Eksamen Matematikk R1 våren 2025

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

$$f'(x) = x^4 - 2e^{-2x}$$

Oppgave 2

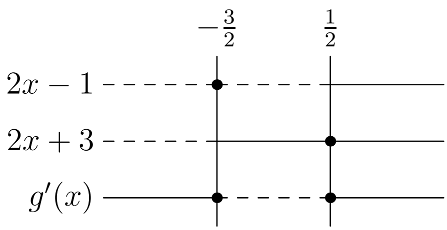
a) Da $e^x \neq 0$ for alle x, er $g(x) = 0$ når $2x - 1 = 0$, altså når $x = \frac{1}{2}$.

b) Vi setter $u = e^x$ og $v = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$. Da er $u' = e^x$ og $v' = 8x - 4 = 4(2x-1)$. Av produktregelen ved derivasjon har vi at

$$\begin{aligned}
g'(x) = \left(\frac{1}{2}uv\right)' &= \frac{1}{2}\left(u'v + uv'\right) && (1)\\
&= \frac{1}{2}e^x(v + v') && (2)\\
&= \frac{1}{2}e^x\left(4x^2 - 4x + 1 + 4(2x-1)\right) && (3)\\
&= \frac{1}{2}e^x\left(4x^2 - 4x - 3\right) && (4)
\end{aligned}$$

Ved å gange ut parantesene kan vi bekrefte at $(2x+1)(2x-3) = 4x^2 - 4x - 3$, og dermed har vi vist det vi skulle.

c) Vi lager et fortegnsskjema for $g'(x)$. Da $\frac{1}{2}e^x > 0$, er det bare de to andre faktorene som bidrar til at fortegnet forandrer seg.



At $g'(x)$ skifter fra positivt til negativt fortegn i $x = -\frac{3}{2}$, betyr at dette er et maksimalpunkt for g. Tilsvarende er $x = \frac{1}{2}$ et minimumspunkt for

g. Videre er

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}\left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1\right)^2 = 2e^{-\frac{3}{2}}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)^2 = 0$$

g har altså toppunkt $\left(-\frac{3}{2}, 2e^{-\frac{3}{2}}\right)$ og bunnpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Oppgave 3

a)

$$3^{3x+2} - 5 = 76 \tag{5}$$
$$3^{3x}\cdot 3^2 = 81 \tag{6}$$
$$3^{3x} = \frac{3^4}{3^2} \tag{7}$$
$$3^{3x} = 3^2 \tag{8}$$

Altså er $3x = 2$, og da er $x = \frac{2}{3}$.

b)

$$3\lg x + 2\lg x^2 + \lg\frac{1}{x^9} = 2 \tag{9}$$
$$3\lg x + 2\cdot 2\lg x - 9\lg x = 2 \tag{10}$$
$$-2\lg x = 2 \tag{11}$$
$$\lg x = -1 \tag{12}$$

Antatt at lg har 10 som base, får vi at $x = \frac{1}{10}$.