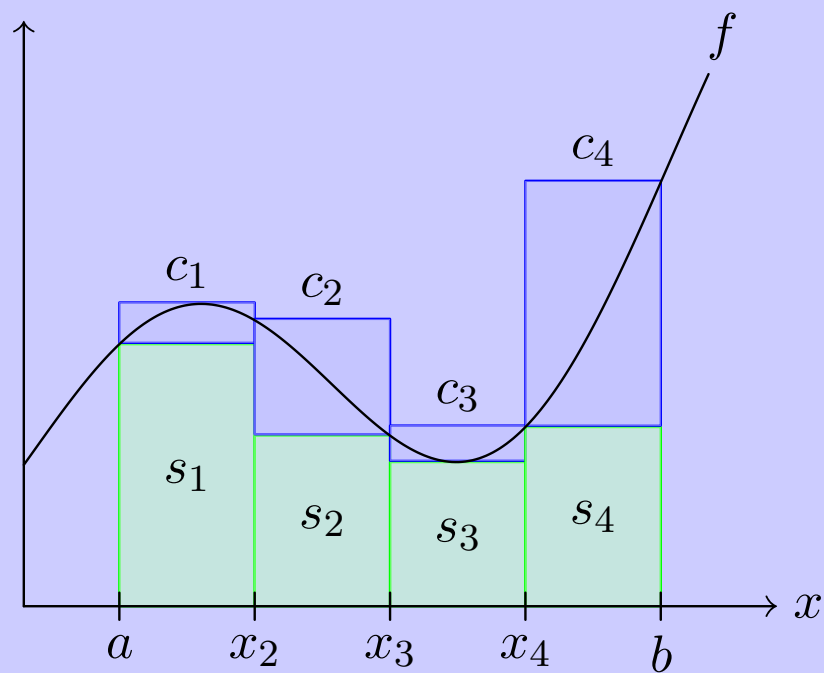


Før kalkulus

Teoridel

Matematikk R2



Sindre Sogge Heggen

*”Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das
Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten
Genuss gewährt”*

*”Det er ikke kunnskapen, men læringen, ikke besit-
telsen, men ervervelsen, ikke oppholdet, men ankomsten,
som gir den største gleden.”*

— Carl Friedrich Gauss

Alt innhold er laget av Sindre Sogge Heggen. Teksten er skrevet i L^AT_EX og figurene er lagd vha. L^AT_EX, GeoGebra og Asymptote.

Dokumentet er beskyttet av åndsverkloven, videreformidling må godkjennes av forfatter.

06.08.2017

Om boka

Denne bokas hovedmål er å virke som lærebok i faget *Matematikk R2*. Temaene i boka dekker derfor kompetansemålene til faget per 2017, bestemt av *Utdanningsdirektoratet* (www.udir.no/k106/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r2).

Boken er delt inn i to deler, én teoridel og én GeoGebra-del. GeoGebra-delen kan lastes ned gratis fra nettsiden forkalkulus.netlify.com, som også er hjemmeside for denne boka. Hovedårsaken til en slik inndeling er at GeoGebra hyppig oppdateres. Ved å la læreteksten for GeoGebra være nettbasert, kan det sørges for at informasjonen som blir gitt alltid er tilpasset den nyeste versjonen av programvaren.

Teoridelen

En sentral del i skolematematikken er å ha en brei oversikt over ligninger som kan anvendes under visse vilkår, disse ligningene kaller vi gjerne regneregler. I de fleste lærebøker på markedet vil man erfare at noen forklaringer for regneregler er tatt med, mens andre er fullstendig utelatt. Etter forfatterens mening er dette med på å holde i live den uheldige myten om at ”matematikk er et sett med regler som må læres” og at man ofte ”må akseptere at sånn er det bare”. Med denne holdningen undertrykker man kanskje det vakreste av alt med matematikk, nemlig at (nesten) enhver sannhet bygger på en annen – alt som *kan* forklares *bør* derfor forklares.

Samtidig er læreplanen for R2 såpass omfattende at skolenes tilmålte tid til faget gjør det vanskelig å gå i dybden av hvert eneste tema. Som et kompromiss mellom grundighet og tidspress er derfor teoridelen strukturert på følgende måte: Der hvor forfatteren mener at begrunnelesen for en regneregler er nødvendig for høy måloppnåelse i faget, er en forklaring¹ tatt med i forkant. Hvis en regneregler derimot presenteres direkte, vil man finne en forklaring for denne i seksjonen *Forklaringer* i samme kapittel, underforstått at dette er for den spesielt interesserte.

Teksten består av sju kapitler som er delt inn i seksjoner og delseksjoner. Alle oppgaver tilhørende hvert kapittel er satt av til siste seksjon, fasit finner du bakerst i boka (løsningsforslag ligger gratis tilgjen-

¹ Å *forklare* reglene istedenfor å *bevise* dem er et bevisst valg. Et bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må stilles på forhånd og underveis i en utledning av en ligning, noe som kan føre til at forståelsen av hovedpoenget drukner i smådetaljer. Noen av forklaringene vil likevel være gyldige som bevis.

gelig på hjemmesiden). Hver såkalt regneregel dukker opp i en blå tekstboks, som oftest etterfulgt av ett eller flere eksempler.

Rimelig unikt for denne boka, i skolesammenheng, er bruken av nummererte ligninger. Alle ligninger som blir brukt ved senere anledninger blir referert til ved et unikt nummer. Dette gjør at omskrivninger og resultater ikke kommer ”ut av det blå”, og at leseren enkelt kan finne tilbake til aktuelle ligninger. Ved digital lesning er også hyperreferanser aktivert. Dette betyr at du kan nå refererte ligninger, figurer, lenker, kapitler, seksjoner og delseksjoner ved et enkelt pekertrykk.

GeoGebra-delen

Fra og med våren 2015 har det vært spesifikke krav på eksamen i R2 om bruk av digital graftegner og CAS (Computer Algebra System). Eksamenskandidaten står fritt til å velge selv hvilket digitalt hjelpemiddel han/hun vil bruke, men på de fleste norske skoler er det GeoGebra som blir undervist.

Før kalkulus; GeoGebra i R2 tilbyr en omfattende oversikt over de mest sentrale funksjonalitetene i GeoGebra, sett fra et R2 perspektiv. Teksten følger de samme kapitlene som teoridelen og inneholder eksempler og øvingsoppgaver med løsningsforslag.

Symboler

D_f	–	definisjonsmengden til f
\in	–	”inneholdt i”
\vee	–	”eller”
\mathbb{R}	–	de reelle tallene
\mathbb{N}	–	de naturlige tallene $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	–	heltallene $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$[a, b]$	–	lukket intervall fra og med a til og med b
$[a, b)$	–	halvåpent intervall fra og med a til b
(a, b)	–	åpent intervall fra a til b
$ a $	–	absoluttverdien/tallverdien til a
\perp	–	”vinkelrett på”
\parallel	–	”parallel med”
\Longleftrightarrow	–	”hvis og bare hvis” (om det éne er sant, er også det andre sant.)

Obs! Den engelske standarden med $'.'$ som desimaltegn istedenfor $'$, $'$ brukes.

Innhold

1	Følger og rekker	9
1.1	Følger	10
1.2	Rekker	13
1.3	Induksjon	19
	Forklaringer	23
	Oppgaver	25
2	Trigonometri	29
2.1	Vinkler og enhetssirkelen	30
2.2	Trigonometriske uttrykk	34
2.3	Lineære ligninger	41
2.4	Kvadratiske ligninger	49
2.5	Trigonometriske funksjoner	53
	Forklaringer	60
	Oppgaver	65
3	Vektorer i rommet	73
3.1	Vektorbegrepet	74
3.2	Skalarproduktet	79
3.3	Vinkelrette og parallelle vektorer	83
3.4	Determinanter	86
3.5	Vektorproduktet	88
	Forklaringer	92
	Oppgaver	97
4	Romgeometrier	101
4.1	Parameteriseringer	102
4.2	Ligninger til geometrier	107
4.3	Avstander mellom geometrier	115
4.4	Vinkler mellom geometrier	118
	Forklaringer	122
	Oppgaver	124
5	Derivasjon	129
5.1	Derivasjonsregler	130
5.2	Andrederiverttesten	132
5.3	Den antideriverte	134
	Forklaringer	135
	Oppgaver	137

6	Integrasjon	139
6.1	Bestemt og ubestemt integral	140
6.2	Integralregning	147
6.3	Areal og volum	159
	Forklaringer	166
	Oppgaver	172
7	Differensialligninger	177
7.1	Introduksjon til differensialligninger	178
7.2	Første ordens lineære differensialligninger	179
7.3	Separable differensialligninger	182
7.4	Retningsdiagram	184
7.5	Andre ordens lineære differensialligninger	186
7.6	Anvendelser	190
	Forklaringer	198
	Oppgaver	201
	Vedlegg A-E	205
	Indeks	217
	Fasit	219

Om boka

Før Kalkulus; Teoridel introduserer matematikkteorien som inngår i faget R2. Teorien er delt inn i syv kapitler som er rike på regneeksempler og oppgaver av variert vanskegrad. Sammen med boka *Før Kalkulus; GeoGebra i R2*, er dette et komplett læreverk som dekker alle kompetansemål bestemt av Utdanningsdirektoratet per 2017.

Før Kalkulus; GeoGebra i R2 kan lastes ned gratis på nettsiden forkalkulus.netlify.com.

Om forfatteren

Sindre Sogge Heggen har en mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo. Han har flere års erfaring med undervisning i ungdomsskoler og videregående skoler.